

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Оптимальне використання енергії з урахуванням якості оточуючого
середовища»

«Optimal use of energy taking into account the quality of the environment»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Шпилевський Нікіта Владиславович

Керівник: д.ф.-м.н., доц. Скрипник Н. В.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент: д.ф.-м.н., доц. Кічмаренко О. Д.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ р.

Захищено на засіданні ЕК № _____

протокол № ____ від _____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

(підпис) _____
(прізвище, ініціали)

(підпис) _____
(прізвище, ініціали)

Одеса – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1.....	5
РОЗДІЛ 2.....	18
ВИСНОВКИ.....	26
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	27
ДОДАТКИ.....	28

ВСТУП

Енергія використовується всюди в нашому житті — від лампочки до комп'ютера. Сьогодення не можливо уявити без цих речей, тому що різноманітні прилади, механізми та машини давно стали невід'ємною частиною реальності людства. І тому точно можна сказати, що енергія є кров'ю сьогодення. Наука ХХ століття зробила великий стрибок у сферах виробництва й використання енергії, повністю змінивши світ назавжди. І хоча людина відчуває позитивний вплив прогресу й користується ним, негативні наслідки з кожним днем проявляються все більше, звертаючи на себе увагу. Проблеми навколишнього середовища у ХХІ столітті виходять на перший план. Про них говорять політики, люди науки й мистецтва, вони все більше турбують людство. І, хоча всі розуміють, що охорона навколишнього середовища необхідна й важлива, діяльність у цьому напрямку недостатня для досягнення поставленої цілі. Цей факт неприємно усвідомлювати, але більшу частину суспільства більше цікавлять гроші. Економічні відносини пронизали весь світ, від її рівня залежить рівень життя суспільства, задоволеність життям. Ці процеси, про які люди говорять кожного дня й частіше, ніж про навколишнє середовище, дійсно змінюють наше життя, дають можливості для розвитку й існування взагалі. Через те, що багато країн у світі не мають високого рівня життя, проблеми екології там відходять на далекий план, у той самий час, коли пошук роботи й заробіток грошей, який напряду залежить від рівня економіки, турбує людей найбільше. Що ж робити при такому розкладі? Вихід є. Для підприємств можна побудувати моделі виробництва, які будуть враховувати як вигідні соціальні наслідки використання енергії, так і якість оточуючого середовища і вплив на нього. Ця задача є дуже важливою й актуальною, тому що вона розглядає одразу дві

важливі проблеми й знаходить збалансоване рішення. Такий підхід сьогодні виглядає найбільш реалістично, тому що зрозуміло, наприклад, що ніхто не збирається відмовлятися від використання енергії. Саме тому процеси виробництва потрібно оптимізовувати.

У дипломній роботі розглядається дві моделі оптимального використання енергії з урахуванням якості оточуючого середовища: одновимірна та двовимірна.

Розділ 1

ОДНОВИМІРНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ ЕНЕРГІЇ З УРАХУВАННЯМ ЯКОСТІ ОТОЧУЮЧОГО СЕРЕДОВИЩА

Математична модель оптимального керування. Позначимо через $E = E(t)$ — запас (кількість) енергії того чи іншого виду, через $V = V(t)$ — швидкість (темп) витрачання цієї енергії в момент часу t , ($0 \leq t \leq T$). Введені величини повинні бути пов'язані одна з одною рівністю:

$$\frac{dE}{dt} = -V. \quad (1.1)$$

Використання енергії призводить не лише до збільшення кількості товарів і послуг, а й до забруднення навколишнього середовища. Перший фактор, позитивний, позначимо через $C = C(V)$, другий, негативний, — через $P = P(V)$. Забруднення будемо вважати ненакопичуваним завдяки процесам самоочищення. Виходячи з логічних міркувань, зрозуміло, що зі збільшенням витрачання енергії зростають обидві величини, однак, їх темпи росту мають протилежні знаки. Запишемо ці висновки у вигляді нерівностей:

$$C'(V) > 0, C''(V) < 0, P'(V) > 0, P''(V) > 0. \quad (1.2)$$

Через $U = U(C, P)$ позначимо суспільну функцію корисності. Вона встановлює закон зміни величини корисності для суспільства від використання енергії залежно від змінних збільшення кількості товарів і послуг і забруднення навколишнього середовища. Для всіх $t \in [0, T]$ будемо вважати виконаними такі умови:

$$\frac{\partial U}{\partial C} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial P} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial P \partial C} = 0. \quad (1.3)$$

