

УДК 517.2

Н. И. Гаврилов

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОРНЕЙ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ
В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

У статті розробленим мною методом із моєї монографії [1] вирішується проблема розподілу коренів L-функцій, що відповідають першообразному характеру. Доведено, що всі ці корені лежать на прямій $\sigma = \frac{1}{2}$, якщо $s = \sigma + it$. Крім того, доведено, що у таких функцій немає дійсних коренів, $\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1$.

В статье разработанным мною методом из моей монографии [1] решается проблема распределения корней L-функций, отвечающих первообразному характеру. Доказано, что все эти корни лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, если $s = \sigma + it$. Кроме того, доказано, что у таких функций нет вещественных корней $\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1$.

In this article using my method from my monograph [1] I have solved the problem of the distribution of the roots of L-functions which has an original character. It is proved that such roots are located on the line $\sigma = \frac{1}{2}$, if $s = \sigma + it$. Besides, it is proved that such functions have not real roots $\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $\chi(n)$ – комплексный первообразный характер. Положим $H(\omega) = \xi(\frac{1}{2} + i\omega; \chi) \xi(\frac{1}{2} - i\omega; \bar{\chi})$, где $\xi(s; \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-s/2} \Gamma(\frac{s+6}{2}) L(s; \chi)$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \omega H(\omega + a + i\theta) H(\omega - a + i\theta),$$

где $a > 0$, θ – вещественное, $\omega = x + iy$, τ – вещественная переменная. Уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \omega F(\omega), \text{ где } F(\omega) = H(\omega + a + i\theta) H(\omega - a + i\theta). \quad (2)$$

Значит, $\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega F(\omega)} = \tau - \tau_0$, а поскольку τ – вещественная, то вдоль интегральной

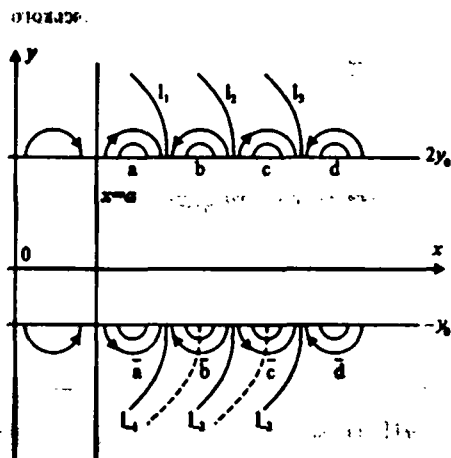


Рис. 1.

кривой $\Phi(\omega) - \Phi(\omega_0) = \tau - \tau_0$, где $\Phi(\omega)$ – какая-либо первообразная. Значит, вдоль интегральной кривой $\text{Im} \Phi(\omega) = \mu = \text{const}$. Для уравнения (1) точка $\omega = 0$ – узел, а корень ω_0 функции $F(\omega)$ либо диполь, если кратность корня равна 2, либо мультиполь порядка $2(m-1)$, если кратность корня m .

Лемма. Интегральные кривые уравнения (1) в плоскости $\omega = x + iy$ обладают следующими свойствами:

1) Ось координат OY является интегральной кривой уравнения (1). Интегральные кривые этого уравнения симметричны относительно оси OY .

2) Если $y_0 > 0$ достаточно велик, то в окрестности прямой $y = -y_0$ и в окрестности мнимой $y = y_0$ интегральные кривые расположены так, как указано на рис. 1.

3) Интегральные кривые $l_1, l_2, l_3, \dots, l_1, l_2, l_3, \dots$ уходят в ∞ по асимптотическому направлению оси OY и на них параметр μ не делает скачка.

4) Кривая типа l_1 и l_1 , разделяющая пучки типа a, b и $\bar{a}, \bar{b}$, единственная.

Доказательство. Функция $H(\omega)$ четная. Имеем $H(\omega) = \xi(\frac{1}{2} + i\omega; \chi) \xi(\frac{1}{2} + i\omega; \bar{\chi})$. Значит $H(-\omega) = \xi(\frac{1}{2} + i\omega; \chi) \xi(\frac{1}{2} + i\omega; \bar{\chi})$ в силу уравнения $\xi(s; \chi) = \epsilon(\chi) \xi(1-s; \bar{\chi})$, $\epsilon(\bar{\chi}) = 1$. Поэтому $H(-\omega) = H(\omega)$.

