Одеський національний університет імені І. І. Мечнікова Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти "бакалавр"

«Асимптотична поведінка мірозначних розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь»

«Asymptotic behavior of measure-valued solutions of stochastic differential equations»

Виконала: здобувачка денної форми навчання спеціальності 111 Математика
Освітня програма "Математика"
Мартинова Маргарита Владиславівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Білозерова М. О.
Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, проф. Євтухов В.М.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від «_____» ________ р.
Завідувач кафедри
____________ ________________

Захищено на засіданні ЕК № _______
Протокол № _____ від «_____» _____ р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
____________ ____________________

Одеса — 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Дану роботу присвячено дослідженню розв'язків стохастичних диференціальних равнянь зі взаємодією. Інтерес до таких об'єктів викликаний, зокрема, явищем перетинності. Коротко кажучи, перетинність являє собою контраст між реалізацією та середньою характеристикою швидкості або щільності в турбулентному потоці. Стаття [1] була однією з перших робіт, присвячених цьому явищу. Важливий випадок перетинності представлений поведінкою частинок, що переносяться випадковим полем [2]. Частинки можуть рухатися і водночас взаємодіяти одна з одною. У цьому випадку коефіцієнти відповідного стохастичного диференціального рівняння залежать від деякої характеристики положень, що описує таку ситуацію. Якраз таким випадкам відповідають стохастичні диференціальні рівняння зі взаємодією. Отже тема роботи є актуальною.

Мета і завдання дослідження Метою даної роботи є дослідження поведінки розв'язків одного класу стохастичних диференціальних рівнянь за взаємодією.

Основним завданням дипломної роботи є встановлення асимптотичної поведінки мірозначних розв'язків класу рівнянь, що розглядаються.

Об'єкт дослідження

Основним об'єктом роботи є стохастичні диференціальні рівняння зі взаємодією:

$$\begin{cases} dx(u,t) = \left(B \int_{\mathbb{R}} v\mu_t(dv) + A\right) x(u,t)dt \\ x(u,0) = u, \quad \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}, \quad A, B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Тут μ_0 - ймовірнісна міра, що грає роль розподілу маси частинок у момент часу t, $x(u,\cdot)$ - траєкторія частинки, яка залишила точку u в нульовий момент часу.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ПРИКЛАДИ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ

Розглянемо ймовірністний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а також послідовність незалежних $\mathbb{R}^d$-значних вінерівських процесів $\{\omega_k; k \geq 1\}$. Процеси $\{\omega_k; k \geq 1\}$ будуть відігравати роль випадкового середовища, в якому рухаються частинки, що утворюють стохастичний потік. Тоді стохастичне диференціальне рівняння, що описує такий рух має вид:

$$\begin{cases} dx(u,t) = a(x(u,t), \mu_t, t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x(u,t), \mu_t, t)d\omega_k(t) \\ x(u,0) = u, \quad \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot, t)^{-1}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Тут μ_0 - деяка ймовірнісна міра на $\mathbb{R}^d$, що грає роль початкового розподілу маси частинок, $\{x(u,t); t \geq 0\}$ - траєкторія частинки, що вийшла з точки $u \in \mathbb{R}^d$, $\mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot, t)^{-1}$ - образ міри μ_0 при відображенні $x(\cdot, t)^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, іншими словами μ_t - маса частинок в момент часу t. Коефіцієнти a та $b_k (k \geq 1)$ приймають значення в $\mathbb{R}^d$ та $\mathbb{R}^{d \times d}$ відповідно та залежать від $x(u,t)$, тобто від положення частинки, що стартувала з u, а також від μ_t, тобто, від деякої характеристики розподілу інших частинок.

Розглянемо спочатку випадок детермінованого рівняння для опису руху системи частинок зі взаємодією.

Нехай всі b_k в (1.1) дорівнюють нулю, а коефіцієнт a є наступним:

$$a(r, \mu, t) = \int_{R^d} f(r, v)\mu(dv),$$

де f - обмежена неперервна функція на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Нехай при цьому міра μ_0 має вигляд

$$\mu_0 = \sum_{k=1}^{N} p_k \delta_{u_k},$$

де $p_k > 0$, $k = 1, \ldots, N$, $\{\ldots, u_k, \ldots; k = 1, \ldots, N\}$ - різні елементи R^d. Тоді міра mu_t може бути записана у вигляді:

$$\mu_t = \sum_{k=1}^{N} p_k \delta_{u_k(t)}.$$

Тепер (1.1) запишеться так:

$$\begin{cases} dx(u,t) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x(u,t), u_k(t))dt \\ x(u,0) = u, \quad u \in R^d. \end{cases} \tag{1.2}$$

Позначимо для $k = 1, \ldots, N$, $y_k(t) = x(u_k, t)$. Тоді для y_k, $k = 1, \ldots, N$, отримаємо звичайну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_k(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} p_j f(y_k(t), y_j(t))dt \\ y_k(0) = u_k, \quad k = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{1.3}$$

В (1.3) функції y_k можна розглядати як траєкторії частинок, що мають масу p_k та взаємодіють одна з одною (функція f описує взаємодію).

