

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра Методів математичної фізики

## Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Методи розв'язання лінійних різницевих рівнянь»

«Methods of solving of linear difference equations»

Виконав: здобувач денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
Освітня програма «Прикладна математика»

Муренець Нікіта Сергійович

Керівник

Канд. фіз.-мат. наук, проф. Круглов В.Є. \_\_\_\_\_

Рецензент

Канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю.С.

Рекомендовано до захисту:  
Протокол засідання кафедри  
№ \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2025 р.

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_  
протокол № \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2025  
р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(прізвище, ініціали)

Одеса – 2025

# ЗМІСТ

## Розділ 1: Вступ.

- 1.1 Актуальність теми.
- 1.2 Сучасний стан досліджень.
- 1.3 Коло питань дослідження.
- 1.4 Мета дослідження.
- 1.5 Об'єкт дослідження
- 1.6 Предмет дослідження

## Розділ 2: Основна частина.

- 2.1 Предмет дослідження.
- 2.2 Об'єкт і методи дослідження.
- 2.3 Основні підходи до розв'язування поставленої задачі.
  - 2.3.1 Метод характеристичного рівняння
  - 2.3.2 Метод невизначених коефіцієнтів
  - 2.3.3 Метод варіації довільних сталих
  - 2.3.4 Метод твірних функцій
  - 2.3.5 Матричний підхід
- 2.4 Теоретична частина
  - 2.4.1. Вступ до теорії різницевого рівнянь
  - 2.4.2. Лінійні однорідні різницеві рівняння
  - 2.4.3. Лінійні неоднорідні різницеві рівняння
  - 2.4.4. Початкові умови, крайові задачі та єдиність розв'язку
  - 2.4.5 Якісний аналіз розв'язків лінійних різницевого рівнянь
  - 2.4.6 Метод твірних функцій
  - 2.4.7 Метод Z-перетворення
  - 2.4.8 Операторні методи
  - 2.4.9 Методи розв'язання лінійних різницевого рівнянь зі змінними коефіцієнтами
- 2.5 Практична частина
  - 2.5.1.1 Метод характеристичного рівняння

2.5.1.2 Програмування попередніх обчислень

2.5.2.1 Метод твірних функцій

2.5.2.2 Програмування попередніх обчислень

2.5.3.1 Метод Z-перетворення

2.5.3.2 Програмування попередніх обчислень

2.5.4.1 Операторні методи

2.5.4.2 Програмування попередніх обчислень

2.5.5 Проведення інших оціночних досліджень параметрів моделей

2.5.5.1 Детальний аналіз накопичення похибок для чисельного методу (прямої ітерації) на довшому інтервалі та вплив початкової похибки

2.5.5.2 Чутливість коренів характеристичного рівняння до зміни коефіцієнтів

2.5.5.3 Дослідження області стійкості для рівняння 3-го порядку (Чисельний підхід)

Розділ 3: Висновки.

Розділ 4: Список використаних джерел

Розділ 5: Додатки

## ВСТУП

Різницеві рівняння третього порядку є ключовим математичним інструментом для моделювання дискретних процесів, які виникають у найрізноманітніших сферах сучасної науки та техніки. Завдяки своїй здатності точно описувати динамічні системи, що змінюються від кроку до кроку, вони використовуються у фізиці для моделювання коливальних процесів, у біології — для опису популяційної динаміки, в економіці — для прогнозування ринкових тенденцій, а також в інженерії — для аналізу систем автоматичного керування. Їхнє розв'язання вимагає не лише глибокого теоретичного розуміння, але й застосування ефективних чисельних методів, що дозволяють враховувати вплив похибок обчислень, забезпечувати стабільність алгоритмів та досягати високої точності результатів. Саме тому дослідження таких рівнянь є не просто теоретичною задачею, а має велике практичне значення, оскільки дозволяє розробляти надійні моделі для прогнозування поведінки складних систем, оптимізувати їхню роботу та розробляти нові інноваційні підходи до вирішення актуальних наукових і прикладних проблем.

### 1.1 Актуальність теми

Сучасний світ насичений процесами та системами, що за своєю суттю є дискретними або ефективно моделюються за допомогою дискретних математичних підходів. Від динаміки економічних показників та поширення інформації в соціальних мережах до функціонування цифрових пристроїв та аналізу алгоритмів – розуміння дискретних змін є ключовим у багатьох наукових та інженерних дисциплінах. Основним математичним інструментом для опису та дослідження таких систем слугують різницеві рівняння, які є природними дискретними аналогами диференціальних рівнянь. Серед них лінійні різницеві рівняння виділяються завдяки своїй відносно розвиненій теорії та надзвичайно

широкому спектру практичних застосувань, що й визначає актуальність глибокого вивчення методів їх розв'язання.

Лінійні різницеві рівняння є фундаментом для математичного моделювання у численних галузях. В економіці та фінансах вони дозволяють аналізувати моделі економічного зростання, такі як відома модель мультиплікатора-акселератора Самуельсона-Гікса, досліджувати динаміку цін, розраховувати складні відсотки та анuitети, а також є основою для авторегресійних моделей аналізу часових рядів. В інженерії та техніці лінійні різницеві рівняння незамінні при проектуванні та аналізі цифрових фільтрів (зокрема, рекурсивних ПР-фільтрів), у біології та екології вони допомагають описувати динаміку популяцій та поширення епідемій на дискретних часових кроках, а в інформатиці – аналізувати складність рекурсивних алгоритмів та моделювати процеси в комп'ютерних мережах.

Розуміння методів розв'язання лінійних різницевого рівнянь є критично важливим для чисельного аналізу диференціальних рівнянь. Більшість чисельних методів, таких як метод скінченних різниць, замінюють похідні на їх різницеві апроксимації, тим самим перетворюючи диференціальне рівняння на систему алгебраїчних або безпосередньо на різницево рівняння. Аналіз властивостей цього різницевого рівняння дозволяє робити висновки про точність, збіжність та стійкість самої чисельної схеми, що є наріжним каменем для достовірних комп'ютерних симуляцій.

У сучасних умовах, коли аналітичні розв'язки часто є складними або взагалі недосяжними, чисельні методи виступають головним інструментом розв'язання таких рівнянь. Методи, як-от метод Ейлера, метод Рунге–Кутта, метод підстановки та інші, дозволяють отримувати наближені рішення з високою точністю й ефективністю. Актуальність цієї теми посилюється ще й тим, що вона має не тільки теоретичне, але й важливе практичне значення для інженерних розрахунків, технічного моделювання та наукових досліджень.

## **1.2 Сучасний стан досліджень**

За останні десятиліття чисельні методи розв'язання різницевих рівнянь значно еволюціонували. Значний внесок у розвиток цієї сфери внесли такі вчені, як А. Самарський, А. Андрєєв, Дж. Перрі, Л. Корман та інші. У своїх роботах вони розробляли алгоритми, що дозволяють ефективно розв'язувати лінійні та нелінійні різницеві рівняння.

Особливу увагу приділено адаптивним методам, які забезпечують високу точність розрахунків навіть у випадках жорстких систем. Крім того, розвиток програмного забезпечення, такого як MATLAB, Maple, Wolfram Mathematica, значно спростив впровадження складних чисельних методів і дозволив дослідникам сфокусуватися на аналізі результатів та оптимізації обчислень.

## **1.3 Коло питань дослідження**

У межах даної дипломної роботи розглядаються математичні основи різницевих рівнянь третього порядку, зокрема їхні основні властивості та класифікація, а також методи чисельного розв'язання таких рівнянь. Значну увагу приділено аналізу точності та стійкості застосовуваних чисельних методів, порівнянню їхньої ефективності на прикладі конкретних задач, розробці алгоритмів для програмної реалізації, а також вивченню похибок, що виникають під час чисельних розрахунків, і пошуку шляхів їхньої мінімізації. Таким чином, дослідження охоплює як теоретичні, так і практичні аспекти розв'язання різницевих рівнянь третього порядку.

## **1.4 Мета дослідження**

Метою роботи є розробка, аналіз і порівняння чисельних методів для розв'язання різницевих рівнянь третього порядку, а також створення ефективних алгоритмів, які можна застосовувати для практичних задач моделювання.

Особлива увага приділяється дослідженню точності й стійкості методів, а також побудові програмних рішень, що дозволяють автоматизувати процес розв'язання таких рівнянь.

### **1.5 Об'єкт дослідження**

Об'єктом дослідження є різницеві рівняння третього порядку, їхні математичні властивості та методи розв'язання, зокрема чисельні методи, які застосовуються для таких рівнянь.

### **1.6 Предмет дослідження**

Предметом дослідження є чисельні методи розв'язання різницевих рівнянь третього порядку, алгоритми їхньої реалізації, аналіз точності, стійкості та ефективності, а також можливості їхнього застосування для розв'язання прикладних задач.

# ОСНОВНА ЧАСТИНА

## 2.1. Предмет дослідження

Предметом дослідження цієї роботи є лінійні різницеві рівняння, які є дискретними аналогами диференціальних рівнянь. Вони описують еволюцію дискретних динамічних систем, у яких значення функції на наступному кроці визначається через значення на попередніх кроках. Такі рівняння широко застосовуються у чисельному аналізі, економіці, біології, інформатиці, теорії керування, техніці та фінансовому моделюванні.

Основна увага приділяється лінійним різницеvim рівнянням із сталими коефіцієнтами, а також способам їх розв'язування: як аналітичними, так і чисельними алгоритмами.

## 2.2. Об'єкт і методи дослідження

Об'єктом дослідження є лінійні однорідні різницеві рівняння загального вигляду:

$$a_n u_{k+n} + a_{n-1} u_{k+n-1} + \dots + a_0 u_k = 0 \text{ (однорідні)}.$$

Для аналізу методів ми розглянемо більш просте лінійне однорідне різницеве рівняння.

Методи дослідження, які ми будемо використовувати, будуть включати:

- аналітичні методи (метод варіації довільних сталих, метод характеристичного рівняння, метод невизначених коефіцієнтів);
- метод твірних функцій (generating functions);
- матричні методи (запис системи у вигляді  $u_{k+1} = Au_k$ );
- чисельне моделювання, оцінка похибок, аналіз стійкості;
- побудова числових експериментів у Python для верифікації результатів.

## 2.3. Основні підходи до розв'язування поставленої задачі

### 2.3.1 Метод характеристичного рівняння

Цей метод є основним підходом для розв'язання лінійних однорідних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Він полягає у складанні характеристичного рівняння вигляду  $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ , де  $r$  — шукане значення. Визначивши корені характеристичного рівняння, можна побудувати загальний розв'язок. Якщо всі корені різняться за значенням й дійсні, розв'язок записується як комбінація степеневих функцій виду  $C_1 r_1^k + C_2 r_2^k + C_3 r_3^k$ . Якщо серед коренів є кратні, до відповідних членів додаються множники  $k, k^2$  тощо для збереження лінійної незалежності розв'язків. Якщо ж серед коренів є комплексно спряжені, розв'язки подаються у вигляді тригонометричних виразів через синус і косинус, що дає змогу описувати коливальні або хвильові процеси. Цей метод є дуже потужним і дозволяє отримати точний аналітичний вираз розв'язку для широкого класу задач.

