Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2001.– Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 10–15

УДК 517.5

Г. М. Вартанян
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ – ОРЛИЧА

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки
Державного фонду фундаментальних досліджень України, грант Ф7/329-2001

Рекомендовано до друку науковим семінаром
з теорії функцій ОНУ 24.10.2001 р.

Доводиться твердження, що стосується атомічного розкладення функцій з дійсних просторів Харді – Орліча $\operatorname{Re} H(\psi)$.

Доказывается утверждение, касающееся атомического разложения функций из вещественных пространств Харди – Орлича $\operatorname{Re} H(\psi)$.

The statement concerning atomic characterization of functions from the real Hardy – Orlich spaces $\operatorname{Re} H(\psi)$ is proved.

Обозначим через Ψ множество положительных функций ψ, определенных и неубывающих на $(0;+\infty)$, допускающих представление $\psi(t)=\varphi(\ln t)$, в котором φ – выпуклая и неубывающая на $(-\infty;+\infty)$ функция. Как отмечено в [1], функция ψ принадлежит семейству Ψ в том и только в том случае, если ψ – абсолютно непрерывна на $[a;b]$ при всех значениях a,b $(0<a<b<+\infty)$, функция ψ' неотрицательна, а $t\psi'(t)$ не убывает на $(0;+\infty)$.

Пусть $\psi\in\Psi$. Мы скажем, что аналитическая в единичном круге $D=\{z\in C:|z|<1\}$ функция $F(z)$ принадлежит классу $H(\psi)$, если

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\psi\left(\left|F\left(re^{it}\right)\right|\right)dt<+\infty .$$

Нас будут интересовать только те классы $H(\psi)$, для которых $H^1\subset H(\psi)\subset H^p$ при всех p, $0<p<1$.

Хорошо известно, что если $F\in H^p$, $0<p<1$, то предел $\lim\limits_{r\to 1-0}\operatorname{Re}F\left(re^{it}\right)=f(t)$ существует в смысле теории обобщенных функций и f является линейным функционалом над соответствующим пространством основных функций.

Обозначим через $\operatorname{Re}H(\psi)$ совокупность граничных значений, понимаемых в смысле теории обобщенных функций, вещественных частей функций из $H(\psi)$. В 1974 г. Р. Койфман [5] доказал, что обобщенная функция f принадлежит классу $\operatorname{Re}H^p$, $\frac{1}{2}<p\le 1$ тогда и только тогда, когда $f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^p<+\infty$, где $a_k(x)$, $k=1,2,\ldots$ – атомы, а сходимость левого ряда понимается в смысле сходимости обобщенных функций.

Напомним, что вещественная функция $a(x)$ называется p-атомом, $\frac{1}{2} < p \le 1$, если $a(x)$ либо постоянная, либо удовлетворяет условиям:

$$\text{а) } \operatorname{supp} a(x) \subset I\,;\ \text{б) } \| a(x) \|_\infty \le |I|^{-1/p}\,;\ \text{в) } \int_0^{2\pi} a(x)dx = \int_I a(x)dx = 0\,.$$

Дадим аналогичное описание пространств $\operatorname{Re} H(\psi)$, назвав функцию $a(x)$ ψ-атомом, если $a(x)$ либо постоянная, либо удовлетворяет условиям:

$$\text{а) } \operatorname{supp} a(x) \subset I\,;\ \text{б) } \| a(x) \|_\infty \le \psi^{-1}\left(|I|^{-1}\right);\ \text{в) } \int_0^{2\pi} a(x)dx = \int_I a(x)dx = 0\,.$$

Здесь ψ^{-1} – обратная к ψ функция.

Нам понадобится обобщение интерполяционной теоремы Марцинкевича на случай пространств Орлича $L(\psi)$, которое можно получить, повторив с необходимыми изменениями все рассуждения, приведенные, например, в [3, стр. 34].

Теорема 1. *Пусть T – отображение $L^1 + L^p$, $1 < p < \infty$, во множество измеримых функций, обладающее свойствами*

1) $|T(f+g)(x)| \le |Tf(x)| + |Tg(x)|$;

2) $m\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \le (A_0/\lambda) \cdot \| f \|_{L^1}$, $f \in L^1$;

3) $m\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \le \left((A_1/\lambda) \cdot \| f \|_{L^p}\right)^p$, $f \in L^p$.

