УДК 511

Н. В. Тараненко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О ПЛОТНОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Деякі проблеми аналітичної теорії чисел" ОНУ 19.06.2000

Розглядаються натуральні числа, такі що $\Omega(n)-\omega(n)=q$. Знайдено асимптотичну плотність таких чисел.

Рассматриваются натуральные числа, такие что $\Omega(n)-\omega(n)=q$. Найдена асимптотическая плотность таких чисел.

The natural numbers for which $\Omega(n)-\omega(n)=q$ are considered. The asymptotic density of such numbers is found.

Пусть $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ – функции числа простых делителей n с учетом и без учета кратности соответственно. Рассмотрим характеристическую функцию множества целых чисел n, таких что $\Omega(n)-\omega(n)=q$:

$$\nu_q(n)=\begin{cases}1, \text{ если } \Omega(n)-\omega(n)=q,\\ 0, \text{ если } \Omega(n)-\omega(n)\neq q.\end{cases}$$

Мы интересуемся плотностью натуральных чисел n, для которых $\Omega(n)-\omega(n)=q$. Обозначим

$$B_q(x):=\sum_{n\le x}\nu_q(n).$$

A. Rényi доказал, что $B_q(x)/x\to d_q$ при $x\to\infty$, где $d_q>0$ – постоянная [1]. Если $q=0$, то

$$B_0(x)=\sum_{n\le x}\mu^2(n)=\frac{6}{\pi^2}x+O\left(x^{1/2}e^{-c\sqrt{\log x}}\right).$$

(Это хорошо известный результат о числе бесквадратных чисел на отрезке натурального ряда.) H. Delange получил такой результат [2]:

$$B_q(x)=d_qx+o\left(\sqrt{x}(\log\log x)^q\right).$$

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *При* $x\to\infty$

$$B_q(x)=d_qx+O\left(\frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right).$$

Доказательство. Пусть K – множество всех квадратнополных чисел. Обозначим через K_q множество квадратнополных чисел $k=p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ ($\alpha_i\ge 2$), для которых $\alpha_1+\ldots+\alpha_r-r=q$. Заметим, что для $k\in K_q$ должно выполняться $\omega(k)\le q$. Каждое

n, для которого $\nu_q(n)=1$, можно однозначно представить в виде $n=km$, где $(k,m)=1$, $\mu^2(m)=1$, $k\in K_q$. Поэтому

$$B_q(x)=\sum_{n\le x}\nu_q(n)=\sum_{\substack{km\le x\\ k\in K_q\\ \mu^2(m)=1\\ (k,m)=1}}1=\sum_{\substack{km\le x\\ k\in K_q\\ (k,m)=1}}\mu^2(m)=\sum_{\substack{k\le x\\ k\in K_q}}\sum_{\substack{m\le x/k\\ (m,k)=1}}\mu^2(m)=\sum_{\substack{k\le x\\ k\in K_q}}T\left(\frac{x}{k};k\right),$$

где мы положили $T(y,k):=\sum_{\substack{m\le y\\ (m,k)=1}}\mu^2(m)$.

Мы имеем

$$\sum_{\substack{m=1\\ (m,k)=1}}^{\infty}\frac{\mu^2(m)}{m^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\prod_{p|k}\frac{1}{1+\frac{1}{p^s}}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}-\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n^s}\sum_{\nu\in V_k}\frac{\lambda(\nu)}{\nu^s},$$

где $\lambda(n)$ – функция Лиувилля, $V_k:=\{n=p_1^{\beta_1}\ldots p_r^{\beta_r};\beta_i=0,1,2,\ldots;\ p_1\ldots p_r|k\}$.

Введем в рассмотрение мультипликативные функции

$$\mu_k^2(m)=\begin{cases}\mu^2(m),\ \text{если}\ (m,k)=1;\\ 0,\ \text{если}\ (m,k)>1,\end{cases}\qquad \lambda_k(n)=\begin{cases}\lambda(n),\ \text{если}\ n\in V_k;\\ 0,\ \text{если}\ (n,k)=1.\end{cases}$$

Тогда $\mu_k^2=\lambda_k*\mu^2$, где $*$ означает произведение Дирихле. Поэтому

$$T(y,k)=\sum_{\substack{m\le y\\ (m,k)=1}}\mu^2(m)=\sum_{m\le y}\mu_k^2(m)=\sum_{m\nu\le y}\lambda_k(\nu)\mu^2(m)=\sum_{\nu\le y}\lambda_k(\nu)T(y/\nu),$$

где $T(y):=\sum_{m\le y}\mu^2(m)$. Тогда

$$B_q(x)=\sum_{\substack{k\nu\le x\\ k\in K_q}}\lambda_k(\nu)T\left(\frac{x}{k\nu}\right)=\frac{6}{\pi^2}x\sum_{\substack{k\nu\le x\\ k\in K_q}}\frac{\lambda_k(\nu)}{k\nu}+O\left(\sum_{\substack{k\nu\le x\\ k\in K_q}}|\lambda_k(\nu)|\sqrt{\frac{x}{k\nu}}e^{-c\sqrt{\log\frac{x}{k\nu}}}\right).$$

Обозначим $d_q=\frac{6}{\pi^2}\sum_{\substack{k,\nu=1\\ k\in K_q}}^{\infty}\frac{\lambda_k(\nu)}{k\nu}$.

