

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Нестационарна задача повздожнього зсуву для
кільцевого сегменту»

«Nonstationary problem of longitudinal shear for a ring's
segment»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Бондарчук Михайло Олександрович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З.Ю.
Рецензент: ст. викл. Толкачов А.В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2025 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2025 р.

ЗМІСТ

| | | |
|--|---|----|
| Вступ | | 3 |
| 1 НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ПОВЗДОВЖНОГО ЗСУВУ ДЛЯ КІЛЬЦЕВОГО СЕГМЕНТУ | | 5 |
| 1.1 | Постановка задачі | 5 |
| 1.2 | Розв'язання поставленої задачі | 6 |
| 1.2.1 | Перший етап: Застосування перетворення Лапласа за часом t | 6 |
| 1.2.2 | Другий етап: Застосування синус-перетворення Меллі- на за радіальною координатою r | 7 |
| 1.2.3 | Третій етап: Розв'язання одновимірної задачі | 9 |
| 1.2.4 | Четвертий етап: Обернені перетворення | 10 |
| 1.2.5 | П'ятий етап: Усталені коливання | 10 |
| 1.3 | Чисельні розрахунки | 11 |
| Висновки | | 16 |
| Список літератури | | 17 |
| 2 Додатки | | 18 |
| 2.1 | Додаток А | 18 |
| 2.2 | Додаток Б | 20 |
| 2.3 | Додаток В | 22 |
| 2.4 | Додаток Г | 25 |

ВСТУП

Нестаціонарна задача поздовжнього зсуву для кільцевого сегменту є однією з найактуальніших тем у сучасній теорії пружності та динаміки деформованих тіл. Конструкції, що мають кільцеву геометрію, наприклад труби, вали, диски та інші елементи машин, піддаються неперервним змінним у часі навантаженням, що спричиняє не лише перехідні процеси, але й формування стійких хвильових режимів. У реальному експлуатаційному середовищі виникають ситуації, коли хвильові процеси та резонансні явища можуть призводити до локальних концентрацій напружень і, як наслідок, до руйнування конструкцій. Глибоке розуміння механізмів нестаціонарного поздовжнього зсуву дозволяє оптимізувати проектування та експлуатацію інженерних систем, забезпечуючи тим самим підвищення їх безпеки та надійності.

У даному дослідженні застосовано аналітичні методи інтегральних перетворень, зокрема перетворення Лапласа за часом та синус-перетворення Мелліна за радіальною координатою, які дозволяють перетворити складну задачу з частинними диференціальними рівняннями в набір одновимірних крайових задач із замкненими розв'язками. Такий підхід не лише спрощує математичну обробку задачі, але й забезпечує можливість отримання точних характеристик напружено-деформованого стану конструкції у відповідь на динамічні навантаження. Окрім того, нестаціонарні хвильові процеси в кільцевих конструкціях мають практичне значення для багатьох галузей. Наприклад, у машинобудуванні вони допомагають прогнозувати поведінку валів і дисків під динамічними навантаженнями, в енергетиці — оцінювати стійкість трубопроводів, а в сейсмології — аналізувати вплив хвиль на кільцеві елементи в ґрунті чи фундаментах.

Метою дослідження є аналіз нестаціонарного поздовжнього зсуву в кільцевому сегменті на основі відомої математичної моделі з подальшим визначенням напружено-деформованого стану конструкції під впливом динамічних навантажень. Для досягнення цієї мети застосовуються методи інтегральних перетворень, які дозволяють перетворити початкову задачу до простору нових змінних, забезпечуючи отримання аналітичного розв'язку з

урахуванням крайових умов. Отримані результати, підтверджені чисельними розрахунками, є важливим інструментом для аналізу резонансних явищ та оптимізації конструкцій сучасних інженерних систем.

Особливим аспектом роботи є інтеграція теоретичного аналізу з чисельним моделюванням. Розроблені математичні методи знаходять своє практичне застосування у розрахунках механічних властивостей кільцевих конструкцій, дозволяючи точно визначати розподіл переміщень та напружень навіть у складних умовах експлуатації. Обчислювальні експерименти, що виконуються за допомогою програмного коду на мові Python, підтверджують коректність отриманих аналітичних розв'язків і демонструють практичну ефективність запропонованої методики.

Крім того, проведені дослідження відкриває нові перспективи для подальшого вивчення нестационарних процесів у різноманітних конструктивних системах. Аналіз отриманих результатів дозволяє розробити рекомендації щодо вдосконалення проектних рішень з метою зниження ризику виникнення резонансних явищ та підвищення експлуатаційної стійкості конструкцій. Розширення теоретичної бази, що лежить в основі дослідження, створює передумови для подальших міждисциплінарних досліджень, де питання нелінійних ефектів та взаємодії багатьох фізичних параметрів можуть бути інтегровані в єдину методологію аналізу.

Таким чином, ця тема має як теоретичне, так і практичне значення. Методи аналізу спрямовані на точне прогнозування поведінки кільцевих конструкцій під впливом змінних динамічних навантажень, що є надзвичайно важливим для сучасного машинобудування, енергетики, суднобудування та інших галузей. Цей підхід забезпечує не лише поглиблення розуміння фундаментальних процесів, але й сприяє впровадженню інноваційних рішень у проектуванні та розрахунку інженерних систем.

РОЗДІЛ 1

НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ПОВЗДОВЖНОГО ЗСУВУ ДЛЯ КІЛЬЦЕВОГО СЕГМЕНТУ

1.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу повздовжнього зсуву для кільцевого сегменту. Об'єкт вивчення — це кільцевий сегмент $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \omega$. Та знайдемо переміщення на цьому сегменті. Рівняння для цієї задачі має вигляд:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

де

$$a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq \omega, \quad 0 < t < \infty.$$

Границя $\varphi = 0$ знаходиться в умовах зчеплення, а на границі $\varphi = \omega$ задано навантаження $p(r)$, G - модуль зсуву:

$$W|_{\varphi=0} = 0, \quad \tau_{\varphi z}|_{\varphi=\omega} = p(r) \leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial \varphi}|_{\varphi=\omega} = \frac{r}{G} p(r), \quad a < r < b \quad (1.2)$$

p - відома функція навантаження.