(*При $p = +\infty$ мы предполагаем, что $\|Tf\|_\infty \le A_1 \cdot \| f \|_\infty$.*)

Тогда, если p таково, что $L^p \subset L(\psi) \subset L^1$, и существуют постоянные c_1, c_2 $(0 < c_2 < 1 < p \cdot c_1 < +\infty)$ такие, что $c_1 x\psi'(x) \le \psi(x) \le c_2 x\psi'(x)$, то

$$\|Tf\|_\psi = \int_0^{2\pi} \psi\left(|Tf(x)|\right)dx \le C \int_0^{2\pi} \psi\left(2A_1|Tf(x)|\right)dx\,.$$

Введем в рассмотрение семейство функций $\overline{\Psi} \subset \Psi$, состоящее из тех функций $\psi \in \Psi$, для которых: а) $\psi(t)/t$ не возрастает на $(0;+\infty)$; б) $\psi(t)/t^p$ не убывает на $(0;+\infty)$ для любого p, $0 < p < 1$; в) существует α, $0 < \alpha < 1$, для которого функция $\varphi^\alpha(t) = \psi^\alpha(e^t)$ возрастает и выпукла на $(-\infty;+\infty)$; г) если $1 \le a \le b < +\infty$, то $\psi(b/a) \le C \cdot \psi(b)/\psi(a)$, где C – некоторая постоянная. Класс $\overline{\Psi}$ непуст. Так, например, функции $\psi(t) = t \ln^{-\alpha}(2+t)$, $\alpha > 0$ принадлежат $\overline{\Psi}$.

Теорема 2. *Пусть $\psi \in \overline{\Psi}$. Тогда $f \in \operatorname{Re} H(\psi)$ в том и только в том случае, когда*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k\,,\ \sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(|\lambda_k|\right) < +\infty\,, \tag{1}$$

где a_k, $k = 1,2,\ldots$ ψ – атомы, $\omega(t) = \psi(t)/\psi(1)$ при $t \ge 1$ и $\omega(t) = \psi(1)/\psi\left(t^{-1}\right)$ при $0 < t < 1$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ сходится к функции f в смысле сходимости обобщенных функций.

Доказательство. Пусть $\psi \in \overline{\Psi}$, a_k, $k = 1,2,...$ ψ – атомы и $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(|\lambda_k|) < +\infty$. Положим $g(t) = \psi(t)/\psi(1)$, при $t \geq 1$ и $g(t) = t$, при $0 < t < 1$ и оценим $\int_0^{2\pi} g\left(\left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(x)\right|\right) dx$. Так как функция $\psi \in \overline{\Psi}$, то частное $g(t)/t$ не возрастает, следовательно, при $x, y > 0$ имеем $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$. Кроме того, нетрудно проверить, что найдется постоянная C, что $g(a \cdot b) \leq C \cdot \omega(a) \cdot \omega(b)$ при $0 < a < 1 \leq b < +\infty$. Не ограничивая общности можно считать, что $|\lambda_k| < 1$ и $|a_k(x)| \geq 1$, для всех $x \in \operatorname{supp} a_k(x)$, $k = 1,2,...$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} g\left(\left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(x)\right|\right) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} g(|\lambda_k a_k(x)|) dx \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \omega(|\lambda_k|) \cdot \omega(|a_k(x)|) dx \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \omega(|\lambda_k|) \int_0^{2\pi} \omega\left(\psi^{-1}\left(|I_k^{-1}|\right)\right) dx \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \omega(|\lambda_k|) < +\infty,$$

Отсюда вытекает, что $\int_0^{2\pi} \psi\left(\left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(x)\right|\right) dx < +\infty$. Далее, для произвольного ψ – атома $a(x)$ установим соотношение $\int_0^{2\pi} \psi(|\tilde{a}(x)|) dx < C < +\infty$ с постоянной C не зависящей от выбора функции $a(x)$. Действительно, в силу теоремы Рисса об ограниченности в L^p, $1 < p < +\infty$ сопряженной функции и теоремы 1 для $\psi^2(t)$, имеем

$$\int_E \psi(|\tilde{a}(x)|) dx \leq (m\{E\})^{1/2} \cdot \left(\int_E \psi^2(|\tilde{a}(x)|) dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C \cdot (m\{E\})^{1/2} \cdot \left(\int_E \psi^2(|a(x)|) dx\right)^{1/2} \leq (m\{E\})^{1/2} \cdot (m\{I\})^{-1/2}. \qquad (2)$$

