Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2001.– Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 55–61

УДК 511.33

О. А. Гунявый
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛОВ ТИПА $\int g(x)e^{2\pi i f(x)}dx$

Рекомендовано до друку науковим семінаром
кафедри алгебри та теорії чисел ОНУ 13.09.2001 р.

У статті отримані допоміжні результати, які використовуються при заміні тригонометричних сум інтегралами.

В статье получены вспомогательные результаты, используемые при замене тригонометрических сумм интегралами.

In article the auxiliary results used at replacement of the exponential sums in integrals are received.

Введение. При замене тригонометрических сумм интегралами приходится иметь дело с интегралами типа $\int g(x)e^{2\pi i f(x)}dx$. В данной статье получены некоторые результаты, позволяющие оценивать такого рода интегралы.

1. Вспомогательная лемма. Определим следующее понятие.

Определение. *Будем говорить, что функция $f(x)$ конечно монотонна на отрезке $[a,b]$, если данный отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.*

Лемма. *Пусть $f(x)$, $g(x)$ – вещественные функции на отрезке $[N,\zeta N]$, $\zeta = 1+\delta$, $\delta > 0$. Рассматривается интеграл $I(N) = \int_N^{\zeta N} g(x)e^{2\pi i f(x)}dx \equiv \int_N g(x)e^{2\pi i f(x)}dx$.*

И пусть на $[N,\zeta N]$ $g(x) << g(N)$. Тогда в любом случае $I(N) << g(N)\delta N$.

При $f'(x) << f'(N) << 1/\delta N$ на $[N,\zeta N]$ $I(N) = e^{2\pi i f(N)}\int_N g(x)dx + O\left(g(N)f'(N)\delta^2 N^2\right)$.

При $1/\delta N << f'(N) << f'(x)$ и $f'(x)$, $g(x)$ – конечно монотонны на $[N,\zeta N]$

$$I(N) << g(N)/f'(N).$$

Если к тому же $f''(x) << f''(N) << f'^2(N)$, $g'(x) << g'(N)$, $g'(N)/g(N) << f'(N)$ и $f''(x)$, $g'(x)$ – конечно монотонны на $[N,\zeta N]$, то

$$I(N) = \left.\frac{g(x)e^{2\pi i f(x)}}{2\pi i\, f'(x)}\right|_N + O\left(\frac{g(N)f''(N)}{f'^3(N)}\right) + O\left(\frac{g'(N)}{f'^2(N)}\right).$$

Доказательство. В любом случае $I(N) << \int_N |g(x)|dx << g(N)\int_N dx << g(N)\delta N$.

Пусть теперь $f'(x) << f'(N) << 1/\delta N$. Обозначим $G(x) = \int_x^{\zeta N} g(t)dt$, тогда

$G(N) = \int_N g(x)dx$, $G(\zeta N) = 0$, $G(x) << g(N)(\zeta N - x)$. Имеем

$$I(N) = \int_N g(x)e^{2\pi i f(x)}dx = -\left.G(x)e^{2\pi i f(x)}\right|_N + 2\pi i\int_N G(x)f'(x)e^{2\pi i f(x)}dx.$$

Но
$$-G(x)e^{2\pi if(x)}\Big|_N = G(N)e^{2\pi if(N)} = e^{2\pi if(N)}\int_N g(x)dx$$
и
$$2\pi i\int_N G(x)f'(x)e^{2\pi if(x)}dx << g(N)\int_N(\zeta N-x)f'(N)dx << g(N)f'(N)\delta^2N^2.$$

Пусть теперь $\frac{1}{\delta N} << f'(N) << f'(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ – конечно монотонны, тогда, интегрируя по частям, имеем
$$I(N)=\int_N g(x)e^{2\pi if(x)}dx = \frac{g(x)e^{2\pi if(x)}}{2\pi i\, f'(x)}\Bigg|_N - \frac{1}{2\pi i}\int_N \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)e^{2\pi if(x)}dx.$$

