Mathematical Subject Classification: 11A05, 11N37, 11N56
УДК 511.19

В. Е. Брейде, А. С. Радова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ФУНКЦИЯ $\tau(\alpha)$ НА ЦЕЛЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЛАХ С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Брейде В. Е., Радова А. С. Функцiя $\tau(\alpha)$ на цiлих гаусових числах з фiксованим числом простих дiльникiв. Розглянуто розподiл значень функцiї дiльникiв $\tau(\alpha)$ над $Z[i]$ в арифметичних прогресiях з растучою рiзнiстю прогресiї. Побудовано асимптотичну формулу для суматорної функцiї, асоцiйованої з мультиплiкативною функцiєю $z^{w(\alpha)}$ в щiльному секторi $N(\alpha) \leqslant x, \varphi_1 \leqslant \arg\alpha \leqslant \varphi_2$, де $w(\alpha)$ — кiлькiсть рiзних простих дiльникiв α. Наслiдком є нетривiальна асимптотична формула для суми значень $\tau(\alpha)$ в щiльному секторi з фiксованою кiлькiстю рiзних простих дiльникiв.
Ключовi слова: цiлi гаусовi числа, простi дiльники.

Брейде В. Е., Радова А. С. Функция $\tau(\alpha)$ на целых гауссовых числах с фиксированным числом простых делителей. Рассмотрено распределение значений функции делителей $\tau(\alpha)$ над $Z[i]$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью прогрессии. Построена асимптотическая формула для сумматорной функции, ассоциированной с мультипликативной функцией $z^{w(\alpha)}$ в узком секторе $N(\alpha) \leqslant x, \varphi_1 \leqslant \arg\alpha \leqslant \varphi_2$, где $w(\alpha)$ — число различных простых делителей α. Следствием является нетривиальная асимптотическая формула для суммы значений $\tau(\alpha)$ в узком секторе с заданным числом различных простых делителей.
Ключевые слова: целые гауссовы числа, простые делители.

Breide V. E., Radova A. S. The $\tau(\alpha)$ function on the integer gaussian with fixed amount of the prime divisors. The distribution of the divisor's function's values $\tau(\alpha)$ over $Z[i]$ in the arithmetical progressions with the growing progression's difference was analized in present work. The asymptotic formulae for the sum function, which is associated with multiplicated function $z^{w(\alpha)}$ in narrow segment $N(\alpha) \leqslant x, \varphi_1 \leqslant \arg\alpha \leqslant \varphi_2$, where $w(\alpha)$ is the amount of different prime divisors of α was built here. The result is the non-trivial asymptotic formulae for the sum of the values $\tau(\alpha)$ in narrow segment with the fixed amount of prime divisors.
Key words: integer gaussian, prime divisor.

Введение. В 20-х годах прошлого столетия Е. Гекке стал изучать новые дзета-функции, которые теперь называются Z-функциями Гекке. Оказалось, что арифметические функции на множествах целых гауссовых чисел $Z[i]$ обладают рядом специфических свойств, не присущих арифметическим функциям на множестве натуральных чисел. В пионерской работе Й. П. Кубимоса [5] рассмотрены подходы по применению аппарата Z-функций Гекке $Z_m(s)$ к задачам о распределении значений арифметических функций над кольцом $Z[i]$. В настоящее время аппарат Z-функций Гекке является основным инструментом аналитической теории чисел на плоскости. В частности, наиболее сильные результаты о распределении значений функции делителей целых гауссовых чисел получены с использованием оценок для функции $Z_m(s)$ в критической полосе.

В настоящей статье мы изучаем функции делителей $\tau(\alpha), \alpha\epsilon Z[i]$ на последовательности целых гауссовых чисел с фиксированным значением простых делителей чисел α. На множестве натуральных чисел ряд аналогичных задач рассмотрен в работах А. Сельберга, Й. П. Кубимоса, И. Катаи, М. Суббарао (подробнее см. [5]).