### 2.3.2 Метод невизначених коефіцієнтів

Цей метод застосовується до неоднорідних різницевих рівнянь, коли права частина  $f(k)$  має спеціальний, добре структурований вигляд, наприклад, експоненційний, поліноміальний, синусоїдальний або косинусоїдальний. Суть методу полягає в тому, щоб припустити певну форму частинного розв'язку з невідомими коефіцієнтами, які підбираються таким чином, щоб задовольнити рівняння після підстановки. Якщо форма частинного розв'язку збігається з однорідною частиною, її модифікують шляхом множення на  $k$  або  $k^2$  для уникнення залежності. Метод невизначених коефіцієнтів є простим у застосуванні, проте його обмеженням є те, що він працює лише тоді, коли форма  $f(k)$  належить до класу «стандартних» функцій. У більш складних випадках доводиться застосовувати інші, більш універсальні методи.

### 2.3.3 Метод варіації довільних сталих

Це більш загальний підхід для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння, особливо коли права частина має складну або нестандартну структуру. Метод передбачає, що константи  $C_1, C_2, C_3$ , які входять до загального розв'язку однорідного рівняння, стають змінними функціями  $C_1(k), C_2(k), C_3(k)$ , тобто «варіюються». Далі ці функції визначаються через підстановку у вихідне рівняння й розв'язання отриманої системи для знаходження конкретного частинного розв'язку. Метод варіації довільних сталих є досить дієвим, оскільки не потребує обмежень на вигляд  $f(k)$ , однак він є значно більш трудомістким порівняно з методом невизначених коефіцієнтів.

### 2.3.4 Метод твірних функцій

Цей метод використовує ідею перетворення послідовності  $\{y_k\}$  у формальний степеневий ряд  $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k$ . Після цього вихідне різницеве рівняння переписується як рівняння для функції  $Y(z)$ , що часто має простіший вигляд. Розв'язавши рівняння для  $Y(z)$ , можна знайти явний вираз для  $y_k$ , розклавши  $Y(z)$  у степеневий ряд або використавши інші аналітичні методи. Метод твірних функцій особливо корисний у комбінаториці, теорії чисел та для задач, де цікавлять загальні властивості послідовності, а не лише конкретні значення.

### 2.3.5 Матричний підхід

Суть матричного підходу полягає в переписуванні рекурентної системи у вигляді матричного рівняння  $y_{k+1} = Ay_k$ , де  $A$  — квадратна матриця коефіцієнтів, а  $y_k$  — вектор значень на кроці  $k$ . Загальний розв'язок можна подати як  $y_k = A^k y_0$ , де  $y_0$  — вектор початкових умов. Щоб ефективно обчислювати степені матриці  $A$ , використовуються властивості власних значень і власних векторів, діагоналізація, розклад Жордана або інші факторизації. Матричний підхід дозволяє розв'язувати задачі навіть для систем високого порядку й дає змогу проводити аналіз стійкості, оцінювати вплив початкових умов і параметрів системи. Цей метод є особливо потужним у комп'ютерних розрахунках.

## 2.4 Теоретична частина

### 2.4.1. Вступ до теорії різницевих рівнянь

Різницеві рівняння є фундаментальним інструментом математичного аналізу, що дозволяє описувати та аналізувати системи, поведінка яких характеризується дискретними змінами. На відміну від диференціальних рівнянь, що моделюють неперервні процеси, різницеві рівняння фокусуються на значеннях функцій у дискретних точках. Це робить їх незамінними при вивченні послідовностей, рекурентних співвідношень, а також при дискретизації неперервних моделей з метою їх чисельного розв'язання.

Різницеvim рівнянням називається рівняння, що встановлює зв'язок (залежність) між значеннями невідомої функції  $y(x)$  у послідовних дискретних точках  $x_k = x_0 + kh$ , де  $h$  – крок дискретизації (часто  $h = 1$ , і тоді  $x_k = k$ ). Для зручності, розглядають функції цілочисельного аргументу, позначаючи  $y_k = y(k)$ , і тоді рівняння пов'язує члени послідовності  $\{y_k\}$ .

Порядок різницевого рівняння визначається як різниця між найбільшим та найменшим індексами (або аргументами) невідомої функції, що явно входять до рівняння. Наприклад, рівняння  $y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k = k^2$  є рівнянням другого порядку, оскільки  $(k + 2) - k = 2$ . Рівняння називається лінійним, якщо невідома функція  $y_k$  та її значення в інших дискретних точках (наприклад,  $y_{k+1}$ ,  $y_{k-1}$ ) входять до нього лінійно. Тобто, рівняння може бути записане у вигляді  $L(y_k) = f_k$ , де  $L$  – лінійний оператор відносно  $y_k, y_{k+1}, \dots$ . В іншому випадку рівняння є нелінійним.

Лінійне різницеve рівняння є однорідним, якщо його вільний член (функція  $f_k$ , що не залежить від  $y_j$ ) тотожно дорівнює нулю. В протилежному випадку рівняння називається неоднорідним. Якщо коефіцієнти різницевого рівняння не залежать від індексу  $k$  (або незалежної змінної), то рівняння називається автономним або рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Якщо ж хоча б один коефіцієнт залежить від  $k$ , рівняння є рівнянням зі змінними коефіцієнтами.

Для формалізації операцій з дискретними функціями та компактного запису

різницевих рівнянь вводяться різницеві оператори. Найбільш поширеними є оператор зсуву  $E$ , що визначається як  $Ey_k = y_{k+1}$ , та оператор прямої різниці першого порядку  $\Delta$ , що визначається як  $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ . Очевидно, що  $\Delta = E - I$ , де  $I$  – тотожний оператор ( $I y_k = y_k$ ). Існують також оператори вищих порядків, наприклад, оператор прямої різниці  $m$ -го порядку  $\Delta^m y_k = \Delta(\Delta^{m-1} y_k)$ , та інші типи різницевих операторів, такі як оператор центральної різниці  $\delta y_k = y_{k+1/2} - y_{k-1/2}$  або оператор усереднення. Ці оператори мають низку алгебраїчних властивостей, аналогічних властивостям диференціальних операторів, що дозволяє застосовувати операторні методи для розв'язання різницевих рівнянь.

Історично, розвиток теорії різницевих рівнянь сягає корінням у XVII-XVIII століття, розвиваючись паралельно з диференціальним численням. Ранні роботи, пов'язані з рекурентними співвідношеннями, можна знайти у працях Леонардо Пізанського (Фібоначчі) при розгляді відомої послідовності. Пізніше важливий внесок у розвиток методів розв'язання лінійних різницевих рівнянь внесли такі математики, як Абрахам де Муавр, Леонард Ейлер та Жозеф-Луї Лагранж. Наприклад, де Муавр досліджував рекурентні співвідношення, що виникають у теорії ймовірностей, а Ейлер та Лагранж розробили методи, аналогічні тим, що використовуються для диференціальних рівнянь. У XIX столітті Анрі Пуанкаре зробив фундаментальний внесок у якісну теорію різницевих рівнянь, досліджуючи асимптотичну поведінку їх розв'язків.

Мотивація вивчення різницевих рівнянь полягає не лише в їх здатності апроксимувати диференціальні рівняння (що стало особливо актуальним з розвитком обчислювальної техніки та методів, подібних до методу скінченних різниць, який використовували ще Ісаак Ньютон та Готфрід Лейбніц у своїх числових підходах), але й у можливості точного опису багатьох процесів, що за своєю природою є дискретними: в економіці (моделі росту, фінансові ряди), біології (динаміка популяцій), теорії інформації (кодування, обробка сигналів) та інженерії (цифрові фільтри, системи керування).

### 2.4.2. Лінійні однорідні різницеві рівняння

Центральне місце в теорії лінійних різницевих рівнянь займають лінійні однорідні різницеві рівняння  $n$ -го порядку. Загальний вигляд такого рівняння:

$y_{k+n} + p_1(k)y_{k+n-1} + \dots + p_{n-1}(k)y_{k+1} + p_n(k)y_k = 0$ , де  $p_i(k)$  – коефіцієнти рівняння, які в загальному випадку можуть залежати від  $k$ . Якщо  $p_n(k) \neq 0$  для всіх  $k$  (та коефіцієнт при  $y_{k+n}$  дорівнює 1, чого завжди можна досягти діленням, якщо він не нуль), то це дійсно рівняння  $n$ -го порядку. Фундаментальною властивістю лінійних однорідних рівнянь є принцип суперпозиції: якщо  $y^{(1)}_k$

та  $y^{(2)}_k$  є розв'язками однорідного рівняння, то їх лінійна комбінація  $C_1y^{(1)}_k + C_2y^{(2)}_k$  з довільними сталими  $C_1, C_2$  також є розв'язком цього рівняння. Це означає, що множина всіх розв'язків утворює  $n$ -вимірний лінійний простір.

Якщо вдається знайти  $n$  лінійно незалежних розв'язків  $y_k(1), y_k^{(2)}, \dots, y_k^{(n)}$ , то вони утворюють фундаментальну систему розв'язків (ФСР). Будь-який розв'язок однорідного рівняння може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації:  $y_k = C_1y_k^{(1)} + C_2y_k^{(2)} + \dots + C_ny_k^{(n)}$ , де  $C_i$  – довільні сталі. Для перевірки лінійної незалежності системи розв'язків використовується визначник Казораті (аналог визначника Вронського для диференціальних рівнянь), що визначається як:

$$W_k = \begin{vmatrix} y_k^{(1)} & y_k^{(2)} & \dots & y_k^{(n)} \\ y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} & \dots & y_{k+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+n-1}^{(1)} & y_{k+n-1}^{(2)} & \dots & y_{k+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Якщо коефіцієнт  $p_n^{(k)}$  не дорівнює нулю для всіх  $k$  в області визначення, то, щоб система розв'язків була лінійно незалежною, необхідно і достатньо, щоб її визначник Казораті  $W_k \neq 0$  хоча б в одній точці  $k_0$  з області визначення (і тоді він буде відмінний від нуля для всіх  $k$ ).

Найпростішими для розв'язання є лінійні однорідні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$a_0y_{k+n} + a_1y_{k+n-1} + \dots + a_ny_k = 0, \text{ де } a_i \text{ – сталі, } a_0 \neq 0, a_n \neq 0.$$

Для таких рівнянь застосовується метод характеристичного рівняння.