Здесь $E \subset [0;2\pi]$ – произвольное измеримое множество и $I = \operatorname{supp} a(x)$. Если $|I| \geq 1$, то доказываемое очевидно. Для $|I| < 1$ поступая аналогично доказательству атомического разложения функций из $\operatorname{Re} H^1$ [4, стр. 188], обозначим через I^* интервал длины $3|I|$ с тем же центром, что и у I, получим

$$\int_{I^*} \psi(|\tilde{a}(x)|) dx \leq C(m\{I^*\})^{1/2} \cdot (m\{I\})^{-1/2} = \sqrt{3}C < +\infty.$$

Нам остается оценить интеграл по множеству $[0;2\pi] \setminus I$. Для этого воспользуемся очевидным неравенством $\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \geq C \cdot \rho(x,y)$, $(0 \leq x, y \leq 2\pi)$, где $\rho(x,y)$ – длина наименьшей из дуг единичной окружности, соединяющих точки e^{ix} и e^{iy}, а $C > 0$ некоторая постоянная. Имеем

$$\tilde{a}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a(t)}{\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a(t)}{\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}} - \frac{a(t)}{\operatorname{tg}\frac{x-\tau}{2}}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a(t)\sin\frac{t-\tau}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}\sin\frac{x-\tau}{2}} dt.$$

Здесь τ – центр интервала I.

Так как $\|a\|_\infty \le \psi^{-1}\left(|I|^{-1}\right)$, то для всех $x \in [0;2\pi]\setminus I^*$ выполняется неравенство

$$|\widetilde{a}(x)| \le C\int_I \frac{\psi^{-1}\left(|I|^{-1}\right)\rho(t,\tau)}{\rho(x,t)\rho(x,\tau)}dt \le C\frac{|I|^2}{\rho^2(x,I)}\psi^{-1}\left(|I|^{-1}\right),$$

где $\rho(x,I) = \inf\limits_{t\in I}\rho(x,t)$.

Поскольку $\psi \in \overline{\Psi}$, то $\left(\psi(t)/t\right)' \le 0$ и $\left(\psi(t)/t^{2/3}\right)' \ge 0$ значит при $t,x>0$

$$t\psi'(t) \le \psi(t) \le \frac{3}{2}t\psi'(t),$$

$$\int_1^x \frac{\psi'(t)}{\sqrt{t}}dt \le 4\frac{\psi(x)}{x} + C.$$

Следовательно

$$\int_{[0;2\pi]\setminus I^*} g\left(|\widetilde{a}(x)|\right)dx \le C\int_{[0;2\pi]\setminus I^*} g\left(|I|^2\frac{\psi^{-1}\left(|I|^{-1}\right)}{\rho^2(x,I)}\right)dx \le C\int_{[0;2\pi]\setminus I^*}\frac{\omega\left(|I|^2\right)}{|I|}\omega\left(\frac{1}{\rho^2(x,I)}\right)dx \le$$

$$\le C_1\frac{\omega\left(|I|^2\right)}{|I|}\int_1^{|I|^{-2}}\frac{\psi'(t)}{\sqrt{t}}dt + C_2 \le C_3\frac{\omega\left(|I|^2\right)}{|I|}|I|\psi\left(|I|^{-2}\right) + C_2 \le C < +\infty.$$

В итоге получаем

$$\int_0^{2\pi} g\left(\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\widetilde{a}_k(t)\right|\right)dt \le C\sum_{k=1}^{+\infty}\omega\left(|\lambda_k|\right) < +\infty,$$

а значит

$$\int_0^{2\pi}\psi\left(\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\left(a_k(t) + i\widetilde{a}_k(t)\right)\right|\right)dt < +\infty.$$

Рассмотрим теперь аналитические в единичном круге D функции $A_k(z)$, для которых $\lim\limits_{r\to 1-0} A_k\left(re^{it}\right) = a_k(t) + i\widetilde{a}_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$. Последовательность $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k A_k(z)$ фундаментальна в пространстве $H(\psi)$, полнота которого очевидна, поэтому функция $F(z) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k A_k(z) \in H(\psi)$. Следовательно $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k a_k(x) \in \operatorname{Re} H(\psi)$. Достаточность представления (1) доказана.

Установим необходимость. Пусть сначала $f \in L^\infty$ и аналитическая в единичном круге D функция $F(z)$ такова, что $\lim\limits_{r\to 1-0} F\left(re^{it}\right) = f(t) + i\widetilde{f}(t)$. Для некасательной максимальной функции F^* [2] справедливо неравенство

$$\left\|F^*\right\|_\psi = \int_0^{2\pi}\psi\left(F^*(t)\right)dt < +\infty. \tag{3}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\left\|F^*\right\|_\psi = 1$.