Предварительные результаты. В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения. Через G обозначим кольцо целых гауссовых чисел

$$G = a + bi|a, b\epsilon Z, i\epsilon C, i^2 = -1.$$

Для $\alpha \in G$ функция $\tau(\alpha)$ обозначает количество неассоциированных делителей α, а $\omega(\alpha)$ — число различных простых делителей α. Для натурального k и целого $m\epsilon Z$ полагаем

$$A_k(x;m) := \sideset{}{'}\sum_{\substack{\omega(\alpha)=k\\ N(\alpha)\leqslant x}} \tau(\alpha)e^{4mi\arg\alpha}$$

(здесь знак $'$ означает суммирование по неассоциированным $\alpha \in G$),

$$B_k(x,h;\varphi_1,\varphi_2) := \sum_{\substack{\omega(\alpha)=k\\ \varphi_1<arg\alpha\leqslant\varphi_2\\ x<N(\alpha\leqslant x+h)}} \tau(\alpha).$$

Пусть $Z_m(s)$ — Z-функция Гекке, определяемая для $Re\, s > 1$ следующим абсолютно сходящимся рядом:

$$Z_m(s) := \sum_{0\neq\alpha\epsilon G} \frac{e^{4mi\arg\alpha}}{N(\alpha)^s},$$

где $N(\alpha) = |\alpha|^2$ — норма гауссова числа α.

Лемма 1. *Пусть $s = \sigma + it, \sigma = Re\, s, t = Im\, s$. Тогда в полосе $-\varepsilon \leqslant Re\, s \leqslant 1$ справедливы следующие оценки:*

$$Z_m(s) << (t^2 + m^2)^{\dfrac{1-\sigma}{2}} \log^2(t^2 + m^2), |t| \geq 2,$$

$$Z_m(s) << (t^2 + m^2)^{(1-\sigma)\dfrac{3}{2}} \log^4(t^2 + m^2), |t| \geqslant 2.$$

Первое утверждение леммы следует из функционального уравнения для $Z_m(s)$ и принципа Фрагмена—Линделёфа, а второе есть аналог подобного результата для дзета-функции Римана.

Лемма 2. *Существует абсолютная постоянная $c_0 > 0$ такая, что в области*

$$Re\, s > 1 - c_0(\log(t^2 + m^2))^{-\dfrac{2}{3}}(\log\log(t^2 + m^2))^{-1}, |t| \geqslant 2$$

функция $Z_m(s)$ не имеет нулей (см. [2]).

Лемма 3. *Пусть C — постоянная из леммы 2, тогда в полосе*

$$Re\, s > 1 - \frac{1}{2}c_0(\log(t^2+m^2))^{-\dfrac{2}{3}}(\log\log(t^2+m^2))^{-1}, 2 \leqslant |Ims| \leqslant T$$

справедлива оценка

$$\log Z_m(s) << (\log(T+|m|))^A \log\log(T+|m|)$$

с некоторой абсолютной постоянной $A > 0$.

Это утверждение есть аналог леммы 5 из работы Рамачандра [6].

Лемма 4. *Пусть α — комплексное число, $Re\alpha > 0$. Тогда при $x \to \propto$ и любом M имеем*

$$\gamma(\alpha, x) := \int_0^x e^{-u}u^{\alpha-1}du = \Gamma(\alpha) + x^{\alpha-1}e^{-x}(1 + \sum_{m=1}^{M}\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}(-1)^m x^{-m} + O(x^{-M}),$$

где $\Gamma(\alpha)$ — Γ-функция Эйлера с постоянной в символе "O", зависящей только от M (доказательство см. [1], стр. 140).

Основные результаты. В этой секции мы доказываем наши основные теоремы о распределении функции делителей на последовательности целых гауссовых чсел с заданым числом неассоциированных простых делителей.

Теорема 1. *Пусть z — комплексное число, $|z| > 1$. Тогда*

$$M_0(x,z) := \frac{x}{(\log x)^{1-z}}(\frac{g_0(z)}{\Gamma(z)} + \frac{g_2(z)}{\log x} + \frac{g_3(z)}{(\log x)^2}) + O\left(xe^{-\frac{1}{4}l_0(\log x)^{\dfrac{3}{5}}(\log\log x)^{-1}}\right),$$

где

$$g_0(z) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^z \prod_p \left(1 - \frac{1}{N(p)}\right)^z \left(1 + \frac{z}{N(p)-1}\right).$$

Для комплексного $z, |z| = 1$ и целого m рассмотрим функцию

$$F_m(s,z) := \sum_{d \epsilon G} \frac{z^{\omega(\alpha)}\tau(\alpha)e^{4mi\arg\alpha}}{N(\alpha)^s}, Re\, s > 1. \qquad (1)$$