Но $\frac{g(x)e^{2\pi if(x)}}{2\pi if'(x)}\Big|_N << \frac{g(N)}{f'(N)}$ и т. к. $f'(x)$, $g(x)$ – конечно монотонны, то и $\frac{g(x)}{f'(x)}$ – конечно монотонна, а, значит, на каждом отрезке монотонности
$$\int\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)e^{2\pi if(x)}dx << \int\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)\right|dx = \left|\int\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)dx\right| << \frac{g(N)}{f'(N)},$$
откуда
$$I(N) << g(N)/f'(N).$$

И, наконец, пусть к тому же $f''(x) << f''(N)$, $g'(x) << g'(N)$, $f''(x)$, $g'(x)$ – конечно монотонны на $[N,\zeta N]$. Тогда
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right) = g_1(x) = \frac{g'(x)}{f'(x)} - \frac{g(x)f''(x)}{f'^2(x)} << \frac{g'(N)}{f'(N)} + \frac{g(N)f''(N)}{f'^2(N)}$$
и $g_1(x)$ – конечно монотонна на $[N,\zeta N]$. Применив второй случай леммы, имеем
$$\int\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)e^{2\pi if(x)}dx = \int_N g_1(x)e^{2\pi if(x)}dx << \frac{1}{f'(N)}\left(\frac{g'(N)}{f'(N)} + \frac{g(N)f''(N)}{f'^2(N)}\right).$$

И значит, $$I(N) = \frac{g(x)e^{2\pi if(x)}}{2\pi i\, f'(x)}\Bigg|_N + O\left(\frac{g(N)f''(N)}{f'^3(N)}\right) + O\left(\frac{g'(N)}{f'^2(N)}\right),$$
что и требовалось доказать.

2. Теорема 1. *Пусть на отрезке* $[x_0, x_0+\Delta]$, *где* $\Delta>0$, *выполняются следующие условия:*

$f(x)$ – *вещественная,* $f'(x_0)=0$, $f''(x) >> f''(x_0) = \lambda_2 > 0$, $f^{(3)}(x) << f^{(3)}(x_0) = \lambda_3$.

$f''(x)$ – *конечно монотонна.* $I(\Delta) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta} e^{2\pi if(x)}dx$.

Тогда если $\lambda_2^{3/2} << \lambda_3 << f^{(3)}(x)$, *то*

при $\Delta << \lambda_3^{-1/3}$ $\qquad I(\Delta) << \Delta$,

при $\lambda_3^{-1/3} << \Delta$ $\qquad I(\Delta) << \lambda_3^{-1/3}$.

Если же $\lambda_3 << \lambda_2^{3/2}$, *и* $f''(x) << \lambda_2$, *то*

при $\Delta << \lambda_2^{-1/2}$ $\qquad I(\Delta) << \Delta$,

при $\lambda_2^{-1/2} << \Delta$ $\qquad I(\Delta) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_2}}e^{\frac{\pi i}{4}}e^{2\pi if(x_0)} + \frac{e^{2\pi if(x_0+\Delta)}}{2\pi i\Delta\lambda_2} + O\left(\frac{1}{\Delta^3\lambda_2^2}\right) + O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}\right).$

Доказательство. Очевидно, в любом случае $I(\Delta) << \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} dx << \Delta$. Пусть $\lambda_2^{3/2} << \lambda_3 << f^{(3)}(x)$, тогда при $\lambda_3^{-1/3} << \Delta$ $\quad I(\Delta) = \int\limits_0^{\lambda_3^{-1/3}} e^{2\pi i f(x+x_o)}dx + \int\limits_{\lambda_3^{-1/3}}^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_o)}dx$.

Опять же $\int\limits_0^{\lambda_3^{-1/3}} e^{2\pi i f(x+x_o)}dx << \lambda_3^{-1/3}$. А при $\lambda_3^{-1/3} < x$ $\quad f'(x+x_0) = \int\limits_0^x f''(t+x_0)dt$,

$f''(t+x_0) = \int\limits_0^t f^{(3)}(\tau + x_0)d\tau + \lambda_2$, а значит, $f''(t+x_0) - \lambda_2 >> \int\limits_0^t \lambda_3 d\tau = \lambda_3 t$.

