УДК 517.91

М. С. Сасонкина, Н. В. Скрипник
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рекомендовано к публикации программным комитетом международной летней математической школы памяти В. А. Плотникова

Сасонкіна М. С., Скрипник Н. В. Усереднення нечітких диференціальних рівнянь. У статті розглядається обгрунтування схеми часткового усереднення для нечітких диференціальних рівнянь.
Ключові слова: нечіткі рівняння, усереднення.

Сасонкина М. С., Скрипник Н. В. Усреднение нечетких дифференциальных уравнений. В статье рассматривается обоснование схемы частичного усреднения для нечетких дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: нечеткие уравнения, усреднение.

Sasonkina M. S., Skripnik N. V. Averaging of fuzzy differential equations. In this article the substantiation of the partial scheme of averaging for fuzzy differential equations is considered.
Key words: fuzzy equations, averaging.

Введение. Во второй половине XX века в нелинейной механике и особенно в теории нелинейных колебаний широкое распространение получил метод усреднения, работа по математическому обоснованию которого началась с фундаментальных результатов Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Большую роль в разработке метода усреднения для различных классов дифференциальных уравнений сыграли работы В. М. Волосова, Е. А. Гребенникова, Ю. А. Митропольского, Н. Н. Моисеева, В. А. Плотникова, А. М. Самойленко, А. Н. Филатова, М. М. Хапаева и др.

В это же время появилась теория нечетких множеств [15], а в конце 90-х годов из бурно развивающейся теории систем с неполной информацией выделилась в отдельное направление теория нечетких дифференциальных уравнений [2], [6]–[14].

В работе показывается возможность применения одной схемы частичного усреднения для нечетких дифференциальных уравнений. Данный результат является обобщением работы [2].

Основные определения.

Пусть $conv(\mathbb{R}^n)$– метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $x:\mathbb{R}^n\to[0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x нормально, т. е. существует вектор $y_0\in\mathbb{R}^n$ такой, что $x(y_0)=1$;

2) x нечетко выпукло, т. е. для любых $y,z\in\mathbb{R}^n$ и любого $\lambda\in[0,1]$ справедливо неравенство $x(\lambda y+(1-\lambda)z)\geq\min\{x(y),x(z)\}$;

3) x полунепрерывно сверху, т. е. для любого вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $||y - y_0|| < \delta$, справедливо неравенство $x(y) < x(y_0) + \varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. *α – срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathbb{E}^n$ при $\alpha \in (0,1]$ назовем множество $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in \mathbb{E}^n$ назовем замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$.*

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D(x, v) = \sup\limits_{\alpha \in [0,1]} h([x]^\alpha, [v]^\alpha)$.

Определение 2 [20]. *Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется сильно измеримым на $I \subset \mathbb{R}$, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ измеримо.*

Определение 3 [20]. *Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется слабо непрерывным в точке $t_0 \in I$, если для любого $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t)$ непрерывно в точке $t_0 \in I$. Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется слабо непрерывным на I, если оно слабо непрерывно в каждой точке $t \in I$.*

Определение 4 [20]. *Отображение $f : I \times G \to \mathbb{E}^n$ называется слабо непрерывным в точке $(t_0, x_0) \in I \times G, G \subset \mathbb{E}^n$, если для любого фиксированного $\alpha \in$ $\in [0,1]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ такое, что $h([f(t,x)]^\alpha, [f(t_0, x_0)]^\alpha) < \varepsilon$ для всех $t \in I, x \in G$ таких, что $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \alpha)$ и $h([x]^\alpha, [x_0]^\alpha) < \delta(\varepsilon, \alpha)$.*

Определение 5 [20]. *Интегралом от отображения $f : I \to \mathbb{E}^n$ по промежутку I называется элемент $g \in \mathbb{E}^n$ такой, что $[g]^\alpha = \int\limits_I f_\alpha(t)dt$ для всех $\alpha \in (0,1]$, где интеграл от многозначного отображения $f_\alpha(t)$ понимается в смысле Ауманна [4].*

