

О. Г. Рудик

к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І.І. Мечникова

Г. О. Єфимова

к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова

ДВОКРИТЕРІАЛЬНА ЗАДАЧА ВИРОБНИЧОГО ПЛАНУВАННЯ

Діяльність будь якого підприємства характеризується не тільки прибутком, отриманим від реалізації продукції, що випускається, а також матеріальними витратами, затратами часу на виконання робіт та іншими факторами. Ці фактори формують векторний критерій якості. Тому розробка принципів, які дозволяють вибрати найкращий із допустимих варіантів планування виробництвом, є актуальним.

Розглянемо дискретну задачу керування виробництвом на скінченному горизонті планування з кроком дискретизації $\Delta t = 1$ (один місяць, один квартал, один рік і т.д.).

Припустимо, що підприємство чи фірма діють на проміжку часу

$$T = \{0, 1, \dots, t_k - 1\},$$

де t_k – горизонт планування. Підприємство виробляє n видів продукції за допомогою r технологічних способів, причому частину кожного виду продукції що випускається, можна застосовувати для виробництва інших видів продукції.

Хай матриця $A(t)$ – технологічна матриця витрат розмірністю $n \times n$, $t \in T$, елементами матриці $B(t) = (b_{js}(t), j = \overline{1, n}, s = \overline{1, r}, t \in T)$ є кількість продукції j -го виду, що виробляється S -тим технологічним способом при його одиничній інтенсивності.

Позначимо через $u_s(t)$ величину інтенсивності S -го технологічного способу в період $[t, t+1)$, а через $\underline{u}_s(t)$, $\overline{u}_s(t)$ – нижню та верхню

не обмеження інтенсивності S -го технологічного способу. Очевидно, що, $\underline{u}_s(t) \leq u(t) \leq \overline{u}_s(t)$, $s = \overline{1, r}$, $t \in T$.

Початковий стан системи $x_j(0)$ вважаємо відомим $x_j(0) = x_{j0}$, $j = \overline{1, n}$. Динаміка змінювання параметрів задачі тоді буде описуватись системою n кінцево-різницевих рівнянь

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

$$x(0) = x_0.$$

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t) \quad t \in T.$$

де вектор $x^T(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ – об'єм випуску всіх видів продукції,

$u^r(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ – вектор керуючих дій,

$A(t), B(t), t \in T - n \times n$ та $n \times r$ матричні функції, що характеризують властивості системи в період $[t, t+1)$.

Хай також відома $c_j(t)$ ціна продукції j -го виду в період $[t, t+1)$ $j = \overline{1, n}$. Тоді прибуток за весь час дослідження $P(u)$ може бути виражений через обсяг випущеної продукції наступним чином:

$$P(u) = \sum_{t \in T} \sum_{j=1}^n c_j(t) x_j(t) = \sum_{t \in T} c^T(t) x(t)$$

тут $c^T(t)$ – означає транспонування вектора цін. Крім того, припустимо, що підприємство використовує m типів зовнішніх ресурсів і відома $g_{is}(t)$ – кількість ресурсу i -го типу, що потрібно на виробництво продукції S -тим технологічним способом при його одиничній інтенсивності в період $[t, t+1)$, b_i - запас ресурсу i -го типу, що є в розпорядженні підприємства, $d_i(t)$ - ціна одиниці ресурсу i -го типу за період $[t, t+1)$, $i = \overline{1, m}$.

Тоді $\sum_{s=1}^r g_{is}(t) u_s(t)$ – витрати i -го ресурсу в період $[t, t+1)$;

$d_i(t) \sum_{s=1}^r g_{is}(t) u_s(t)$ – витрати на сировину i -го типу;

$\sum_{i=1}^m d_i(t) \sum_{s=1}^r g_{is}(t) u_s(t)$ – витрати на всю сировину в період $[t, t+1)$;

$$C(u) = \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^m d_i(t) \sum_{s=1}^r g_{is}(t) u_s(t)$$

– загальні витрати на всю сировину,

що використовується на протязі всього проміжку часу T . Слід також мати на увазі, що загальні витрати i -го ресурсу не повинні перевищувати наявних запасів: $\sum_{t \in T} \sum_{s=1}^r g_{is}(t) u_s(t) \leq b_i, i = \overline{1, m}$.