Перші дві нерівності показують, що загальна функція корисності зростає за змінною C та спадає за змінною P . Третя й четверта — ілюструють зниження темпу зміни корисності з ростом змінних. Ці твердження є інтуїтивно зрозумілими і не суперечать уявленням про використання енергії, її вплив на навколишнє середовище й темпи росту.

У задачі, яку ми розглядаємо, змінними керування можуть виступати кількість енергії E або швидкість витрачання енергії V . З економічних міркувань, зручно керувати темпом витрачання енергії. Тому параметр V буде змінною керування, а E — змінною стану (фазовою змінною).

Розглянемо задачу максимізації загальної корисності за період від початкового моменту часу $t = 0$ до кінцевого $t = T$, тобто критерієм якості буде максимізація функціоналу

$$\int_0^T U(C(V(t)), P(V(t))) dt.$$

Дану задачу можна звести до задачі мінімізації шляхом зміни знаку на протилежний перед інтегралом:

$$-\int_0^T U(C(V(t)), P(V(t))) dt \rightarrow \min. \quad (1.4)$$

Задача найкращого використання енергії, зведена до задачі оптимального керування, полягає в мінімізації інтегрального функціоналу (1.4) за наступними умовами:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = -V, \quad E(0) = E_0, \quad E(T) \geq 0, \\ V(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Данна задача є задачею оптимального керування на фіксованому проміжку часу, з фіксованим лівим кінцем траєкторії, рухомим правим кінцем та інтегральним критерієм якості.

Застосування принципу максимуму й аналіз отриманих результатів.
Задача (1.4), (1.5) є лінійно-опуклою, тому принцип максимуму Понтрягіна є необхідною та достатньою умовою оптимальності.

Запишемо функцію Гамільтона:

$$H(V, \psi) = U(C(V), P(V)) - \psi V.$$

Для цієї функції застосуємо необхідну умову екстремуму, знайдемо стаціонарні точки, прирівнявши до нуля частинну похідну по V :

$$\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{dU}{dV} - \psi = \frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) - \psi = 0. \quad (1.6)$$

З цієї рівності випливає, що спряжена змінна ψ виражає швидкість U'_V зміни загальної функції корисності U залежно від темпу витрачання енергії V .

Для похідної функції H по V другого порядку з урахуванням умов (1.2) та (1.3) отримаємо наступну нерівність:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial V^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} C'^2 + \frac{\partial U}{\partial C} C'' + \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} P'^2 + \frac{\partial U}{\partial P} P'' + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial C \partial P} C'(V) P'(V) < 0,$$

яка показує, що розв'язок рівняння (1.6) буде максимізувати функцію Гамільтона за змінною V .

Запишемо спряжене рівняння:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E} = 0.$$

Таким чином, розв'язок спряженого рівняння є сталою функцією: $\psi(t) \equiv c$.

Правий кінець траєкторії є рухомим: $\varphi(E(T)) = -E(T) \leq 0$.

Запишемо для нього умови трансверсальності та доповнюючої нежосткості: існує невід'ємна стала μ така, що

$$\psi(T) = -\mu \frac{\partial \varphi(E)}{\partial E} = -\mu \cdot (-1) = \mu$$

та

$$\mu \cdot \varphi(E(T)) = 0.$$

Звідси $\psi(T) \cdot E(T) = 0$.

Через те, що $\psi(T) = \mu \geq 0$ та $\psi(T) \equiv c$, можемо зробити висновок, що $\psi^*(t) = c \geq 0$ для всіх $t \in [0, T]$.

Базуючись на цьому висновку, запишемо рівняння (1.6) так:

$$\frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) = c.$$

Важливим є те, що в отримане рівняння не входить t . З цього випливає, що розв'язок цього рівняння (тобто темп витрачання енергії V) — також не повинен залежати від часу. Тому оптимальне значення $V(t) = V^*$ — деяка додатня константа для всіх $t \in [0, T]$.