Этот ряд сходится абсолютно, так как все числа $k\nu$ – квадратнополиые и одно и то же число n можно представить в виде произведения $n=k\nu$ не более чем N способами, причем $N=N(q)$ – постоянная, которая зависит только от q. Выражения для d_q можно найти, исследуя поведение суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{\Omega(n)-\omega(n)}}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\prod_{p}\frac{1-z/(p^s+1)}{1-z/p^s},$$

где z – комплексное число. Беря $|z|<2$, нетрудно получить [1]:

$$\sum_{q=0}^{\infty}d_qz^q=\frac{6}{\pi^2}\prod_{p}\frac{1-z/(p+1)}{1-z/p}.$$

Теперь выражения для $B_q(x)$ можно записать в следующем виде:

$$B_q(x) = d_q x + O\left(x \sum_{\substack{kv>x \\ k \in K_q}} \frac{\lambda_k(v)}{kv} \right) + O\left(\sum_{\substack{kv \le x \\ k \in K_q}} |\lambda_k(v)| \sqrt{\frac{x}{kv}} e^{-c\sqrt{\log \frac{x}{kv}}} \right). \tag{1}$$

Нам необходимо оценить

$$S_1 := \sum_{\substack{kv>x \\ k \in K_q}} \frac{\lambda_k(v)}{kv} \text{ и } S_2 := \sum_{\substack{kv \le x \\ k \in K_q}} \frac{|\lambda_k(v)|}{\sqrt{kv}} e^{-c\sqrt{\log \frac{x}{kv}}} .$$

Пусть $\theta_q(x)$ и $\Xi_q(x)$ означает количество квадратнополных чисел, не превосходящих x, для которых $\omega(n) = q$ и $\omega(n) \le q$ соответственно. Найдем асимптотические оценки для $\theta_q(x)$ и $\Xi_q(x)$.

Пусть z – комплексное число, $|z| \le 1$,

$$F(s,z) := \sum_{n \in K} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^{2s}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots \right) \right) = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^{2s}(1 - 1/p^s)} \right).$$

Легко видеть, что

$$F(s,z) = \left(\zeta(2s) \right)^z A(s,z),$$

где $A(s,z)$ – аналитическая правее $s = 1/3$ функция. Положим

$$a_n = a_n(z) = \begin{cases} z^{\omega(n)}, \text{если } n \in K; \\ 0, \text{если } n \notin K. \end{cases}$$

Пусть $b > 1/2, T > 0$. Тогда по формуле обращения рядов Дирихле имеем

$$\sum_{n<x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\zeta(2s) \right)^z A(s,z) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1/2)} \right) + O\left(\frac{\sqrt{x} \log 2x}{T} \right).$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\zeta(2s) \right)^z A(s,z) \frac{x^s}{s} ds.$$

Положим $s' = 2s, b' = 2b, T' = 2T$. Получим

$$I = \int_{b'-iT'}^{b'+iT'} \left(\zeta(s') \right)^z A\left(\frac{s'}{2}, z \right) \frac{\sqrt{x}^{s'}}{s'} ds'.$$

Рассуждая так же, как при построении сумматорной функции $\kappa_\alpha(n)$ для случая $0 < \alpha < 2, \alpha \ne 1$ [3], найдем

$$\sum_{n<x} a_n = \left(f(z) + O(1/\log x) \right) \sqrt{x} \left(\log \sqrt{x} \right)^{z-1}, \tag{2}$$

где

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p(1 - 1/\sqrt{p})} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^z.$$

С другой стороны, имеем

$$\sum_{n<x} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(x) z^k . \tag{3}$$

Раскладывая $f(z)\left(\log\sqrt{x}\right)^{z-1}$ в ряд по степеням z и приравнивая правые части (2) и (3), получим, что для фиксированного q имеет место асимптотическое равенство

$$\theta_q(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\log x}\left(\sum_{k=1}^{q}b_k(q)\left(\log\log x\right)^{q-k}+O\left(\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right)\right),$$

где $b_k(q)$, $k=1,2,\ldots,q$, – вычислимые постоянные, причем $b_1(q)=1/(q-1)!$.

Положим

$$E_k=E_k(p)=\sum_{n\ge k}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\,p^n}\left\{\frac{S(n,k)}{n}-\frac{S(n-1,k-1)}{1-1/\sqrt{p}}\right\},$$

где $S(n,k)$ – числа Стирлинга 1 рода. Тогда при $q=2$ и $q=3$ коэффициенты $b_k(q)$ вычисляются по формулам:

$$b_1(2)=1;$$

$$b_2(2)=C-\ln 2+\sum_p E_1(p);$$

$$b_1(3)=1/2;$$

$$b_2(3)=b_2(2);$$

$$b_3(3)=\frac{C^2}{2}-\frac{\pi^2}{12}+\frac{(\log 2)^2}{2}-C\log 2+$$
$$+(C-\log 2)\sum_p E_1(p)+\sum_p E_2(p)+\sum_{p_1<p_2}E_1(p_1)E_1(p_2).$$

Здесь C – постоянная Эйлера и суммирование проводится по всем простым числам.