Шукаючи розв'язок у виді  $y_k = \lambda^k$  (де  $\lambda \neq 0$ ), підставляємо його в рівняння і після

ділення на  $\lambda_k$  отримуємо алгебраїчне рівняння  $n$ -го степеня відносно  $\lambda$ :

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Це рівняння називається характеристичним. Загальний розв'язок будується на основі  $n$  коренів цього характеристичного рівняння:

1. Якщо всі  $n$  коренів  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  характеристичного рівняння дійсні та відрізняються, то фундаментальна система розв'язків складається з  $y^{(j)}_k = \lambda_j^k$ , і загальний розв'язок має вигляд  $y^k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + \dots + C_n\lambda_n^k$ .
2. Якщо серед коренів є дійсний корінь  $\lambda_0$  кратності  $m$  ( $1 < m \leq n$ ), то йому відповідають  $m$  лінійно незалежних розв'язків:  $\lambda_0^k, k\lambda_0^k, k^2\lambda_0^k, \dots, k^{m-1}\lambda_0^k$ . Ці розв'язки входять до загального розв'язку з відповідними довільними сталими.
3. Якщо серед коренів є пара комплексно спряжених коренів  $\lambda_{1,2} = r(\cos\phi \pm i\sin\phi)$ , де  $r$  – модуль, а  $\phi$  – аргумент комплексного числа, то цій парі відповідають два дійсні лінійно незалежні розв'язки:  $r^k\cos(k\phi)$  та  $r^k\sin(k\phi)$ .

У випадку, якщо пара комплексно спряжених коренів  $\lambda_0, \lambda_0^-$  має кратність  $m$ , то їм відповідають  $2m$  дійсних лінійно незалежних розв'язків:  $r^k\cos(k\phi), kr^k\cos(k\phi), \dots, k^{m-1}r^k\cos(k\phi)$  та  $r^k\sin(k\phi), kr^k\sin(k\phi), \dots, k^{m-1}r^k\sin(k\phi)$ .

Для рівнянь зі змінними коефіцієнтами загального методу побудови фундаментальної системи розв'язків не існує. Проте, для деяких спеціальних типів рівнянь або рівнянь нижчих порядків можна знайти розв'язки. Наприклад, для лінійного однорідного рівняння першого порядку  $u_{k+1} - p^{(k)}u_k = 0$ , розв'язок легко знаходиться як  $u_k = u_0 \prod_{j=0}^{k-1} p(j)$  (якщо  $p(j) \neq 0$ ). Іноді, якщо відомий один частинний ненульовий розв'язок рівняння  $n$ -го порядку, можна понизити його порядок на одиницю. Рівняння, що виникають з рекурентних співвідношень для ортогональних поліномів, часто є важливими прикладами лінійних різницевого рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

### 2.4.3. Лінійні неоднорідні різницеві рівняння

Розглянемо також лінійні неоднорідні різницеві рівняння та підмітимо різницю з однорідними:

$y_{k+n} + p_1(k)y_{k+n-1} + \dots + p_n(k)y_k = f_k$ , де  $f_k$  – задана послідовність (права частина або вільний член), що не дорівнює тотожно нулю. Фундаментальна теорема про структуру загального розв'язку стверджує, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння - сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння  $y^{(0)}_k$  (отриманого заміною  $f_k$  на 0) та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння  $y^{(ч)}_k$ :

$$y_k = y^{(0)}_k + y^{(ч)}_k.$$

Таким чином, задача знаходження загального розв'язку неоднорідного рівняння зводиться до знаходження загального розв'язку однорідного рівняння (що розглянуто вище) та знаходження одного будь-якого частинного розв'язку  $y^{(ч)}_k$  вихідного неоднорідного рівняння.

Для лінійних неоднорідних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами існує два основні методи знаходження частинного розв'язку  $y^{(ч)}_k$ :

1. Метод невизначених коефіцієнтів: застосовується, якщо права частина  $f_k$  має спеціальний, так званий "квазіполіноміальний" вигляд. Це означає, що  $f_k$  є поліномом від  $k$ , експоненційною функцією  $a_k$ , тригонометричними функціями  $\sin(\alpha k)$  або  $\cos(\alpha k)$ , або їх добутками та скінченними сумами. У цьому випадку частинний розв'язок  $y^{(ч)}_k$  шукається у вигляді, подібному до правої частини  $f_k$ , але з невизначеними коефіцієнтами. Потім ці коефіцієнти знаходяться шляхом підстановки шуканого вигляду  $y^{(ч)}_k$  у вихідне неоднорідне рівняння та прирівнювання коефіцієнтів при однакових функціях від  $k$ . Особливу увагу слід приділяти так званим "резонансним" випадкам: якщо число, що визначає вигляд правої частини (наприклад, основа експоненти  $a$  або характеристичне число для тригонометричних функцій), є коренем характеристичного рівняння відповідного  $m$ -кратного однорідного рівняння, то шуканий вигляд частинного розв'язку слід домножити на  $k^m$ .
2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа): є більш загальним і може бути застосований навіть тоді, коли метод невизначених коефіцієнтів не працює (наприклад, для більш складних правих частин або для рівнянь

зі змінними коефіцієнтами, якщо відома ФСР однорідного рівняння). Якщо  $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \dots, y_k^{(n)}$  є фундаментальною системою розв'язків відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок цього неоднорідного рівняння шукається у вигляді  $y_k^{(q)} = \sum_{j=1}^n C_j(k) y_k^{(j)}$ , де  $C_j(k)$  – тепер вже не сталі, а невідомі функції (послідовності) від  $k$ . Їх різниці  $\Delta C_j(k)$  знаходяться з системи  $n$  лінійних алгебраїчних рівнянь, з визначником Казораті (або його модифікацією). Після знаходження  $\Delta C_j(k)$  самі  $C_j(k)$  отримуються сумуванням.

Якщо права частина  $f_k$  є сумою декількох функцій  $f_k = f_k^{(1)} + f_k^{(2)} + \dots + f_k^{(s)}$ , то за принципом суперпозиції для неоднорідних рівнянь (який є наслідком лінійності), частинний розв'язок  $y_k^{(q)}$  можна шукати як суму частинних розв'язків  $y_k^{(q,j)}$ , знайдених для кожного рівняння  $L(y_k) = f_k^{(j)}$  окремо:

$y_k^{(q)} = \sum_{j=1}^s y_k^{(q,j)}$ . Це часто спрощує пошук частинного розв'язку, якщо кожна з  $f_k^{(j)}$  має вигляд, зручний для методу невизначених коефіцієнтів.

#### 2.4.4. Початкові умови, крайові задачі та єдиність розв'язку

Для того, щоб з нескінченної множини розв'язків лінійного різницевого рівняння  $n$ -го порядку (що визначається  $n$  довільними сталими  $C_1, \dots, C_n$  у загальному розв'язку) виділити єдиний, конкретний розв'язок, необхідно задати  $n$  додаткових умов. Найбільш поширеною та фундаментальною є постановка задачі Коші (задачі з початковими умовами). Для різницевого рівняння  $n$ -го порядку задача Коші полягає у заданні значень невідомої функції в  $n$  послідовних початкових точках, зазвичай, починаючи з початкової точки  $k_0$ :

$y_{k_0} = \alpha_0, y_{k_0+1} = \alpha_1, \dots, y_{k_0+n-1} = \alpha_{n-1}$ , де  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  – задані числа.

Для лінійних різницевого рівнянь, у яких коефіцієнт при старшому члені (наприклад,  $a_0$  в рівнянні  $a_0 y_{k+n} + \dots = f_k$ ) не дорівнює нулю для всіх  $k$  з області визначення, справедлива теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Вона стверджує, що для будь-яких заданих початкових значень  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  та будь-якої правої частини  $f_k$  (якщо рівняння неоднорідне) існує єдиний розв'язок,

що задовольняє як самому різницевому рівнянню, так і заданим початковим умовам. Цей розв'язок може бути знайдений шляхом визначення значень довільних сталих  $C_1, \dots, C_n$  у загальному розв'язку, підставляючи в нього початкові умови та знаходячи розв'язок отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $C_j$ .

Окрім задачі Коші, для різницевих рівнянь, аналогічно до диференціальних, можуть ставитися і крайові задачі (або граничні задачі). У цьому випадку умови на розв'язок задаються не в одній початковій групі точок, а на різних "кінцях" (або всередині) дискретного інтервалу  $[k_0, k_N]$ , на якому шукається розв'язок. Наприклад, для різницевого рівняння другого порядку можуть бути задані значення  $u_{k_0} = A$  та  $u_{k_N} = B$ . Або ж можуть бути задані умови на лінійні комбінації значень функції в крайових точках. Розв'язання крайових задач для різницевих рівнянь, як правило, є більш складною проблемою, ніж розв'язання задачі Коші. Теорема існування та єдиності для них не завжди гарантована і залежить від конкретного вигляду рівняння та крайових умов. Часто такі задачі зводяться до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (наприклад, за допомогою методу скінченних різниць для апроксимації диференціальних крайових задач) або вимагають застосування спеціальних чисельних методів, таких як метод "стрільби" або метод прогонки (для рівнянь другого порядку специфічної структури).

#### 2.4.5 Якісний аналіз розв'язків лінійних різницевих рівнянь

Важливим аспектом дослідження різницевих рівнянь, особливо тих, що моделюють динамічні системи, є якісний аналіз їх розв'язків. Це включає дослідження стійкості розв'язків та їх асимптотичної поведінки при необмеженому зростанні дискретного часу або індексу ( $k \rightarrow \infty$ ). Поняття стійкості розв'язків різницевих рівнянь аналогічне до відповідних понять для диференціальних рівнянь і є ключовим для розуміння поведінки модельованої системи в довгостроковій перспективі.

Розглядають різні типи стійкості. Нульовий розв'язок  $u_k \equiv 0$  лінійного

однорідного різницевого рівняння називається:

- Стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого  $\epsilon > 0$  існує таке  $\delta(\epsilon) > 0$ , що будь-який розв'язок  $y_k$ , початкові умови якого задовольняють умові  $\sum_{j=0}^{n-1} y_{k_0+j} < \delta$ , задовольняє умові  $|y_k| < \epsilon$  для всіх  $k \geq k_0$ . Інтуїтивно, малі збурення початкових умов призводять до малих відхилень розв'язку від нульового.

- Асимптотично стійким, якщо він стійкий за Ляпуновим і, крім того,  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$  для будь-якого розв'язку, що починається в  $\delta$ -околі нуля. Тобто, розв'язки не просто залишаються близькими до нуля, а й з часом до нього наближаються.

Для лінійних однорідних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами критерії стійкості формулюються досить просто через корені  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  характеристичного рівняння:

1. Нульовий розв'язок є стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли модулі всіх коренів характеристичного рівняння не перевищують одиниці ( $|\lambda_j| \leq 1$  для всіх  $j$ ), причому ті корені, модуль яких дорівнює одиниці, повинні бути простими (тобто, не кратними). Якщо є кратні корені з модулем, що дорівнює одиниці, розв'язок може бути нестійким (наприклад,  $k * 1^k = k \rightarrow \infty$ ).
2. Нульовий розв'язок є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли модулі всіх коренів характеристичного рівняння менші за одиницю ( $|\lambda_j| < 1$  для всіх  $j = 1, \dots, n$ ).