Це означає, що в задачі, яка розглядається, оптимальний режим характеризується незмінним темпом витрачання енергії.

При $V \equiv V^*$ розв'язання диференційного рівняння (1.5) є нескладною задачею, тому що значення V незмінне. Значення фазової змінної, яка описує наявну кількість енергії в момент часу t буде дорівнювати

$$E^*(t) = E_0 - V^* t. \quad (1.7)$$

Через те, що задача розглядається в загальному випадку й функції $U(C, P)$, $C(V)$ та $P(V)$ не були задані конкретно, неможливо визначити оптимальне значення V^* . З (1.7) при $t = T$ випливає, що при повній витраті наявної енергії ($E^*(T) = 0$) оптимальне значення темпу витрачання енергії V^* дорівнює:

$$V^* = \frac{E_0}{T}.$$

Модифікація задачі. Розглянемо тепер вихідну задачу (1.5), але з іншим критерієм якості – коли в цільовому функціоналі (1.4) під знаком інтегралу присутній дисконтуючий множник:

$$- \int_0^T U(C(V(t)), P(V(t))) e^{-\delta t} dt \rightarrow \min,$$

де $\delta > 0$, та порівняємо одержані результати.

Функція Гамільтона для цього випадку матиме вигляд:

$$H(V, \psi) = U(C(V), P(V)) e^{-\delta t} - \psi V.$$

Застосуємо для цієї функції необхідну умову екстремуму, прирівнявши до нуля її частинну похідну. Таким чином, знайдемо стаціонарну точку:

$$\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial C} C'(V) e^{-\delta t} + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) e^{-\delta t} - \psi = 0. \quad (1.8)$$

Використовуючи нерівності (1.2) та (1.3) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial V^2} = & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial C^2} (C'(V))^2 + \frac{\partial U}{\partial C} C''(V) + \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} (P'(V))^2 + \frac{\partial U}{\partial P} P''(V) + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial C \partial P} C'(V) P'(V) \right) \cdot e^{-\delta t} < 0, \end{aligned}$$

тобто розв'язок рівняння (1.8) максимізує функцію Гамільтона за змінною V .

Запишемо спряжене рівняння. Через те, що функція Гамільтона не містить E , отримаємо те ж саме значення, що й у першій задачі:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E} = 0.$$

Таким чином, розв'язок спряженого рівняння є сталою функцією: $\psi(t) \equiv c$.

Правий кінець траєкторії є рухомим: $\varphi(E(T)) = -E(T) \leq 0$. Аналогічно попередній задачі, використовуючи умови трансверсальності та доповнюючої нежосткості, отримаємо $\psi(T) \cdot E(T) = 0$, $\psi^*(t) = c \geq 0$ для всіх $t \in [0, T]$.

Можливі два випадки: якщо $\psi(T) = 0$, то $c = 0$ й рівняння (1.8) перетворюється на

$$\frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння (тобто темп витрачання енергії V) — не залежить від часу. Тому оптимальне значення $V(t) = V^*$ — деяка додатня константа для всіх $t \in [0, T]$. Це означає, що оптимальний режим характеризується незмінним темпом витрачання енергії.

В цьому випадку значення фазової змінної, яка описує наявну кількість енергії в момент часу t буде дорівнювати $E^*(t) = E_0 - V^*t$.

У другому випадку $E(T) = 0$. Перепишемо (1.8) у вигляді:

$$\frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) = ce^{\delta t}. \quad (1.9)$$

Так як у це рівняння, на відміну від аналогічного в попередній задачі та попередньому випадку, входить змінна t , отримуємо, що розв'язок — темп використання енергії - змінюється з плином часу. Для того, щоб дізнатися характер цієї зміни, розглянемо значення похідної V по t .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) \right) &= c \delta e^{\delta t} \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) \right) \frac{dV}{dt} &= c \delta e^{\delta t} \Rightarrow \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial C^2} (C'(V))^2 + \frac{\partial U}{\partial C} C''(V) + \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} (P'(V))^2 + \frac{\partial U}{\partial P} P''(V) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial C \partial P} C'(V) P'(V) \right) \frac{dV}{dt} = c \delta e^{\delta t} \Rightarrow \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{c \delta e^{\delta t}}{\frac{\partial^2 U}{\partial C^2} (C'(V))^2 + \frac{\partial U}{\partial C} C''(V) + \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} (P'(V))^2 + \frac{\partial U}{\partial P} P''(V) + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial C \partial P} C'(V) P'(V)} < 0 \end{aligned}$$

Отримуємо, що з плином часу темп використання енергії спадає.