Таким образом, при $t >> \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$ $\quad f''(t+x_0) >> \lambda_3 t$ и значит, при $\lambda_3^{-1/3} < x$

$f'(x+x_0) = \int\limits_0^x f''(t+x_0)dt >> \int\limits_0^x \lambda_3 t\, dt >> \lambda_3 x^2$. А из леммы

$$\int\limits_{\lambda_3^{-1/3}}^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_o)}dx << \frac{1}{f'\left(x_o + \lambda_3^{-1/3}\right)} << \frac{1}{\lambda_3 \lambda_3^{-2/3}} << \lambda_3^{-1/3}.$$

Пусть теперь $\lambda_3 << \lambda_2^{3/2}$ и $\lambda_2^{-1/2} << \Delta$. Обозначим $\lambda = \lambda_2^{-1/2}$, тогда $\lambda << \Delta$.
Из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dfrac{1}{2}\int\limits_{x_0}^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)dt$, или

$f(x+x_0) = f(x_0) + \dfrac{1}{2}\lambda_2 x^2 + g(x+x_0)$, где $g(x+x_0) = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2 f^{(3)}(t+x_0)dt$.

Тогда $\quad I(\Delta) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} e^{2\pi i f(x)}dx = \int\limits_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx =$

$$= \int\limits_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x_0)} e^{\frac{2\pi i}{2}\lambda_2 x^2} e^{2\pi i g(x+x_0)}dx = e^{2\pi i f(x_0)}\int\limits_0^{\Delta} e^{\pi i \lambda_2 x^2}dx + e^{2\pi i f(x_0)}\int\limits_0^{\Delta} e^{\pi i \lambda_2 x^2}\left[e^{2\pi i g(x+x_0)} - 1\right]dx.$$

Но $e^{2\pi i g(x+x_0)} - 1 = 2\pi i \int\limits_0^x g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}dt$,

где $g'(t+x_0) = \int\limits_0^t (t-\tau)f^{(3)}(\tau+x_0)d\tau << \lambda_3 t^2$. Таким образом,

$$I(\Delta) = e^{2\pi i f(x_0)}\int\limits_0^{\Delta} e^{\pi i \lambda_2 x^2}dx + 2\pi i e^{2\pi i f(x_0)}\int\limits_0^{\Delta} e^{\pi i \lambda_2 x^2}\int\limits_0^x g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}dt\,dx.$$

Заметим, что $\quad \int\limits_0^{\infty} e^{\pi i \lambda_2 x^2}dx = \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda_2}}e^{\frac{\pi i}{4}} = \dfrac{\lambda}{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$,

и при $\quad a > \lambda_2^{-1/2} = \lambda$

$$\int\limits_a^{\infty} e^{\pi i \lambda_2 x^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_2}}\int\limits_{\pi\lambda_2 a^2}^{\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du = -\frac{e^{\pi i \lambda_2 a^2}}{2\pi i \lambda_2 a} + \frac{e^{\pi i \lambda_2 a^2}}{4\pi^2\lambda_2^2 a^3} + O\left(\frac{1}{\lambda_2^3 a^5}\right).$$

Далее

$$\int_0^\Delta e^{\pi i\lambda_2 x^2}\int_0^x g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}dt\,dx=\int_0^\Delta g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}\int_t^\Delta e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx\,dt=$$

$$=\int_0^\lambda g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}dt\int_0^\Delta e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx-\int_0^\lambda g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}\int_0^t e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx\,dt+$$

$$+\int_\lambda^\Delta g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}\int_t^\infty e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx\,dt-\int_\lambda^\Delta g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}dt\int_\Delta^\infty e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx.$$

Имеем

$$2\pi i\int_0^\lambda g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}dt\int_0^\Delta e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx-2\pi i\int_\lambda^\Delta g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}dt\int_\Delta^\infty e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx=$$

$$=\left(e^{2\pi i g(x_0+\lambda)}-1\right)\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2\sqrt{\lambda_2}}-\left(e^{2\pi i g(x_0+\Delta)}-1\right)\int_\Delta^\infty e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx.$$