Поставимо задачу знаходження такої програми інтенсивностей технологічних способів $u(t) = (u_s(t), s = \overline{1, r}, t \in T)$ щоб кінцевий прибуток $P(u)$ від діяльності підприємства був максимальним, а загальні витрати на ресурси $C(u)$ – мінімальні.

Таким чином, отримаємо наступну математичну модель задачі

$$\max P(u) = \sum_{t=0}^{t_k} c^T(t)x(t), \quad (1)$$

$$\min C(u) = \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^m d_i(t) \sum_{s=1}^r g_{is}(t) u_s(t), \quad (2)$$

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (3)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4)$$

$$\sum_{t \in T} \sum_{s=1}^r g_{is}(t) \cdot u_s(t) \leq b_i \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t) \quad t \in T. \quad (6)$$

Введемо фундаментальну матрицю $F(t, \tau)$ і застосуємо формулу Коші $x(t) = F(t, -1)x_0 + \sum_{\tau=-1}^{t-1} F(t, \tau)B(\tau)u(\tau)$, яка дозволяє із (1) та (3) вилучити змінні $x(0), x(1), \dots, x(t_k)$.

Позначимо $J_1(u) = P(u)$ та $J_2(u) = -C(u)$, тоді отримаємо статичну двокритеріальну задачу лінійного програмування

$$\max \left\{ \begin{array}{l} J_1(u) \\ J_2(u) \end{array} \right\}, \quad \bar{A}u \leq b, \quad \underline{u} \leq u \leq \bar{u} \quad (7)$$

відносно змінних $u_s(t), t \in T, s = \overline{1, r}$, кількість яких дорівнює $r \cdot t_k$.

Тут $J_1(u) = D_1 u$, $J_2(u) = D_2 u$, де D_1 та D_2 , вектор-рядки розміром $1 \times r \cdot t_k$.

Хай U – множина допустимих розв'язків, $U \subset E^{r_k}$, що задовольняють співвідношенням (5),(6), $J = (J_1, J_2)$ – векторний критерій, а $P_j(u)$ оптимальна за Парето множина. Тоді задачу (7) двокритеріальної оптимізації можна записати в наступному виді: по заданій допустимій множині U побудувати множину $P_j(u)$.

Потрібно відмітити, що допустима множина $U \in$ поліедричною, а в силу (6) – обмеженою. Отже, вона буде опуклим многогранником зі скінченною кількістю вершин.

На теперішній час розроблена достатньо велика кількість різних методів виділення множини ефективних рішень, переважна більшість яких ґрунтується на тих або інших умовах оптимальності [2, с. 112-134; 3, с. 65-124; 4, с. 281-284]. Частіше всього застосовуються необхідні умови, які складаються в тім, що якщо точка U^* ефективна, то вона являється розв'язком задачі мінімізації числової функції спеціального виду при належним чином заданих значеннях параметрів, що входять в цю функцію. Отже, задача виділення всіх ефективних розв'язків зводиться до відповідної скалярної параметричної задачі математичного програмування, яка використовує двоїсті оцінки.

Двоїсті оцінки знаходять застосування при розробці економічного механізму для реалізації оптимального плану. Часто вони інтерпретуються як нормативи ефективності використання різних ресурсів.

Якщо ефективна точка оптимальна в скаляризованій задачі, то асоційовані з нею двоїсті оцінки при природних припущеннях можуть бути отримані із тієї ж задачі незалежно від конкретного виду функції згортки. Ці оцінки є розв'язками деяких багатокритеріальних задач.

Для лінійних задач векторної оптимізації метод лінійної згортки дозволяє точно побудувати множину ефективних точок [5, с. 52]. Він зводить задачу (7) до однокритеріальної задачі виду

$$\max_{u \in U} (\mu_1 J_1(u) + \mu_2 J_2(u)), \mu_1, \mu_2 > 0; \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

Крок перебору значень компонент вектора $\mu = (\mu_1; \mu_2)$ може уточнюватись на ділянках локалізації вершин ефективної множини. Ці ділянки локалізації, як з'ясувалось в процесі досліджень, відповідають різним значенням двоїстих оцінок. Тому залишається питання про вибір кращого кроку перебору значень компонент вектора $\mu = (\mu_1; \mu_2)$ так, щоб не залишити поза увагою деякі ділянки локалізації вершин, відкритими.