З рівності (1.9) знаходимо розв'язок - функцію $V(t, c)$, підставляємо у рівняння (1.1) та знаходимо фазову функцію

$$E(t) = E_0 - \int_0^t V(s, c) ds,$$

після чого значення константи c визначаємо як розв'язок наступного рівняння:

$$E(T) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0 - \int_0^T V(t, c) dt = 0. \quad (1.10)$$

Приклад. Розглянемо задачу оптимального використання енергії для одновірної моделі. Нехай $V=V(t)$ – швидкість (темп) витрачання цієї енергії в момент часу t , ($0 \leq t \leq T$). Функція збільшення кількості товарів і послуг $C(V) = V^\alpha, \alpha \in (0, 1)$, функція забруднення навколишнього середовища $P(V) = V^\beta, \beta > 1$. Перевіримо виконання нерівностей (1.2):

$$\begin{aligned} C'(V) &= \alpha V^{\alpha-1} > 0, \\ C''(V) &= \alpha(\alpha - 1)V^{\alpha-2} < 0, \\ P'(V) &= \beta V^{\beta-1} > 0, \\ P''(V) &= \beta(\beta - 1)V^{\beta-2} > 0 \end{aligned}$$

при $V > 0$.

Оберемо суспільну функцію корисності U у вигляді:

$$U(C, P) = AC^\gamma - BP^\kappa,$$

де A та B – додатні константи, $\gamma \in (0, 1), \kappa > 1$.

Перевіримо виконання умови (1.3) для функції $U(C, P)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial C} &= A\gamma C^{\gamma-1} > 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} &= A\gamma(\gamma - 1)C^{\gamma-2} < 0, \\ \frac{\partial U}{\partial P} &= -B\kappa P^{\kappa-1} < 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P^2} = -B\kappa(\kappa - 1)C^{\kappa-2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial C \partial P} = 0$$

Запишемо рівняння (1.6) для цієї задачі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) &= c \Rightarrow \\ \Leftrightarrow A\gamma(V^\alpha)^{\gamma-1} \cdot \alpha V^{\alpha-1} - B\kappa(V^\beta)^{\kappa-1} \cdot \beta V^{\beta-1} &= c \Rightarrow \\ A\gamma\alpha V^{\alpha\gamma-1} - B\kappa\beta V^{\beta\kappa-1} &= c. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Отримуємо, що при повному витрачанні наявної енергії до заданого кінцевого моменту часу T ($E(T) = 0$), отримуємо наступну величину оптимального значення темпу використання енергії

$$V^* = \frac{E_0}{T},$$

та значення оптимальної фазової змінної

$$E^*(t) = E_0 - \frac{E_0}{T} \cdot t = \frac{E_0}{T} (T - t).$$

У випадку, якщо $E(T) \neq 0$, маємо $\psi(T) = c = 0$ та з (1.11) знаходимо оптимальний темп використання енергії:

$$A\gamma\alpha V^{\alpha\gamma-1} = B\kappa\beta V^{\beta\kappa-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^* = \left(\frac{B\beta\kappa}{A\alpha\gamma} \right)^{\frac{1}{\beta\kappa - \alpha\gamma}}$$

і значення оптимальної фазової змінної:

$$E^*(t) = E_0 - \left(\frac{B\beta\kappa}{A\alpha\gamma} \right)^{\frac{1}{\beta\kappa - \alpha\gamma}} \cdot t$$

Розглянемо тепер модифіковану задачу з дисконтуючим множником у цільовому функціоналі.