Розглянемо деякі приклади. Нехай $d = 1$,

$$a(r, \mu, t) = \int\limits_{\mathbb{R}} (r - v)\mu(dv) = r - \int\limits_{\mathbb{R}} v\mu(dv), \quad b_k \equiv 0.$$

Такий вибір коефіцієнта відповідає ситуації, коли всі частинки відштовхуються від спільного центра мас.

Тоді рівняння (1.1) приймає вид:

$$\begin{cases} dx(u,t) = (x(u,t) - \int v\mu_t(dv))dt \\ x(u,0) = u \end{cases}$$

Приклад 1.1. Нехай
$$\mu_0 = \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_3.$$

Тоді
$$\int_{\mathbb{R}} v\mu_t(dv) = \int_{\mathbb{R}} x(v,t)\mu_0(dt) = \frac{1}{3}x(1,t) + \frac{1}{3}x(2,t) + \frac{1}{3}x(3,t).$$

Тому розглянемо $y_1(t) = x(1,t)$, $y_2(t) = x(2,t)$ та $y_3(t) = x(3,t)$. Для них тепер отримаємо наступну задачу Коші

$$\begin{cases} dy_1(t) = \big(y_1(t) - \frac{1}{3}\left(y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)\right)\big)\,dt \\ dy_2(t) = \big(y_2(t) - \frac{1}{3}\left(y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)\right)\big)\,dt \\ dy_3(t) = \big(y_3(t) - \frac{1}{3}\left(y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)\right)\big)\,dt \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2, \quad y_3(0) = 3 \end{cases} \tag{1.4}$$

Розв'язання

1. Спрощення системи

Зауважимо, що в кожному рівнянні системи є однаковий доданок $-\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$. Введемо нову змінну $z = y_1+y_2+y_3$. система перетворюється:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} &= y_1 - \frac{z}{3} \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2 - \frac{z}{3} \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_3 - \frac{z}{3} \end{cases}$$

Знайдемо похідну z по часу:
$$\frac{dz}{dt} = \frac{d(y_1 + y_2 + y_3)}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + \frac{dy_3}{dt}.$$

Підставимо вирази для $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dy_2}{dt}$ та $\frac{dy_3}{dt}$:
$$\frac{dz}{dt} = \left(y_1 - \frac{z}{3}\right) + \left(y_2 - \frac{z}{3}\right) + \left(y_3 - \frac{z}{3}\right).$$

Згрупуємо доданки:

$$\frac{dz}{dt} = (y_1 + y_2 + y_3) - z = z - z = 0.$$

Отже, z - константа. З початкових умов:

$$z(0) = y_1(0) + y_2(0) + y_3(0) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Тому, $z(t) = 6$ для всіх t.

2. Перетворення системи

Підставимо $z = 6$ в систему:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} & = y_1 - 2 \\ \frac{dy_2}{dt} & = y_2 - 2 \\ \frac{dy_3}{dt} & = y_3 - 2 \end{cases}$$

3. Розв'язування окремих рівнянь

Кожне рівняння має вигляд:

$$\frac{dy_i}{dt} = y_i - 2.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy_i}{y_i - 2} = dt.$$

Інтегруємо обидві частини:

$$\ln |y_i - 2| = t + C_i.$$

Розв'язок відносно y_i:

$$y_i(t) = C_i e^t + 2.$$

4. Застосування початкових умов:

Для $y_1(t)$:

$$y_1(0) = C_1 e^0 + 2 = 1 \Rightarrow C_1 = -1;$$
$$y_1(t) = -e^t + 2.$$

Для $y_2(t)$:

$$y_2(0) = C_2 e^0 + 2 = 2 \Rightarrow C_2 = 0;$$
$$y_2(t) = 2.$$

Для $y_3(t)$:

$$y_3(0) = C_3 e^0 + 2 = 3 \Rightarrow C_3 = 1;$$
$$y_3(t) = e^t + 2.$$

5. Розв'язок системи:

$$\begin{cases} y_1(t) & = -e^t + 2 \\ y_2(t) & = 2 \\ y_3(t) & = e^t + 2 \end{cases}$$

Тепер, для довільної початкової умови u траєкторія частки, що стартувала з u, описується рівнянням

$$dx(u,t) = (x(u,t) - 2)dt.$$

Таким чином, зараз $\forall t \geqslant$: $\forall u \in \mathbb{R} : x(u,t) = (u-2)e^t + 2$,

$$\mu_t = \frac{1}{3}\delta_{(-e^t+2)} + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_{(e^t+2)}.$$

Перейдемо тепер до загального випадку стохастичного диференціального рівняння (1.1).

Означення 1.1. Розв'язком (сильним розв'язком) задачі Коші (1.1), що відповідає заданим коефіцієнтам a і b і початковій мірі μ_0 називається випадкове $\mathbb{R}^d$ -значне поле $x(u,t), u \in \mathbb{R}^d, t \in [0;+\infty)$ таке, що

1) при кожному $t \geqslant 0$ звуження x на інтервал $[0;t]$ є $\mathcal{B}_d \otimes \mathcal{B}_{[0;t]} \otimes \mathcal{F}_t$ вимірним (тут $\mathcal{B}_d$ і $\mathcal{B}_{[0;t]}$ - борелівські σ-алгебри в $\mathbb{R}^d$ і $[0;t]$ відповідно),

2) при фіксованому $u \in \mathbb{R}^d$ з ймовірністю 1 за кожного $t \geqslant 0$ є справедливим інтегральний аналог (1.1)
3) з ймовірністю 1 виконано умову Коші $x(u, 0) = u$ для всіх $u \in \mathbb{R}^d$

Далі для доказу наступної теореми знадобиться твердження про образи випадкових мір за умови випадкових вимірних відображень.