Ці критерії (відомі також як критерії Шура-Кона або подібні) дозволяють аналізувати поведінку розв'язків, не знаходячи їх у явному вигляді. Якщо хоча б один корінь має модуль більший за одиницю, або є корінь з модулем, що дорівнює одиниці, кратності більшої за одиницю (стійкість за Ляпуновим), то система є нестійкою, і існують розв'язки, що необмежено зростають при  $k \rightarrow \infty$ .

Асимптотична поведінка розв'язків при  $k \rightarrow \infty$  також визначається коренями характеристичного рівняння, а саме тими коренями, що мають найбільший модуль (так звані домінуючі коренями). Якщо є один домінуючий дійсний

корінь  $\lambda_d$  з  $|\lambda_d| > 1$ , то розв'язок буде зростати або спадати експоненційно як  $C\lambda_d^k$ . Якщо є пара домінуючих комплексно спряжених коренів  $\lambda_d, \lambda_d^-$  з модулем  $r_d > 1$ , то розв'язок матиме коливальний характер зі зростаючою амплітудою  $Cr_d^k$ . Якщо всі корені мають модуль менший за одиницю, розв'язок прямує до нуля. Розуміння асимптотичної поведінки є важливим для прогнозування довгострокової динаміки систем, що описуються різницевиими рівняннями. Для рівнянь зі змінними коефіцієнтами аналіз стійкості та асимптотики є значно складнішим і часто вимагає застосування спеціальних методів або якісних оцінок.

#### 2.4.6 Метод твірних функцій

Метод твірних функцій є потужним інструментом для розв'язання лінійних різницевих рівнянь, особливо зі сталими коефіцієнтами, а також для аналізу властивостей послідовностей у комбінаториці та теорії ймовірностей. Твірною функцією для послідовності  $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$  називається формальний степеневий ряд  $Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k$ , де  $s$  – допоміжна змінна. Ключова ідея методу полягає у перетворенні різницевого рівняння для послідовності  $y_k$  на алгебраїчне або диференціальне рівняння для її твірної функції  $Y(s)$ . Для цього використовуються властивості твірних функцій для зсунутих послідовностей. Наприклад, якщо  $Y(s)$  є твірною функцією для  $y_k$ , то твірна функція для  $y_{k+1}$  дорівнює  $\frac{Y(s)-y_0}{s}$ , а для  $y_{k+m}$  виражається як  $\frac{Y(s)-y_0-y_1s-\dots-y_{m-1}s^{m-1}}{s^m}$ .

Застосування методу до лінійного різницевого рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами  $a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = f_k$  відбувається наступним чином: обидві частини рівняння множаться на  $s^k$  та підсумовуються по  $k$  від 0 до  $\infty$  (або від іншого відповідного початкового індексу). Використовуючи властивості твірних функцій для зсунутих членів послідовності та твірну функцію для правої частини  $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k$ , отримують алгебраїчне рівняння відносно  $Y(s)$ . Це рівняння зазвичай має вигляд  $Q(s)Y(s) = P(s) + R(s)F(s)$ , де  $Q(s)$

– поліном, коренями якого є обернені величини до коренів характеристичного рівняння різницевого рівняння,  $P(s)$  – поліном, що залежить від початкових умов  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ , а  $R(s)$  – також деякий поліном. Розв'язуючи це рівняння відносно  $Y(s)$ , отримують  $Y(s) = \frac{(P(s) + R(s)F(s))}{Q(s)}$ .

Наступним кроком є розклад отриманого раціонального дробу  $Y(s)$  на прості дробки. Після цього, використовуючи відомі розклади в степеневі ряди для простих дробів (наприклад, геометричну прогресію  $\frac{1}{1-as} = \sum (as)^k$ ), знаходять коефіцієнти  $y_k$  при  $s^k$  у розкладі  $Y(s)$ . Ці коефіцієнти і є розв'язком вихідного різницевого рівняння.

Приклади застосування методу твірних функцій включають розв'язання рівняння для чисел Фібоначчі ( $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$ ), а також більш загальних рівнянь другого та вищих порядків. Перевагою методу є те, що він одночасно враховує початкові умови та може бути застосований до неоднорідних рівнянь, якщо твірна функція для правої частини відома або легко знаходиться.

#### 2.4.7 Метод Z-перетворення

Метод Z-перетворення, тісно пов'язаний з перетворенням Лапласа для неперервних систем та методом твірних функцій, є ще одним ефективним інструментом для аналізу та розв'язання лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами, особливо в інженерії та теорії цифрової обробки сигналів.

Прямим Z-перетворенням послідовності  $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$  називається функція комплексної змінної  $z$ :

$$Y(z) = Z\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}.$$

Обернене Z-перетворення дозволяє відновити послідовність  $y_k$  за її Z-образом  $Y(z)$ . Z-перетворення має низку важливих властивостей, що полегшують його застосування:

Лінійність:

$$Z\{ay_k + by_k\} = aY(z) + bV(z).$$

Теорема про зсув вправо (запізнення):

$Z\{y_{k-m}\} = z^{-m}Y(z)$  (при відповідних початкових умовах, якщо  $k - m < 0$ ).

Теорема про зсув вліво (випередження):

$$Z\{y_{k+m}\} = z^m[Y(z) - \sum_{j=0}^{m-1} y_j z^{-j}].$$

Для розв'язання лінійного різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомогою  $Z$ -перетворення до обох частин рівняння застосовується пряме  $Z$ -перетворення. Використовуючи теорему про зсув вліво, різницеве рівняння перетворюється на алгебраїчне рівняння відносно  $Z$ -образу  $Y(z)$  шуканої послідовності. Це алгебраїчне рівняння також включає початкові умови  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ . Розв'язуючи його відносно  $Y(z)$ , отримують вираз для  $Z$ -образу розв'язку. Наступним кроком є знаходження оригіналу  $y_k$  шляхом застосування оберненого  $Z$ -перетворення до  $Y(z)$ . Це часто робиться шляхом розкладу  $Y(z)$  на прості дроби та використання таблиці  $Z$ -перетворень для відомих послідовностей (наприклад,  $Z\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$ ,  $Z\{ka^{k-1}\} = \frac{z}{(z-a)^2}$  тощо) або за допомогою формули обернення через інтеграл по контуру чи методом ділення поліномів.

Метод  $Z$ -перетворення є особливо зручним для розв'язання задач з початковими умовами, оскільки вони автоматично враховуються при переході до алгебраїчного рівняння для  $Y(z)$ . Порівнюючи з методом характеристичного рівняння,  $Z$ -перетворення дає безпосередньо розв'язок, що задовольняє початковим умовам, тоді як метод характеристичного рівняння спочатку дає загальний розв'язок, а потім вимагає визначення довільних сталих з початкових умов. Обидва методи, по суті, пов'язані, оскільки знаменник раціональної функції  $Y(z)$  (після перетворень) відповідає характеристичному поліному різницевого рівняння.

#### 2.4.8 Операторні методи

Операторні методи надають формальний та часто елегантний спосіб маніпулювання та розв'язання лінійних різницевого рівнянь, особливо зі сталими коефіцієнтами. Основна ідея полягає у представленні різницевого рівняння за допомогою оператора зсуву  $E$  ( $Ey_k = y_{k+1}$ ) та інших різницевого операторів.

Лінійне різницеве рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами  $a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = f_k$  може бути записане в операторній формі як  $L(E)y_k = f_k$ , де  $L(E) = a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n I$  – лінійний різницевий оператор, що є поліномом від оператора зсуву  $E$ . Поліном  $L(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$  є точно характеристичним поліномом даного різницевого рівняння.

Метод символічного обчислення полягає у формальних маніпуляціях з оператором  $L(E)$ . Наприклад, для знаходження загального розв'язку однорідного рівняння  $L(E)y_k = 0$ , якщо характеристичний поліном  $L(\lambda)$  має  $n$  різних коренів  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , то оператор  $L(E)$  можна розкласти на множники  $L(E) = a_0(E - \lambda_1 I)(E - \lambda_2 I) \dots (E - \lambda_n I)$ . Тоді розв'язок рівняння  $(E - \lambda_j I)y_k = 0$ , тобто  $y_{k+1} - \lambda_j y_k = 0$ , є  $y_k = C \lambda_j^k$ . Загальний розв'язок вихідного рівняння є лінійною комбінацією таких розв'язків. У випадку кратних коренів використовуються відповідні модифікації.

Для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння  $L(E)y_k = f_k$  можна формально записати  $y_k^{(q)} = [L(E)]^{-1} f_k$ , де  $[L(E)]^{-1}$  – обернений оператор. Його можна представити у вигляді розкладу на прості дроби (якщо  $L(E)$  є поліномом) або через ряди по степенях оператора  $\Delta = E - I$  (якщо це зручно для вигляду  $f_k$ ). Наприклад, якщо  $f_k$  є поліномом, то розклад  $[L(E)]^{-1}$  в ряд по степенях  $\Delta$  може дати явний вираз для частинного розв'язку. Зв'язок з методом характеристичного рівняння є безпосереднім: операторний поліном  $L(E)$  при заміні  $E$  на  $\lambda$  дає характеристичний поліном  $L(\lambda)$ . Операторні методи часто дозволяють отримати розв'язки в компактній формі та надають глибше розуміння структури рівняння.

#### **2.4.9 Методи розв'язання лінійних різницевих рівнянь зі змінними коефіцієнтами**

Розв'язання лінійних різницевих рівнянь зі змінними коефіцієнтами  $y_{k+n} + p_1(k)y_{k+n-1} + \dots + p_n(k)y_k = f_k$  представляє значно більші труднощі, ніж випадок сталих коефіцієнтів. Загального аналітичного методу для знаходження розв'язків таких рівнянь не існує. Основні труднощі полягають у тому, що метод характеристичного рівняння в його класичному вигляді не застосовний, а

структура фундаментальної системи розв'язків може бути дуже складною і залежати від конкретного вигляду коефіцієнтів  $p_j(k)$ .

Проте, для деяких класів рівнянь зі змінними коефіцієнтами існують специфічні підходи:

1. Метод пониження порядку: Якщо відомий один ненульовий частинний розв'язок  $y^{(1)}_k$  однорідного рівняння  $n$ -го порядку, то за допомогою заміни  $y_k = y^{(1)}_k z_k$  можна понизити порядок рівняння для нової невідомої функції  $\Delta z_k$  на одиницю. Цей метод аналогічний методу Д'Аламбера для диференціальних рівнянь.
2. Спеціальні випадки, що зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами: Іноді за допомогою вдалої заміни змінної або невідомої функції рівняння зі змінними коефіцієнтами можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами. Прикладом є різницеве рівняння Ейлера типу  $k(k+1)\dots(k+n-1)\Delta^n y_k + p_1 k(k+1)\dots(k+n-2)\Delta^{n-1} y_k + \dots + p_n y_k = f_k$ , яке за допомогою заміни  $k=e_t$  (у неперервному аналогу) або аналогічної дискретної заміни може бути перетворене.
3. Використання рекурентних співвідношень для спеціальних функцій та ортогональних поліномів є важливим джерелом та прикладами лінійних різницевих рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Як зазначалося, трьохчленні рекурентні співвідношення для ортогональних поліномів:

Чебишова ( $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$ , де  $2x$  є "сталим" відносно  $n$  коефіцієнтом, але залежить від параметра  $x$ );

Лежандра ( $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$ , де коефіцієнти явно залежать від  $n$ );

Ерміта ( $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$ ) та інших є лінійними різницевиими рівняннями другого порядку відносно індексу полінома  $n$ .

