

УДК 531.381

**Т. А. Козаченко\***, **Д. Д. Лещенко\***, **А. Л. Рачинская\*\***

\*Одесская государственная академия строительства и архитектуры

\*\*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

## **ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ МОМЕНТОВ**

**Козаченко Т. О., Лещенко Д. Д., Рачинська А. Л. Збурені обертання вовчка Лагранжа під дією нестационарних дисипативних моментів.** Досліджується збурений рух вовчка Лагранжа під дією дисипативних моментів, які залежать від повільного часу. Здобута усереднена система рівнянь в першому наближенні для повільних змінних. Побудовано чисельне розв'язання усередненої системи рівнянь руху твердого тіла.

**Ключові слова:** збурений рух, усереднювання, момент.

**Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Возмущенные вращения волчка Лагранжа под действием нестационарных диссипативных моментов.** Исследуется возмущенное движение волчка Лагранжа под действием диссипативных моментов, зависящих от медленного времени. Получена усредненная система уравнений первого приближения для медленных переменных. Построено численное решение усреднённой системы уравнений движения твердого тела.

**Ключевые слова:** возмущенное движение, усреднение, момент.

**Kozachenko T. A., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Perturbed rotation of Lagrange top under the action of nonstationary dissipative torques.** Perturbed motion of Lagrange top under the action of dissipative torques depending on slow time investigated. The averaged system of equations of the first approximation is got for slow variables. The numerical solution of the averaged system of equations of motion of a rigid body is conducted.

**Key words:** perturbed motion, averaging, torque.

**ВВЕДЕНИЕ.** Значительное количество работ посвящено исследованию движений волчка Лагранжа с неподвижной точкой, обусловленных влиянием: а) момента, постоянного в связанных осях; б) линейного диссипативного момента; в) медленного времени [1-5]. Для исследования данных задач применяется метод усреднения [6, 7]. Асимптотические методы являются мощным аппаратом исследования проблем динамики твердого тела.

### **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.**

**1. Постановка задачи.** Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки под действием возмущающего момента сил. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \\
 A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\
 C\dot{r} &= \varepsilon M_3, \quad M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad (i = 1, 2, 3), \quad \tau = \varepsilon t, \\
 \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\
 \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\
 \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Динамические уравнения (1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела. Здесь  $p, q, r$  — проекции вектора угловой скорости тела на главные оси; величины  $\varepsilon M_i (i = 1, 2, 3)$  — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени  $\tau = \varepsilon t$  ( $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр,  $t$  — время);  $\psi, \theta, \varphi$  — углы Эйлера;  $A$  — экваториальный,  $C$  — осевой момент инерции тела относительно точки  $O$ . Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент  $\mu = mgl$ , величина которого постоянна. Здесь  $m$  — масса тела,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $l$  — расстояние от неподвижной точки  $O$  до центра тяжести тела.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1) при малом  $\varepsilon$  на интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$ , с помощью метода усреднения [6, 7].

Для получения усредненной системы уравнений первого приближения для медленных переменных применяется подход, разработанный Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноушко [1]. Данная методика используется для усреднения системы (1) при возмущениях, зависящих от медленного времени  $\tau$  и допускающих усреднение по углу нутации  $\theta$ . Усредненная система уравнений имеет вид:

$$\frac{du_i}{d\tau} = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Здесь  $u_1, u_2, u_3$  — вещественные корни кубического многочлена [8]

$$\begin{aligned}
 Q(u) &= A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2], \\
 -1 &\leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty,
 \end{aligned}$$

$G_z$  — проекция вектора кинетического момента на вертикаль  $Oz$ ,  $H$  — полная энергия тела.

**2. Движение твердого тела под действием диссипативных моментов.** Рассмотрим возмущенное движение близкое к случаю Лагранжа под действием внешней среды. Возмущающие моменты  $M_i (i = 1, 2, 3)$  являются линейно-диссипативными и медленно изменяются во времени:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau), b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{3}$$

Здесь  $a(\tau), b(\tau)$  — интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела.

Первые три уравнения (1) с учетом (3) удовлетворяют условиям используемой методики [1] и приводятся к виду:

$$\begin{aligned}\dot{G}_z &= -\varepsilon ((a(\tau)p \sin \varphi + a(\tau)q \cos \varphi) \sin \theta + b(\tau)r \cos \theta), \\ \dot{H} &= -\varepsilon (a(\tau) (p^2 + q^2) + b(\tau)r^2), \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} b(\tau)r.\end{aligned}\quad (4)$$

Третье уравнение (4) может быть проинтегрировано:

$$r = r^0 \exp(-\varepsilon C^{-1} \int_0^t b(\varepsilon t) dt). \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  имеют вид:

$$a(\tau) = a_0 + a_1 \tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1 \tau, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 - const. \quad (6)$$

В результате преобразований получим следующую усредненную систему:

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{d\tau} &= N(u_i) \left\{ A^{-1} (G_z - C r u_i) (w (G_z - C r v) + \varepsilon a_1 C r n / \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + (u_i^2 - 1) (w (2H - C r^2 - 2\mu w) + 2\varepsilon a_1 \mu n / \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + r (G_z - C r u_i) ((b_0 + \varepsilon b_1 K(k) / \alpha)(v - u_i) - \varepsilon b_1 n / \alpha) \right\}, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}N(u_1) &= \frac{-1}{A\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}, \\ w &= a_0 + \varepsilon a_1 K(k) / \alpha, \quad v = u_3 - (u_3 - u_1) E(k) / K(k), \\ n &= (u_3 - u_1) (E(\beta, k) - \beta E(k) / K(k)), \\ \alpha &= (\mu (u_3 - u_1) / (2A))^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \sin am(\alpha t + \beta, k), \\ k^2 &= (u_2 - u_1) (u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1, \\ G_z &= \delta_2 (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + \delta_1 R)^{1/2} \times \\ &\quad \times \operatorname{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3), \\ H &= 0.5\mu ((u_1 + u_2 + u_3) (1 + AC^{-1}) + \\ &\quad + (\delta_1 R - u_1 u_2 u_3) (1 - AC^{-1})), \quad \delta_2 = \operatorname{sign} r, \\ r &= \delta_2 C^{-1} (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - \delta_1 R)^{1/2}, \\ R &= ((1 - u_1^2) (1 - u_2^2) (u_3^2 - 1))^{1/2}, \quad \delta_1 = \operatorname{sign}(G_z^2 - C^2 r^2).\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь  $N(u_2)$  и  $N(u_3)$  получаются из  $N(u_1)$  циклической перестановкой индексов у  $u_i$ ; величины  $\delta_1, \delta_2$  в начальный момент определяются по начальным условиям для  $G_z, r$ ;  $\operatorname{sn}$  — эллиптический синус,  $k$  — модуль эллиптических функций,  $E(k), K(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода,  $E(\beta, k)$  — эллиптический интеграл второго рода.

После решения и исследования системы (7) для  $u_i$  исходные переменные  $G_z, H, r$  восстанавливаются по формулам (8). Медленные переменные  $u_i, G_z, H, r$  определяются с погрешностью порядка  $\varepsilon$ .

Также рассмотрим случай, когда  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  имеют вид:

$$a(\tau) = a_0 + \Delta a_1 \exp(-\sigma\tau), \quad b(\tau) = b_0 + \Delta b_1 \exp(-\sigma\tau), \quad (9)$$

$$a_0, \Delta a_1, b_0, \Delta b_1, \sigma - const.$$

Усредненная система (2) при этом записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\tau} = N(u_i) \{ & a_0 [z(u_i)(G_z - Crv) + (u_i^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v)] + \\ & + b_0 r (u_i - v)(Cru_i - G_z) + \\ & + \frac{\alpha(1 - \exp(-2\varepsilon\sigma K(k)/\alpha))}{2\varepsilon\sigma K(k)} (\Delta a_1 [z(u_i)(G_z - Cru_1) + \\ & + (u_i^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu u_1)] + \Delta b_1 r (u_i - u_1)(Cru_i - G_z)) - \\ & - (\Delta a_1 [z(u_i)Cr + (u_i^2 - 1)2\mu] + \Delta b_1 r (Cru_i - G_z)) \times \\ & \times \frac{\alpha(u_2 - u_1)}{2K(k)} \int_0^{2K(k)/\alpha} \exp(-\varepsilon\sigma t) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta) dt \}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (10)$$

$$v = u_3 - (u_3 - u_1)E(k)/K(k), \quad z(u_i) = A^{-1}(G_z - Cr u_i).$$

Здесь  $N(u_i)$ ,  $G_z$ ,  $H$ ,  $r$ ,  $\alpha$ ,  $k$  определяются из формул (8).

Усредненные системы (7) и (10) проинтегрированы численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Рассмотрим три случая, соответствующие следующим начальным данным:

$$\text{а) } u_1^0 = 0.913, \quad u_2^0 = 0.996, \quad u_3^0 = 1.087, \quad \theta^0 = 5^0; \quad (11)$$

$$\text{б) } u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0.5, \quad u_3^0 = 2, \quad \theta^0 = 60^0; \quad (12)$$

$$\text{в) } u_1^0 = -0.992, \quad u_2^0 = -0.985, \quad u_3^0 = 2.992, \quad \theta^0 = 170^0. \quad (13)$$

Предполагается, что в начальный момент волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную  $r^0 = \sqrt{3}$ , кроме того  $A = 1.5$ ,  $C = 1$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $\Delta a_1 = \Delta b_1 = \varepsilon\eta$ ,  $a_0 = 0.125$ ,  $b_0 = 0.1$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\eta = 1$ .