Лема 1.1. *Нехай $\mu \in \mathcal{M}$, $f : \mathcal{X} \times \Omega \to \mathcal{X}$ - вимірне відображення. Тоді образ $\mu \circ f^{-1}$ - випадковий елемент $\mathcal{M}$.*

Далі розглянута теорема містить достатні умови для існування та єдиності розв'язку рівняння, яке є еквівалентним до (1.1).

Теорема 1.1. *Розглянемо*

$$\begin{cases} dx(u,t) = a(x(u,t),\mu_t,t)dt + \int_{\mathbb{R}^d} b(x(u,t),\mu_t,t,q)W(dt,dq) \\ x(u,0) = u, \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot, t)^{-1}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Нехай коефіцієнти a і b в (1.5) задовольняють наступній умові Липшиця щодо просторової і мірозначної змінних

$\exists C > 0 : \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d, \nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M} : \forall_t \geqslant 0 :$

$$||a(u_1,\nu_1,t) - a(u_2,\nu_2,t)|| +$$
$$+ (\int_{\mathbb{R}^d} ||b(u_1,\nu_1,t,q) - b(u_2,\nu_2,t,q)||^2 dq)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant C(||u_1 - u_2|| + \gamma(\nu_1,\nu_2)).$$

Крім того, нехай функції a і b неперервні за змінними x, μ і t (у нормі простору L_2 на $\mathbb{R}^d$.

Тоді (1.5) *має розв'язок, визначений* $[0; +\infty)$, *який є єдиним.*

Доведення. Використаємо для доказу метод послідовних наближень. Нехай $x_0(u, t) = u \quad \forall u \in \mathbb{R}^d, t \geqslant 0$. Звідси μ_t^0 тотожно рівна μ_0. Перейдемо тепер до $x_1(u,t)$:

$$x_1(u,t) = u + \int_0^t a(x_1(u,s),\mu_s^0,s)ds+$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(x_1(u,s),\mu_s^0,s,q)W(ds,dq).$$

Треба переконатися, що x_1 має вимірну за u,t модифікацію. Розглянемо оцінку для $u_1,u_2 \in \mathbb{R}^d$

$$||x_1(u_1,t) - x_1(u_2,t)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant ||u_1 - u_2||^2 + 3(\int_0^t ||a(x_1(u_1,s),\mu_0,s) - a(x_1(u_2,s),\mu_0,s)||ds)^2+$$

$$+3||\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (b(x_1(u_1,s),\mu_0,s,q) - b(x_1(u_2,s),\mu_0,s,q))W(ds,dq)||^2.$$

Звідси,

$$M\sup_{[0;T]} ||x_1(u_1,s) - x_1(u_2,s)||^2 \leqslant C_1||u_1 - u_2||^2. \tag{1.6}$$

Згідно з теоремою Колмогорова x_1 має безперервну за сукупністю змінних модифікацію.

Перейдемо до $\mu_t^1 = \mu_0 \circ x_1(\cdot,t)^{-1}, t \geqslant 0$. Згідно з 1.1 μ_t^1 – випадкова міра при кожному $t \geqslant 0$. Означимо x_2 як розв'язок рівняння

$$x_2(u,t) = u + \int_0^t a(x_2(u,s),\mu_s^1,s)ds+$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(x_2(u,s),\mu_s^1,s,q)W(ds,dq).$$

Застосовуючи аналогічну процедуру, отримаємо послідовність випадкових процесів $x_n, \mu^n; n \geqslant 1$, для якої при кожному $n \geqslant 1$

$$\mu_t^1 = \mu_0 \circ x_1(\cdot,t)^{-1}, t \geqslant 0,$$

$$dx_{n+1}(u,t) = a(x_{n+1}(u,t),\mu_t^n,t)dt+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^d} b(x_{n+1}(u,t),\mu_t^n,t,q)W(ds,dq).$$

Щоб перевірити коректність такої побудови з'ясуємо, чи для кожного $n \geqslant 1$ x_n є вимірним за сукупністю змінних, а також що рівняння для x_{n+1} має єдиний розв'язок. Використаємо методу математичної індукції для доказу наступної оцінки. Для кожного $n \geqslant 1$

$$M\sup_{[0;T]}||x_n(u_1,s)-x_n(u_2,s)||^2 \leqslant C_2||u_1-u_2||^2. \tag{1.7}$$

Нехай твердження виконується для деякого n. Звідси, з припущення про існування модифікації x_n безперервної за сукупністю змінних з ймовірністю 1, процес $\{\mu_t^n,t\in[0;T]\}$ також є безперервним з ймовірністю 1. Звідси випливає, що коефіцієнти рівняння для x_{n+1} задовольняють умові Ліпшиця у відповідній нормі та є вимірними. Тому x_{n+1} визначено однозначно. Згідно з лемою Гронуолла–Беллмана, (1.7) доводиться стандартним шляхом.