Кроме того, $\arg H(\omega) = -\arg H(\bar{\omega})$. Действительно, имеем

$$H(x+iy)H(x-iy) = \xi(\frac{1}{2} - y + ix; \chi) \xi(\frac{1}{2} - y + ix; \bar{\chi}) \xi(\frac{1}{2} - y - ix; \bar{\chi}) \xi(\frac{1}{2} - y - ix; \chi).$$

$$\text{Но } \xi(\frac{1}{2} - y + ix; \chi) \xi(\frac{1}{2} - y - ix; \bar{\chi}) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(\frac{1}{2}-y+ix)^2} \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-y+ix+\delta}{2}\right) L(\frac{1}{2} - y + ix; \chi) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-y-ix}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-y-ix+\delta}{2}\right) L(\frac{1}{2} - y - ix; \bar{\chi}), \text{ как видим, здесь входит всюду } -y.$$

Значит, по формуле Эйлера

$$\xi(\frac{1}{2} - y + ix; \chi) \xi(\frac{1}{2} - y - ix; \bar{\chi}) = A_0 \prod \left(1 - \chi p^{-(\frac{1}{2}-y+ix)}\right)^{-1} \left(1 - \bar{\chi} p^{-(\frac{1}{2}-y-ix)}\right)^{-1}.$$

Мы считаем здесь $y < 0$ и велик по модулю. Здесь A_0 — вещественное число. Но

$$\prod \left(1 - \chi p^{-(\frac{1}{2}-y+ix)}\right)^{-1} \text{ и } \prod \left(1 - \bar{\chi} p^{-(\frac{1}{2}-y-ix)}\right)^{-1} \text{ сопряжены, их произведение вещественно.}$$

Значит $H(x+iy)H(x-iy)$ — вещественное число. Значит, $H(x+iy)$ и $H(x-iy)$ таковы, что $\arg H(x+iy) = -\arg H(x-iy)$. Это выполняется при $y < -y_0$, где $y_0 > 0$ достаточно велик. Но в силу аналитичности $H(\omega)$ во всей плоскости ω это равенство выполняется всюду в плоскости ω .

Докажем теперь, что ось OY — интегральная кривая уравнения (1). Для этого положим $\omega = iy$, подставим в уравнение (1) и сократим на i . Легко заметить, что $\omega = iy$ удовлетворяет уравнению (1), если $H(iy+a+i\theta)H(iy-a+i\theta)$ есть вещественное число. Но $H(a+i(y+\theta))H(-a+i(y+\theta)) = H(a+i(y+\theta))H(a-i(y+\theta))$ в силу четности $H(\omega)$ относительно ω . Далее, $H(a+i(y+\theta))H(a-i(y+\theta))$ — вещественное число по сказанному выше. Значит, ось OY — интегральная кривая уравнения (1).

Докажем теперь, что поле направлений уравнения (1) симметрично относительно оси OY . Для этого рассмотрим точки $-x+iy$ и $x+iy$ и докажем, что $\arg$ правой части уравнения (1) в этих точках отличается знаком. Пусть

$$A = H(-x+iy+a+i\theta)H(-x+iy-a+i\theta)H(x+iy+a+i\theta)H(x+iy-a+i\theta).$$

$$\text{Но } H(-x+iy+a+i\theta) = H(x-a-i(y+\theta)) \text{ и } H(-x+iy-a+i\theta) = H(x+a-i(y+\theta))$$

в силу четности $H(\omega)$ относительно ω , т. е. $H(-\omega) = H(\omega)$.

Подставляя это в A , получим, что первый и четвертый множители как и второй и третий взяты в сопряженных точках и потому их произведение вещественно. Значит, A — вещественно. Значит, $\arg$ правой части уравнения (1) в точке $(-x, y)$ отличается знаком от $\arg$ этого выражения в точке (x, y) , что и означает симметрию интегральных кривых уравнения (1) относительно оси OY .

Обратимся к п.2 леммы, т. е. дадим обоснование рис. 1.