Границя $r = a$ знаходиться в умовах зчеплення, грань $r = b$ вільна від прикладеного навантаження:

$$W|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r}|_{r=b} = 0, \quad 0 < \varphi < \omega \quad (1.3)$$

Шукана функція, яка описує переміщення, разом зі своєю першою похідною, спадає з часом:

$$W|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad W \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

1.2 Розв'язання поставленої задачі

Застосуємо до цієї системи перетворення Лапласа за змінною t , та скінченне синус-перетворення Мелліна за змінною r . Вид інтегральних перетворень оберемо, враховуючи системи (1.1) та крайові умови.

1.2.1 Перший етап: Застосування перетворення Лапласа за часом t

Для застосування інтегрального перетворення використовуємо умови (1.4). Формула інтегрального прямого перетворення Лапласа буде мати вигляд:

$$\int_0^{\infty} W(r, \varphi, t) e^{-st} dt = W_s(r, \varphi)$$

де s - комплексний параметр.

Формулою обернення для перетворення Лапласа:

$$W(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} W_s(r, \varphi) e^{st} dt$$

де γ - дійсна константа, що забезпечує збіжність інтегралу

Застосуємо це інтегральне перетворення до доданку з другою частиною похідною за змінною t .

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} e^{-st} dt = \frac{\partial W}{\partial t} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \frac{\partial W}{\partial t} e^{-st} dt$$

З урахуванням початкових умов $W|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial W}{\partial t}|_{t=0} = 0$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - 0 = 0,$$

$$sW(r, \varphi, t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s^2 \int_0^{\infty} W(r, \varphi, t) e^{-st} dt = 0 + s^2 W_s(r, \varphi).$$

Отже:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 W_s}{\partial t^2} e^{-st} dt = s^2 W_s(r, \varphi).$$

Тут було застосовано рівність нулю функції переміщень та її першої похідної у початковий момент часу, а також те, що функція спадає на нескінченності.

Застосуємо це інтегральне перетворення до доданку з другою похідною за змінною φ :

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 W_s}{\partial \varphi^2} e^{-st} dt = W_s''(\varphi)$$

Радіальна частина рівняння не змінюється, оскільки не залежить від часу. Таким чином, після застосування перетворення Лапласа вихідне рівняння набуває вигляду:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_s}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W_s}{\partial \varphi^2} = \frac{\rho}{G} s^2 W_s.$$

Цей крок зменшив розмірність задачі, усунувши часову залежність, але рівняння все ще містить дві змінні (r і φ).

1.2.2 Другий етап: Застосування синус-перетворення Мелліна за радіальною координатою r

Радіальна частина рівняння та граничні умови на $r = a$ і $r = b$ (зчеплення та відсутність напружень) роблять синус-перетворення Мелліна ефективним інструментом. Воно враховує геометрію кільцевого сегменту та логарифмічну залежність, яка природно виникає в полярних координатах. Синус-перетворення зручно для задач із граничними умовами типу $W_s|_{r=a} = 0$ і $\frac{\partial W_s}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0$. Це перетворення враховує логарифмічну природу радіальної змінної у кільцевому сегменті.

Застосуємо інтегральне нестандартне синус-перетворення Мелліна за змінною r . Це інтегральне перетворення має таку пряму формулу:

$$\int_a^b W_s(r, \varphi) \sin\left(\alpha \ln \frac{r}{a}\right) \frac{dr}{r} = W_{\alpha s}(\varphi)$$

де

$$\alpha = \frac{\pi(2n-1)}{2 \ln \frac{b}{a}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Формула обернення має вигляд:

$$W_s(r, \varphi) = \frac{2}{\ln \frac{b}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} W_{\alpha s}(\varphi) \sin\left(\alpha \ln \frac{r}{a}\right).$$

Застосуємо до радіальної частини:

$$\int_a^b r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_s}{\partial r} \right) \sin\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) dr.$$

Використовуємо інтегрування за частинами. Позначимо $u = \sin\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right)$, $dv = r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_s}{\partial r} \right) dr$. Тоді:

$$v = r \frac{\partial W_s}{\partial r}, \quad du = \alpha_n \cos\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) \frac{dr}{r}.$$

$$r \frac{\partial W_s}{\partial r} \sin\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) \Big|_a^b - \alpha_n \int_a^b \frac{\partial W_s}{\partial r} \cos\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) dr =$$

Враховуючи граничні умови, $\frac{\partial W_s}{\partial r} \Big|_{r=a}$ не впливає. Другий інтеграл знову інтегруємо за частинами, що дає:

$$-\alpha_n W_s(r, \varphi) \cos\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) \Big|_a^b - \alpha_n^2 \int_a^b W_s(r, \varphi) \sin\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) dr = -\alpha_n^2 W_{\alpha s}(r, \varphi)$$

Застосуємо це інтегральне перетворення до крайової умови $\varphi = \omega$:

$$\int_a^b \frac{\partial W_s}{\partial \varphi} \sin\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) \frac{dr}{r} = W'_{\alpha s}(\varphi)$$

Значення похідної у цій умові набуває вигляду:

$$\int_a^b \frac{r}{G} p(r) \sin\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) \frac{dr}{r} = \frac{1}{G} p_\alpha$$

Велчина p_α визначається як трансформоване навантаження в просторі синус-перетворення Мелліна. Її математичний опис має вигляд:

$$p_\alpha = \int_a^b p(r) \sin\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) dr.$$

Отримуємо одновимірну крайову задачу відносно змінної φ :

$$\begin{cases} W''_{as}(\varphi) - (\alpha_n^2 + \frac{\rho}{G}s^2)W_{as}(\varphi) = 0 \\ W_{as}(\varphi) = 0, \quad W'_{as}(\omega) = \frac{\rho_a}{G} \end{cases}$$

де

$$N = \sqrt{\alpha_n^2 + \frac{\rho}{G}s^2}$$

1.2.3 Третій етап: Розв'язання одновимірної задачі

Загальний розв'язок одновимірної крайової задачі відносно змінної φ є:

$$W_{as}(\varphi) = C_1 \operatorname{sh}(N\varphi) + C_2 \operatorname{ch}(N\varphi)$$

де C_1, C_2 - невідомі сталі. З першої умови знайдемо:

$$W_{as}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Отже, $W_{as}(\varphi) = C_1 \operatorname{sinh}(N\varphi)$. Також застосуємо другу умову до розв'язку одновимірної задачі:

$$W''_{as}(\omega) = \frac{\rho_a}{G} \Rightarrow C_1 N \operatorname{ch}(N\omega) = \frac{\rho_a}{G}$$

Звідси $C_1 = \frac{\rho_a}{GN \operatorname{cosh}(N\omega)}$.