Дослідимо для $n \geqslant 1, t\in[0;T]$

$$M\sup_{[0;t]}||x_{n+1}(u,s)-x_n(u_2,s)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_2\int_0^t M\sup_{[0;s]}||x_{n+1}(u)-x_n(u)||^2ds+$$

$$+C_2\int_0^t\{M\sup_{[0;s]}||x_{n+1}(u,s)-x_n(u,s)||^2+M\sup_{[0;s]}\gamma(\mu^n,\mu^{n-1})^2\}ds$$

Застосовуючи лему Гронуолла-Беллмана, можемо стверджувати, що

$$M\sup_{[0;t]}||x_{n+1}(u,s)-x_n(u_2,s)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_3\int_0^t M\sup_{[0;s]}\gamma(\mu_\tau^n,\mu_\tau^{n-1})^2ds.$$

Необхідно підкреслити, що

$$\gamma(\mu_\tau^n,\mu_\tau^{n-1}) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(||x_n(u,t)-x_{n-1}(u,t)||)\mu_0(du),$$

де φ визначена наступним чином:

$$\varphi(r) = \frac{r}{1+r}, r \geqslant 0.$$

Звідси

$$M\sup_{[0;t]}\gamma(\mu_s^n,\mu_s^{n-1})^2 \leqslant$$

$$\leqslant M\sup_{[0;s]}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(||x_n(u,t)-x_{n-1}(u,t)||)\mu_0(du)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant M\sup_{[0;s]}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(||x_n(u,t)-x_{n-1}(u,t)||)^2\mu_0(du) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}M\sup_{[0;s]}\varphi(||x_n(u,t)-x_{n-1}(u,t)||)^2\mu_0(du) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}M\sup_{[0;s]}||x_n(u,t)-x_{n-1}(u,t)||^2\mu_0(du) \leqslant$$

$$\leqslant C_3\int_0^t M\sup_{[0;s]}\gamma(\mu_\tau^{n-1},\mu_\tau^{n-2})^2 ds.$$

Тепер доведення збіжності послідовностей x_n та μ^n при $n \to \infty$ до єдиного розв'язку вихідного рівняння відбувається за стандартною схемою. □

Розглянемо тепер рівняння (1.5) за умови, що початкова міра μ_0 має скінченний m-й момент. Наступна теорема стверджує, що для всіх $t > 0$ випадкова міра μ_t є випадковим елементом в $\mathfrak{M}_m$.

Теорема 1.2. *Нехай виконується умова*

$$\exists C > 0 : \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d, \nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M} : \forall_t \geqslant 0 :$$

$$||a(u_1,\nu_1,t) - a(u_2,\nu_2,t)||+$$

$$+(\int_{\mathbb{R}^d}||b(u_1,\nu_1,t,q) - b(u_2,\nu_2,t,q)||^2 dq)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C(||u_1 - u_2|| + \gamma(\nu_1,\nu_2)).$$

і функції a та b неперервні за сукупністю змінних u, μ, t. Тоді (1.5) *має єдине розв'язання на* $[0; +\infty)$*. При цьому для кожного* $t > 0$

$\mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot, t)^{-1}$ *є випадковим елементом в* $\mathfrak{M}_m$.

Доведення. Використаємо для доказу метод послідовних наближень. Задамо послідовність випадкових процесів $\{x_n, \mu^n; n \geqslant 1\}$ так, щоб за кожного $n \geqslant 1$ виконувались вимоги, сформульвані в доказі теореми 1.1, а також:

$$\sup_{n\geq 1} M \sup_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} ||x_n(u,s)||^m \mu_0(du) < +\infty. \tag{1.8}$$

Аналогічно до (1.7) можна отримати оцінку

$$M \sup_{[0,T]} ||x_n(u_1, s) - x_n(u_2, s)||^m \leq C||u_1 - u_2||^m.$$

Звідси

$$\begin{aligned} M \sup_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} ||x_n(u,s)||^m \mu_0(du) \leq \\ \leq \int_{\mathbb{R}^d} M \sup_{[0,T]} ||x_n(u,s)||^m \mu_0(du) \leq \\ \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^d} ||u||^m \mu_0(du) + C_1 M \sup_{[0,T]} ||x_n(0,s)||^m. \end{aligned}$$

Для другого доданку маємо оцінку

$$\begin{aligned} M \sup_{[0,T]} ||x_n(0,s)||^m \leq C_2 + C_3 \int_0^t M \sup_{[0,s]} ||x_n(0,\tau)||^m ds + \\ + C_3 \int_0^t M \sup_{[0,s]} \gamma_m(\mu_\tau^{n-1}, \delta_0)^m ds. \end{aligned}$$

Тому (1.8) справедливо. Збіжність послідовних наближень і єдиність розв'язку доводяться аналогічно теоремі 1.1. □

Перейдемо до прикладів.