И $\int_0^\Delta e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{\lambda_2}}e^{\frac{\pi i}{4}}-\int_\Delta^\infty e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx$. Таким образом,

$$I(\Delta)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda_2}}e^{\frac{\pi i}{4}+2\pi i f(x_0)}e^{2\pi i g(x_0+\lambda)}-e^{2\pi i f(x_0)}e^{2\pi i g(x_0+\Delta)}\int_\Delta^\infty e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx+$$

$$+2\pi i e^{2\pi i f(x_0)}\int_\lambda^\Delta g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}\int_t^\infty e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx\,dt-$$

$$-2\pi i e^{2\pi i f(x_0)}\int_0^\lambda g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}\int_0^t e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx\,dt.$$

Далее $\int_0^\lambda g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}\int_0^t e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx\,dt\ll\int_0^\lambda \lambda_3 t^2 t\,dt\ll\lambda_3\lambda^4\ll\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}$;

$$e^{2\pi i g(x_0+\lambda)}=1+\int_0^\lambda 2\pi i g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}dt=1+O\left(\lambda_3\lambda^3\right);$$

$$-e^{2\pi i f(x_0)}e^{2\pi i g(x_0+\Delta)}\int_\Delta^\infty e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx=$$

$$=e^{2\pi i f(x_0)}e^{2\pi i g(x_0+\Delta)}\left(\frac{e^{\pi i\lambda_2\Delta^2}}{2\pi i\lambda_2\Delta}+O\left(\frac{1}{\lambda_2^2\Delta^3}\right)\right)=\frac{e^{2\pi i f(x_0+\Delta)}}{2\pi i\lambda_2\Delta}+O\left(\frac{1}{\lambda_2^2\Delta^3}\right).$$

При $t>\lambda$

$$\int_t^\infty e^{\pi i\lambda_2 x^2}dx=-\frac{e^{\pi i\lambda_2 t^2}}{2\pi i\lambda_2 t}+\frac{e^{\pi i\lambda_2 t^2}}{4\pi^2\lambda_2^2 t^3}+O\left(\frac{1}{\lambda_2^3 t^5}\right)$$

и

$$\int_\lambda^\Delta\left|g'(t+x_0)e^{2\pi i g(t+x_0)}\right|\frac{dt}{\lambda_2^3 t^5}\ll\int_\lambda^\Delta\frac{\lambda_3 dt}{\lambda_2^3 t^3}\ll\frac{\lambda_3}{\lambda_2^3\lambda^2}\ll\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}.$$

Таким образом,

$$I(\Delta)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda_2}}e^{\frac{\pi i}{4}+2\pi i f(x_0)}+\frac{e^{2\pi i f(x_0+\Delta)}}{2\pi i\lambda_2\Delta}-\frac{e^{2\pi i f(x_0)}}{\lambda_2}\int_\lambda^\Delta g'(t+x_0)e^{\pi i\lambda_2 t^2+2\pi i g(t+x_0)}\frac{dt}{t}-$$

$$-\frac{e^{2\pi i f(x_0)}}{2\pi i\lambda_2^2}\int_\lambda^\Delta g'(t+x_0)e^{\pi i\lambda_2 t^2+2\pi i g(t+x_0)}\frac{dt}{t^3}+O\left(\frac{1}{\lambda_2^2\Delta^3}\right)+O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}\right).$$

Далее, применив второй случай леммы и оценку

$$f'(x+x_0)=\int_0^x f''(t+x_0)dt >> \lambda_2 x,$$

имеем

$$\frac{e^{2\pi i f(x_0)}}{\lambda_2^2}\int_\lambda^\Delta g'(t+x_0)e^{\pi i\lambda_2 t^2+2\pi i g(t+x_0)}\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{\lambda_2^2}\int_\lambda^\Delta \frac{g'(t+x_0)}{t^3}e^{2\pi i f(t+x_0)}dt <<$$

$$<<\frac{1}{\lambda_2^2}\sum_{0\le k<<\ln\frac{\Delta}{\lambda}}\left|\int_{\lambda 2^k}^{\lambda 2^{k+1}}\frac{g'(t+x_0)}{t^3}e^{2\pi i f(t+x_0)}dt\right|<<\frac{1}{\lambda_2^2}\sum_{0\le k<<\ln\frac{\Delta}{\lambda}}\frac{\lambda_3\lambda^2 2^{2k}}{\lambda^3 2^{3k}\lambda_2\lambda 2^k}<<\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}.$$