Определение 6 [20]. *Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется дифференцируемым в точке $t_0 \in I$, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t)$ дифференцируемо по Хукухаре [8] в точке t_0, его производная равна $D_H f_\alpha(t_0)$ и семейство множеств $\{D_H f_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ определяет элемент $f'(t_0) \in \mathbb{E}^n$. Если отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ дифференцируемо в точке $t_0 \in I$, то $f'(t_0)$ называют нечеткой производной $f(t)$ в точке t_0. Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется дифференцируемым на I, если оно дифференцируемо в каждой точке $t \in I$.*

Определение 7. *Отображение $f : G \to \mathbb{E}^n$ называется равномерно непрерывным на G, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x, y \in G$, удовлетворяющих неравенству $D(x,y) < \delta$, справедлива оценка $D(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Под нечетким дифференциальным уравнением будем понимать уравнение вида

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $f : I \times G \to \mathbb{E}^n$.

Определение 8. *Отображение $x : I_0 \to \mathbb{E}^n$ называется решением задачи (1) на $I_0 \subset I$, если оно слабо непрерывно на I_0 и для всех $t \in I_0$ удовлетворяет интегральному уравнению $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$, где $t_0 \in I$.*

Имеют место следующие теоремы существования и единственности решений нечетких дифференциальных уравнений.

Теорема 1 [2, 3]. Пусть в области

$$Q = \{(t, x) : t_0 \le t \le t_0 + a,\ D(x, x_0) \le b\}$$

выполнены следующие условия:

1) $f(\cdot, x)$ сильно измеримо по t при любом фиксированном x;

2) $f(t, \cdot)$ слабо непрерывно по x при почти всех t;

3) существует суммируемая функция $m(t)$ такая, что $D(f(t, x), \hat{0}) \le m(t)$ для почти всех t.

Тогда на отрезке $[t_0, t_0 + d]$ существует решение задачи (1), где $d > 0$ таково, что $d \le a,\ \varphi(t_0 + d) \le b,\ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)\, ds$.

Теорема 2 [2, 3]. Пусть в области Q отображение $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x, т. е. существует постоянная $L > 0$ такая, что $D(f(t, x), f(t, y)) \le LD(x, y)$ для всех $(t, x), (t, y) \in Q$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение.

Основные результаты.

Рассмотрим нечеткое дифференциальное уравнение

$$x' = \varepsilon f(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \ge 0-$ время, $x \in G \subset \mathbb{E}^n,\ \varepsilon > 0-$ малый параметр.

Уравнению (1) поставим в соответствие следующее частично усредненное нечеткое дифференциальное уравнение:

$$\overline{x}' = \varepsilon \overline{f}(t, \overline{x}), \quad \overline{x}(0) = x_0, \tag{2}$$

где

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} D\left(\int_0^T f(t, x)dt, \int_0^T \overline{f}(t, x)dt\right) = 0. \tag{3}$$

Имеет место следующая теорема, устанавливающая близость решений уравнений (1) и (2) на конечном промежутке:

Теорема 3. Пусть в области $Q = \{(t, x) :\ t \ge 0,\ x \in G \subset \mathbb{E}^n\}$ выполнены следующие условия:

1) отображение $f(t, x)$ сильно измеримо по t при каждом фиксированном x и равномерно непрерывно по x равномерно относительно t;

2) отображение $\overline{f}(t, x)$ сильно измеримо по t при каждом фиксированном x и существуют суммируемая функция $\lambda(t)$ и постоянная λ такие, что

$$\lambda(t)\ \le \lambda, \quad D(\overline{f}(t, x'), \overline{f}(t, x'')) \le \lambda(t) D(x', x'');$$

3) существуют суммируемая функция $N(t)$ и постоянная N_0 такие, что

$$D(f(t, x), \hat{0}) \le N(t), \quad D(\overline{f}(t, x), \hat{0}) \le N(t), \quad \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt \le N_0(t_2 - t_1)$$

для любого конечного отрезка $[t_1, t_2]$;

4) равномерно относительно $x \in G$ существует предел (3);

5) решение $\overline{x}(\cdot)$ уравнения (2) с начальным условием $\overline{x}(0) = x_0 \in G' \subset G$ определено при $t \geq 0$ для всех $\varepsilon \in (0, \sigma]$ и лежит с некоторой ρ-окрестностью в области G.