Найдем $\arg \omega H(\omega + a + i\theta)H(\omega - a + i\theta)$, т. е. правой части уравнения (1). Имеем

$$\xi(s; \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s; \chi). \text{ Положим } \omega = x + iy. \text{ У нас в (2) } \xi\left(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a)\right) \chi = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a))/2} \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a) + \delta}{2}\right) L\left(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a)\right) \chi.$$

Рассматриваем случай, когда $y < -y_0$, y_0 достаточно велик. Тогда $\xi\left(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a)\right) \chi = \sqrt{2\pi} e^{(z-1/2)\ln z - z} \left[1 + O(z^{-1})\right]$. Значит, $\xi\left(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a)\right) \chi = \sqrt{2\pi} e^{-(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a))/2 \times \ln \frac{\pi}{k}} e^{-(\frac{1}{2} - \theta - y + \delta + i(x \pm a))/2 \times \ln((\frac{1}{2} - \theta - y + \delta + i(x \pm a))/2)} \times \left[1 + O\left(\frac{1}{2} - \theta - y + \delta\right)^{-1}\right]$. Мы рассматриваем $y < -y_0$, $y_0 > 0$ достаточно велик и положи-
ли $L\left(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a)\right) \chi = \prod (1 - \chi p^{-s})^{-1}$, где $s = \frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a)$. Значит, $L\left(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a)\right) \chi = 1 + O\left(\left(\frac{1}{2} - \theta - y\right)^{-1}\right)$. Отсюда получим

$$\arg \xi\left(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a)\right) \chi = -\frac{x \pm a}{2} \ln \frac{\pi}{k} + \frac{x \pm a}{2} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \theta - y + \delta\right)^2 + (x \pm a)^2} + \frac{-\frac{1}{2} - y - \theta + \delta}{2} \operatorname{arctg} \frac{x \pm a}{\frac{1}{2} - y - \theta + \delta} - \frac{x \pm a}{2} + O\left(\left|\frac{1}{2} - y - \theta + \delta\right|^{-1}\right). \quad (3)$$

Чтобы найти $\arg$ всего произведения (2), следует рассмотреть в (3) случай $x + a$, потом случай $x - a$, затем сложить и удвоить все это, а потом прибавить $\arg \omega = \operatorname{arctg} x^{-1} y$. Полученное выражение обозначим $\varphi(x, y) + O\left(\left|\frac{1}{2} - y - \theta + \delta\right|^{-1}\right)$. Исследуем кривую $\varphi(x, y) = c$. Легко заметить, что самым большим слагаемым в $\partial \varphi(x, y) / \partial x$, определяющим знак $\partial \varphi / \partial x$, будет слагаемое типа $\frac{1}{2} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \theta - y + \delta\right)^2 + (x \pm a)^2}$. Значит $\partial \varphi / \partial x > 0$, при всех $y < -y_0$.

Геометрически это означает, что $\arg$ правой части уравнения (1) на прямой $y = -y_0$ монотонно возрастает с ростом x от $x = 0$. Но, поскольку этот $\arg$ есть угол наклона касательной к интегральной кривой уравнения (1) в окрестности прямой $y = -y_0$, то его возрастание означает, что интегральные кривые идут так, как указано на рис.1.

Рассмотрим теперь прямую $y = y_0$. На ней пользоваться (3) нельзя, т. к. нельзя применять формулу Эйлера $L\left(\frac{1}{2} - \theta - y + i(x \pm a)\right) \chi = \prod (1 - \chi p^{-s})^{-1}$. Мы сначала преобразуем правую часть (1) с помощью $\xi(s; \chi) = \epsilon(\chi) \xi(1 - s; \chi)$. Тогда получим, что в (3) надо переменить знаки x, y, a, θ и считать после этого $y = y_0 > 0$. Легко получим, что тогда $\partial \varphi / \partial x < 0$ при $x \leq 0$, т. е. получим картину интегральных кривых, рис.1, сверху. Дадим теперь обоснование рис.1 для поведения интегральных кривых типа I_1 и I_2 . Докажем, что они имеют асимптотическое направление оси ОУ. Для этого рассмотрим $\varphi(x, y) = c$. Найдем $\partial \varphi / \partial y$ на прямой $y = -y_0$. Обратимся к (3). Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (x \pm a) \frac{-(\frac{1}{2} - y - \theta + \delta)}{(\frac{1}{2} - y - \theta + \delta)^2 + (x \pm a)^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x \pm a}{\frac{1}{2} - y - \theta + \delta} \quad (\text{сумма}). \text{ Будем считать далее параметр } \theta$$

малым, $|\theta| < \frac{1}{4}$, $y_0 > \frac{1}{4}$, $x > a$. Тогда $\partial \varphi / \partial y < 0$ при $y \leq -y_0$. На кривой $\varphi(x, y) = c$ имеем $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y}$. Поскольку у нас при $y \leq -y_0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} < 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} > 0$, то $\frac{dy}{dx} > 0$. Значит, при

$x \geq a$ наклон кривой $\varphi(x, y) = c$ положительный, как указано на рис.1. При

$y > y_0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} < 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} < 0$, наклон кривой отрицательный.