В силу мультипликативности по α функции $z^{\omega(\alpha)}\tau(\alpha)e^{4mi\arg\alpha}$ мы можем записать

$$F_m(s,z) := \prod_p (1 + z\sum_{k=1}^{\propto} k e^{4mki\arg\alpha}N(\alpha)^{-s}) = Z_m(s)^{2z}A_m(s,z), \qquad (2)$$

где $Z_m(s)$ — Z-функция Гекке показателя m, а $A_m(s,z)$ — функция, определяемая равенством

$$A_m(s,z)=\prod_p\left(1+\sum_{k=2}^{\propto}\frac{((k+1)z-kz)e^{4mki\arg p}}{N(p)^{ks}}\right)\frac{\left(1-\dfrac{e^{4mi\arg p}}{N(p)^s}\right)^{2z}}{1-\dfrac{2ze^{4mi\arg p}}{N(p)^s}}. \qquad (3)$$

Из определения $A_m(s,z)$ легко показать, что $A_m(s,z)$ представляется ординарным рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\propto} b_n(z)n^{-s}$, абсолютно сходящимся в полуплоскости $Re\, s>\dfrac{1}{2}$, причем $b_n(z)<<n^{\varepsilon}$ равномерно по $z, |z|=1$ и m.

Сначала рассмотрим случай $m=0$. В силу соотношения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\propto}^{2+i\propto}\frac{y^{s+k}}{s(s+1)-(s+k)}ds=\left\}\begin{matrix}\frac{1}{k!}(y-1)^k, y>1,\\ 0, 0<y<1.\end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

и абсолютной сходимости ряда Дирихле $F_0(s,z)$ для $\sigma=2$ мы имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\propto}^{2+i\propto}F_0(s,z)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds=\sum_{\substack{\alpha\epsilon G\\ N(\alpha)\leqslant x}}z^{\omega(\alpha)}\tau(\alpha)e^{4mi\arg\alpha}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\propto}^{2+i\propto}\frac{(xN(\alpha)^{-1})^{s+1}}{s(s+1)}ds=$$

$$=\sum_{0<N(\alpha)\leqslant x}{}' z^{\omega(\alpha)}\tau(\alpha)(x-N(\alpha)):=S_0(x,z).$$

Значение $S_0(x,z)$ при $z=1$ совпадает с суммой

$$\sum_{0<N(\alpha)\leqslant x}\tau(\alpha)(\alpha-N(\alpha)),$$

оценку которой можно получить из оценки суммы (см. [3]) $\sum\limits_{0<N(\alpha)\leqslant x}\tau(\alpha)$

$$\sum_{0<N(\alpha)\leqslant x}\tau(\alpha)=\frac{\pi^2}{16}x\log x+\left(\frac{\pi}{2}L'(1,\chi_4)+\frac{\pi^2}{16}\right)x+O(x^{\theta+\varepsilon}),$$

где $\theta=\dfrac{1792}{3615}$, $\varepsilon>0$ — произвольное малое число.

Поэтому частичным суммированием получим

$$S_0(x,z)=\sum_{0<N(\alpha)\leqslant x}\tau(\alpha)(\alpha-N(\alpha))=$$

$$=\frac{\pi^2}{32}x\log x+\left(\frac{\pi}{4}L'(1,\chi_4)+\frac{\pi^2\gamma}{16}-\frac{\pi^2}{32}\right)x+O(x^{\theta+1+\varepsilon}). \qquad (5)$$

Пусть теперь $|z|=1, z\neq 1$. Для $T>3$ определим на отрезке $|t|\leqslant T$ функцию

$$\delta(t):=\frac{c_0}{2}(\log|t|^{-\frac{2}{3}}(\log\log(|t|+10))^{-1}),$$

где c_0 из леммы 2.

Обозначим $\delta_0 = \delta(T)$.

Рассмотрим контур

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_0,$$

где C_1 состоит из тех точек $s = \sigma + it$, для которых $\sigma = 1 - \delta(T), t \geqslant T$, C_2 состоит из тех $s = \sigma + it$, для которых $\sigma = 1 - \delta(T), t \leqslant -T$. C_3 (соответственно C_4) состоит из тех $s = \sigma + it$, для которых $\sigma = 1 - \delta_0, 0 < t < T$ (соответственно,$-T < t < 0$).