Тогда для любых сколь угодно малого $\eta > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для всех $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$D(x(t), \overline{x}(t)) < \eta, \tag{4}$$

где $x(\cdot)$ и $\overline{x}(\cdot)$– решения уравнений (1) и (2), соответственно, с начальными условиями $x(0) = \overline{x}(0) \in G'$.

Доказательство. В силу определения 8 решения уравнений (1) и (2) удовлетворяют интегральным уравнениям

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ \overline{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \overline{f}(s, \overline{x}(s))ds,$$

откуда, используя условие 2) теоремы, получим

$$D(x(t), \overline{x}(t)) = D\left(x_0 + \varepsilon\int_0^t f(s, x(s))ds, \ x_0 + \varepsilon\int_0^t \overline{f}(s, \overline{x}(s))ds\right) =$$

$$= \varepsilon D\left(\int_0^t f(s, x(s))ds, \ \int_0^t \overline{f}(s, \overline{x}(s))ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon D\left(\int_0^t f(s, x(s))ds, \int_0^t \overline{f}(s, x(s))ds\right) + \varepsilon D\left(\int_0^t \overline{f}(s, x(s))ds, \int_0^t \overline{f}(s, \overline{x}(s))ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon D\left(\int_0^t f(s, x(s))ds, \int_0^t \overline{f}(s, x(s))ds\right) + \varepsilon\int_0^t D(\overline{f}(s, x(s)), \overline{f}(s, \overline{x}(s)))ds \leq$$

$$\leq \varepsilon D\left(\int_0^t f(s, x(s))ds, \ \int_0^t \overline{f}(s, x(s))ds\right) + \varepsilon\int_0^t \lambda(s) D\left(x(s), \overline{x}(s)\right) ds.$$

На основании леммы Гронуолла – Беллмана имеем

$$D(x(t), \overline{x}(t)) \leq \varepsilon e^{\varepsilon\int_0^t \lambda(s)ds} D\left(\int_0^t f(s, x(s))ds, \ \int_0^t \overline{f}(s, x(s))ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon e^{\varepsilon\lambda t} D\left(\int\limits_0^t f(s,x(s))ds,\ \int\limits_0^t \overline{f}(s,x(s))ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon e^{\lambda L} \sup_{t\in[0,L\varepsilon^{-1}]} D\left(\int\limits_0^t f(s,x(s))ds,\ \int\limits_0^t \overline{f}(s,x(s))ds\right). \qquad (5)$$

Проведем разбиение отрезка $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m частей с шагом $\frac{L}{\varepsilon m}$, где $m \in \mathbb{N}$, и обозначим $t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}$, $i = \overline{0,m}$– точки разбиения, $x_i = x(t_i)$ — решение уравнения (1) в точках разбиения.

Оценим выражение $\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(s,x(s))ds,\ \int\limits_0^t \overline{f}(s,x(s))ds\right)$ на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, m-1}$:

$$\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(s,x(s))ds,\ \int\limits_0^t \overline{f}(s,x(s))ds\right) =$$

$$= \varepsilon D\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x(s))ds + \int\limits_{t_k}^{t} f(s,x(s))ds, \sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(s,x(s))ds + \int\limits_{t_k}^{t} \overline{f}(s,x(s))ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1} D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x(s))ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(s,x(s))ds\right) + D\left(\int\limits_{t_k}^{t} f(s,x(s))ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{f}(s,x(s))ds\right)\right] \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x(s))ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x_i)ds\right) + D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x_i)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(s,x_i)ds\right) +\right.\right.$$

$$\left. + D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(s,x_i)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(s,x(s))ds\right)\right) + D\left(\int\limits_{t_k}^{t} f(s,x(s))ds, \int\limits_{t_k}^{t} f(s,x_k)ds\right) +$$

$$\left. + D\left(\int\limits_{t_k}^{t} f(s,x_k)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{f}(s,x_k)ds\right) + D\left(\int\limits_{t_k}^{t} \overline{f}(s,x_k)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{f}(s,x(s))ds\right)\right] \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(f(s,x(s)), f(s,x_i))ds + D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x_i)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(s,x_i)ds\right) +\right.\right.$$