Приклад 1.2. Нехай у рівнянні (1.5) відсутня взаємодія

$$dx(u,t) = a(x(u,t),t)dt + \int_{\mathbb{R}^d} b(x(u,t),t,q) W(dq, dt),$$

а коефіцієнти a і b задовольняють умові теореми 1.2. Розглянемо міру $\mu_0 \in \mathfrak{M}_m$. Тоді, згідно з доведеною теоремою

$$M \sup_{[0,T]} \gamma_m(\mu_t, \delta_0)^m < +\infty.$$

Тим самим

$$M \sup_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} ||x(u,s)||^m \mu_0(du) < +\infty.$$

Для довільного $t > 0$ з ймовірністю 1

$$\int_{\mathbb{R}^d} ||x(u,t)||^m \mu_0(du) < +\infty.$$

Наприклад, якщо μ_0 - дискретна міра, що має вагу $\{p_k; k \geq 1\}$ в точках $\{a_k; k \geq 1\}$ і така, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k ||a_k||^m < +\infty,$$

то, з ймовірністю 1,

$$sum_{k=1}^{\infty} p_k ||x(a_k,t)||^m < +\infty.$$

Отримане твердження узгоджується з відомою властивістю розв'язків звичайних стохастичних диференціальних рівнянь [7]

$$\forall \varepsilon > 0 :$$
$$\lim_{||u|| \to +\infty} \frac{||x(u,t)||^m}{||u||^{1+\epsilon} + 1} = 0 \text{ м.н.},$$
$$\lim_{||u|| \to +\infty} \frac{||u||^m}{||x(u,t)||^{1+\epsilon} + 1} = 0 \text{ м.н.}$$

Приклад 1.3. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1.5), додатково до умови теореми 1.2, двічі неперервно диференційовані за змінною x з обмеженими похідними, а початкова міра μ_0 має щільність P_0 відносно міри

Лебега. Тоді, аналогічно [7] за умови фіксованого t, $x(\cdot,t)$ з ймовірністю 1 $x(\cdot, t_1)$ є дифеоморфізмом. З цього випливає, що міра μ_t з ймовірністю 1 має щільність p_t відносно міри Лебега таку, що

$$\int_{\mathbb{R}^d} ||u||^m p_t(u)du < +\infty \text{ м.н.}$$

Розглянемо тепер наступне питання. Нехай в умовах теореми 1.1 початкова міра $\mu_0 \in \mathfrak{M}_m$. Що можна сказати в цьому випадку про належність μ_t простору $\mathfrak{M}_m$? Зазначимо, що для $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}_m$:

$$\gamma_0(\nu_1, \nu_2) \leq \gamma_m(\nu_1, \nu_2).$$

Тому, в якості наслідку з теореми 1.2 отримується твердження.

Наслідок 1.1. *Нехай коефіцієнти a і b в рівнянні* (1.5) *задовольняють умові теореми 1.1, а початкова міра $\mu_0 \in \mathfrak{M}_m$. Тоді для всякого $t > 0$ μ_t є випадковим елементом в $\mathfrak{M}_m$.*

РОЗДІЛ 2

ПОНЯТТЯ ЗСУВ-КОМПАКТНОСТІ ВИПАДКОВИХ МІР

Нехай $(\mathfrak{X}, \rho)$ - повний сепарабельний метричний простір, $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$, $\mathcal{B}(\mathfrak{X}^n)$ - σ-алгебра борелевських підмножеств в $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^n$, відповідно. Через $\mathfrak{M}$ позначимо сукупність всіх ймовірнісних мір на $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Для мір μ, $\nu \in \mathfrak{M}$ позначимо $C(\mu, \nu)$ як множину всіх ймовірністних мір на $\mathcal{B}(\mathfrak{X}^2)$. Для ймовірністних мір з $C(\mu, \nu)$ μ і ν є маргінальними розподілами.

Приклад 2.1. Розглянемо на $\mathbb{R}$ міри:

$$\mu = \frac{1}{3}\delta_{\{2\}} + \frac{2}{3}\delta_{\{5\}},$$
$$\nu = \frac{1}{5}\delta_{\{1\}} + \frac{4}{5}\delta_{\{3\}}.$$

Тут δ-функція задається стандартним чином, $\forall a \in \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$:

$$\delta_{\{a\}}(A) = \begin{cases} 1, a \in A \\ 0, a \notin A \end{cases}$$

Розглянемо на $\mathbb{R}^2$ міру

$$\varkappa = \frac{1}{15}\delta_{\{(2;1)\}} + \frac{4}{15}\delta_{\{(2;3)\}} + \frac{2}{15}\delta_{\{(5;1)\}} + \frac{8}{15}\delta_{\{(5;3)\}}$$

Тоді μ та ν є маргінальними розподілами $\varkappa$ на $\mathbb{R}$.