И, наконец,

$$\frac{e^{2\pi i f(x_0)}}{\lambda_2}\int_\lambda^\Delta g'(t+x_0)e^{\pi i\lambda_2 t^2+2\pi i g(t+x_0)}\frac{dt}{t}=\frac{1}{\lambda_2}\int_\lambda^\Delta \frac{g'(t+x_0)}{t}e^{2\pi i f(t+x_0)}dt \ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t+x_0)}{t}\right)=\frac{g''(t+x_0)}{t}-\frac{g'(t+x_0)}{t^2}<<\lambda_3.$$

Тогда, используя результат для третьего случая леммы, имеем

$$\frac{1}{\lambda_2}\int_\lambda^\Delta \frac{g'(t+x_0)}{t}e^{2\pi i f(t+x_0)}dt=\frac{1}{\lambda_2}\sum_{0\le k<<\ln\frac{\Delta}{\lambda}}\int_{\lambda 2^k}^{\lambda 2^{k+1}}\frac{g'(t+x_0)}{t}e^{2\pi i f(t+x_0)}dt=$$

$$=\frac{1}{\lambda_2}\sum_{0\le k<<\ln\frac{\Delta}{\lambda}}\left[\left.\frac{g'(t+x_0)}{2\pi i t f'(t+x_0)}e^{2\pi i f(t+x_0)}\right|_{\lambda 2^k}^{\lambda 2^{k+1}}+O\left(\frac{\lambda_3\lambda 2^k\lambda_2}{\lambda_2^3\lambda^3 2^{3k}}\right)+O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2\lambda^2 2^{2k}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi i\lambda_2}\left.\left(\frac{g'(t+x_0)}{tf'(t+x_0)}e^{2\pi i f(t+x_0)}\right)\right|_\lambda^\Delta+O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}\right)<<\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2},$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.

Замечание. Имея утверждение теоремы 1, легко получить подобные утверждения в случае $f''(x_0)=\lambda_2<0$ и в случае отрезка $[x_0-\Delta,\ x_0]$, где $\Delta>0$, а именно:

при $0<-\lambda_2=-f''(x_0)<<-f''(x)$ *и* $|\lambda_2|^{-1/2}<<\Delta$

$$I(\Delta)=\frac{1}{2\sqrt{|\lambda_2|}}e^{-\frac{\pi i}{4}}e^{2\pi i f(x_0)}+\frac{e^{2\pi i f(x_0+\Delta)}}{2\pi i\Delta\lambda_2}+O\left(\frac{1}{\Delta^3\lambda_2^2}\right)+O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}\right);$$

при $0<\lambda_2=f''(x_0)<<f''(x)$ *и* $\lambda_2^{-1/2}<<\Delta$

$$\int_{x_0-\Delta}^{x_0}e^{2\pi i f(x)}dx=\frac{1}{2\sqrt{\lambda_2}}e^{\frac{\pi i}{4}}e^{2\pi i f(x_0)}+\frac{e^{2\pi i f(x_0-\Delta)}}{2\pi i\Delta\lambda_2}+O\left(\frac{1}{\Delta^3\lambda_2^2}\right)+O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}\right);$$

при $0<-\lambda_2=-f''(x_0)<<-f''(x)$ *и* $|\lambda_2|^{-1/2}<<\Delta$

$$\int_{x_0-\Delta}^{x_0}e^{2\pi i f(x)}dx=\frac{1}{2\sqrt{|\lambda_2|}}e^{-\frac{\pi i}{4}}e^{2\pi i f(x_0)}+\frac{e^{2\pi i f(x_0-\Delta)}}{2\pi i\Delta\lambda_2}+O\left(\frac{1}{\Delta^3\lambda_2^2}\right)+O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}\right).$$