Коефіцієнти в цих рівняннях часто є поліномами від  $n$  та/або  $x$ . Аналіз структури цих рекурентних співвідношень дозволяє зрозуміти, як методи розв'язання застосовуються до таких специфічних, але важливих класів рівнянь.

Підходи до їх аналізу можуть включати пошук розв'язків у вигляді рядів, асимптотичні методи для великих  $n$ , або використання специфічних властивостей самих поліномів (наприклад, їх зв'язок з диференціальними рівняннями або твірними функціями). Навіть якщо не вдається знайти загальний розв'язок такого різницевого рівняння у замкненому вигляді, сам факт того, що відомі спеціальні функції є його розв'язками, надає цінну інформацію. Дослідження можливості зведення цих рівнянь другого порядку до рівнянь третього порядку (як обговорювалося раніше) або розгляд їх як частинних випадків більш загальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами є актуальною задачею.

## 2.5 Практична частина

У даній частині ми ретельно на практиці розглянемо застосування різних аналітичних та чисельних методів до розв'язання конкретного лінійного однорідного різницевого рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами.

Нехай у нас є таке рівняння:

$$y_{k+3} - 6y_{k+2} + 11y_{k+1} - 6y_k = 0(*)$$

з початковими умовами:

$$y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = -1.$$

Метою є не тільки знаходження розв'язку кожним методом, але й аналіз його структури, порівняння результатів та оцінка особливостей кожного підходу.

### 2.5.1.1 Метод характеристичного рівняння

Для різницевого рівняння (\*) шукаємо розв'язок у вигляді  $y_k = \lambda^k$ . Для цього складемо характеристичне рівняння. Підстановка в рівняння дає:

$$\lambda^{k+3} - 6\lambda^{k+2} + 11\lambda^{k+1} - 6\lambda^k = 0$$

Після ділення на  $\lambda^k$  (припускаючи  $\lambda \neq 0$ ), отримуємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Наступним кроком є знаходження коренів даного характеристичного рівняння.

Спробуємо знайти цілі корені серед дільників вільного члена (-6):

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$$

При  $\lambda = 1: 1^3 - 6(1)^2 + 11 * 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ . Отже,  $\lambda_1 = 1$  є коренем.

Розділимо поліном  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$  на  $(\lambda - 1)$ . Це можна зробити діленням "у стовпчик" або за схемою Горнера. Результат:  $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ .

Тепер розв'язуємо квадратне рівняння  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ . За теоремою Вієта або через дискримінант:  $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ . Корені  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ .

Таким чином, характеристичне рівняння має три різні дійсні корені:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Оскільки всі корені дійсні та різні, загальний розв'язок має вигляд:

$$y_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + C_3 \lambda_3^k = C_1 (1)^k + C_2 (2)^k + C_3 (3)^k = C_1 + C_2 2^k + C_3 3^k$$

Тоді визначимо константи  $C_1, C_2, C_3$  з початкових умов:

$$y_0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2(2)^0 + C_3(3)^0 = C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2(2)^1 + C_3(3)^1 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow C_1 + C_2(2)^2 + C_3(3)^2 = C_1 + 4C_2 + 9C_3 = -1$$

Отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ C_1 + 2 * C_2 + 3 * C_3 = 0 \\ C_1 + 4 * C_2 + 9 * C_3 = -1 \end{cases}$$

Віднімаємо перше рівняння від другого та третього:

$$\begin{cases} C_2 + 2 * C_3 = -1 \\ 3 * C_2 + 8 * C_3 = -2 \end{cases}$$

Множимо перше з нових рівнянь на 3:

$$3 * C_2 + 6 * C_3 = -3$$

Віднімаємо це від другого нового рівняння:

$$(3 * C_2 + 8 * C_3) - (3 * C_2 + 6 * C_3) = -2 - (-3) \Rightarrow 2 * C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = 0.5$$

Підставляємо  $C_3$  назад:

$$C_2 + 2 * 0.5 = -1 \Rightarrow C_2 + 1 = -1 \Rightarrow C_2 = -2.$$

Підставляємо  $C_2$  та  $C_3$  у найперше рівняння:

$$C_1 + (-2) + 0.5 = 1 \Rightarrow C_1 - 1.5 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 + 1.5 = 2.5$$

Остаточний аналітичний розв'язок виходить:

Відповідь:  $y_k = 2.5 - 2 * 2^k + 0.5 * 3^k = 2.5 - 2^{k+1} + 0.5 * 3^k$ .

### 2.5.1.2 Програмування попередніх обчислень

Запрограмуємо аналітичний розв'язок (Рис 2.5.1) та варіант розв'язку цього рівняння методом характеристичного рівняння мовою програмування Python та порівняємо їх (Рис 2.5.2).

Рівняння 2:  $y_{\{k+3\}} - 6y_{\{k+2\}} + 11y_{\{k+1\}} - 6y_k = 0$   
 Початкові умови:  $y_0=1, y_1=0, y_2=-1$   
 Аналітичний розв'язок:  $y_k = 2.5 - 2^{(k+1)} + 0.5 * 3^k$

*Рис 2.5.1 Розрахунки аналітичного розв'язку рівняння \**

```

--- 1.1. Метод характеристичного рівняння ---
Еталонний аналітичний розв'язок (перші 15 значень):
k=0, y_k=1.0000
k=1, y_k=0.0000
k=2, y_k=-1.0000
k=3, y_k=0.0000
k=4, y_k=11.0000
k=5, y_k=60.0000
k=6, y_k=239.0000
k=7, y_k=840.0000
k=8, y_k=2771.0000
k=9, y_k=8820.0000
k=10, y_k=27479.0000
k=11, y_k=84480.0000
k=12, y_k=257531.0000
k=13, y_k=780780.0000
k=14, y_k=2358719.0000

Розв'язок Sympy rsolve: -2*2**k + 3**k/2 + 5/2
Перевірка Sympy rsolve з аналітичним (ручним): Збігається

```

*Рис 2.5.2 Розрахунки розв'язку рівняння \* методом характеристичного рівняння*

### Аналіз особливостей методу характеристичного рівняння:

Метод є прямим та алгоритмічним для лінійних однорідних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Основна складність полягає у знаходженні коренів полінома високого степеня (для рівнянь порядку  $> 2$ ) та розв'язанні системи лінійних рівнянь для констант. Точність методу залежить від точності цих алгебраїчних операцій. Для даного прикладу всі корені були цілими, що спростило їх знаходження, а система для констант також розв'язалася точно. Порівнюючи результати бачимо, що аналітичний розв'язок (Рис. 2.5.1) збігається

з розв'язком отриманим даним методом (Рис 2.5.3).

### 2.5.2.1 Метод твірних функцій

Пригадаємо, як виглядає твірна функція:

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k$$

Для початку ми повинні здійснити перетворення різницевого рівняння (\*) в рівняння для  $Y(s)$ . Використовуючи властивості твірних функцій для зсунутих членів, отримуємо таке:

$$L\{y_{k+3}\} = \frac{Y(s) - y_0 - y_1s - y_2s^2}{s^3}$$

$$L\{y_{k+2}\} = \frac{Y(s) - y_0 - y_1s}{s^2}$$

$$L\{y_{k+1}\} = \frac{Y(s) - y_0}{s}$$

$$L\{y_k\} = Y(s)$$

Підставляємо в (\*), множимо на  $s^k$  та підсумовуємо, отримуємо:

$$\frac{Y(s) - y_0 - y_1s - y_2s^2}{s^3} - 6 * \frac{Y(s) - y_0 - y_1s}{s^2} + 11 * \frac{Y(s) - y_0}{s} - 6 * Y(s) = 0$$

Далі йде етап підстановка початкових умов ( $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = -1$ ).

$$\frac{Y(s) - y_0 - y_1s - y_2s^2}{s^3} - 6 * \frac{Y(s) - y_0 - y_1s}{s^2} + 11 * \frac{Y(s) - y_0}{s} - 6 * Y(s) = 0$$

Множимо обидві частини на  $s^3$ :

$$Y(s) - 1 + s^2 - 6s(Y(s) - 1) + 11s^2(Y(s) - 1) - 6s^3Y(s) = 0$$

Наступним кроком буде розв'язати це рівняння відносно  $Y(s)$ .

$$Y(s)(1 - 6s + 11s^2 - 6s^3) = 1 - s^2 - 6s + 11s^2 = 1 - 6s + 10s^2$$

$$Y(s) = \frac{1 - 6s + 10s^2}{1 - 6s + 11s^2 - 6s^3}$$

Розкладемо знаменник  $Y(s)$  на прості дроби:  $1 - 6s + 11s^2 - 6s^3 = (1-s)(1-2s)(1-3s)$

$$\text{Тоді } Y(s) = \frac{1 - 6s + 10s^2}{(1-s)(1-2s)(1-3s)} = \frac{A}{1-s} + \frac{B}{1-2s} + \frac{C}{1-3s}$$

Методом невизначених коефіцієнтів або методом підстановки граничних значень знаходимо:

$$A = 2.5, B = -2, C = 0.5$$

Далі отримуємо  $y_k$  з розкладу  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{2.5}{1-s} - \frac{2}{1-2s} + \frac{0.5}{1-3s}$$

Використовуючи відомий розклад  $\frac{1}{1-s} = \sum_{j=0}^{\infty} (as)^j = \sum_{j=0}^{\infty} a^j s^j$ , отримуємо:

$$\text{Відповідь: } y_k = 2.5(1)^k - 2(2)^k + 0.5(3)^k = 2.5 - 2^{k+1} + 0.5 * 3^k$$

### 2.5.2.2 Програмування попередніх обчислень

Запрограмуємо розв'язок цього рівняння методом твірних функцій мовою програмування Python та порівняємо з аналітичним розв'язком (Рис 2.5.3).