$$+\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(\overline{f}(s,x(s)),\overline{f}(s,x_i))ds\Bigg)+\int\limits_{t_k}^{t} D(f(s,x(s)),f(s,x_k))ds+$$

$$+D\left(\int\limits_{t_k}^{t} f(s,x_k)ds,\int\limits_{t_k}^{t}\overline{f}(s,x_k)ds\right)+\int\limits_{t_k}^{t} D(\overline{f}(s,x(s)),\overline{f}(s,x_k))ds\Bigg]\le$$

$$\le\varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k}\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(f(s,x(s)),f(s,x_i))ds+\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(\overline{f}(s,x(s)),\overline{f}(s,x_i))ds\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{k-1} D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x_i)ds,\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\overline{f}(s,x_i)ds\right)+D\left(\int\limits_{t_k}^{t} f(s,x_k)ds,\int\limits_{t_k}^{t}\overline{f}(s,x_k)ds\right)\right].$$

В силу условия 3) теоремы и оценки

$$D(x(s),x_i)\le\varepsilon\int\limits_{t_i}^{s} D(f(v,x(v)),\{0\})dv\le\varepsilon\int\limits_{t_i}^{s} N(v)dv\le$$

$$\le\varepsilon N_0(s-t_i)\le\varepsilon N_0\frac{L}{\varepsilon m}=\frac{LN_0}{m}$$

получим

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(\overline{f}(s,x(s)),\overline{f}(s,x_i))ds\le\varepsilon\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\lambda(s)D(x(s),x_i))ds\le$$

$$\le\varepsilon^2\lambda N_0\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)ds=\varepsilon^2\lambda N_0\sum_{i=0}^{k}\frac{(s-t_i)^2}{2}\Bigg|_{t_i}^{t_{i+1}}=$$

$$=\varepsilon^2\lambda N_0\sum_{i=0}^{k}\frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2}=\frac{\varepsilon^2\lambda N_0}{2}\sum_{i=0}^{k}\frac{L^2}{\varepsilon^2m^2}=\frac{\varepsilon^2\lambda N_0L^2}{2\varepsilon^2m^2}(k+1)\le\frac{\lambda N_0L^2}{2m},$$

так как $k=\overline{0,m-1}$.

В силу условия 1) теоремы для любого $\varsigma>0$ найдется $\delta(\varsigma)>0$ такое, что для всех $x_1,x_2\in G$, удовлетворяющих условию $D(x_1,x_2)\le\delta$, справедливо неравенство

$$D(f(t,x_1),f(t,x_2))\le\varsigma.$$

Тогда при $m \geq m(\delta)$, где $m(\delta) = \frac{LN_0}{\delta}$, имеет место оценка

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(f(s,x(s)), f(s,x_i))ds \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varsigma ds \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \varsigma(t_{i+1} - t_i) =$$

$$= \varepsilon(k+1)\varsigma \frac{L}{\varepsilon m} \leq L\varsigma.$$

В силу условия 4) теоремы существует такая монотонно убывающая функция $\theta(t)$, стремящаяся к нулю при $t \to \infty$, что во всей области G

$$D\left(\int\limits_0^t f(s,x)ds, \int\limits_0^t \overline{f}(s,x)ds\right) \leq t\theta(t).$$

Следовательно,

$$\varepsilon D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x_i)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(s,x_i)ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[D\left(\int\limits_0^{t_{i+1}} f(s,x_i)ds, \int\limits_0^{t_{i+1}} \overline{f}(s,x_i)ds\right) + D\left(\int\limits_0^{t_i} f(s,x_i)ds, \int\limits_0^{t_i} \overline{f}(s,x_i)ds\right)\right] \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[t_{i+1}\theta(t_{i+1}) + t_i\theta(t_i)\right] \leq 2 \sup_{\tau\in[0,L]} \tau\theta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \vartheta(\varepsilon),$$