Дійсно, $\forall A \subset \mathbb{R}$

$$\int_A \int_{\mathbb{R}} \varkappa(du,dv) = \int_A \left(\left(\frac{1}{15} + \frac{4}{15} \right) \delta_{\{2\}} + \left(\frac{2}{15} + \frac{8}{15} \right) \delta_{\{5\}} \right) (du) =$$
$$= \int_A \left(\frac{1}{3}\delta_{\{2\}} + \frac{2}{3}\delta_{\{5\}} \right) (du) = \int_A \mu(du).$$

Крім того, $\forall B \subset \mathbb{R}$

$$\int_B \int_{\mathbb{R}} \varkappa(du,dv) = \int_B \left(\left(\frac{1}{15} + \frac{2}{15} \right) \delta_{\{1\}} + \left(\frac{4}{15} + \frac{8}{15} \right) \delta_{\{3\}} \right)(du) =$$
$$= \int_B \left(\frac{1}{5} \delta_{\{1\}} + \frac{4}{5} \delta_{\{3\}} \right)(du) = \int_B \nu(du).$$

Означення 2.1. Відстанню Вассерштейна нульового порядку на $\mathfrak{M}$ називається метрика

$$\gamma_0(\mu,\nu) = \inf_{C(\mu,\nu)} \iint_{\mathcal{X}^2} \frac{\rho(u,v)}{1+\rho(u,v)} \varkappa(du,dv), \tag{2.1}$$

Зауваження 2.1. Відомо, що γ_0 є метрикою, а $(\mathfrak{M}, \gamma_0)$ - повним метричним сепарабельним простором.

Зауваження 2.2. Збіжність у метриці γ_0 рівносильна слабкій збіжності.

Доведемо, що $\gamma_0(\mu,\mu) = 0$. Розглянемо міру $\varkappa$, яка зосереджена на прямій l, що є бісектрисою I та III чвертей.

$$\forall A \in \mathbb{R}^2 \quad \varkappa(A) = \mu(A \cap l).$$

$$\iint_{R^2} \frac{||u-v||}{1+||u-v||} \varkappa(du,dv) = \iint_{R^2} \frac{||u-u||}{1+||u-u||} \mu(du) = 0$$

Тоді

$$\inf_{C(\mu,\mu)} \iint_{R^2} \frac{||u-v||}{1+||u-v||} \varkappa(du,dv) = 0$$

Означення 2.2. Множина мір $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{M}_n$ називається зсув-компактною, якщо $\forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \exists u_\alpha \in \mathbb{R}^d$ такий, що сукупність мір $\{\mu_\alpha - u_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ є компактною в $\mathfrak{M}_n$ (тут $\mu_\alpha - u_\alpha$ – зсув міри μ_α на вектор u_α).

Означення 2.3. Множина випадкових мір $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{M}_n$ називається зсув-компактною, якщо $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$ можна знайти випадковий вектор $u_\alpha \in \mathbb{R}^d$ такий, що сімейство $\{\mu_\alpha - u_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ є слабо компактним у $\mathfrak{M}_n$.

Розглянемо рівняння

$$dx(u,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x(u,t)-v)\mu_t(dv)dt + b(x(u,t),\mu_t)dw(t),$$

$$\mu_t = \mu + 0 \circ x(\cdot,t)^{-1}, t \geqslant 0, x(u,0) = u, u \in \mathbb{R}^d,$$

де w - одновимірний вінерівський процес. Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. *Припустимо, що $\mu_0 \in \mathfrak{M}_{2n+2}$, φ задовольняє умові*

$$(u-v, \varphi(u)-\varphi(v)) \leqslant -\alpha||u-v||^2, \quad u,v \in \mathbb{R}^d,$$

функція b задовольняє умові Ліпшиця по x і μ з константою B, та

$$\alpha - \frac{1}{2}B^2(2n+1) \geqslant 0.$$

Тоді множина $\{\mu_t; t \geqslant 0\}$ є зсув-компактною в $\mathfrak{M}_{2n}$.

Приклад 2.2. Нехай $\mathfrak{X} \in \mathbb{R}^d$. Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))dw(t), \tag{2.2}$$

де $\{w(t); t \in [0;1]\}$ - вінерівський процес в $\mathbb{R}^d$, коефіцієнти $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ і $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ мають неперерні обмежені похідні. Відомо (наприклад, в [7]), що рівнянню (2.2) відповідає сімейство випадкових гомеоморфізмів $\{\varphi_{s,t}; 0 \le s \le t < +\infty\}$ простору $\mathbb{R}^d$ на себе таке, що

1) $\varphi_{s,s}(u) = u$, $u \in \mathbb{R}^d$,
2) для довільного $u \in \mathbb{R}^d$ випадковий процес $\{\varphi_{s,t}(u); t \ge s\}$ є розв'язком задачі Коші для (2.2) з початковою умовою $x(s) = u$.

Для зафіксованого u маємо потік $\{\varphi_{0,t}\}$. Нехай $\{\mathcal{F}_t; t \in [0;1]\}$ - потік σ-алгебр, що був породжений вінерівським процесом. Розглянемо довільну випадкову міру ν на $\mathbb{R}^d$ і побудуємо з її допомогою міру μ на просторі $C([0;1],\mathbb{R}^d)$, визначивши її на циліндричних множинах рівністю

$$\int_{C([0;1],\mathbb{R}^d)} 1\mathbb{I}_\delta(u(s_1),...,u(s_n))\mu(du) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} 1\mathbb{I}_\delta(\varphi_{0,s_1}(x), ..., \varphi_{0,s_n}(x))\nu(dx).$$

Отримана випадкова міра μ, що є образом міри ν при неперервному відображенні

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \varphi_0(x) \in C([0;1], \mathbb{R}^d).$$

Зазначимо, що μ - $\mathcal{F}_t$-узгоджена випадкова міра. Як вже було відмічено раніше, μ несе в собі більше інформації про переміщення окремих частинок фазового простору, ніж мірозначний процес $\nu_t = \nu \circ \varphi_{0,t}^{-1}$, $t \in [0;1]$.