Рассмотрим следующие открытые множества:

$$E_0 = [0;2\pi],\ E_k = \left\{x \in [0;2\pi]: F^*(x) > \psi^{-1}\left(2^k\right)\right\},\ k = 1,2,\ldots$$

Если E_k, $k = 1,2,\ldots$ – непусто, то это множество представимо в виде объединения непересекающихся интервалов: $E_k = \bigcup\limits_j I_{k,j}$, $I_{k,j}\bigcap I_{k,i} = \varnothing$, $j \ne i$, $i,j,k = 1,2,\ldots$.

Положим

$$h_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt,$$

$$h_k(x)=\begin{cases}\left|I_{k,j}\right|^{-1}\int\limits_{I_{k,j}} f(t)dt, & x\in I_{k,j},\ j=1,2,\ldots,\\ f(t), & x\notin E_k,\end{cases}\qquad k=1,2,\ldots.$$

Согласно определению $h_k(x)$ $k=0,1,2,\ldots$ и конечности для почти всех $x\in[0;2\pi]$ функции $F^*(x)$, имеем $\lim\limits_{k\to+\infty} h_k(x)=f(x)$ для почти всех $x\in[0;2\pi]$. Значит

$$f(x)=h_0(x)+\sum_{k=0}^{+\infty}\left[h_{k+1}(x)-h_k(x)\right].$$

Из очевидного вложения $E_{k+1}\subset E_k$ вытекает, что $h_{k+1}(x)=h_k(x)=f(x)$ при $x\notin E_k$. Следовательно,

$$f(x)=h_0(x)+\sum_{k=0}^{+\infty}\chi_{E_k}\left[h_{k+1}(x)-h_k(x)\right],$$

где χ_{E_k} – характеристическая функция E_k. Поскольку $E_k=\bigcup\limits_j I_{k,j}$, то

$$f(x)=h_0(x)+\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_j b_{k,j}(x),$$

где $b_{k,j}(x)=\chi_{I_{k,j}}\left[h_{k+1}(x)-h_k(x)\right]$, $k=0,1,2,\ldots$, $j\in N$. С помощью функций $b_{k,j}$ построим нужное нам разложение функции f на атомы. Прежде всего отметим, что

$$\int\limits_{I_{k,j}} b_{k,j}(x)dx=0,\ \operatorname{supp} b_{k,j}\subset I_{k,j},\ k=0,1,2,\ldots,\ j\in N.$$

Докажем неравенство $\|h_k(x)\|_\infty\le C\psi^{-1}\left(2^k\right)$, где C – постоянная, не зависящая от f и k. Очевидно, что $|h_0(x)|\le\frac{1}{2\pi}|F(0)|\le C<+\infty$. Пусть теперь $k=1,2,\ldots$, $I=I_{k,j}$ – один из интервалов и $e^{i\alpha_1}$, $e^{i\alpha_2}$ – концевые точки дуги $J=\left\{e^{ix}:x\in I\right\}$. Тогда $\alpha_1,\alpha_2\notin E_k$ и потому $F^*(\alpha_1)\le\psi^{-1}\left(2^k\right)$, $F^*(\alpha_2)\le\psi^{-1}\left(2^k\right)$. Следовательно, $|F(z)|\le\psi^{-1}\left(2^k\right)$, $z\in\Gamma(\alpha_1)\cup\Gamma(\alpha_2)$. Здесь $\Gamma(t)=\Gamma_{1/2}(t)$ [4, стр. 472] – угловой сектор с вершиной в точке e^{it}.

Так как $\lim\limits_{k\to+\infty} m\{E_k\}=0$, то можно считать, что $|I|\le 1/2$. Поэтому множества $\partial\{\Gamma(\alpha_1)\setminus\{z:|z|=1/2\}\}$ и $\partial\{\Gamma(\alpha_2)\setminus\{z:|z|=1/2\}\}$ пересекаются в единственной точке $\rho e^{i\alpha}$, $1/2<\rho<1$, $\alpha\in I$. Пусть γ_1 и γ_2 – отрезки, соединяющие точки $e^{i\alpha_1}$, $e^{i\alpha_2}$ и $\rho e^{i\alpha}$. Из непрерывности функции $F(z)$ при $|z|<1$ и неравенства (2) вытекает, что $|F(z)/z|\le 2\psi^{-1}\left(2^k\right)$, $z\in\gamma_1\cup\gamma_2$, $|z|<1$.