где $\tau = \varepsilon t$, а $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \vartheta(\varepsilon) = 0$. Аналогично,

$$\varepsilon D\left(\int\limits_{t_k}^{t} f(s,x_k)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{f}(s,x_k)ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[D\left(\int\limits_0^{t} f(s,x_k)ds, \int\limits_0^{t} \overline{f}(s,x_k)ds\right) + D\left(\int\limits_0^{t_k} f(s,x_k)ds, \int\limits_0^{t_k} \overline{f}(s,x_k)ds\right)\right] \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[t\theta(t) + t_k\theta(t_k)\right] \leq 2 \sup_{\tau\in[0,L]} \tau\theta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \vartheta(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{k-1} D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x_i)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(s,x_i)ds\right) + D\left(\int\limits_{t_k}^{t} f(s,x_k)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{f}(s,x_k)ds\right) \leq$$

$$\leq k\vartheta(\varepsilon) + \vartheta(\varepsilon) = (k+1)\vartheta(\varepsilon) \leq m\vartheta(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(s,x(s))ds, \int\limits_0^t \overline{f}(s,x(s))ds\right) \leq \frac{\lambda N_0 L^2}{2m} + L\varsigma + m\vartheta(\varepsilon) \equiv \gamma(\varepsilon, m). \qquad (6)$$

Обозначим через $\overline{\eta} = \min\{\rho, \eta\}$. Выберем и зафиксируем числа $m_0 \geq m(\delta)$ и ς так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\lambda N_0 L^2}{2m} + L\varsigma \leq \frac{\overline{\eta}}{2} e^{-\lambda L},$$

затем выберем ε_0 из условия

$$m_0 \vartheta(\varepsilon) \leq \frac{\overline{\eta}}{2} e^{-\lambda L}.$$

Тогда при $m \geq m_0$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$\gamma(\varepsilon, m) \leq \overline{\eta} e^{-\lambda L},$$

а следовательно, в силу (5) имеем

$$D(x(t), \overline{x}(t)) \leq \overline{\eta},$$

и утверждение теоремы доказано при условии, что решение $x(\cdot)$ на всем отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ не покидает области G, что верно в силу условия 5) теоремы. ■

Замечание 1. *В случае, когда в теореме 3 отображения $f(t,x)$ и $\overline{f}(t,x)$ ω-периодичны по t оценку (4) можно уточнить: для любого $L > 0$ можно указать $C(L) > 0$ и $\varepsilon_0(L) \in (0, \sigma]$ такие, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для всех $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство $D(x(t), \overline{x}(t)) < C\varepsilon$.*

Замечание 2. *Пусть*

$$\overline{f}(t,x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t,x)dt \equiv f_0(x).$$

Тогда соотношение (3) справедливо и теорема 3 обосновывает схему полного усреднения.

Пример. Рассматривается задача Коши первого порядка с малым параметром вида

$$u' = \varepsilon(a(t)u + b(t)), \;\; u(0) = u_0,$$

где $a(t) \equiv 1, \; b(t)$ и u_0 представляют собой классические нечеткие числа:

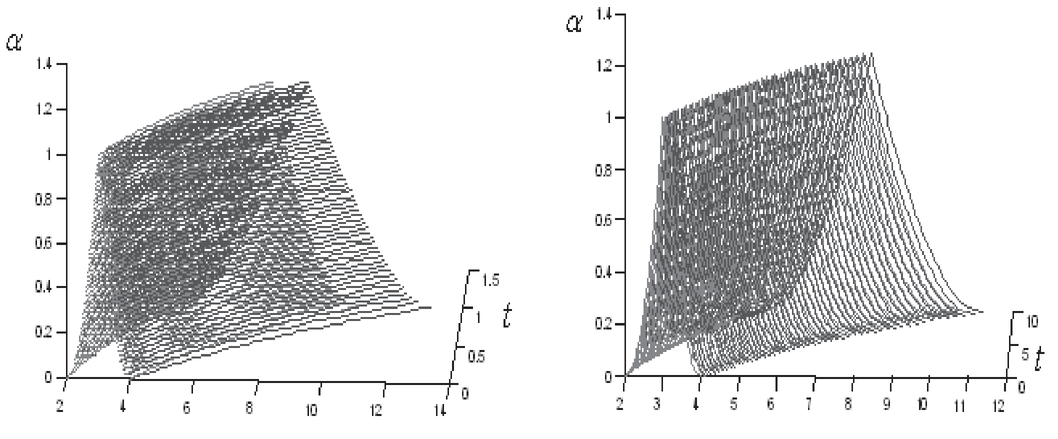

Рис. 1. Нечеткие решения $u(t)$ и $\bar{u}(t)$ при $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 0.1$