Пропонується метод, в основу якого покладемо наступне:

- допустима множина задачі (7) є опуклим, замкнутим многогранником;

- ефективна множина в лінійних моделях є частина допустимої множини и складається з обмеженої кількості попарно суміжних граней;

- двоїсті оцінки для будь якого ефективного значення в просторі критеріїв $f^* = Du^*$ можуть бути отримані шляхом розв'язку допоміжної задачі симплекс-методом;

- ефективна множина складається з ефективних вершин та всіх точок, які належать до лінійних оболонок суміжних вершин;

- кількість обмежень в лінійній задачі (7) скінчена, тому скінчена кількість граней допустимої множини та ефективної множини, що дає можливість перебрати усі вершини. Останній факт дає обґрунтування скінченності метода пошуку всіх ефективних точок.

Розглянемо не тільки двоїсті оцінки μ_1, μ_2 критеріїв, а і двоїсті оцінки обмежень $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. Вони повинні задовольняти [4, с. 274] співвідношенням: $\mu \geq 0, \lambda \geq 0, \lambda \cdot b > 0, \mu D - \lambda \bar{A} \leq 0$.

Двоїсті оцінки визначаються з точністю до спільного для μ і λ коефіцієнта пропорційності.

Для знаходження першої ефективної вершини візьмемо будь який критерій, наприклад, перший. Для нього розв'яжемо наступну однокритеріальну задачу оптимізації:

$$Du \rightarrow \max, \bar{A}u \leq b, \underline{u} \leq u \leq \bar{u}.$$

Розв'язком цієї задачі буде або єдина точка u^* , або множина точок, опукла оболонка яких буде множиною максимуму першого

критерію на допустимій множині задачі (7). Ці точки формують чергу в алгоритмі. Аналогічно розглядаються всі інші критерії. Отримані точки також додаються в чергу.

Рішенням однокритеріальної задачі лінійного програмування

$$\mu Du \rightarrow \max, \bar{A}u \leq b, \underline{u} \leq u \leq \bar{u} \quad (8)$$

буде множина точок грани U , яка будується відповідним лінійним обмеженням.

Якщо у ефективній вершині кількість активних граней більше, ніж одна, відповідні групи двоїстих оцінок отримаємо із симплекс-таблиці.

Для кожного отриманого набору двоїстих оцінок μ розв'язуємо скаляризовану задачу $\mu Du \rightarrow \max$ при обмеженнях задачі (8).

Кожна з цих задач буде мати множину розв'язків, відповідних обмеженню, яке його породило. Кількість розв'язуваних задач співпадає з кількістю елементів в черзі. Алгоритм є скінченим тому, що черга вершин скінченна.

Після виявлення всіх ефективних вершин в силу зв'язності ефективної множини можемо побудувати межу Парето, з'єднуючи суміжні вершини.

Запропонований алгоритм був апробований для розв'язування декількох тестових задач різної складності.

Висновки. Запропонований підхід може бути застосований і для задачі виробничого планування, коли час змінюється неперервно, а також для випадку, коли кількість критеріїв перевищує два.

Література:

1. Колемаев В. А. Математическая экономика. Учеб. для студ. вузов, обуч. по экон. спец. – 3-е стереотип. изд. / В. А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 399 с.
2. Панюков А. В. Математическое моделирование экономических процессов: Учеб. пособие / А. В. Панюков. – М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 192 с.
3. Подиновский В. В. Парето-оптимальное решение многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 254 с.
4. Полищук Л. И. Анализ многокритериальных экономических моделей. – Новосибирск: Наука, 1989. – 352 с.
5. Черноуцкий И. Г. Методы оптимизации и принятия решений. – СПб.: Лань, 2001. – 255 с.