Рассмотрим область Ω, ограниченную отрезками γ_1, γ_2 и дугой $J(I)=\left\{e^{ix}:x\in I\right\}$. Пусть $\Omega^{(r)}=\Omega\cap\{z:|Z|<r\}$, $1/2<r<1$ и $re^{i\alpha_p^{(r)}}=\gamma_p\cap\{z:|z|=r\}$, $p=1,2$. Тогда по теореме Коши $\int\limits_{\partial\left(\Omega^{(r)}\right)}\frac{F(z)}{z}dz=0$. Учитывая равенство

$$\int_L \frac{F(z)}{z}dz = i\int_\alpha^\beta F\left(re^{ix}\right)dx, \text{ где } L = \left\{z = re^{ix} : 0 < \alpha < \beta < 2\pi\right\},$$

получаем

$$\left|\int_{\left(\alpha_1^{(r)},\alpha_2^{(r)}\right)} F(re^{ix})dx\right| \le \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} |f(z)/z|\,d|z| \le 2\psi^{-1}\left(2^k\right)\left(|\gamma_1|+|\gamma_2|\right).$$

По предположению $f \in L^\infty$. В этом случае для любого измеримого множества E

$$\lim_{r\to 1-0}\int_E \left|F(re^{ix}) - f(x) - i\tilde{f}(x)\right|dx = 0.$$

Наконец, учитывая, что $\lim\limits_{r\to 1-0}\alpha_1^{(r)} = \alpha_1$, $\lim\limits_{r\to 1-0}\alpha_2^{(r)} = \alpha_2$, имеем

$$\left|\int_I \left(f(x) + i\tilde{f}(x)\right)dx\right| \le 2\psi^{-1}\left(2^k\right)\left(|\gamma_1|+|\gamma_2|\right).$$

Так как отношение $\left(|\gamma_1|+|\gamma_2|\right)/|I|$ ограничено сверху некоторым числом $C < +\infty$, то

$$\left|\int_I \left(f(x) + i\tilde{f}(x)\right)dx\right| \le C|I|\psi^{-1}\left(2^k\right). \tag{4}$$

В итоге $|h_k(x)| \le C\psi^{-1}\left(2^k\right)$ для всех $x \in E_k$, $k = 0,1,2,\ldots$. Если $x \notin E_k$, то (4) непосредственно вытекает из определения функций h_k. Следовательно, $\left\|b_{k,j}(x)\right\|_\infty \le 3C\psi^{-1}\left(2^k\right)$, а это значит, что функции

$$a_{k,j}(x) = \psi^{-1}\left(\left|I_{k,j}\right|^{-1}\right)\Big/\left(3C\psi^{-1}\left(2^k\right)\right)b_{k,j}(x),\ k = 0,1,2,\ldots\ \ j \in N,$$

являются ψ – атомами.

Преобразовав выражение для f, получим $f(x) = \lambda_0 + \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\sum\limits_j \lambda_{k,j}a_{k,j}(x)$, где

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt,\ \lambda_{k,j} = 3C\psi^{-1}\left(2^k\right)\Big/\psi^{-1}\left(\left|I_{k,j}\right|^{-1}\right).$$

Учитывая (3)

$$\omega\left(|\lambda_0|\right) + \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_j \omega\left(\left|\lambda_{k,j}\right|\right) \le \omega\left(|F(0)|\right) + C\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k m\{E_k\} \le C_1 + C_2\left\|F^*\right\|_\psi < +\infty.$$

Используя плотность ограниченных функций в пространстве $H(\psi)$, мы можем найти искомое разложение для всех функций из $\operatorname{Re} H(\psi)$. Теорема полностью доказана.

1. **Арестов В. В.** О неравенствах С. Н. Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР.– 1979.– Т. 245, № 6.– С. 1289–1292.
2. **Вартанян Г. М.** О скорости приближения функций из классов Харди – Орлича H_φ // Матем. заметки.– 1991.– Т. 50, вып. 5.– С. 23–31.
3. **Гарнет Дж.** Ограниченные аналитические функции.– М.: Мир, 1984.– 469 с.
4. **Кашин Б. С., Саакян А. А.** Ортогональные ряды.– М.: Наука, 1984.– 496 с.
5. **Coifman R. P.** A real variable characterization of H^p // Stud. Math.– 1974.– V. 51, N. 3.– P. 269–274.