3. Теорема 2. *Пусть на отрезке* $[x_0, x_0+\Delta]$, *где* $\Delta > 0$, *выполняются следующие условия:* $f(x)$, $g(x)$ – *вещественные,* $f'(x_0)=0$, $f''(x) >> f''(x_0) = \lambda_2 > 0$, $g(x) << g(x_0)$, $f^{(3)}(x) << f^{(3)}(x_0) = \lambda_3$; $f''(x)$, $g'(x)$ – *конечно монотонны;*

$$I(\Delta) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta} g(x) e^{2\pi i f(x)} dx .$$

Тогда если $\lambda_2^{3/2} << \lambda_3 << f^{(3)}(x)$, *то*

при $\Delta << \lambda_3^{-1/3}$ $\qquad I(\Delta) << g(x_0)\Delta$,

при $\lambda_3^{-1/3} << \Delta$ $\qquad I(\Delta) << g(x_0)\lambda_3^{-1/3}$.

В любом случае

при $\Delta << \lambda_2^{-1/2}$ $\qquad I(\Delta) << g(x_0)\Delta$,

при $\lambda_2^{-1/2} << \Delta$ $\qquad I(\Delta) << g(x_0)\lambda_2^{-1/2}$.

Если же $\lambda_3 << \lambda_2^{3/2}$, $f''(x) << \lambda_2$, $g'(x) << g'(x_0)$, *то*

при $\Delta << \lambda_2^{-1/2}$ $\qquad I(\Delta) << g(x_0)\Delta$,

при $\lambda_2^{-1/2} << \Delta$

$$I(\Delta) = \frac{g(x_0)}{2\sqrt{\lambda_2}} e^{\frac{\pi i}{4}} e^{2\pi i f(x_0)} + \frac{g(x_0+\Delta) e^{2\pi i f(x_0+\Delta)}}{2\pi i \Delta \lambda_2} + O\left(\frac{g(x_0)}{\Delta^3 \lambda_2^2}\right) + O\left(\frac{g(x_0)\lambda_3}{\lambda_2^2}\right) + O\left(\frac{g'(x_0)}{\lambda_2}\right).$$

Доказательство. В любом случае, очевидно, $I(\Delta) << g(x_0) \int_{x_0}^{x_0+\Delta} dx << g(x_0)\Delta$.

При $\lambda_2^{-1/2} << \Delta$ $\qquad I(\Delta) = \int_{x_0}^{x_0+\lambda_2^{-1/2}} g(x) e^{2\pi i f(x)} dx + \int_{x_0+\lambda_2^{-1/2}}^{x_0+\Delta} g(x) e^{2\pi i f(x)} dx$.

Опять же $\int_{x_0}^{x_0+\lambda_2^{-1/2}} g(x) e^{2\pi i f(x)} dx << g(x_0)\lambda_2^{-1/2}$. $f'(x_0+x) = \int_0^x f''(x_0+t)dt >> \lambda_2 x$.

Откуда, используя лемму, имеем

$$\int_{x_0+\lambda_2^{-1/2}}^{x_0+\Delta} g(x) e^{2\pi i f(x)} dx << \frac{g(x_0)}{f'\left(x_0+\lambda_2^{-1/2}\right)} << \frac{g(x_0)}{\lambda_2 \lambda_2^{-1/2}} << g(x_0)\lambda_2^{-1/2},$$

и тогда $\qquad I(\Delta) << g(x_0)\lambda_2^{-1/2}$.

В случае $\lambda_2^{3/2} << \lambda_3 << f^{(3)}(x)$ поступаем аналогично, как и в предыдущей теореме, используя все ту же лемму.

Пусть теперь $\lambda_3 << \lambda_2^{3/2}$, $f''(x) << \lambda_2$, $g'(x) << g'(x_0)$, $g'(x)$ – конечно монотонна.

Рассматриваем сразу случай $\lambda_2^{-1/2} = \lambda << \Delta$. $g(x+x_0) = g(x_0) + \int_0^x g'(x_0+t)dt$.

Тогда $I(\Delta) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta} g(x) e^{2\pi i f(x)} dx = \int_0^{\Delta} g(x+x_0) e^{2\pi i f(x+x_0)} dx = g(x_0) \int_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)} dx +$

$+ \int_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)} \int_0^x g'(t+x_0) dt\, dx$.