Отримуємо розв'язок у просторі трансформант:

$$W_{as}(\varphi) = \frac{p_a}{G} \frac{\text{sh}(N\varphi)}{N \text{ch}(N\omega)}.$$

1.2.4 Четвертий етап: Обернені перетворення

Застосовуючи обернені формули інтегральних перетворень, отримуємо розв'язок у просторі оригіналів:

$$W(r, \varphi, t) = \frac{1}{G \ln \frac{b}{a} \pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{p_a \text{sh}(N\varphi)}{N \text{ch}(N\omega)} e^{st} \sin\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) ds$$

де

$$\alpha_n = \frac{\pi(2n-1)}{2 \ln \frac{b}{a}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p_a = \int_a^b p(r) \sin\left(\alpha_n \ln \frac{r}{a}\right) dr.$$

1.2.5 П'ятий етап: Усталені коливання

Установлені коливання є сталим режимом коливань системи після затухання перехідних ефектів, коли система реагує на гармонічне збудження з частотою v . У контексті кільцевого сегменту це означає, що переміщення $W(r, \varphi, t) = W(r, \varphi, v) e^{ivt}$, де $W(r, \varphi, v)$ описує амплітуду коливань. Умова відсутності припливу енергії з нескінченності забезпечує сталість режиму, що є ключовим для аналізу динамічних систем [1].

Для отримання розв'язку в частотній області застосовується заміна:

$$s = iv$$

у просторі Лапласа, що відповідає гармонічному збудженню. Це призводить до рівняння:

$$W(r, \varphi; v) = \frac{2}{G \ln \frac{b}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_a \sinh(N\varphi)}{N \cosh(N\omega)} \sin\left(\alpha \ln \frac{r}{a}\right)$$

у цій формулі змінюється $N = \sqrt{\alpha_n^2 - \frac{\rho}{G} v^2}$. Фізично, N визначає характер

розповсюдження хвиль у сегменті при $a_n^2 > \frac{\rho}{G}v^2$ (N дійсне, коливання мають стоячу хвилю) або при $a_n^2 < \frac{\rho}{G}v^2$ (N уявне, що відповідає експоненційно затухаючим модам)[2].

Цей вираз описує амплітуду переміщень у частотній області, що корисно для аналізу резонансів. Резонанс виникає, коли знаменник $\cosh(N\omega)$ мінімізується, тобто при умові:

$$N\omega = i\frac{\pi(2m-1)}{2}, m \in \mathbb{N}[3].$$

Підставляючи $N = \sqrt{a_n^2 - \frac{\rho}{G}v^2}$, отримуємо резонансні частоти:

$$v_{rez,n} = \sqrt{\frac{G}{\rho} + \left(a_n^2 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{2\omega} \right)^2 \right)}.$$

доданок $\frac{\pi(2m-1)}{2\omega}$ визначає кутову компоненту хвильового числа, яка залежить від геометрії сегмента (ω) та обраної моди (m).

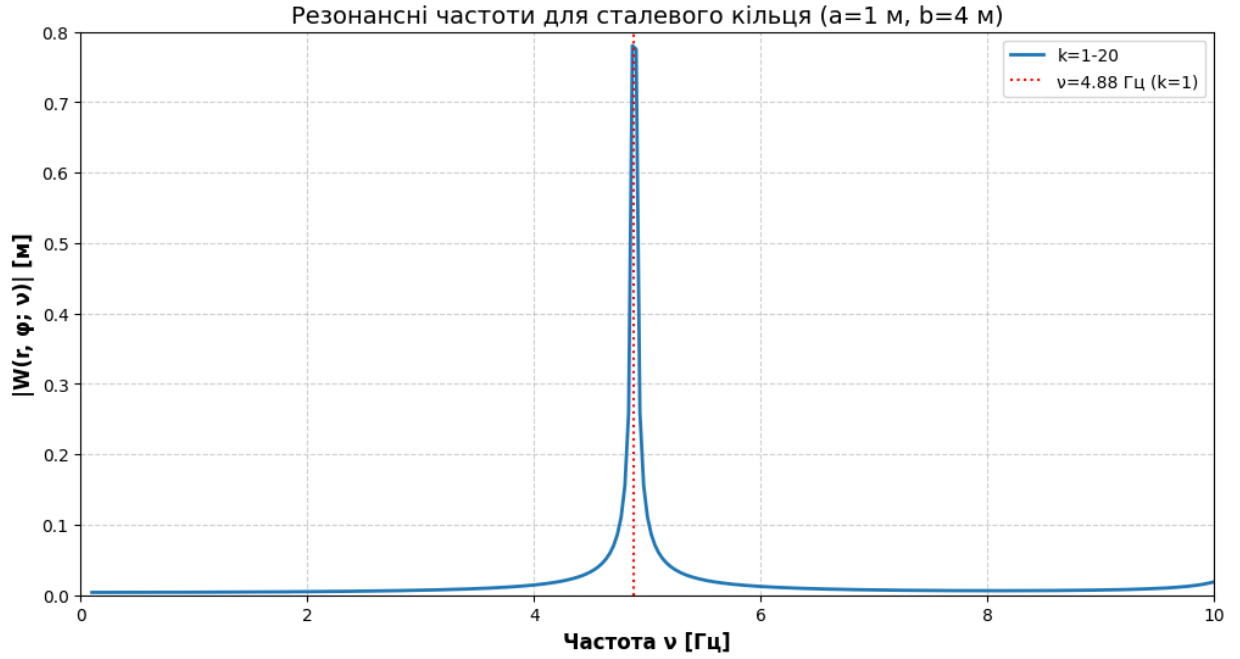
1.3 Чисельні розрахунки

Для наступних дій вибрано типові значення параметрів, які відповідають реальним матеріалам і геометрії: модуль зсуву сталі $G = 82$ [ГПа], густину матеріалу $\rho = 7.85$ [г/см³], внутрішній радіус $a = 1$ [м] та зовнішній радіус $b = 4$ [м], кут розчину $\omega = \frac{\pi}{2}$.