Рівняння (1.9) для цієї задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) &= ce^{\delta t} \Rightarrow \\ A\gamma(V^\alpha)^{\gamma-1} \cdot \alpha V^{\alpha-1} - B\kappa(V^\beta)^{\kappa-1} \cdot \beta V^{\beta-1} &= ce^{\delta t} \Rightarrow \\ A\gamma\alpha V^{\alpha\gamma-1} - B\kappa\beta V^{\beta\kappa-1} &= ce^{\delta t}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

У випадку, якщо $E(T) \neq 0$, маємо $\psi(T) = c = 0$ та знаходимо оптимальний темп використання енергії:

$$\begin{aligned} A\gamma\alpha V^{\alpha\gamma-1} &= B\kappa\beta V^{\beta\kappa-1} \Rightarrow \\ V^* &= \left(\frac{B\beta\kappa}{A\alpha\gamma} \right)^{\frac{1}{\beta\kappa - \alpha\gamma}} \end{aligned}$$

і значення оптимальної фазової змінної:

$$E^*(t) = E_0 - \left(\frac{B\beta\kappa}{A\alpha\gamma} \right)^{\frac{1}{\beta\kappa - \alpha\gamma}} \cdot t$$

У другому випадку $E(T) = 0$. Розв'яжемо рівняння (1.12) при наступних значеннях параметрів:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{7}{6}, \gamma = \frac{1}{2}, \kappa = \frac{3}{2}, \delta = 1.$$

Тоді (1.12) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot V^{-\frac{3}{4}} - B \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot V^{\frac{3}{4}} &= ce^t \Rightarrow \\ \frac{1}{4}AV^{-\frac{3}{4}} - \frac{7}{4}BV^{\frac{3}{4}} &= ce^t. \end{aligned}$$

Покладемо $x = V^{\frac{3}{4}}$, тоді маємо:

$$\begin{aligned} A \frac{1}{x} - 7Bx &= 4ce^t \Rightarrow \\ 7Bx^2 + 4ce^tx - A &= 0. \end{aligned}$$

Це квадратне рівняння. Знайдемо його корені:

$$\begin{aligned} D &= 4c^2e^{2t} + 7AB > 0, \\ x &= \frac{-2ce^t + \sqrt{4c^2e^{2t} + 7AB}}{7B} \text{ (нас цікавить лише додатний корень)}. \end{aligned}$$

Тоді

$$V = x^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{-2ce^t + \sqrt{4c^2e^{2t} + 7AB}}{7B} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Далі потрібно розв'язати наступне рівняння:

$$E_0 - \int_0^T \left(\frac{-2ce^t + \sqrt{4c^2e^{2t} + 7AB}}{7B} \right)^{\frac{4}{3}} dt = 0,$$

де E_0, T, A, B задані значення. З цього рівняння знаходимо c й маємо можливість знайти $V(t)$ та $E(t)$. Наприклад, при $A = 100, B = 1, T = 1, E_0 = 5$ розв'язком цього рівняння є $c = 0.953$. Для пошуку значення c скористалися кодом з додатку А.

$$\text{Тоді } V(t) = \left(\frac{-1.906e^t + \sqrt{3.632836e^{2t} + 700}}{7} \right)^{\frac{4}{3}}, E(t) = 5 - \int_0^t V(s) ds.$$

Розділ 2

ДВОВИМІРНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ ЕНЕРГІЇ З УРАХУВАННЯМ ЯКОСТІ ОТОЧУЮЧОГО СЕРЕДОВИЩА

Основні залежності й математична модель оптимального керування. У випадку двовірної моделі маємо дві змінні керування та дві фазові величини. Будемо користуватися позначеннями з одновірної моделі, увівши ще декілька необхідних нових. Нехай $E = E(t)$, $V = V(t)$, $P = P(t)$, $C = C(V)$ — відповідно кількість енергії, темп її використання та забруднення навколишнього середовища в момент часу t , $t \in [0, T]$.

Зрозуміло, що забруднення є наслідком використання енергії, тому темп використання енергії прямо пропорційний забрудненню.

Введемо таке поняття, як діяльність, пов'язана з охороною навколишнього середовища. Позначимо її через A . Зрозуміло, що цей фактор прямо пропорційно знижує темп забруднення.