• y

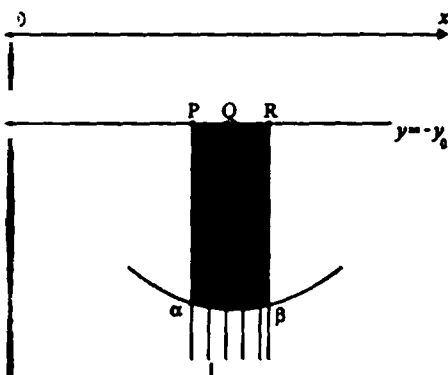


Рис. 2.

Поскольку изоклина уравнения (1), например, кривая $\varphi(x, y) = \pi$ (пунктирная) уходит в $-\infty$ по асимптотическому направлению оси ОУ, то все кривые $I_1, I_2, \dots$ также уходят в $-\infty$ по направлению оси ОУ. Аналогично, все кривые $I_1, I_2, \dots$ уходят в $+\infty$ по направлению оси ОУ.

Обратимся к п.4 леммы. Докажем, что кривая типа I_1 , разделяющая пучки типа $\bar{a}$ и $\bar{b}$ интегральных кривых, единственная в том смысле, что отсутствует пучок таких кривых, отделяющих $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Пусть через PR, рис.2, проходит пучок интегральных кривых типа I_1 , уходящих вниз по асимптотическому направлению оси ОУ.

Покажем, что мы приходим к противоречию.

Пусть Q — середина PR. Проведем окружность

радиуса ρ с центром Q и рассмотрим ее дугу $\alpha\beta$. Во всей заштрихованной на рис.2 области левая часть уравнения (1) аналитична и не равна нулю, т. к. в этой области нет точек покоя

уравнения (1). Значит, $\oint_{\alpha\beta} \frac{d\omega}{\omega H(\omega + a + i\theta)H(\omega - a + i\theta)} = \theta$. Значит и

$$\operatorname{Im} \int_{\alpha\beta} \frac{d\omega}{\omega H(\omega + a + i\theta)H(\omega - a + i\theta)} = 0.$$

Поскольку на интегральных кривых $P\alpha$ и $R\beta$ в силу уравнения (1) подынтегральное выражение в (*) равно $d\tau$, то интегралы по этим кривым вещественные и потому равенство (*) обращается в равенство

$$\operatorname{Im} \int_{\alpha\beta} \frac{d\omega}{\omega H(\omega + a + i\theta)H(\omega - a + i\theta)} = \operatorname{Im} \int_{PR} \frac{d\omega}{\omega H(\omega + a + i\theta)H(\omega - a + i\theta)}. \quad (**)$$

Левый интеграл взят по дуге $\alpha\beta$, которая при больших ρ может быть сколь угодно далекой вниз. Из приведенного выше значения функции $H(\omega; \chi)$ следует, что при $\omega \rightarrow \infty$ функция $\omega H(\omega + a + i\theta)H(\omega - a + i\theta)$ очень быстро типа $\exp(-y)$ возрастает ($y \rightarrow -\infty$) и потому левый интеграл в (**) сколь угодно мал, в то время, как правый интеграл имеет отличное от нуля значение. Действительно, подынтегральное выражение в нем не тождественный нуль. Но тогда точки P и R можно выбрать так, что он будет отличен от нуля. В итоге, равенство (**) противоречиво. Но тогда наше предположение, что пучки $\bar{a}$ и $\bar{b}$, рис.1, разделяются пучком интегральных кривых типа I_1 , приводит к противоречию. Значит, пучки интегральных кривых $\bar{a}$ и $\bar{b}$ разделяются только одной интегральной кривой типа I_1 , уходящей в $-\infty$.

Докажем теперь, что на кривой типа I_1 параметр μ не делает скачка (п.3 леммы), т. е. левый предел μ и правый предел μ на I_1 , если стремиться по интегральным кривым типа $\bar{a}$ и $\bar{b}$, рис.1, совпадают. Для этого доказательства обратимся к уравнению (1). Напомним, что его правая часть имеет вид (2). Напомним также, что в эту правую часть входят функции $L(s; \chi)$ и $L(s; \bar{\chi})$.