Далее $\qquad \int_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)} \int_0^x g'(t+x_0) dt\, dx = \int_0^{\Delta} g'(t+x_0) \int_t^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)} dx\, dt =$

$$= \int_0^{\lambda} g'(t+x_0)dt \int_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx - \int_0^{\lambda} g'(t+x_0)\int_0^{t} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx\,dt + \int_{\lambda}^{\Delta} g'(t+x_0)\int_t^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx\,dt .$$

Далее, используя результаты предыдущей теоремы, получаем оценки

$$\int_0^{\lambda} g'(t+x_0)dt \int_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx << g'(x_0)\lambda^2 << \frac{g'(x_0)}{\lambda_2} ;$$

$$\int_0^{\lambda} g'(t+x_0)\int_0^{t} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx\,dt << g'(x_0)\int_0^{\lambda} t\,dt << g'(x_0)\lambda^2 << \frac{g'(x_0)}{\lambda_2} .$$

Таким образом,

$$I(\Delta) = g(x_0)\int_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx + \int_{\lambda}^{\Delta} g'(t+x_0)\int_t^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx\,dt + O\left(\frac{g'(x_0)}{\lambda_2}\right) .$$

Далее, из леммы

$$\int_t^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx = \left.\frac{e^{2\pi i f(x+x_0)}}{2\pi i f'(x+x_0)}\right|_t^{\Delta} + O\left(\frac{\lambda_2}{(f'(t+x_0))^3}\right),$$ но $f'(t+x_0) >> \lambda_2 t$, и значит,

$$\int_t^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx = \frac{e^{2\pi i f(\Delta+x_0)}}{2\pi i f'(\Delta+x_0)} - \frac{e^{2\pi i f(t+x_0)}}{2\pi i f'(t+x_0)} + O\left(\frac{1}{\lambda_2^2 t^3}\right).$$

А $$\int_{\lambda}^{\Delta} |g'(t+x_0)| \frac{dt}{\lambda_2^2 t^3} << \frac{g'(x_0)}{\lambda^2\lambda_2^2} << \frac{g'(x_0)}{\lambda_2}.$$

Таким образом,

$$I(\Delta) = g(x_0)\int_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx + \frac{g(x_0+\Delta)e^{2\pi i f(\Delta+x_0)}}{2\pi i f'(\Delta+x_0)} - \frac{g(x_0+\lambda)e^{2\pi i f(\Delta+x_0)}}{2\pi i f'(\Delta+x_0)} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda}^{\Delta} g'(t+x_0)\frac{e^{2\pi i f(t+x_0)}}{f'(t+x_0)}dt + O\left(\frac{g'(x_0)}{\lambda_2}\right).$$

Но $$\int_0^{\Delta} e^{2\pi i f(x+x_0)}dx = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_2}}e^{\frac{\pi i}{4}}e^{2\pi i f(x_0)} + \frac{e^{2\pi i f(x_0+\Delta)}}{2\pi i\Delta\lambda_2} + O\left(\frac{1}{\Delta^3\lambda_2^2}\right) + O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}\right),$$

$$g(x_0+\lambda) = g(x_0) + O(g'(x_0)\lambda),$$

$$\lambda_2 x << f'(x_0+x) = \lambda_2 x + \int_0^{x}(x-t)f^{(3)}(x_0+t)dt = \lambda_2 x\left[1 + O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x\right)\right],$$

откуда $$\frac{1}{f'(x_0+x)} = \frac{1}{\lambda_2 x} + O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}\right).$$

А из леммы

$$\int_{\lambda}^{\Delta} g'(t+x_0)\frac{e^{2\pi i f(t+x_0)}}{f'(t+x_0)}dt << \frac{g'(x_0)}{(f'(x_0+\lambda))^2} << \frac{g'(x_0)}{\lambda_2^2\lambda^2} << \frac{g'(x_0)}{\lambda_2},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Заключение. Полученные в этой работе результаты являются уточнениями вспомогательных результатов, приведённых в работе [1] (см. гл. IV, пп. 1–2), и используемых в дальнейшем для замены тригонометрических сумм интегралами.

1. **Титчмарш Е. К.** Теория дзета-функции Римана.– М.: ИЛ, 1953.– 407 с.