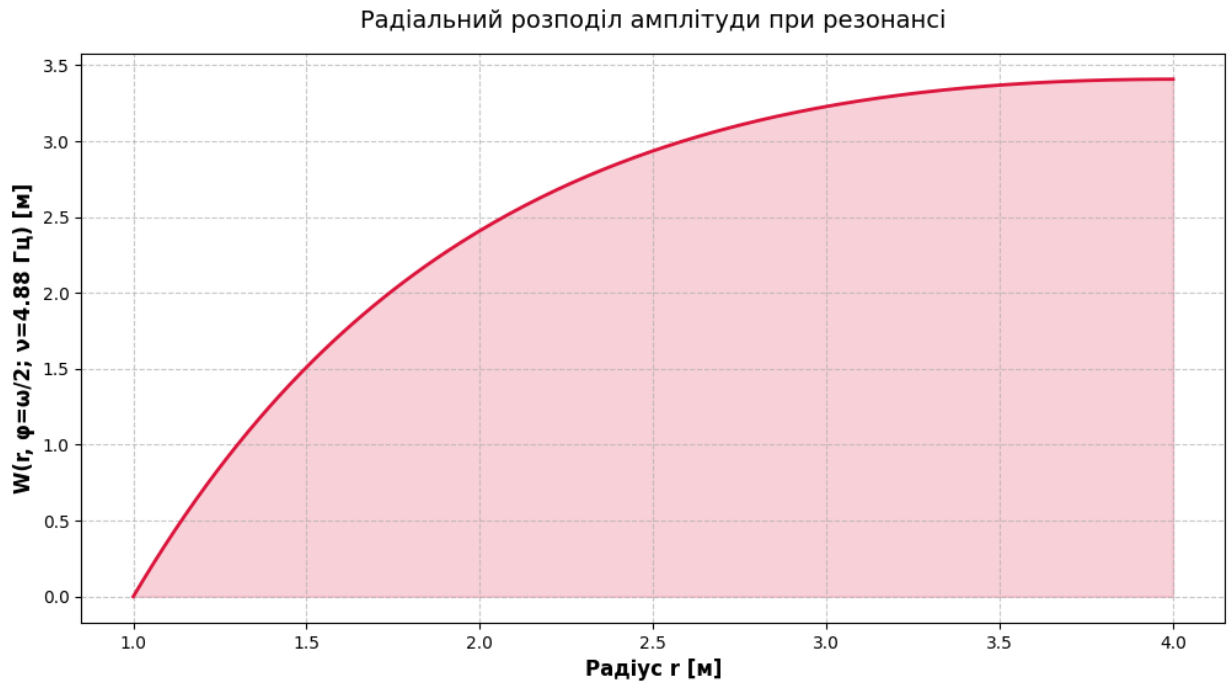
Розрахуємо резонансну частоту при $m = 1$:

$$v_{rez} = \sqrt{\frac{82}{7.85} \left(\left(\frac{\pi}{2 \ln 4} \right)^2 + 1 \right)} \approx 4.88$$

Для побудови графіків було побудовано програму на мові Python, використовуючи такі бібліотеки як *numpy*, *matplotlib.pyplot*, *mpl_toolkits.mplot3d*, *scipy.integrate*. Код програми для наступних двох графіків наведено у додатку А.

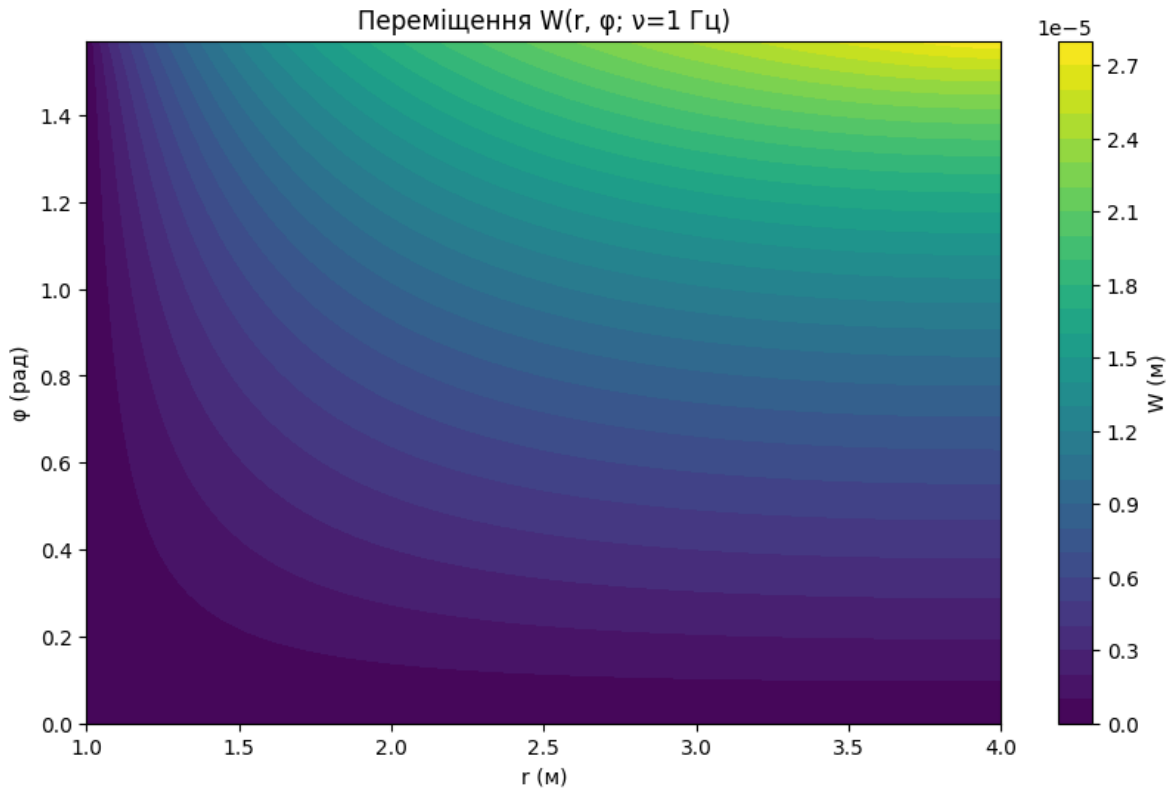


Графік показує залежність амплітуди коливань від частоти збудження. Різкі піки відповідають резонансним частотам, де система поглинає максимальну енергію.