Именно, $\xi(s; \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s; \chi)$, где $s = \frac{1}{2} + i\omega - \theta \pm ia$. . . Функция

$L(s; \chi) = \prod (1 - \chi p^{-s})^{-1}$ в силу формулы Эйлера. Будем рассматривать нижнюю полуплоскость s , в которой $s = \frac{1}{2} - y - \theta + ix \pm ia$. Его вещественная часть большая положительная, при

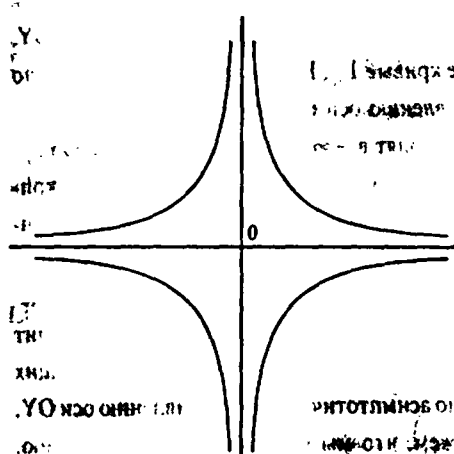


Рис. 3.

Нижняя полуплоскость

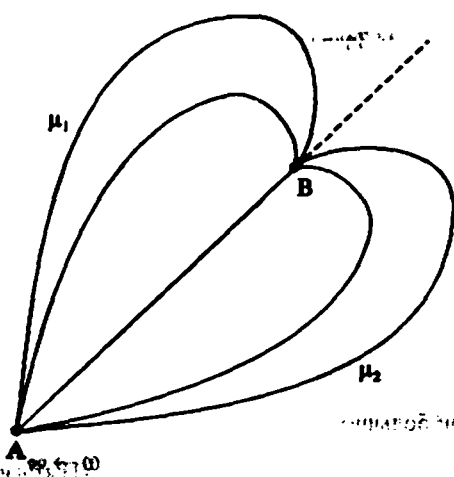


Рис. 4.

$\omega = 0$, ибо ω стоит множителем в правой части этого уравнения.

$\prod_{p \leq n} (1 - \chi p^{-s})^{-1}$ может обращаться в ∞ в некоторых точках, которые являются простыми полюсами. Однако, легко доказать, что эти точки не приводят к скачку параметра μ и являются седлами. Действительно, рассмотрим модельное уравнение

$\omega = 0$ является простым полюсом. Имеем $\omega d\omega = d\tau$. Отсюда

$x^2 - y^2 + 2ixy = 2(\tau - \tau_0) + x_0^2 - y_0^2 + 2x_0y_0i$. Мы положили $\omega = x + iy$. Сравнивая мнимые части, получим $xy = x_0y_0$. Значит, здесь параметр $\mu = x_0y_0$. Он постоянен вдоль интегральной

$y = -y_0$, $y_0 > 0$ велик, $|\theta|$ мал. Тогда функция

$L(s; \chi)$ равномерно аппроксимируется конечным

произведением $\prod_{p \leq n} (1 - \chi p^{-s})^{-1}$, т. е.

$$\prod_{p \leq n} (1 - \chi p^{-s})^{-1} \rightarrow L(s; \chi).$$

Заменим в правой части уравнения (1) все L -функции на их конечные $p \leq n$ произведения Эйлера. Тогда получим уравнение, равномерно аппроксимирующее уравнение (1) при $y < -y_0$, $y_0 > 0$ велик и фиксирован. В верхней полуплоскости такой аппроксимации не будет. Однако, мы это аппроксимирующее уравнение будем рассматривать во всей плоскости, имея в виду, что аппроксимация имеет место только в нижней полуплоскости. Рассмотрим интегральные кривые этого уравнения во всей правой полуплоскости.

Кроме точки $\omega = 0$, никаких других точек покоя это уравнение не имеет. Действительно, по предыдущему.

$$\xi(s; \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s; \chi)$$

и если заменить $L(s; \chi)$ на $\prod_{p \leq n} (1 - \chi p^{-s})^{-1}$, как

мы сделали выше, то легко заметить, что

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) \prod_{p \leq n} (1 - \chi p^{-s})^{-1} \text{ нигде в нуль не}$$

обращается. Значит, никаких точек покоя указанное выше аппроксимирующее уравнение во всей плоскости не имеет, кроме точки покоя

кривой $xy = x_0 y_0$, а сама кривая – гипербола. Значит, точка покоя 0 – седло и интегральные кривые в ее окрестности имеют вид, рис. 3. Никакого скачка параметра μ нет. Для общего

положения $\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\omega} [1 + O(\omega)]$ положение аналогичное.