Також будемо вважати, що через процеси самоочищення рівень забруднення спадає експоненціально.

Тепер враховуючи усі ці залежності, отримаємо наступне диференціальне рівняння відносно P :

$$\frac{dP}{dt} = \alpha V - \beta V - \delta P, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \delta > 0.$$

Виходячи з рівності (1.1) й того факту, що діяльність з охорони навколишнього середовища також потребує енергії (припустимо, що залежність між величинами $\frac{dE}{dt}$ та A є прямопропорційною), запишемо друге диференціальне рівняння, що характеризує швидкість зміни кількості енергії:

$$\frac{dE}{dt} = -V - A.$$

У якості керувань будемо розглядати функції V та A , тоді P та E будуть змінними стану або фазовими змінними. Якість керування будемо оцінювати за допомогою величини інтегральної корисності:

$$\int_0^T U(C(V(t)), P(t)) dt \rightarrow \max, \quad (2.1)$$

де $U = U(C(V), P)$ — суспільна функція корисності, для якої виконуються (1.3) та нерівності для C з (1.2).

Тож маємо задачу оптимального керування з функціями керування V та A й фазовими змінними P та E , яка полягає в максимізації (2.1) за наступних умов:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha V - \beta A - \delta P, \\ \frac{dE}{dt} = -V - A, \end{cases} \\ & P(0) = P_0 > 0, P(T) \geq 0, \\ & E(0) = E_0 > 0, \quad E(T) \geq 0, \\ & V(t) > 0, \quad 0 \leq A(t) \leq \hat{A}, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2.2)$$

Задача розглядається на фіксованому проміжку часу, значення фазових змінних $E(t)$ та $P(t)$ у початковий момент часу фіксовані, а у кінцевий є

рухомими. Також, останній рядок (2.2) накладає обмеження на зміну керуючих змінних: темп використання енергії V повинен бути додатнім, а рівень діяльності з охорони навколишнього середовища A також є невід'ємним й не може приймати значення більші за фіксоване значення $\hat{A}$, величина якого обирається виходячи з реальних умов.

Застосування принципу максимуму. Запишемо функцію Гамільтона для поточної задачі:

$$H = U(C(V), P) + \psi_P(\alpha V - \beta A - \delta P) - \psi_E(A + V),$$

де ψ_P, ψ_E – спряжені змінні. Знайдемо стаціонарні точки функції Гамільтона:

$$\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \alpha \psi_P^* - \psi_E^* = 0, \quad (2.3)$$

що можна переписати як

$$\frac{\partial U}{\partial C} C'(V) = \psi_E^* - \alpha \psi_P^* - \quad (2.4)$$

необхідна умова екстремуму для функції Гамільтона. Розв'язок рівняння (2.3) відповідає максимальному можливому значенню функції Гамільтона за змінною V через те, що $\frac{\partial^2 H}{\partial V^2} = U''_{CC} C'^2 + U'_C C'' < 0$.

Отриману нерівність можна інтерпретувати в економічній сфері наступним чином: $\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial C} C'(V)$ – приріст корисності, який відповідає темпу використання енергії на одну одиницю, ψ_E^* – спряжена змінна, відповідає

тіньовій ціні використання енергії, $-\alpha\psi_P^*$ – відповідає тіньовій ціні забруднення навколишнього середовища. Отже, отримуємо, що приріст корисності складається з ψ_E^* та $-\alpha\psi_P^*$.

Розглянемо цікавий з практичного боку випадок, при якому тіньова ціна забруднення навколишнього середовища зростає:

$$\frac{d\psi_P^*}{dt} > 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.5)$$

Тепер запишемо умову максимуму функції Гамільтона за змінною A . Ця функція лінійна відносно A , $0 \leq A \leq \hat{A}$, з чого можна зробити висновок, що точка максимуму H по змінній A – точка $\hat{A}$, залежить від спряжених змінних. Проілюструємо цю залежність:

$$A^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \beta\psi_P^* + \psi_E^* > 0, \\ \hat{A}, & \text{якщо } \beta\psi_P^* + \psi_E^* < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Потрібно зауважити, що в цій системі відсутня можливість виконання $\beta\psi_P^* + \psi_E^* = 0$. Припустимо супротивне: $\beta\psi_P^* + \psi_E^* = 0$ на деякому проміжку часу $[t', t''] \subset [0, T]$.