--- 1.2. Метод твірних функцій ---

```
Рівняння для твірної функції (SymPy): (-6*Y_s_var_gf*s**3 + Y_s_var_gf + 11*s**2*(Y_s_var_gf - 1) + s**2 + 6*s*(1 - Y_s_var_gf) - 1)/s**3 = 0
Твірна функція Y(s) (SymPy): (-10*s**2 + 6*s - 1)/(6*s**3 - 11*s**2 + 6*s - 1)
Розклад Y(s) на прості дроби (SymPy): -1/(2*(3*s - 1)) + 2/(2*s - 1) - 5/(2*(s - 1))
Розв'язок з твірних функцій (коефіцієнти ряду SumPy): [ 1.000000e+00 0.000000e+00 -1.000000e+00 0.000000e+00 1.100000e+01
6.000000e+01 2.390000e+02 8.400000e+02 2.771000e+03 8.820000e+03
2.747900e+04 8.448000e+04 2.575310e+05 7.807800e+05 2.358719e+06]
Перевірка збігу методу твірних функцій (SymPy) з аналітичним: збігається
```

Рис 2.5.3 Розрахунки розв'язку рівняння \* методом твірних функцій

### Аналіз особливостей методу твірних функцій:

Метод є досить універсальним для лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Він дозволяє систематично враховувати початкові умови. Основна складність полягає в алгебраїчних перетвореннях для знаходження  $Y(s)$  та подальшому розкладі  $Y(s)$  на прості дроби і знаходженні коефіцієнтів її степеневого ряду. Точність кінцевого результату залежить від коректності цих перетворень. Для даного прикладу метод дав точний аналітичний розв'язок, що підтверджено як ручним розрахунком, так і символічними обчисленнями в SymPy (дивіться Рис 2.5.3), що було пов'язано з простотою знайдених корнів, як і в минулому методі.

### 2.5.3.1 Метод Z-перетворення

При розв'язанні цим методом ми можемо одразу застосувати Z-перетворення до рівняння (\*). Для цього використаємо властивість зсуву вліво:

$$Z\{y_{k+m}\} = z^m[Y(z) - \sum_{j=0}^{m-1} y_j z^{-j}]$$

$$Z\{y_{k+3}\} - 6Z\{y_{k+2}\} + 11Z\{y_{k+1}\} - 6Z\{y_k\} = 0$$

$$z^3(Y(z) - y_0 - y_1z^{-1} - y_2z^{-2}) - 6z^2(Y(z) - y_0 - y_1z^{-1}) + 11z(Y(z) - y_0) - 6Y(z) = 0$$

Виконаємо підстановку початкових умов ( $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = -1$ ) до рівняння:

$$z^3(Y(z) - 1 - (-1)z^{-2}) - 6z^2(Y(z) - 1) + 11z(Y(z) - 1) - 6Y(z) = 0$$

$$z^3Y(z) - z^3 + z - 6z^2Y(z) + 6z^2 + 11zY(z) - 11z - 6Y(z) = 0$$

Розв'яжемо його відносно  $Y(z)$ :

$$Y(z)(z^3 - 6z^2 + 11z - 6) = z^3 - 6z^2 + 10z$$

$$Y(z) = \frac{z^3 - 6z^2 + 10z}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

Далі розкладемо  $\frac{Y(z)}{z}$  на прості дроби (для зручності оберненого перетворення).

$$\text{Візьмемо знаменник } D(z) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)(z-2)(z-3).$$

$$\text{Тоді } \frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2 - 6z + 10}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}$$

Як було знайдено раніше:

$$A = 2.5, B = -2, C = 0.5$$

Можемо підставити отримані значення в  $Y(z)$  та виконаємо обернене  $Z$ -перетворення:

$$Y(z) = 2.5 * \frac{z}{z-1} - 2 * \frac{z}{z-2} + 0.5 * \frac{z}{z-3}$$

Використовуючи табличне співвідношення  $Z\{a^k u_k\} = \frac{z}{z-a}$  (де  $u_k$  – одинична ступінчаста послідовність), отримуємо:

$$\text{Відповідь: } y_k = 2.5(1)^k - 2(2)^k + 0.5(3)^k = 2.5 - 2^{k+1} + 0.5 * 3^k$$

### 2.5.3.2 Програмування попередніх обчислень

Запрограмуємо розв'язок цього рівняння методом  $Z$ -перетворення мовою програмування Python та порівняємо з аналітичним розв'язком (Рис 2.5.4).

```

--- 1.3. Метод Z-перетворення ---
Z-образ Y(z): z*(z**2 - 6*z + 10)/(z**3 - 6*z**2 + 11*z - 6)
Розклад на прості дроби: 1 + 5/(2*(z - 1)) - 4/(z - 2) + 3/(2*(z - 3))
Перші значення y_k з Z-перетворення (чисельно): [ 1.000000e+00  0.000000e+00 -1.000000e+00  0.000000e+00  1.100000
e+01
  6.000000e+01  2.390000e+02  8.400000e+02  2.771000e+03  8.820000e+03
  2.747900e+04  8.448000e+04  2.575310e+05  7.807800e+05  2.358719e+06]
Перевірка збігу Z-перетворення з аналітичним: збігається

```

Рис 2.5.4 Розрахунки розв'язку рівняння \* методом  $Z$ -перетворення

### Аналіз особливостей методу Z-перетворення:

Метод Z-перетворення є аналогом перетворення Лапласа для дискретних систем. Він систематично враховує початкові умови і приводить до алгебраїчного рівняння для Z-образу. Основна складність, як і в методі твірних функцій, полягає у знаходженні оберненого перетворення, що часто вимагає розкладу на прості дроби. Для даного рівняння метод дає точний аналітичний розв'язок (Рис 2.5.4), що узгоджується з іншими аналітичними підходами (Рис 2.5.1 - 2.5.3). Його перевагою є прямий зв'язок з частотним аналізом систем (через підстановку  $z = e^{j\omega T}$ ). Це дозволяє на пряму дізнатися, що буде з сигналом на частоті  $\omega$ .

#### 2.5.4.1 Операторні методи

Використовуючи оператор зсуву  $E$  ( $E y_k = y_{k+1}$ ), запишемо рівняння (\*) в операторній формі, воно набуває вигляду:

$$(E^3 - 6E^2 + 11E - 6I)y_k = 0, \text{ де } I - \text{тотожний оператор.}$$

Виконаємо факторизацію операторного полінома. У нас операторний поліном

$$L(E) = E^3 - 6E^2 + 11E - 6I$$

Відповідний характеристичний поліном

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

Ми вже знайшли його корені:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

Отже, операторний поліном можна розкласти на множники:

$$L(E) = (E - I)(E - 2I)(E - 3I)$$

Тоді знаходимо загальний розв'язок. Рівняння  $L(E)y_k = 0$  еквівалентне тому, що  $y_k$  є лінійною комбінацією розв'язків кожного з рівнянь

$$(E - \lambda_1 I)y_k = 0 \Rightarrow (E - \lambda_1 I)y_k = 0$$

$$(E - I)y_k = 0 \Rightarrow y_{k+1} - y_k = 0 \Rightarrow y_k(1) = C_1(1)^k = C^1$$

$$(E - 2I)y_k = 0 \Rightarrow y_{k+1} - 2y_k = 0 \Rightarrow y_k(2) = C_2(2)^k$$

$$(E - 3I)y_k = 0 \Rightarrow y_{k+1} - 3y_k = 0 \Rightarrow y_k(3) = C_3(3)^k$$

Тоді загальний розв'язок буде таким:

$$y_k = C_1 + C_2 2^k + C_3 3^k$$

Далі визначаємо константи з початкових умов. Цей крок ідентичний кроку 4 в методі характеристичного рівняння, що дає  $C_1 = 2.5$ ,  $C_2 = -2$ ,  $C_3 = 0.5$ . Підставляємо ці значення в загальний розв'язок.

$$\text{Відповідь: } y_k = 2.5 - 2 * 2^k + 0.5 * 3^k$$

#### 2.5.4.2 Програмування попередніх обчислень

Запрограмуємо розв'язок цього рівняння методом Z-перетворення мовою програмування Python та порівняємо з аналітичним розв'язком (Рис 2.5.5).

```

--- 1.4. Операторні методи ---
Характеристичний поліном L(lambda): lambda**3 - 6*lambda**2 + 11*lambda - 6
Розклад L(lambda) на множники: (lambda - 3)*(lambda - 2)*(lambda - 1)
Це приводить до загального розв'язку y_k = C1*(1)^k + C2*(2)^k + C3*(3)^k.
З початковими умовами отримуємо y_k = 2.5 - 2*2^k + 0.5*3^k (збігається з аналітичним).

```

*Рис 2.5.5 Розрахунки розв'язку рівняння \* операторним методом*

#### Аналіз операторних методів:

Операторні методи надають потужний апарат для аналізу лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Вони чітко показують зв'язок між структурою рівняння (через операторний поліном  $L(E)$ ) та його розв'язками (через корені характеристичного полінома  $L(\lambda) = 0$ ). Для однорідних рівнянь цей метод тісно пов'язаний з методом характеристичного рівняння і приводить до тих самих результатів (Рис 2.5.1 і Рис 2.5.5). Його сила також проявляється при роботі з неоднорідними рівняннями, де частинний розв'язок можна шукати через дію оберненого оператора  $[L(E)]^{-1}$  на праву частину.

#### 2.5.5 Проведення інших оціночних досліджень параметрів моделей

##### 2.5.5.1 Детальний аналіз накопичення похибок для чисельного методу (прямої ітерації) на довшому інтервалі та вплив початкової похибки

Дослідити, як поведуться абсолютна та відносна похибки при значному

збільшенні кількості ітерацій  $k$ , та як невелика похибка в початкових умовах впливає на розбіжність між чисельним та "ідеальним" аналітичним розв'язком.

1. Обчислимо чисельний та аналітичний розв'язки для Рівняння \* на довшому інтервалі (наприклад,  $k = 0 \dots 30$ ).
2. Побудуємо графік абсолютної похибки (Рис 2.5.6).
3. Введемо невелику похибку в  $y_0$  (наприклад,  $y_0 = 1.000001$ ) і повторимо обчислення, порівнюючи з "ідеальним" аналітичним розв'язком (який використовує точні  $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = -1$ ).

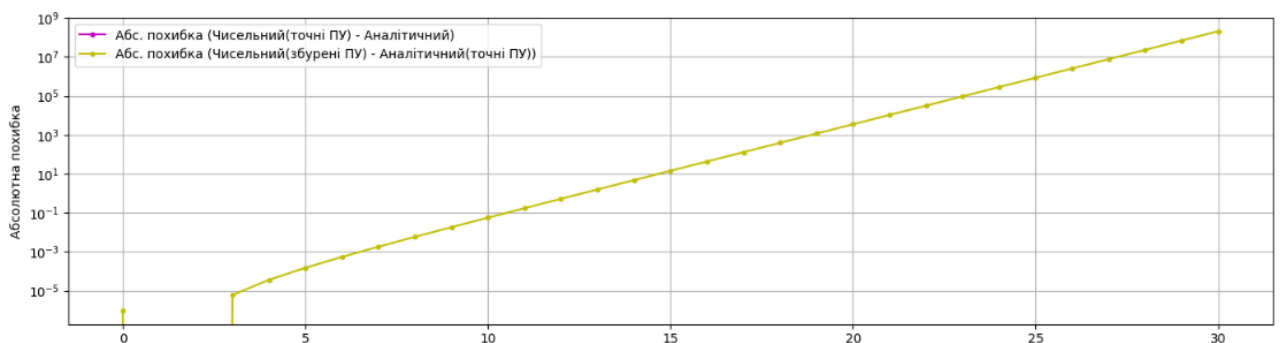


Рис 2.5.6 Ріст абсолютної похибки в рівнянні

На цьому графіку лінія (в логарифмічній шкалі по осі Y) демонструє чітке експоненційне зростання. Це узгоджується з даними, де значення зростають від  $10^{-6}$  до  $2.06 \times 10^8$ .