РОЗДІЛ 3

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В даній роботі розглядається наступний клас рівнянь:

$$\begin{cases} dx(u,t) = \left(B\int_{\mathbb{R}} v\mu_t(dv) + A\right) x(u,t)dt \\ x(u,0) = u, \quad \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}, \quad A, B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

де μ_0 рівномірно розподілена на $[t_1, t_2]$.

Для цього классу рівнянь доведена наступна теорема:

Теорема 3.1. *За умови $A > 0$, μ_t слабо збігаєтьса до міри $-\frac{2A}{B(t_1+t_2)}\mu_0$ при $t \to \infty$.*

Доведення. Оскільки μ_0 рівномірно розподілена на $[t_1, t_2]$:

$$\forall D \in \mathbb{R} : \mu_0(D) = \int_D \frac{I_{[t_1,t_2]}(t)}{t_2 - t_1} dt.$$

Поділемо рівняння (3.1) на dt:

$$\frac{dx(u,t)}{dt} = \left(B\int_{\mathbb{R}} x(v,t)\mu_0(dv) + A\right) x(u,t).$$

Перепишемо у вигляді:

$$\int_{\mathbb{R}} x(u,t)dx(u,t) = \int_0^t \left(B\int_{\mathbb{R}} x(v,s)\mu_0(dv) + A\right) ds.$$

Проінтегруємо:

$$\ln|x(u,t)| = B\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(v,s)\mu_0(dv)ds + At + \ln|C|.$$

Проекспонуємо обидві частини:

$$x(u,t) = C \cdot e^{B\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(v,s)\mu_0(dv)ds} \cdot e^{At}$$

Використовуючи вигляд міри μ_0:

$$\int_{\mathbb{R}} x(v,s)\mu_0(dv) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{\mathbb{R}} x(v,s)I_{[t_1,t_2]}(v)dv = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(v,s)dv.$$

Підставляючи цей вираз у формулу для $x(u,t)$, отримуємо:

$$x(u,t) = C \cdot e^{\frac{B}{t_2-t_1}\int_0^t \int_{t_1}^{t_2} x(v,s)dvds} \cdot e^{At}.$$

Знайдемо C використовуючи початкову умову $x(u,0) = u$:

$$x(u,0) = C \cdot e^{\frac{B}{t_2-t_1}\int_0^0 \int_{t_1}^{t_2} x(v,s)dvds} \cdot e^{A\cdot 0} = C \cdot e^0 \cdot e^0 = C = u.$$

Тобто:

$$x(u,t) = u \cdot e^{\frac{B}{t_2-t_1}\int_0^t \int_{t_1}^{t_2} x(v,s)dvds} \cdot e^{At}.$$

Проінтегруємо по u:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} x(u,t)du &= e^{\frac{B}{t_2-t_1}\int_0^t \int_{t_1}^{t_2} x(v,s)dvds} \cdot e^{At} \cdot \int_{t_1}^{t_2} udu = \\ &= e^{\frac{B}{t_2-t_1}\int_0^t \int_{t_1}^{t_2} x(v,s)dvds} \cdot e^{At} \cdot \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}.\end{aligned}$$

Позначимо:

$$y(t) = \frac{B}{t_2 - t_1}\int_0^t \int_{t_1}^{t_2} x(v,s)dvds.$$

Тоді:

$$x(u,t) = u \cdot e^{y(t)} \cdot e^{At}. \tag{3.2}$$

Знайдемо $y'(t)$:

$$y'(t) = \frac{B}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(v,s) dv = \frac{B}{t_2 - t_1} \cdot e^{y(t)} \cdot e^{At} \cdot \frac{t_2^2 - t_1^2}{2} =$$
$$= e^{y(t)} \cdot e^{At} \cdot \frac{B(t_2 + t_1)}{2}.$$

З попереднього рівняння:

$$y'(t) e^{-y(t)} = \frac{B(t_1 + t_2)}{2} \cdot e^{At}.$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y} dy = \int_0^t \left(\frac{B(t_1 + t_2)}{2} \cdot e^{At} \right) dt.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримуємо:

$$-e^{-y} = \frac{B(t_1 + t_2)}{2} \cdot \int_0^t e^{As} ds + C = \frac{B(t_1 + t_2)}{2} \cdot \frac{e^{At} - 1}{A} + C;$$

$$y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -1;$$

$$e^{-y(t)} = \frac{B(t_1 + t_2)(1 - e^{At})}{2A} + 1.$$

Підставляючи $e^{-y(t)}$ у формулу для $x(u,t)$ (3.2):

$$x(u,t) = \frac{u}{\frac{B(t_1+t_2)(1-e^{At})}{2A} + 1} \cdot e^{At}.$$

Оскільки $A > 0$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x(u,t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{ue^{At}}{\frac{B(t_1+t_2)(1-e^{At})}{2A}+1} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{ue^{At}}{\frac{B(t_1+t_2)}{2A}+1-\frac{B(t_1+t_2)}{2A}e^{At}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{ue^{At}}{e^{At}\left(\left(\frac{B(t_1+t_2)}{2A}+1\right)\cdot e^{-At}-\frac{B(t_1+t_2)}{2A}\right)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{u}{\left(\frac{B(t_1+t_2)}{2A}+1\right)\cdot e^{-At}-\frac{B(t_1+t_2)}{2A}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{u}{-\frac{B(t_1+t_2)}{2A}} \\
&= -\frac{2Au}{B(t_1+t_2)}
\end{aligned}
$$