$$b(t) = \begin{cases} Ae^t, & \text{если } A \in [0, e^{-t}], \\ 2 - Ae^t, & \text{если } A \in (e^{-t}, 2e^{-t}], \\ 0, & \text{при остальных } A, \end{cases}$$

$$u_0 = \begin{cases} (A-2)^2 & \text{если } A \in [2,3], \\ 4 - A^2, & \text{если } A \in (3,4], \\ 0, & \text{при остальных } A. \end{cases}$$

На рисунке приведены графики решений $u(t)$ и $\bar{u}(t)$ исходной и усредненной задач при $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 0.1$:

Изменение расстояния $D_0 = \max\limits_{t\in[0,L\varepsilon^{-1}]} D(u(t), \bar{u}(t))$ между решениями исходной и усредненной задач при изменении малого параметра ε представлено в таблице:

ε	D_0
1	2.2878
0.5	0.8396
0.1	0.4369
0.05	0.0644
0.01	0.0160

Заключение. Преимущество нечеткой постановки задачи в том, что она является более общей в сравнении с обычными дифференциальными уравнениями, и даже с дифференциальными уравнениями с многозначными правыми частями. Разработанный и запрограммированный метод дает возможность получить решение. Обоснование схемы усреднения позволяет приводить достаточно сложные задачи к более простым автономным аналогам и применять численные методы для их решения.

1. **Комлева Т. А.** Усреднение нечетких дифференциальных уравнений [текст] / Комлева Т. А., Плотников А. В., Плотникова Л. И. // Труды Одесского политехнического университета. — 2007. — Вып. 1(27). -– С. 185–190.
2. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – Одесса : Астропринт, 2009. – 192 с.
3. **Скрипник Н. В.** Нечеткие дифференциальные уравнения [текст] / Н. В. Скрипник, М. С. Сасонкина // Наукова конференція молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена 100-січневому ювілею Я. Б. Лопатинського: Тези доповідей (11–14 листопада 2008 р.). – Донецк, 2008. – С. 97.
4. **Aumann R. J.** Integrals of set - valued functions [text] / Aumann R. J. // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – № 12. – P. 1–12.
5. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe [text] / Hukuhara M. // Functial. Ekvac. – 1967. – № 10. – P. 205–223.
6. **Hullermeier E.** An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system [text] / Hullermeier E. // Int. J. Uncertain. fuzziness Knowledge - Based Systems. – 1997. – № 7. – P. 117–137.
7. **Kaleva O.** Fuzzy differential equations [text] / Kaleva O. // Fuzzy sets and systems. – 1987. – Vol. 24, № 3. – P. 301–317.
8. **Kaleva O.** The Cauchy problem for fuzzy differential equations [text] / Kaleva O. // fuzzy sets and systems. – 1990. – Vol. 35, № 3. – P. 389–396.
9. **Laksmikantham V.** Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations [text] / Laksmikantham V., Tolstonogov A. A. // Nonlinear Anal. – 2003. – Vol. 55.– P. 255–268.
10. **Park J. Y.** Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations [text] / Park J. Y., Han H. K. // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, № 2. – P. 271–279.
11. **Puri M. L.** Differential of fuzzy functions [text] / Puri M. L., Ralescu D. A. // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – Vol. 91. – P. 552–558.
12. **Puri M.L.** Fuzzy random variables [text] / Puri M. L., Ralescu D. A. // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – Vol. 114, № 2. – P. 409–422.
13. **Seikkala S.** On the fuzzy initial value problem [text] / Seikkala S. // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – Vol. 24, № 3. – P. 319–330.
14. **Song S. J.** Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations [text] / Song S. J., Wu C. X. // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – Vol. 111. – P. 55–67.
15. **Zadeh L.** Fuzzy sets [text] / Zadeh L. // Inform. Control. – 1965. – № 8. – P. 338–353.