Численный расчет был проведен при различных значениях  $\varepsilon \in [0, \dots 10^{-4}]$ . На рисунке 1-3 изображены графики функций  $u_i (i = 1, 2, 3)$ ,  $G_z$ ,  $H$ ,  $r$  для указанных случаев при  $\varepsilon = 10^{-4}$ . При  $\varepsilon = 0$  системы (7) и (10) упрощаются и соответствуют случаю линейной диссипации с постоянными коэффициентами [1].

На рис. 1 приведен результат численного интегрирования системы (7) при начальных условиях (11). Как видно, полная энергия тела, проекция вектора кинетического момента на вертикаль, угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии монотонно убывают. Величина  $u_3$  достаточно быстро стремится к 1,  $u_2$  медленнее стремится к -1, чем  $u_1$ .

В случае начальных значений (12) результат численного интегрирования системы (7) изображен на рис. 2. Как и на рис. 1, переменная  $u_3$  стремится к единице. Проекция вектора кинетического момента  $G_z$  и  $r$  монотонно убывают к нулю. Полная энергия  $H$  монотонно убывает, приближаясь к значению  $H = -0.5$ . Величины  $u_1$  и  $u_2$  стремятся к -1.

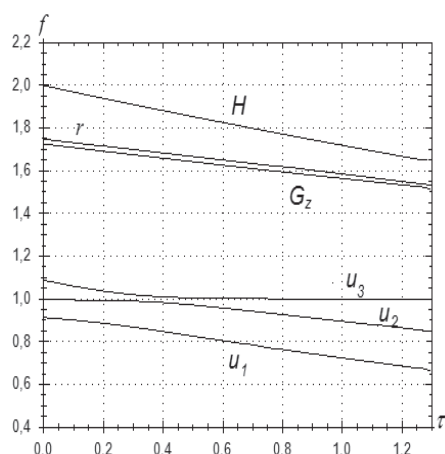


Рис. 1

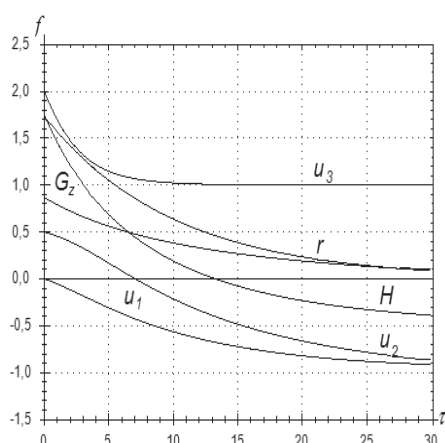


Рис. 2

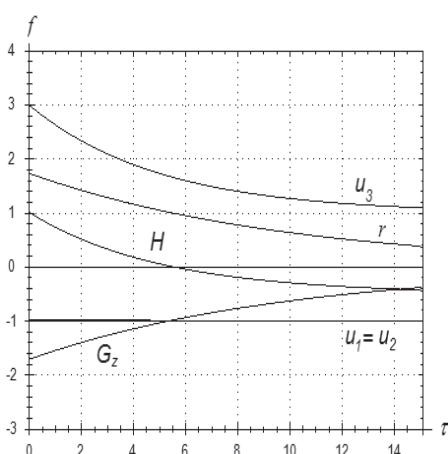


Рис. 3

На рис. 3 представлены графики функций  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $G_z$ ,  $H$ ,  $r$ , полученные при численном интегрировании системы (10) для начальных данных (13). Величина  $u_3$  медленнее стремится к  $+1$ , чем на рис. 1 и 2. Проекция вектора кинетического момента на вертикаль  $G_z$  монотонно возрастает и стремится к нулю. Величины  $H$  и  $r$  монотонно убывают. На рис. 3 графики функций  $u_1$  и  $u_2$  совпадают, но при численном сопоставлении отличаются в третьем знаке после запятой.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** При сравнении полученных результатов с результатами [1] можно отметить, что зависимость возмущающего момента от медленного времени приводит к появлению в усредненной системе уравнений первого приближения для медленных переменных дополнительных слагаемых, содержащих эллиптические интегралы первого и второго рода, которые при численном интегрировании сглаживают поведение функций  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $G_z$ ,  $H$ . Под действием возмущающего момента (3) твердое тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия быстрее, чем в [1].

1. **Акуленко Л. Д.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, № 5. – С. 771–778.
2. **Акуленко Л. Д.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 5. – С. 3–10.
3. **Лещенко Д. Д.** Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа [текст] / Д. Д. Лещенко, А. С. Шамаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 6. – С. 8–17.
4. **Сазонов В. В.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа [текст] / В. В. Сазонов, В. В. Сидоренко // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т. 54, № 6. – С. 951–957.
5. **Акуленко Л. Д.** Эволюция вращений волчка Лагранжа под действием возмущающего момента сил, медленно изменяющегося во времени [текст] / Л. Д. Акуленко, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2000. – Т. 5, Вип. 3., Фіз.-мат. науки. – С. 102–108.
6. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
7. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
8. **Суслов Г. К.** Теоретическая механика [текст] / Г. К. Суслов. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.