Теперь мы можем оценить количество квадратнополных чисел, не превосходящих x, для которых $\omega(n)\le q$:

$$\Xi_q(x)=\sum_{1\le k\le q}\theta_k(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\log x}\left(\sum_{k=1}^{q}(\log\log x)^{q-k}\sum_{1\le i\le k}b_i(q+i-k)+O\left(\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right)\right)=$$
$$=\frac{2\sqrt{x}}{\log x}\left(\sum_{k=1}^{q}c_k(q)(\log\log x)^{q-k}+O\left(\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right)\right),$$

где мы положили $c_k(q)=\sum_{1\le i\le k}b_i(q+i-k)$.

Применим полученный результат для оценки S_1. Имеем

$$S_1=\sum_{\substack{kv>x\\ k\in K_q}}\frac{\lambda_k(v)}{kv}\ll\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\substack{2^l x<kv<2^{l+1}x\\ k\in K_v\\ v\in V_k}}\frac{1}{kv}<\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l x}\Xi_q(2^{l+1}x)\ll\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}.$$

Мы воспользовались тем, что если $k\in K_q$, $v\in V_k$, то $kv=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$, где $r\le q$.

Найдем теперь оценку для S_2:

$$S_2=\sum_{\substack{kv\le x\\ k\in K_q}}\frac{|\lambda_k(v)|}{\sqrt{kv}}e^{-c\sqrt{\log\frac{x}{kv}}}\ll\sum_{\substack{kv<x\\ k\in K_q\\ v\in V_k}}\frac{\exp\left(-c\sqrt{\log(x/kv)}\right)}{\sqrt{kv}}\ll\sum_{\substack{n<x\\ n\in\Xi_q}}\frac{\exp\left(-c\sqrt{\log(x/n)}\right)}{\sqrt{n}}.$$

Применяя лемму Абеля о частном суммировании, найдем

$$\sum_{\substack{n<x\\ n\in\Xi_q}}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{q}\frac{c_k(q)}{q-k+1}(\log\log x)^{q-k+1}+O\left(\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right),$$

где через Ξ_q мы обозначили множество квадратнополных чисел, для которых $\omega(n)\le q$.

Выберем константу c_1 так, чтобы выполнялось $c\sqrt{c_1}\ge 2$. Для $k\ge 2$ обозначим $\log_k x=\log(\log_{k-1}x)$ и положим $\log_1 x=\log x$. Разобьем промежуток суммирования по n от 1 до x на участки $n_k\le n<n_{k+1}, k=0,1,2,\dots$, где $n_0=1, n_k=\left[x/(\log_k x)^{q\log_{k+1}x}\right]$. Тогда

$$\sum_{n_k\le n<n_{k+1}}\frac{\exp(-c\sqrt{\log(x/n)})}{\sqrt{n}}\ll e^{-c\sqrt{\log(x/n_{k+1})}}\sum_{n_k\le n<n_{k+1}}\frac{1}{\sqrt{n}}\ll\frac{1}{(\log_{k+1}x)^2}\times$$

$$\times\left(\left(\log\log x+O\left(\frac{\log_{k+2}x}{\log x}\right)\right)^q-\left(\log\log x+O\left(\frac{\log_{k+1}x}{\log x}\right)\right)^q+O\left(\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right)\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{n_k\le n<n_{k+1}}\frac{\exp(-c\sqrt{\log(x/n)})}{\sqrt{n}}\ll\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x\log_{k+1}x}.$$

Пусть k_0 – целое число, такое что $1<\log_{k_0}x\le c_0$, где $c_0>1$ – постоянная. Тогда

$$\frac{x}{(\log_{k_0}x)^{q\log_{k_0+1}x}}>\frac{x}{c_0{}^{q\log c_0}}>\frac{x}{c_2},$$

где $c_2>1$ – постоянная, и

$$S_2\ll\sum_{\substack{n\le x\\ n\in\Xi_q}}\frac{\exp(-c\sqrt{\log(x/n)})}{\sqrt{n}}\ll\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\sum_{k\le k_0}\frac{1}{\log_{k+1}x}+\sum_{\frac{x}{c_2}\le n\le x}\frac{1}{\sqrt{n}}\ll\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}.$$

Подставляя найденные оценки для S_1 и S_2 в формулу (1), получаем утверждение теоремы.

1. **Rènyi A.** On the dencity of certain sequences of integers // Publs Inst. Math. Acad. serbe sci. – 1955. – № 8. – P. 157–162.
2. **Delange H.** Sur un thèoréme de Rènyi // Acta Arithm. – 1965. – № 11. – P. 241–252.
3. **Taranenko N. V.** The Value Distribution of a Multiplicanive Function // Matematychni Studii. – 2000. – № 13. – P. 3–10.