Спряжена система рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_P^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial P} = -U'_P + \delta\psi_P^*, \\ \frac{d\psi_E^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial E} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

З другого з рівнянь спряженої системи випливає $\psi_E^* = \text{const}$. Тоді й $\psi_P^* = \text{const}$, що протирічить (2.5).

Таким чином, проміжні значення між 0 та $\hat{A}$ керування A^* може приймати лише у окремі моменти часу. Зміна значення керування у певний момент часу не впливає на поведінку системи, тому можемо вважати, що керування приймає лише два значення 0 або $\hat{A}$.

Висновки на основі принципу максимуму. Таким чином, використовуючи принцип максимуму отримали, що оптимальне значення змінної діяльності з охорони навколишнього середовища A може дорівнювати лише двом крайнім значенням. Коли ніякої діяльності з охорони навколишнього середовища не проводиться, маємо $A^* = 0$, а коли ця діяльність максимальна — $A^* = \hat{A}$. Запишемо (2.6) у наступному вигляді:

$$A^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \psi_E^* > -\beta\psi_P^*, \\ \hat{A}, & \text{якщо } \psi_E^* < -\beta\psi_P^*, \end{cases}$$

звідки можна побачити, що в разі перебільшення константної тіньової ціни використання енергії виразу $-\beta\psi_P^*$ (величина ціни забруднення) немає сенсу використовувати дороге джерело енергії для охорони навколишнього середовища, тому що будемо програвати більше, ніж отримувати. Тобто, ціна ψ_E^* є зависокою і доцільно взяти $A^* = 0$. У разі, якщо маємо протилежний стан речей, беремо $A^* = \hat{A}$, що буде свідчити про використання максимуму можливих енергетичних ресурсів задля охорони навколишнього середовища.

Спочатку детальніше розглянемо перший випадок ($A^* = 0$). Продиференціюємо (2.4) за змінною t :

$$(U''_{CC}C'^2 + U'_CC'')V' = -\alpha \frac{d\psi_P}{dt} \Rightarrow$$

$$V' = -\alpha \frac{\frac{d\psi_P}{dt}}{U''_{CC}C'^2 + U'_CC''} > 0.$$

Отримуємо, що темп використання енергії постійно росте, звідки впливає й те, що енергетичний ресурс виснажується. З другого рівняння (2.7) можна зробити висновок, що $\psi_E^* = const > 0$ (тіньова ціна енергетичних ресурсів, що використовуються). $\psi_E^*(T) > 0$ та $E(T)\psi_E^*(T) = 0$ (умова трансверсальності) приводять до рівності $E(T) = 0$, яка свідчить про те, що енергія повністю закінчується к кінцевому моменту часу. Таким самим чином отримуємо $\psi_P^*(T) = 0$, що впливає з нерівності $P(T) > 0$ та другого співвідношення трансверсальності $P(V)\psi_P^*(T) = 0$ й свідчить про те, що в кінцевий момент часу тіньова ціна забруднення дорівнює нулю.

Тепер проведемо детальний розгляд другого випадку значення A^* , а саме $A^* = \hat{A}$. У цьому випадку $\psi_P^*(t)$ — суто зростаюча функція (через (2.5)). Разом з умовою з (2.6): $\psi_E^* = const$ можна сказати про те, що настане момент часу, коли замість $\psi_E^* + \beta\psi_P^* > 0$ буде виконуватись нерівність $\psi_E^* + \beta\psi_P^* < 0$. Це буде свідчити про те, що рівень забруднення P прийме відносно невелике значення і продовжувати діяльність з охорони навколишнього середовища буде не вигідно. Все інше буде аналогічним випадку $A^* = 0$.