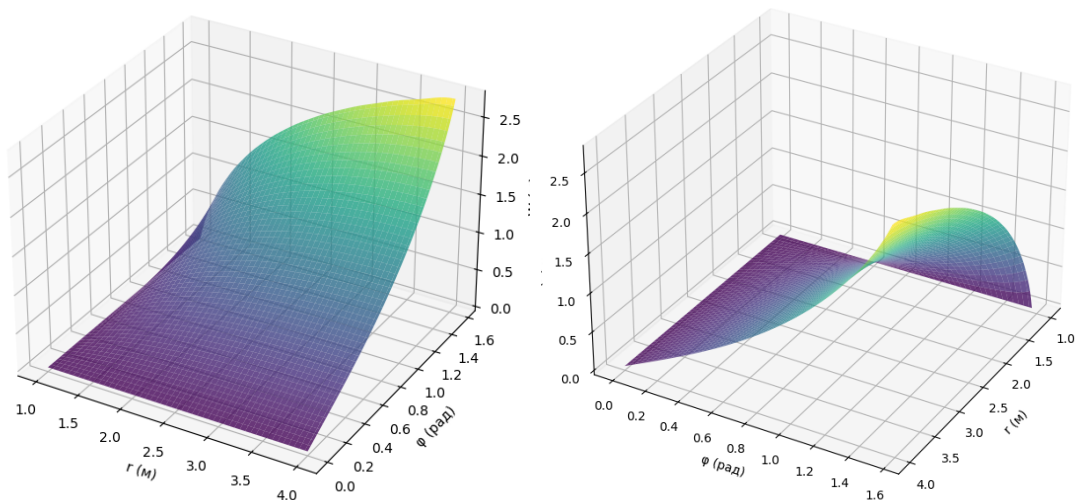


Ілюструє, як амплітуда коливань змінюється з радіусом у середині кутового сегмента ($\varphi = \omega/2$). Максимуми відповідають вузлам стоячої хвилі.

Наступні два графіки були реалізовані за допомогою додатку Б. Створимо візуалізацію розподілу переміщень у кільцевому сегменті під дією гармонічного навантаження з частотою 1 Гц та припустимо, що $p(r) = P_0 = 10^6$ - це дозволяє уникнути числового інтегрування для кожного k :



Максимальні значення W спостерігаються біля зовнішнього радіуса, який дорівнює 4 м, і зменшуються в напрямку до внутрішнього краю. Це вказує на те, що зовнішні ділянки кільця є більш навантаженими. Побудуємо 3D розподіл переміщень:



Наступні результати були отримані за допомогою додатку В. Для функції навантаження $p(r) = \sin\left(\frac{2\pi r}{b-a}\right)$ та для $\omega = \pi$ було покладено:

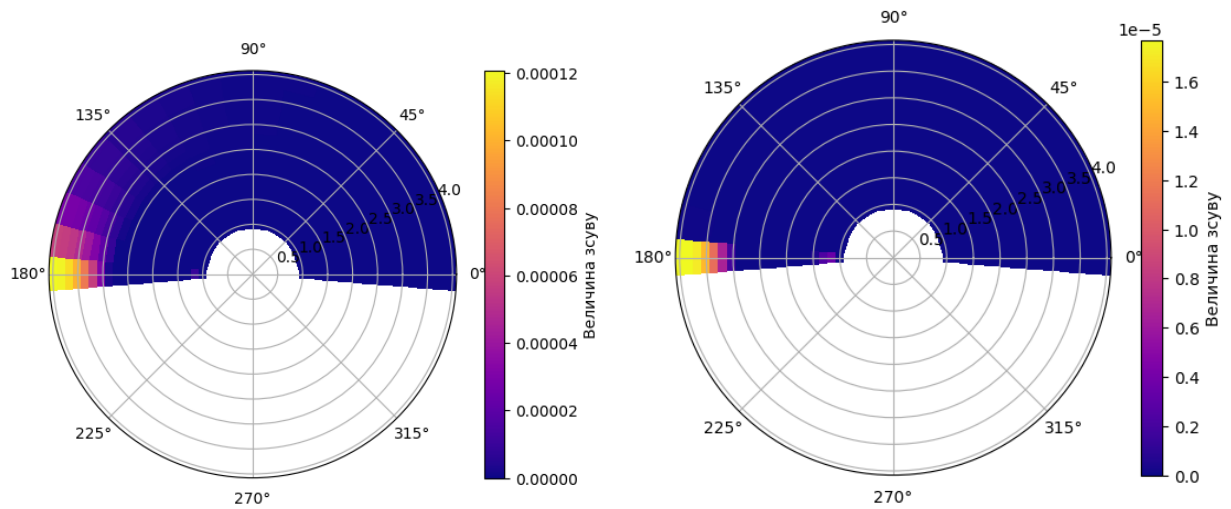


Рис. 1.1. $\nu = 1$ та $\nu = 100$

Модель не враховує нелінійні ефекти (пластичні деформації, тріщини), які можуть виникати при високих навантаженнях. Ці графіки демонструють, як зміна частоти навантаження впливає на розподіл деформацій у кільцевому сегменті. Результати вказують на критичні зони та режими роботи конструкції. Їх врахування дозволить підвищити надійність системи, уникнути резонансних руйнувань та оптимізувати використання матеріалів.