З цього можна зробити висновок, що навіть дуже мала початкова похибка ( $10^{-6}$ ) призводить до значного розходження траєкторій розв'язків при великих  $k$ . Це пов'язано з наявністю в загальному розв'язку  $y_k = C_1 + C_2 2^k + C_3 3^k$  домінуючої компоненти  $0.5 \cdot 3^k$ . Невелика зміна початкових умов трохи змінює коефіцієнти  $C_1, C_2, C_3$ . Оскільки  $y^k$  експоненційно зростає, ця невелика зміна в  $C_1$  (особливо в  $C_3$ ) посилюється множителем  $3^k$ , що призводить до великої абсолютної різниці. Це демонструє чутливість розв'язку до початкових умов, характерну для систем з розв'язками, що розходяться (нестійких або таких, що мають компоненти, які зростають).

### 2.5.5.2 Чутливість коренів характеристичного рівняння до зміни коефіцієнтів

У реальних системах параметри (коефіцієнти різницевого рівняння) ніколи не відомі абсолютно точно або можуть змінюватися з часом. Важливо розуміти, наскільки сильно малі зміни в коефіцієнтах впливають на розташування коренів характеристичного рівняння, а отже, на стійкість та характер розв'язку. Для полінома  $P(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$ , якщо  $\lambda_0$  – простий корінь, то мала зміна  $\delta p_i$  коефіцієнта  $p_i$  призводить до зміни кореня  $\delta\lambda_0 \approx -\frac{\lambda_0^{n-i}\delta p_i}{P'(\lambda_0)}$ . Для кратних коренів ситуація складніша.

Характеристичне рівняння:  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ . Корені 1, 2, 3.

Спробуємо трохи змінити коефіцієнт при  $\lambda$ , наприклад,  $11 \rightarrow 11 \pm \epsilon$ .

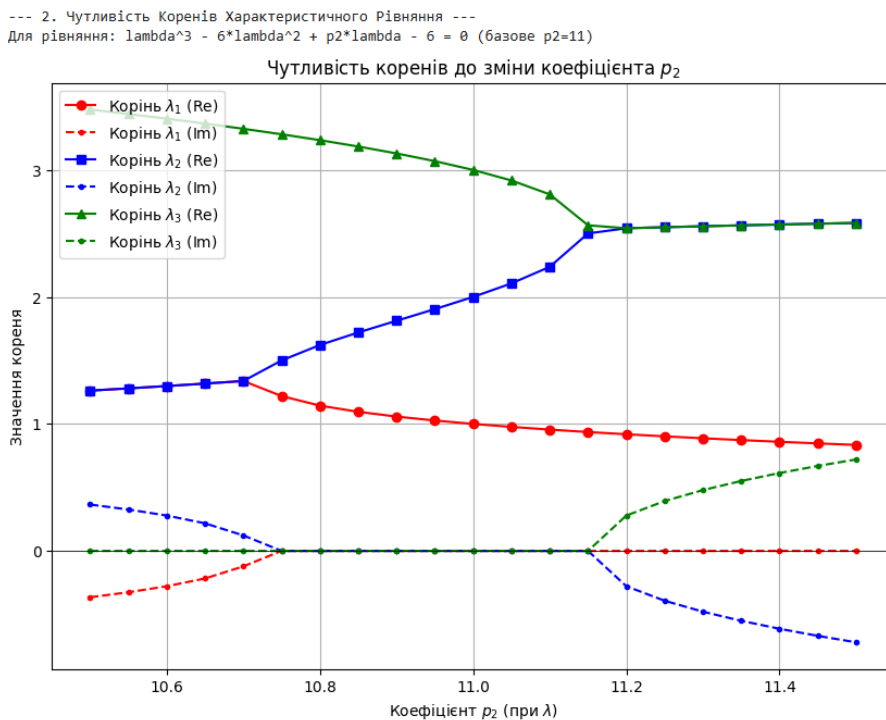


Рис 2.5.7 Чутливість коренів в рівнянні \*

Цей графік (рис 2.5.7) показує, наскільки сильно і яким чином змінюються фундаментальні характеристики (корені) нашої системи, коли ми трохи змінюємо один з її параметрів ( $p_2$ ).

Що відбувається при зміні  $p_2$  (коли  $p_2$  "зростає" або "спадає" відносно базового значення 11) - зміна  $p_2$  змушує значення коренів "плавати". Вони не

залишаються на місці. Це означає, що навіть невелика неточність у визначенні параметра  $p_2$  в реальній системі може призвести до того, що справжня поведінка системи буде відрізнятися від розрахованої. Відбувається зміна типу коренів (перехід від дійсних до комплексних) при певному зменшенні  $p_2$  ( $p_2 \approx 10.75$ ) - два дійсні корені "стикаються" і перетворюються на пару комплексно спряжених коренів. На графіку це видно так: дві окремі лінії для дійсних частин (червона та синя) сходяться в одну, а для уявних частин з'являються дві симетричні ненульові лінії.

Інша пара дійсних коренів "стикається" і також перетворюється на пару комплексно спряжених коренів (при  $p_2 \approx 11.15-11.20$ ). На графіку це видно так: дві інші окремі лінії для дійсних частин (синя та зелена) сходяться, а для уявних частин з'являються симетричні ненульові лінії.

Перехід від дійсних коренів до комплексних означає зміну характеру поведінки розв'язку. Якщо раніше розв'язок міг просто монотонно зростати або спадати (або бути комбінацією таких рухів), то поява комплексних коренів вказує на те, що в поведінці системи з'являться коливання (осциляції).

Нагадаю - якщо модуль кореня  $|\lambda| < 1$ , відповідна частина розв'язку згасає; якщо  $|\lambda| > 1$ , вона зростає; якщо  $|\lambda| = 1$  (і корінь простий), вона залишається сталою або коливається зі сталою амплітудою. У нашому випадку (базові корені 1, 2, 3). Тобто система спочатку нестійка, бо є корені 2 і 3, модулі яких більші за 1. При зміні  $p_2$  в діапазоні  $[10.5, 11.5]$  графік (і таблиця модулів (дивіться Додаток А)) показує, що завжди залишаються корені з модулем більшим за 1. Це означає, що в усьому досліджуваному діапазоні зміни  $p_2$  система залишається нестійкою (її розв'язки будуть загалом зростати).

Однак, швидкість цього зростання та характер (чи є коливання) змінюються:

При  $p_2 = 10.5$ , максимальний модуль кореня  $\approx 3.48$ .

При  $p_2 = 11.0$ , максимальний модуль кореня = 3.

При  $p_2 = 11.5$ , максимальний модуль (комплексної пари)  $\approx 2.68$ .

Це означає, що при  $p_2 = 10.5$  система "вибухає" найшвидше, а при  $p_2 = 11.5$  - найповільніше з цих трьох прикладів, і до того ж з коливаннями.

Можемо зробити висновок, що ця система чутлива до цього налаштування. При певних значеннях налаштування характер поведінки може якісно змінитися (наприклад, з простого зростання на зростання з коливаннями). Це важливо, бо в реальності ми не завжди точно знаємо параметри системи. Такий аналіз допомагає зрозуміти, наскільки надійним буде наш прогноз поведінки, якщо параметри трохи "плавають".

### 2.5.5.3 Дослідження області стійкості для рівняння 3-го порядку (Чисельний підхід)

Аналітичне визначення області стійкості для рівняння 3-го порядку  $u_{k+3} + p_1 u_{k+2} + p_2 u_{k+1} + p_3 u_k = 0$  вимагає застосування критеріїв Журі або Лєнара-Шипара, які є громіздкими. Однак, ми можемо чисельно дослідити, як змінюється максимальний модуль коренів при зміні, наприклад, двох коефіцієнтів, і візуалізувати області, де всі корені  $|\lambda^i| < 1$  (Рис 2.5.8).



Рис 2.5.8 Области стійкостей рівняння \*

Графік представляє собою карту максимальних модулів коренів

характеристичного рівняння  $\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0$  при фіксованому  $p_3 = -6.0$  та змінних коефіцієнтах  $p_1$  (по осі X) і  $p_2$  (по осі Y). Колір кожної точки на графіку відповідає максимальному значенню з модулів трьох коренів характеристичного рівняння для даної пари  $(p_1, p_2)$ . Колірна шкала праворуч показує відповідність кольору значенню максимального модуля. Темно-фіолетові та сині кольори відповідають областям, де максимальний модуль коренів близький до нуля або менший за 1. Це потенційні зони асимптотичної стійкості (де всі корені  $|\lambda^i| < 1$ ). Зелені, жовті та світліші кольори ж вказують на те, що максимальний модуль коренів стає більшим за 1, що означає нестійкість системи (розв'язки будуть зростати). Чим світліший/жовтіший колір, тим більший максимальний модуль, і тим швидше зростатимуть розв'язки.

Біла точка з чорним контуром, позначена як "Базове Рівняння 2 (Нестійке)", відповідає коефіцієнтам  $p_1 = -6$ ,  $p_2 = 11$  (при  $p_3 = -6$ ). Ця точка знаходиться в жовтій зоні графіка, де максимальний модуль кореня (як ми знаємо, це  $\lambda = 3$  для цього рівняння) значно більший за 1 (відповідно до колірної шкали, це близько 3.0). Це візуально підтверджує, що наше базове Рівняння 2 є нестійким.

З графіка видно, що потенційна область стійкості (темно-сині/фіолетові зони) для рівняння третього порядку при фіксованому  $p_3 = -6$  є досить обмеженою і має складну форму. Вона не є простим трикутником, як для рівняння другого порядку.

В досліджуваному діапазоні зміни  $p_1$  (від -8 до 0) та  $p_2$  (від приблизно 5 до 15) ми бачимо, що стійкі області (якщо вони існують і потрапляють в цей діапазон) є невеликими. Наприклад, є невелика темно-синя область в нижній частині графіка.

Графік наочно демонструє, як комбінації коефіцієнтів  $p_1$  та  $p_2$  (при фіксованому  $p_3$ ) впливають на максимальний модуль коренів, а отже, і на стійкість системи. Це дозволяє візуально ідентифікувати області параметрів, де система буде стійкою, а де – нестійкою. Положення точки, що відповідає Рівнянню 2, у жовтій зоні підтверджує його нестійкий характер, зумовлений наявністю коренів з модулем, більшим за одиницю.

Форма "острова стійкості" (якщо він є) для рівняння третього порядку є значно складнішою, ніж для рівняння другого порядку. Це підкреслює складність аналітичних критеріїв стійкості (Журі, Ленара-Шипара) для рівнянь вищих порядків та цінність чисельних методів для візуалізації таких областей.