Отже, отримуємо наступний оптимальний процес: у випадку, коли рівень забруднення навколишнього середовища спочатку невеликий, не потрібно проводити діяльність з охорони навколишнього середовища. Також, при такому розкладі темп використання енергії такий, що енергія буде повністю використана в кінцевий момент часу. У тому разі, якщо забруднення

навколишнього середовища значне, потрібно невідкладно проводити діяльність з його охорони, доки рівень забруднення не зменшиться. Після проведення таких дій не треба робити нічого з охорони навколишнього середовища до кінця періоду.

Модифікація задачі. У випадку, коли в цільовому функціоналі (2.1) під знаком інтегралу присутній дисконтуючий множник:

$$\int_0^T U(C(V(t)), P(t)) e^{-\omega t} dt \rightarrow \max,$$

де $\omega > 0$ функція Гамільтона буде мати наступний вигляд:

$$H = U(C(V), P) e^{-\omega t} + \psi_P(\alpha V - \beta A - \delta P) - \psi_E(A + V).$$

Спряжена система має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_P^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial P} = -U'_P e^{-\omega t} + \delta\psi_P^*, \\ \frac{d\psi_E^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial E} = 0. \end{aligned}$$

Як і в попередньому випадку ψ_E^* є сталою функцією.

Запишемо умову максимуму функції Гамільтона по керуванню V :

$$\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial C} C'(V) e^{-\omega t} + \alpha\psi_P^* - \psi_E^* = 0, \quad (2.8)$$

що можна представити так:

$$U'_C C'(V) = \psi_E^* e^{\omega t} - \alpha \psi_P^* e^{\omega t}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial V^2} = U''_{CC} C'^2 e^{-\omega t} + U'_C C'' e^{-\omega t} < 0.$$

Це значить, що розв'язок (2.8) $V = V(\psi_P^*, \psi_E^*, t)$ максимізує функцію Гамільтона за змінною V .

З умови максимізації функції Гамільтона по керуванню A аналогічно попередньому маємо два випадки для A : $A = 0$, та $A = \hat{A}$. Випадок, коли A приймає значення з інтервалу $(0, A)$ неможливий за додаткової умови, що тіньова ціна забруднення навколишнього середовища зростає або спадає на проміжку $[0, T]$. Таким чином, $A = A(\psi_P^*, \psi_E^*)$.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі розглянули моделі використання енергії з урахуванням оточуючого середовища. Одномірна модель складається з позитивних наслідків використання енергії та забруднення навколишнього середовища. Отримали, що в такому разі темп використання енергії, змінна керування, є константою. Додавши до одномірної моделі дисконтуючий множник, отримали інший результат: з плином часу темп використання енергії спадає. Для цього випадку розв'язали чисельну задачу.

Далі було розглянуто двомірну модель, де до змінної керування додалася друга — рівень діяльності з охорони навколишнього середовища. Для цієї задачі отримали, що у разі, якщо з початку процесу рівень забруднення навколишнього середовища невеликий, ніякої діяльності з її охорони проводити не потрібно, а темп використання енергії такий, що в кінці процесу енергія витрачається повністю. У разі, якщо рівень забруднення великий, потрібно негайно проводити діяльність з охорони навколишнього середовища, доки рівень забруднення не знизиться. Для двовимірної моделі розглянуто випадок критерію якості з дисконтуючим множником, знайдено умови для знаходження оптимального темпу використання енергії та рівня діяльності з охорони оточуючого середовища.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Физматлит, 1999.
2. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999.
3. Пантелеев А.В., Бортакoвский А.С., Лeтoвa Т.А. Оптимальное управление в примерах и задачах. – М.: Изд-во МАИ, 1996.
4. В.Д. Нoгин Ввeдeниe в оптимальное управление. – М.: Изд-во ЮТАС, 2008.

ДОДАТКИ

Додаток А

Код програми для розрахування константи c в одновірній задачі
оптимального використання енергії з урахуванням оточуючого середовища з
дисконтуючим множителем

```
from scipy.optimize import root
from scipy.integrate import quad
import numpy as np

A=100
B=1
T=1
E0=5

def equation(c):
    return quad(lambda t:((-
2*c*np.exp(t)+np.sqrt(4*c*c*np.exp(2*t)+7*A*B))/(7*B))**(4/3),0,T)[0]-E0

root(equation,0)
```