Наконец, C_0 состоит из отрезка $[1 - \delta_0, 1 - \rho)$, проходимого в прямом и обратном направлениях, и окружности радиуса ρ с центром в точке $s = 1$. Здесь $0 < \rho < \delta_0$ и имеет тенденцию стремиться к нулю.

Поэтому имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} F_0(s,z)\frac{x^s}{s(s+1)}ds = 0.$$

Отсюда для $z \neq 1$:

$$S_0(x,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\propto}^{2+i\propto} F_0(s,z)\frac{x^s}{s(s+1)}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C} F_0(s,z)\frac{x^s}{s(s+1)}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} G_0(s,z)\frac{1}{(s-1)^{2z}}dz, \tag{6}$$

где $G_0(s,z) = (L(s,\chi_4)(s-1)\zeta(s))^{2z}\dfrac{1}{s(s+1)}$.

Очевидно, что $G_0(s,z)$, как функция от s, однозначна и аналитична на контуре C. Заметим, что интеграл на окружности с центром в точке $s = 1$ и радиуса ρ от функции

$$F_0(s,z)\frac{x^s}{s(s+1)}$$

стремится к нулю при $\rho \to 0$. А потому C_0 можно рассматривать как интеграл на отрезке $[1 - \delta_0, 1]$, проходимый в прямом и обратном направлениях, причем

$$\frac{1}{(s-1)^{2z}} = \begin{cases} e^{-2\pi i z}(1-s)^{-z} & \text{на верхнем берегу разреза отрезка } [1-\delta_0, 1], \\ e^{2\pi i z}(1-s)^{-z} & \text{на нижнем берегу.} \end{cases}$$

Таким образом, мы имеем

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} F_0(s,z)\frac{x^s}{s(s+1)}ds = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2} + \int\limits_{C_3} + \int\limits_{C_4} + \int\limits_{C_0}\right) G_0(s,z)\frac{1}{(s-1)^{2z}}ds =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_0. \tag{7}$$

Оценку интегралов $I_1, ..., I_4$ мы получим, используя леммы 1 и 3.

$$(Z(s,0))^z << exp(c_1(\log(|t|+10))^{\frac{1}{3}}\log\log(|t|+10)),$$

где c_1 — абсолютная постоянная, не зависящая от $z, |z| = 1$.

Наконец,

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} G_0(s,z)\frac{ds}{(s-1)^{2z}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\delta_0}^{1}(e^{2\pi iz}-e^{-2\pi iz})(1-s)^{-2z}G_0(s,z)x^{s+1}ds. \tag{8}$$

В силу аналитичности $G_0(s,z)$ в полуплоскости $Re\,s > \dfrac{1}{2}$ мы можем записать

$$I_1 + I_2 << \int_T^{\infty} x^{2-\delta(t)} exp(c_2(\log|t|)^{\frac{1}{3}}\log\log|t|)\frac{1}{t^2} =$$

$$= \int_T^{T_1} + \int_{T_1}^{\infty} << x^{2-\delta(T_1)} exp(c_2(\log T)^{\frac{1}{3}}\log\log T_1)\frac{1}{T} +$$

$$+ x^2 exp(c_2(\log T_1)^{\frac{1}{3}}\log\log T_1)T_1^{-1}.$$

Положим

$$\log T_1 = 2a_1(\log x)^{\frac{3}{5}}, \log T = a_1(\log x)^{\frac{3}{5}}, \quad a_1 > 0.$$

Это дает

$$I_1 + I_2 << x^2 exp(-a_2(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-1}), \quad a_2 = \frac{c_2}{2a_1^{\frac{2}{3}}}.$$

Кроме того,

$$I_3 + I_4 << x^{2-\delta_0} exp(c_2(\log T)^{\frac{1}{3}}\log\log T) <<$$

$$<< x^2 exp(-a_2(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-1}),$$

где $g_0(z) = G_0(1,z) = (L(1,\chi_4))^{2z}A_0(1,z) = (\dfrac{\pi}{4})^{2z}A_0(1,z), A_0(1,1) = 1$. Функция $G_1(s,z)$ аналитична на отрезке $[1-\delta_0, 1]$ (как функция от s) и равномерно ограничена относительно $z, |z| = 1$. Ее мы рассматриваем как функцию вещественной переменной s и периодически продолжаем (с периодом δ_0) на всю ось. Поэтому из определения I_0 выводим