За умови $t > 0$:

$$
\left| x(u,t) + \frac{2Au}{B(t_1+t_2)} \right| < \epsilon
$$

Позначимо:

$$
\mu_1 = \frac{2Au}{-B(t_1+t_2)}\mu_0
$$

Тоді:

$$
\int\limits_{A} f(u)\mu_0(du) = \int\limits_{\tilde{A}} f\left(\frac{2A}{-B(t_1+t_2)}u\right)\mu_0(du)
$$

Порахуємо відстань Васерштейна:

$$
\begin{aligned}
\gamma_0(\mu_t,\mu_1) &= \inf_N \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|u-v|}{1+|u-v|} N(du,dv) \\
&= \inf_N \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|x(u,t)+\frac{2Av}{B(t_1+t_2)}|}{1+|x(u,t)+\frac{2Av}{B(t_1+t_2)}|} N(du,dv)
\end{aligned}
$$

Візьмемо таку міру μ, що $\mu_0(u) = \mu_0(v)$, тоді:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mu_0(du)\mu_0(dv) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|x(u,t) + \frac{2Av}{B(t_1+t_2)}\right|}{1 + \left|x(u,t) + \frac{2Av}{B(t_1+t_2)}\right|}\mu_0(du)$$

Звідси:

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_0(\mu_t, \mu_1) = 0$$

Звідси μ_t слабо збігається до міри $-\frac{2A}{B(t_1+t_2)}\mu_0$.

$\square$

ВИСНОВКИ

В роботі наведено низку відомостей про стохастичні диферінціальні рівняння зі взаємодією, наведено приклади таких раінянь, зокрема таких, для яких вдається знайти точний розв'язок.

Розглянуто поняття зсув-компактоності випадкови мір та його застосування для дослідження поведінки розв'зків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією.

Для рівнянь зі взаємодією виду:

$$\begin{cases} dx(u,t) = \left(B\int_{\mathbb{R}} v\mu_t(dv) + A\right) x(u,t)dt \\ x(u,0) = u, \quad \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}, \quad A, B \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{cases}$$

знайдено явний вид розв'язків, а також досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності мірозначних розв'язків таких рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. M. Yor. Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), c. 518-528.
2. Ya. G. Sinai. Statistics of shocks in solutions of inviscid Burgers equation. Comm. Math. Phys., 148 (1992), c. 601–621.
3. Dorogovtsev A. A. Stochastic flows with interactions and measure-valued processes. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, v.63, p. 3963-3977.
4. А.А. Дороговцев. Мірозначні процеси і стохастичні потоки на абстрактних просторах (Measure-valued processes and stochastic flows on abstract spaces). Праці Інституту Математики Національної Академії Наук України. Математика та її застосування. Національна Академія України, Інститут Математики, Київ, 2007, розділ 2.
5. Dorogovtsev A.A., Karlikova M.P. Long-time behavior of measure-valued processes corresponded to stochastic flows with interaction. Theory of stochastic processes, 2004.
6. A. A. Dorogovtsev, Measure-valued Markov processes and stochastic flows on abstract spaces, Stoch. Rep. 76 (2004), no.5, 395–407.
7. Kunita, Hiroshi Stochastic flows and stochastic differential equations. 1990, Text. Monograph, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 24. Cambridge etc., Cambridge University Press.
8. P. Miłoś. Spatial CLT for Flows of One-dimensional SDEs with Interaction.
9. Ikeda N., Watanabe S. Stochastic flows of diffeomorphisms, Stochastic analysis and Applications, Dekker, New York, pp. 179-198.
10. Yves Le Jan. On isitropic Brownian Motions, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 70 (1985), pp. 609–620.
11. O. Kallenberg. Foundations of Modern Probability, 2nd ed. Springer Series in Statistics, 2002.
12. Kunita H. Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations, Cambridge University Press, 1990. - 361p.
13. M. P. Lagunova. Stochastic differential equations with interaction and the

law of iterated logarithm, Theory of stochastic Processes, V 18(34) (2012), no. 2, pp. 54-58.

14. Ya. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokolov. Intremittency in random media, Usp. Fiz. Nauk, 152 (1987), pp. 3-32.
15. Craig L. Zirbel. Random measures carried by Brownian flows on R^d, 1995.
16. Craig L. Zirbel and Erhan Çinlar. Mass transport by Brownian flows, Stochastic Models in Geosystems, 28 (1997), no. 1, pp. 53-74.
17. Мартинова М. В., Білозерова М. О. Асимптотична поведінка мірозначних розв'язків стохастичних диферінциальних рівнянь. (https://sci-conf.com.ua/viii-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-innovative-development-of-science-technology-and-education-9-11-05-2024-vankuver-kanada-arhiv/).