Тепер знайдемо напруження, що визначаються через похідні переміщення $W(r, \varphi)$:

Кутова компонента напруження:

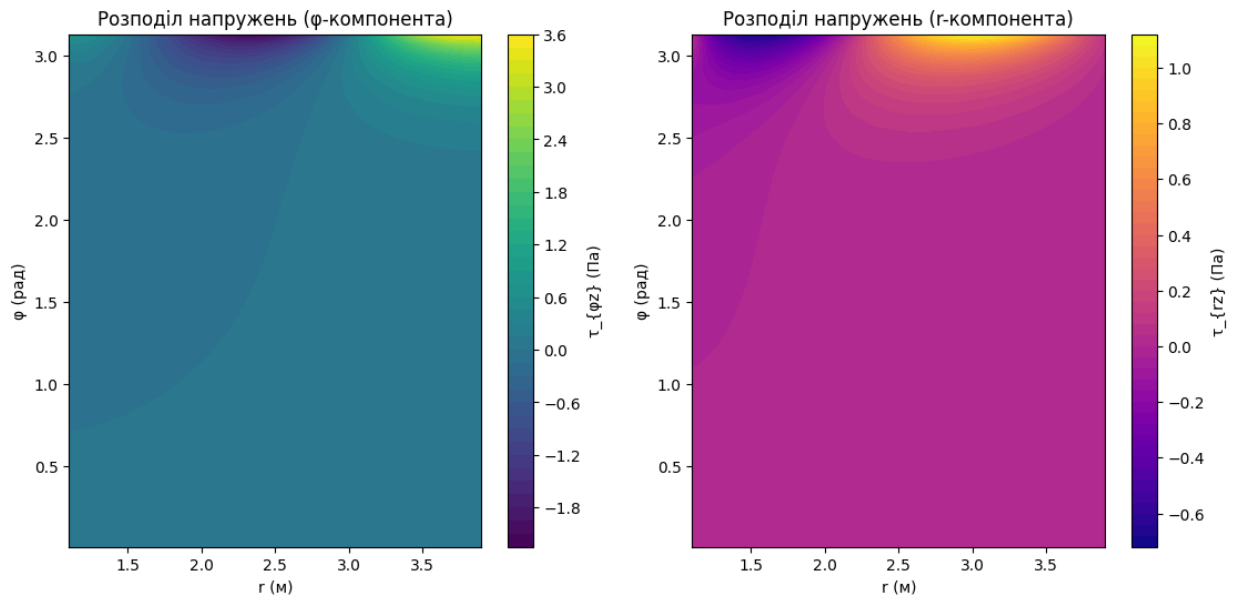
$$\tau_{\varphi z} = G \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{2}{\ln \frac{b}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} p_{\alpha} \frac{\cosh(N\varphi)}{\cosh(N\omega)} \sin\left(a_n \ln \frac{r}{a}\right)$$

Радіальна компонента напруження:

$$\tau_{rz} = G \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{2}{\ln \frac{b}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} p_{\alpha} \frac{a_n \sinh(N\varphi)}{rN \cosh(N\omega)} \cos\left(a_n \ln \frac{r}{a}\right)$$

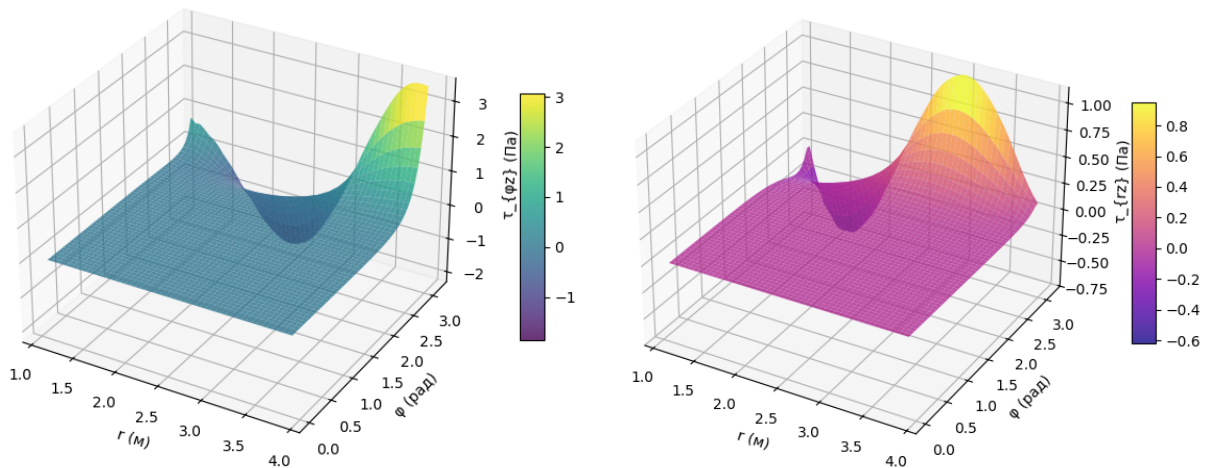
Отримані аналітичні вирази дозволять дослідити просторовий розподіл напружень у кільцевому сегменті. Побудуємо графіки напружень через знайдені $\tau_{\varphi z}, \tau_{rz}$.

Наступні графіки були зроблені за допомогою додатку Г:



ϕ -компонента напруження $\tau_{\phi z}$ має максимальні значення у зовнішній частині сегмента, де r наближається до b . Амплітуда досягає 3.6 Па, що вказує на концентрацію напружень біля зовнішнього краю. r -компонента напруження τ_{rz} має значення на порядок нижчі (до 1.0 Па) порівняно з $\tau_{\phi z}$. Найбільш критичні зони має зовнішній радіус.

Тепер побудуємо 3D візуалізацію:



Ці візуалізації підтверджують хвильовий характер розподілу напружень з чіткими максимумами та мінімумами.

ВИСНОВКИ

У даній роботі проведено комплексне дослідження нестационарної задачі поздовжнього зсуву для кільцевого сегменту. Використання аналітичних методів інтегральних перетворень, зокрема перетворення Лапласа за часом та синус-перетворення Мелліна за радіальною координатою, дозволило звести початкову задачу з частинними диференціальними рівняннями до одновимірної крайової задачі. Це забезпечило отримання точних аналітичних розв'язків, які описують напружено-деформований стан кільцевого сегменту під дією динамічних навантажень.

Чисельні розрахунки, виконані за допомогою програмного коду на мові Python, підтвердили коректність аналітичних результатів. Визначено резонансні частоти системи (наприклад, $v_{rez} \approx 4.88$ Гц для першої моди), що є критичними для прогнозування руйнувань конструкцій. Візуалізація розподілів переміщень (графіки радіальних та кутових залежностей) продемонструвала зони максимальних деформацій, які зосереджені біля зовнішнього радіуса $r = b$. Додатково, аналіз розподілу напружень виявив максимуми компонент $\tau_{\varphi z}, \tau_{rz}$ у зоні $r \rightarrow b$, що вказує на необхідність посилення цих ділянок у реальних інженерних системах.