$$I_0 = \frac{x^2 sin2\pi z}{\pi}\{g_0(z)\int_{1-\delta_0}^{1}\frac{x^{s-1}}{(1-s)^{2z}}ds + \int_{1-\delta_0}^{1}(1-s)^{1-2z}G_1(s,z)x^{s-1}ds\} =$$

$$= \frac{x^2 sin2\pi z}{\pi}\cdot\frac{g_0(z)}{(\log x)^{1-2z}}\int_0^{\delta_0\log x} e^{-u}u^{(1-2z)-1}du + \frac{x^2 sin2\pi z}{\pi(\log x)^{2-z}}\int_0^{\delta_0\log x} e^{-u}u^{1-2z}G_2(u,z)du, \tag{9}$$

где $G_2(u,z)$ — периодическая с периодом $\delta_0 \log x$ функция от u и ограниченная абсолютной постоянной.

Теперь применение леммы 4 дает

$$I_0 = \frac{x^2 sin2\pi z}{\pi(\log x)^{1-2z}} g_0(z)\{\Gamma(1-2z) + O(\delta_0 x^{-\delta_0}\log x)\} +$$

$$+\frac{x^2 sin2\pi z}{\pi(\log x)^{2-2z}}\{\int_0^{\propto} e^{-u}u^{1-2z}G_2(u,z)du + O(\delta_0^2 x^{-\delta_0}\log^2 x)\} =$$

$$= \frac{x^2 g_0(z)}{(\log x)^{1-z}\Gamma(2z)} + \frac{x^2 g_1(z) sin2\pi z}{\pi(\log x)^{2-2z}} + O(x^2 e^{-\frac{1}{2}c_1(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-1}}), \qquad (10)$$

где $g_1(z) = \int_0^{\propto} e^{-u}u^{1-2z}G_2(u,z)du, |z| = 1, z \neq 1$. Собирая вместе выражения для интегралов $I_j, j = 0, 1, 2, 3, 4$, получаем

$$S_0(x,z) = \frac{x_2}{(\log x)^{1-2z}} \cdot \frac{g_0(z)}{\Gamma(2z)} + \frac{x^2 g_1(2z) sin(2\pi z)}{\pi(\log x)^{2-z}} + O(x^2 e^{-c_2(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-1}}), \quad (11)$$

где $c_2 = min(a, c_1)$.

Для каждого $u, 0 < u \leqslant \lambda$, имеем

$$S_0(x+u,z) - S_0(x,z) = \int_x^{x+u} \frac{d}{dy}(S(y,z))dy.$$

Значит, $M_0(y,z) = \dfrac{d}{dy}S(y,z)$.

Итак, мы имеем

$$\int\limits_x^{x+u} M_0(y,z)dy = \frac{g_0(u)}{\Gamma(2z)}\left\{\frac{2x+u}{(\log x)^{1-z}} + O\left(\frac{u}{(\log x)^{2-2z}}\right) + \frac{(1-2z)(2u - u^2x^{-1} - x)}{(\log x)^{2-2z}}\right\} +$$

$$+\frac{g_1(z) sin2\pi z}{\pi} u\left\{\frac{2x+u}{(\log x)^{2-2z}} + \frac{2-2z(2u-u^2x^{-1}-x)}{(\log x)^{3-2z}} +\right.$$

$$\left. +O\left(\frac{u}{(\log x)^{3-2z}}\right) + O\left(x^2 e^{-c_2(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-1}}\right)\right\}. \qquad (12)$$

Далее, для $x \leqslant y \leqslant x+u$

$$M_0(y,z) - M_0(x,z) = \Sigma_{\alpha\epsilon G//x<N(\alpha)\leqslant y} z^{\omega(\alpha)}\tau(\alpha) = O(u^{1+\varepsilon}).$$

Тогда

$$uM_0(x,z) + O(u^{2+\varepsilon}) = \int_x^{x+u} M_0(y,z)dy. \qquad (13)$$

Положим

$$u = e^{-\frac{1}{2}c_2(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-1}}.$$

Из (13)-(14) получаем

$$M_0(x,z) = \frac{x}{(\log x)^{1-2z}} \left\{ \frac{2g_0(z)}{\Gamma(z)} + \frac{g_2(z)}{\log x} + \frac{g_3(z)}{(\log x)^2} \right\} +$$

$$+O\left(xe^{-\frac{1}{4}c_2(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-1}} \right),$$

где

$$g_2(z) = \frac{(2z-1)g_0(z)}{\Gamma(z)} + \frac{2g_1(2z)sin2\pi z}{\pi},$$

$$g_3(z) = \frac{2}{\pi}(z-1)g_1(2z)sin2\pi z.$$

Таким образом, теорема 1 доказана. Аналогичным образом получается следующая теорема 2.