В реальному житті при проектуванні систем, що описуються різницевиими рівняннями, важливо, щоб робоча точка (набір параметрів системи) знаходилася всередині області стійкості з певним "запасом".

Цей графік показує, що навіть якщо ми трохи змінимо коефіцієнти  $p_1$  або  $p_2$  нашого базового (нестійкого) рівняння, ми навряд чи легко потрапимо в стійку область (принаймні, для  $p_3 = -6$ ). Щоб зробити систему стійкою, потрібні значніші зміни параметрів, які перемістять точку  $(p_1, p_2)$  в синьо-фіолетову зону.

Для інженерів та дослідників такий тип аналізу (параметричний аналіз стійкості) допомагає зрозуміти, наскільки робастною (стійкою до змін) є система до варіацій її параметрів та як підібрати ці параметри для забезпечення бажаної поведінки.

## ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі було проведено дослідження та порівняльний аналіз аналітичних і чисельних методів розв'язання лінійних різницевих рівнянь, з особливим наголосом на практичній реалізації та оцінці ефективності цих методів. Метою роботи було не лише систематизувати теоретичні підходи, але й продемонструвати їх застосування на конкретних прикладах за допомогою програмних засобів, зокрема мови Python.

Основні висновки, зроблені в ході проведення практичної частини дослідження:

**Продемонстровано еквівалентність різних аналітичних методів для рівнянь зі сталими коефіцієнтами.** На прикладі лінійного однорідного різницевого рівняння третього порядку було показано, що метод характеристичного рівняння, метод твірних функцій та метод  $Z$ -перетворення (а також операторний метод) приводять до ідентичного аналітичного розв'язку. Практична реалізація обчислень та символічні перетворення (де це було доцільно з використанням SymPy) підтвердили теоретичні викладки, підкреслюючи внутрішню узгодженість цих класичних підходів. Це дозволило встановити метод характеристичного рівняння як базовий та найпростіший для отримання аналітичного розв'язку в таких випадках, який надалі використовувався як еталон для порівняння з чисельними методами.

**Реалізовано та протестовано чисельний метод прямої ітерації для рівнянь третього порядку.** Було розроблено універсальну функцію на Python (`solve_diff_eq_higher_order_direct`) для чисельного розв'язання лінійних однорідних різницевих рівнянь  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами шляхом прямої ітерації за рекурентним співвідношенням. Цей метод було успішно застосовано до рівняння третього порядку: було отримано чисельні розв'язки, які також добре узгоджувалися з попередньо знайденими аналітичними розв'язками.

Це підтвердило застосовність прямого ітераційного методу для рівнянь вищих порядків.

### Висновки щодо методів розрахунків:

- **Метод характеристичного рівняння** є найбільш прямим та ефективним аналітичним методом для знаходження загального розв'язку лінійних однорідних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для заданого рівняння цей метод виявився найпростішим та найпрямішим для ручного розв'язання.
- **Методи твірних функцій та Z-перетворення** є потужними альтернативами, які особливо зручні для розв'язання задач з початковими умовами та для аналізу систем в частотній області (особливо Z-перетворення). Їх практична реалізація "з нуля" для символічного отримання розв'язку може бути складною без спеціалізованих пакетів, але концептуально вони дають той самий результат, що й метод характеристичного рівняння.
- Перетворення рівняння на алгебраїчне для  $Y(s)$  було відносно простим. Однак, ключова складність – розклад раціональної функції  $Y(s) = \frac{1-6s+10s^2}{(1-s)(1-2s)(1-3s)}$  на прості дроби. Хоча для цього прикладу це можливо зробити вручну, для рівнянь вищих порядків або більш складних знаменників цей крок може бути дуже трудомістким без символічних пакетів.
- Дуже схожий за складністю на метод твірних функцій метод Z-перетворення. Перетворення рівняння на алгебраїчне для  $Y(z)$  аналогічне. Розклад  $Y(z)/z$  на прості дроби для рівняння \* також був можливий вручну.
- **Операторні методи** надали гарне розуміння зв'язку між факторизацією операторного полінома  $L(E)$  та коренями характеристичного рівняння. Для практичного знаходження розв'язку цей метод значною мірою зводиться до знаходження коренів  $L(\lambda) = 0$ , тобто до методу характеристичного рівняння.

- **Прямий ітераційний чисельний метод** є універсальним, простим у програмній реалізації та ефективним для отримання наближених розв'язків як для рівнянь зі сталими, так і зі змінними коефіцієнтами, за умови коректно заданих початкових умов.
- **Точність та стійкість** чисельних методів є критично важливими аспектами. Накопичення похибок округлення може суттєво впливати на результат, особливо для рівнянь з розв'язками, що швидко зростають, або при обчисленнях на великій кількості кроків. Аналіз стійкості самого різницевого рівняння (через корені характеристичного полінома) та чисельної схеми його розв'язання є необхідним для отримання достовірних результатів.
- **Використання програмних пакетів (Python з NumPy, Matplotlib, SciPy, SymPy)** значно спрощує проведення чисельних експериментів, візуалізацію результатів та навіть деякі аналітичні перетворення, що робить їх незамінним інструментом у дослідженні різницевого рівнянь.

Для цього конкретного рівняння зі сталими коефіцієнтами та простими коренями, метод характеристичного рівняння є, мабуть, найшвидшим для ручного розв'язання. Методи твірних функцій та  $Z$ -перетворення вимагають більше алгебраїчних маніпуляцій на етапі розкладу на прості дроби, але є більш систематичними, особливо при роботі з початковими умовами або при переході до аналізу систем (наприклад, передавальні функції в  $Z$ -області).

Отже, дана дипломна робота продемонструвала широкий спектр методів розв'язання лінійних різницевого рівнянь. Практична частина підтвердила теоретичні положення, дозволила оцінити ефективність різних підходів та виявити особливості їх застосування.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Computation with recurrence relations Jet Wimp Drexel University Philadelphia
2. Difference Equations: Theory, Applications and Advanced Topics Ronald Mickens
3. Modelling with Differential and Difference Equations - Glenn Fulford, *University College, Australian Defence Force Academy, Canberra*, Peter Forrester, *La Trobe University, Victoria*, Arthur Jones, *La Trobe University, Victoria*

# ДОДАТКИ

## Додаток А

Досліджено зміну коренів при  $p_2$  в діапазоні [10.50, 11.50]

Базові корені при  $p_2=11$ : [1.0, 2.0, 3.0]

Корені при  $p_2=10.50$ : [1.26215674-0.36501784j 1.26215674+0.36501784j 3.47568652+0.j ]

Корені при  $p_2=11.50$ : [0.83462696+0.j 2.58268652-0.72011856j 2.58268652+0.72011856j]

Аналіз модулів коренів:

$p_2=10.50$ : Корені=[1.26215674-0.36501784j 1.26215674+0.36501784j 3.47568652+0.j ], Модулі=[1.31387886 1.31387886 3.47568652]  
 $p_2=10.55$ : Корені=[1.2797888 -0.32574919j 1.2797888 +0.32574919j 3.44042241+0.j ], Модулі=[1.32059528 1.32059528 3.44042241]  
 $p_2=10.60$ : Корені=[1.29822023-0.27836044j 1.29822023+0.27836044j 3.40355954+0.j ], Модулі=[1.3277275 1.3277275 3.40355954]  
 $p_2=10.65$ : Корені=[1.31756512-0.21714531j 1.31756512+0.21714531j 3.36486976+0.j ], Модулі=[1.33533889 1.33533889 3.36486976]  
 $p_2=10.70$ : Корені=[1.33796719-0.12191108j 1.33796719+0.12191108j 3.32406561+0.j ], Модулі=[1.34350978 1.34350978 3.32406561]  
 $p_2=10.75$ : Корені=[1.21922359+0.j 1.5 +0.j 3.28077641+0.j], Модулі=[1.21922359 1.5 3.28077641]  
 $p_2=10.80$ : Корені=[1.14402206+0.j 1.62146785+0.j 3.23451009+0.j], Модулі=[1.14402206 1.62146785 3.23451009]  
 $p_2=10.85$ : Корені=[1.09535803+0.j 1.72005247+0.j 3.1845895 +0.j], Модулі=[1.09535803 1.72005247 3.1845895 ]  
 $p_2=10.90$ : Корені=[1.05780603+0.j 1.81215626+0.j 3.13003772+0.j], Модулі=[1.05780603 1.81215626 3.13003772]  
 $p_2=10.95$ : Корені=[1.02673049+0.j 1.90391711+0.j 3.06935239+0.j], Модулі=[1.02673049 1.90391711 3.06935239]  
 $p_2=11.00$ : Корені=[1.+0.j 2.+0.j 3.+0.j], Модулі=[1. 2. 3.]  
 $p_2=11.05$ : Корені=[0.97642919+0.j 2.10653597+0.j 2.91703483+0.j], Модулі=[0.97642919 2.10653597 2.91703483]  
 $p_2=11.10$ : Корені=[0.95528045+0.j 2.23701648+0.j 2.80770307+0.j], Модулі=[0.95528045 2.23701648 2.80770307]  
 $p_2=11.15$ : Корені=[0.93605897+0.j 2.5 +0.j 2.56394103+0.j], Модулі=[0.93605897 2.5 2.56394103]  
 $p_2=11.20$ : Корені=[0.9184144+0.j 2.5407928-0.27815563j 2.5407928+0.27815563j], Модулі=[0.9184144 2.55597312 2.55597312]  
 $p_2=11.25$ : Корені=[0.90208833+0.j 2.54895584-0.39250163j 2.54895584+0.39250163j], Модулі=[0.90208833 2.57899852 2.57899852]  
 $p_2=11.30$ : Корені=[0.88688394+0.j 2.55655803-0.47882201j 2.55655803+0.47882201j], Модулі=[0.88688394 2.60101124 2.60101124]  
 $p_2=11.35$ : Корені=[0.87264745+0.j 2.56367628-0.55062949j 2.56367628+0.55062949j], Модулі=[0.87264745 2.62214204 2.62214204]  
 $p_2=11.40$ : Корені=[0.85925606+0.j 2.57037197-0.61316601j 2.57037197+0.61316601j], Модулі=[0.85925606 2.64249591 2.64249591]  
 $p_2=11.45$ : Корені=[0.84661 +0.j 2.576695-0.66912731j 2.576695+0.66912731j], Модулі=[0.84661 2.66215861 2.66215861]  
 $p_2=11.50$ : Корені=[0.83462696+0.j 2.58268652-0.72011856j 2.58268652+0.72011856j], Модулі=[0.83462696 2.6812013 2.6812013 ]

Таблиця модулів (до частини 2.5.5.2)

## Додаток Б

<https://github.com/NikMur/Difference-equations---thesis> - практична реалізація

всіх обчислень та розрахунків кваліфікаційної роботи на мові програмування

Python