Отримані результати створюють теоретичну базу для проектування безпечних кільцевих конструкцій у машинобудуванні, енергетиці та суднобудуванні. Подальші дослідження в зазначених напрямках дозволять розробити комплексні рекомендації для мінімізації ризиків резонансних руйнувань та підвищення експлуатаційної стійкості інженерних систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Grinchenko, V. T. Meleshko, V. V. (1981). Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. Kiev: Naukova Dumka
2. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю., Мойсеєнок О. П., Реут В. В. Дослідження напруженого стану півсмуги для випадку усталених коливань // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — 2019. — С. 53–56. DOI: 10.17721/1812-5409.2019/1.11
3. Калинець В. М., Хрущ В. В. Розрахунок власних частот коливальних систем // Коливання та хвилі. Львів : ЛНУ, 2012. С. 115–122.

РОЗДІЛ 2

ДОДАТКИ

2.1 Додаток А

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# ПАРАМЕТРИ СИСТЕМИ
a = 1.0      # Внутрішній радіус [м]
b = 4.0      # Зовнішній радіус [м]
omega = np.pi / 2 # Кут сегменту [рад]
rho = 7.85   # Густина матеріалу [г/см³]
G = 82.0    # Модуль зсуву [ГПа]
p0 = 1.0    # Амплітуда навантаження
k_max = 20  # Кількість мод для сумування

def alpha_n(k):
    return np.pi * (2 * k - 1) / (2 * np.log(b / a))

def N_k(k, nu):
    return np.sqrt(alpha_n(k)**2 - (rho / G) * nu**2 + 0j)

def integrand_p_alpha(r, k):
    return p0 * np.sin(alpha_n(k) * np.log(r / a)) / r

# Обчислення p_alpha для сталої навантаження
def p_alpha(k):
    result, _ = quad(integrand_p_alpha, a, b, args=(k))
    return result

# ФУНКЦІЯ ДЛЯ АМПЛІТУДИ

```

```

def W_amplitude(r, phi, nu):
    total = 0.0
    for k in range(1, k_max + 1):
        alpha = alpha_n(k)
        N = N_k(k, nu)
        p_alpha_val = p_alpha(k)
        term = (p_alpha_val / N) * np.sinh(N * phi) / \
            np.cosh(N * omega)
        term *= np.sin(alpha * np.log(r / a))
        total += term
    return (2 / (G * np.log(b / a))) * np.real(total)

```

1. ГРАФІК РЕЗОНАНСНИХ ПІКІВ

```

nu_values = np.linspace(0.1, 10, 300)
r_point = (a + b) / 2
phi_point = omega / 2

amplitude = [
    np.abs(W_amplitude(r_point, phi_point, nu))
    for nu in nu_values
]

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(nu_values, amplitude, color='#1f77b4',
         linewidth=2, label='k=1-20')
plt.xlabel('Частота [Гц]', fontsize=12,
          fontweight='bold')
plt.ylabel('|W(r, ; )| [м]', fontsize=12,
          fontweight='bold')
plt.title('Резонансні частоти для сталевого кільця ' +
         '(a=1 м, b=4 м)', fontsize=14)
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)
plt.axvline(x=4.88, color='red', linestyle=':',
            label='=4.88 Гц (k=1)')

```

```

plt.legend()
plt.xlim(0, 10)
plt.ylim(0, 0.8)
plt.show()

# 2. РОЗПОДІЛ  $W(r)$  ПРИ РЕЗОНАНСІ
nu_res = 4.88
r_values = np.linspace(a, b, 200)
W_values = [
    W_amplitude(r, omega/2, nu_res)
    for r in r_values
]

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(r_values, W_values, color='crimson',
         linewidth=2)
plt.xlabel('Радіус  $r$  [м]', fontsize=12,
          fontweight='bold')
plt.ylabel('W( $r, \omega/2; \nu=4.88$  Гц) [м]',
          fontsize=12, fontweight='bold')
plt.title('Радіальний розподіл амплітуди ' +
         'при резонансі', fontsize=14, pad=15)
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7)
plt.fill_between(r_values, W_values, alpha=0.2,
                 color='crimson')

plt.show()

```

2.2 Додаток Б

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Параметри

```

```

a = 1.0      # м
b = 4.0      # м
omega = np.pi / 2 # рад
G = 82e9     # Па (82 ГПа)
rho = 7850   # кг/м³ (7.85 г/см³)
P0 = 1e6     # Н/м²
nu = 1.0     # Гц
ln_ba = np.log(b / a)
K_max = 20

# Сітка
r = np.linspace(a, b, 100)
phi = np.linspace(0, omega, 100)
R, PHI = np.meshgrid(r, phi)

W = np.zeros_like(R)

for k in range(1, K_max + 1):
    alpha_n = np.pi * (2 * k - 1) / (2 * ln_ba)
    term_inside = alpha_n**2 - (rho / G) * (2 * np.pi * nu)**2

    if term_inside > 0:
        N_k = np.sqrt(term_inside)
    else:
        continue # Пропустити уявні моди

    p_alpha = (P0 / alpha_n) * (1 - (-1)**k)
    sinh_term = np.sinh(N_k * PHI)
    cosh_term = np.cosh(N_k * omega)
    sin_term = np.sin(alpha_n * np.log(R / a))

    term = (2 / (G * ln_ba)) * p_alpha * \
           (sinh_term / (N_k * cosh_term)) * sin_term
    W += term.real

```

```

# Графіки
plt.figure(figsize=(9, 7))
plt.contourf(R, PHI, W, levels=30, cmap='viridis')
plt.colorbar(label='W (м)')
plt.xlabel('r (м)')
plt.ylabel('φ (рад)')
plt.title('Переміщення W(r, φ) ; =1 Гц')
plt.show()

fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(
    R, PHI, W,
    cmap='viridis',
    alpha=0.8
)
ax.view_init(elev=30, azim=30)
ax.set_xlabel('r (м)')
ax.set_ylabel('φ (рад)')
ax.set_zlabel('W (м)')
plt.show()

```

2.3 Додаток В

```

import scipy.integrate as spint
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Параметри системи
a = 1
b = 4
omega = np.pi
v = 100