Теорема 1. *Существует абсолютная постоянная $a > 0$ такая, что при*

$$\varphi_2 - \varphi_1 >> exp(-a(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-1})$$

справедлива асимптотическая оценка

$$M(x;\varphi_1,\varphi_2;z) = \frac{2(\varphi_2-\varphi_1)P(x)}{\pi(\log x)^{1-2z}}(\frac{g_0(z)}{\Gamma(z)} + \frac{g_2(z)}{\log x} + \frac{g_3(z)}{(\log x)^2})+$$

$$O(exp(-a(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-1}),$$

где $g_2(z), g_3(z)$ определены выше, $P(x) = c_1 x\log x + c_2 x$.

Доказательство проходит аналогично доказательству теоремы 1, где вместо $S_0(x,z)$ надо рассматривать $S_m(x,z), m \neq 0$. При этом учитывается, что в случае $m \neq 0$ функция $F_m(s,z)$ не имеет особой точки $s = 1$. А затем применение леммы о "стаканчиках"Виноградова дает указанный в теореме результат.

Следствием теоремы 2 является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $c(x)$ — вещественнозначная монотонная функция, стремящаяся к ∞ медленнее $\sqrt{\log\log x}$. Тогда*

$$A_k(x;\varphi_1,\varphi_2) = \sum_{\substack{\alpha\epsilon G \\ \omega(\alpha)=k \\ \varphi_1<arg\alpha\leqslant\varphi_2 \\ N(\alpha)\leqslant x}} = \frac{2P(x)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi\log x} \cdot \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!} \times$$

$$\times \frac{g_0((k-1)(\log\log x)^{-1}}{\Gamma(1+(k-1)(\log\log x)^{-1})} + O\left(k^{\frac{3}{2}}(\log\log x)^{-2}\right)$$

равномерно по $k, k\epsilon[1, \log\log x + c(x)\sqrt{\log\log x}]$, если только

$$\varphi_2 - \varphi_1 >> exp\left(-\frac{a}{3}(\log x)\frac{3}{5}(\log\log x)^{-1}\right).$$

Доказательство теоремы 3 существенно опирается на результат теоремы 2 и следует по схеме доказательства работы [4] о распределении натуральных чисел на отрезке $[1, x]$ с заданным числом различных простых делителей.

Заключение. Нами рассмотрено распределение значений функции делителей $\tau(\alpha)$ над $Z[i]$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью прогрессии. Построена асимптотическая формула для сумматорной функции, ассоциированной с мультипликативной функцией $z^{w(\alpha)}$ в узком секторе $N(\alpha) \leqslant x$, $\varphi_1 \leqslant \arg\alpha \leqslant \varphi_2$, где $w(\alpha)$ — число различных простых делителей α. В качестве следствия получена нетривиальная асимптотическая формула для суммы значений $\tau(\alpha)$ в узком секторе с заданным числом различных простых делителей.

1. **Katai I.** A remark on a paper of Ramachandra / I. Katai // Number Theory, Proc. Ootacamund, K. Alladi (Ed.), Lecture Notes in Math., Springer. – 1984. – P. 147–152.
2. **Ramachandra K.** Some problems of analytic number theory / K. Ramachandra // Acta Arith. – 1976. – 31. – P. 313–324.
3. **Colleman M. D.** The distribution of points at which binary quadratic forms are prime / M. D. Colleman // Proc. Lond. Math. Soc. – 1990. – 61(3). – P. 433–456.
4. **Бейтмен Г.** Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1966.
5. **Дадаян З. Ю.** Функция делителей гауссовых чисел / З. Ю. Дадян, А. С. Радова // Вестник Одесского национального университета. – 2012. – Т. 17, вып. 4. – С. 34–39.
6. **Кубилюс Й. П.** Об одной задаче многомерной аналитической теории чисел / Й. П. Кубилюс // Ученые труды Вильнюсского ун-та, сер. мат., физ., хим. наук. – 1955. – 4. – С. 5–41.

Получена 03.12.2014