```

```

G = 82
rho = 7.85
quan = 20 # Розмірність сітки
count = 20 # Кількість членів у сумі

# Ініціалізація масиву для зсувів
fW = np.zeros((quan, quan))

# Створення сітки
r = np.linspace(a, b, quan)
phi = np.linspace(0, np.pi, quan)
R, Phi = np.meshgrid(r, phi)

# Обчислення альфа та N
alpha = np.array([
    (np.pi * (2 * k - 1)) / (2 * np.log(b/a))
    for k in range(count)
])
N = np.sqrt(alpha**2 + (rho/G) * v**2)

# Функція навантаження
def p(r, alpha_val):
    return np.sin(2*np.pi/(b-a) * r) * \
        np.sin(alpha_val * np.log(r/a))

# Функція для обчислення зсуву
def W(r, phi):
    total = 0.0
    for k in range(count):
        value_of_int = spint.quad(p, a, b,
                                   args=(alpha[k]))[0]
        sinh_term = np.sinh(N[k] * phi)
        cosh_term = np.cosh(N[k] * omega)
        sin_term = np.sin(alpha[k] * np.log(r / a))

```

```

        term = (value_of_int / G) * \
                (sinh_term / (N[k] * cosh_term)) * \
                sin_term
        total += term

    return (2 / (G * np.log(b/a))) * total

# Заповнення матриці зсувів
for i in range(quan):
    for j in range(quan):
        fW[i, j] = W(R[i, j], Phi[i, j])

# Візуалізація в полярних координатах
fig, ax = plt.subplots(
    subplot_kw={'projection': 'polar'}
)
c = ax.pcolormesh(
    Phi,
    R,
    fW,
    shading='auto',
    cmap='plasma',
    vmin=abs(fW).min(),
    vmax=abs(fW).max()
)

# Додавання кольорової шкали
plt.colorbar(c, ax=ax, label="Величина зсуву")
plt.show()

```

2.4 Додаток Г

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Параметри системи
a = 1.0          # Внутрішній радіус, м
b = 4.0          # Зовнішній радіус, м
omega = np.pi  # Кутівий сектор, рад
G = 82e9        # Модуль зсуву, Па
rho = 7850      # Густина, кг/м³
nu = 1.0        # Частота навантаження, Гц
count = 20      # Кількість мод

# Допоміжні функції
def alpha_k(k):
    return np.pi * (2 * k - 1) / (2 * np.log(b / a))

def N_k(k):
    term = alpha_k(k)**2 - (rho / G) * (2 * np.pi * nu)**2
    return np.sqrt(term) if term >= 0 else np.sqrt(-term) * 1j

def p_alpha(k):
    def integrand(r):
        return np.sin(2 * np.pi * r / (b - a)) * \
            np.sin(alpha_k(k) * np.log(r / a))
    return quad(integrand, a, b)[0]

def W(r, phi):
    total = 0.0
    ln_ba = np.log(b / a)
    for k in range(1, count + 1):

```

```

    N = N_k(k)
    term1 = p_alpha(k) * np.sinh(N * phi)
    term2 = N * np.cosh(N * omega)
    term3 = np.sin(alpha_k(k) * np.log(r / a))
    total += np.real(term1 / term2 * term3)
return (2 / (G * ln_ba)) * total

def stress_phi_z(r, phi):
    """Напруження  $\{z\}$  =  $G * W$ """
    h = 1e-5
    return G * (W(r, phi + h) - W(r, phi - h)) / (2 * h)

def stress_r_z(r, phi):
    """Напруження  $\{rz\}$  =  $G * W/r$ """
    h = 1e-5
    return G * (W(r + h, phi) - W(r - h, phi)) / (2 * h)

# Створення сітки
r_grid = np.linspace(a + 0.1, b - 0.1, 50)
phi_grid = np.linspace(0.01, omega - 0.01, 50)
R, Phi = np.meshgrid(r_grid, phi_grid)

# Обчислення напружень
Tau_phi_z = np.zeros_like(R)
Tau_r_z = np.zeros_like(R)

for i in range(R.shape[0]):
    for j in range(R.shape[1]):
        Tau_phi_z[i, j] = stress_phi_z(R[i, j], Phi[i, j])
        Tau_r_z[i, j] = stress_r_z(R[i, j], Phi[i, j])

# Візуалізація  $\{z\}$ 
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.contourf(R, Phi, Tau_phi_z, levels=50, cmap='viridis')

```

```

plt.colorbar(label='_z} (Па)')
plt.xlabel('r (м)')
plt.ylabel(' (рад)')
plt.title('Розподіл напружень _z} (-компонента)')
plt.show()

# Візуалізація _{rz}
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.contourf(R, Phi, Tau_r_z, levels=50, cmap='plasma')
plt.colorbar(label='_rz} (Па)')
plt.xlabel('r (м)')
plt.ylabel(' (рад)')
plt.title('Розподіл напружень _{rz} (r-компонента)')
plt.show()

# 3D Візуалізація _{z}
fig = plt.figure(figsize=(14, 10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(R, Phi, Tau_phi_z, cmap='viridis',
                      rstride=1, cstride=1, alpha=0.8)
ax.set_xlabel('r (м)')
ax.set_ylabel(' (рад)')
ax.set_zlabel('_z} (Па)')
plt.title('3D розподіл напружень _{z}')
fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=10)
plt.show()

# Кутівий розподіл при фіксованому r
r_fixed = (a + b) / 2
phi_values = np.linspace(0.01, omega - 0.01, 100)
tau_phi_values = [stress_phi_z(r_fixed, phi) for phi in phi_values]

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(phi_values, tau_phi_values, 'b-', linewidth=2)

```

```

plt.xlabel(' (рад)')
plt.ylabel('_{z} (Па)')
plt.title(f'Залежність _{{z}} від кута при r = {r_fixed} м')
plt.grid(True)
plt.show()

```

Радіальний розподіл при фіксованому

```
phi_fixed = omega / 2
```

```
r_values = np.linspace(a + 0.1, b - 0.1, 100)
```

```
tau_r_values = [stress_r_z(r, phi_fixed) for r in r_values]
```

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```
plt.plot(r_values, tau_r_values, 'r-', linewidth=2)
```

```
plt.xlabel('r (м)')
```

```
plt.ylabel('_{rz} (Па)')
```

```
plt.title(f'Залежність _{{rz}} від радіуса при = {phi_fixed:.2f} рад')
```

```
plt.grid(True)
```

```
plt.show()
```