Скачок параметра μ может произойти только при специальном расположении интегральных кривых. Именно, рассмотрим случай, когда интегральная кривая проходит через две точки покоя, рис. 4, А и В. Тогда интегральная кривая μ_1 с параметром μ_1 , приближается к пунктирной интегральной кривой справа и дает в пределе на этой пунктирной интегральной кривой предельное значение $\mu_1 \rightarrow \mu_0$. Однако, интегральная кривая μ_2 стремится к пунктирной кривой слева и предельное значение слева $\mu_2 \rightarrow \mu^*$, где $\mu_0 \neq \mu^*$. На пунктирной интегральной кривой будет скачок параметра μ , равный $\mu^* - \mu_0 \neq 0$. Короче, скачок параметра μ возможен только тогда, когда интегральная кривая проходит через две точки покоя. У нас, как сказано выше, во всей плоскости аппроксимирующее уравнение имеет только одну точку покоя $\omega = 0$. Значит, в нижней полуплоскости, где имеет место указанная выше аппроксимация

$(1 - \chi p^{-s})^{-1} \rightarrow L(s; \chi)$, $n \rightarrow \infty$, никаких скачков параметра μ нет. Поскольку эта апп-

роксимация при $n \rightarrow \infty$ при $y < -y_0$, $y_0 > 0$ и велик, является равномерной, то никаких скачков параметра μ и на интегральных кривых уравнения (1) в нижней полуплоскости нет. Действительно, параметр μ на интегральных кривых аппроксимирующего уравнения есть функционал, заданный на этих кривых (при $y < -y_0$, $y_0 > 0$ и велик) и он непрерывен на этих кривых, что доказано выше, ибо он не делает скачков. Но, поскольку при $n \rightarrow \infty$ аппроксимация равномерная, то предельный функционал также непрерывен (при $y < -y_0$, $y_0 > 0$ велик и фиксирован). Но тогда на интегральных кривых $l_1, l_2, \dots$, разделяющих пучки a и $\bar{b}$, рис. 1, нет скачка параметра μ . Рассмотрим теперь прямую $y = y_0$, $y_0 > 0$ в верхней полуплоскости. Там та же картина, что и в окрестности прямой $y = -y_0$, рис. 1 с той разницей, что там при возрастающих от $x = 0$, $\arg$ правой части уравнения (1) убывает, т. е. соответствующая $\arg dx < 0$. Это следует из того, что при $y > 0$ справа в (3) следует $-y$ заменить на $y > 0$ и поставить знак $-$ перед $x \pm a$. Изоклина $\varphi(x, y) = c$ здесь наклонена (с отрицательным наклоном) в сторону оси ОУ и имеет асимптотическое направление оси ОУ. Соответствующие кривые $l_1, l_2, \dots$ уходят в $+\infty$ по асимптотическому направлению оси ОУ. Лемма доказана.

Основная теорема. Если χ – первообразный характер (вещественный или комплексный), то нетривиальные корни L-функции Дирихле $L(s; \chi)$ расположены на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, где $s = \sigma + it$.

Доказательство. Гипотеза [2] о том, что все нетривиальные корни L-функции Дирихле лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ эквивалентна утверждению, что функция $H(\omega; \chi)$, приведенная выше, имеет только вещественные корни. Предположим, что эта гипотеза неверна, т. е. функция $H(\omega; \chi)$ имеет существенно комплексный корень $a + i\gamma$, $a > 0$, $\gamma > 0$. Докажем, что мы приходим к противоречию.

Действительно, рассмотрим вспомогательное уравнение (1). Тогда у этого уравнения существует корень $\gamma i - i\theta$ правой части. В самом деле, подставим в правую часть (1) $\omega = \gamma i - i\theta$. Тогда получим $H(\gamma i - i\theta + a + i\theta)H(\gamma i - i\theta - a + i\theta) = 0$, ибо первый множитель имеет вид $H(a + \gamma i) = 0$. Значит, если предположить, что функция $H(\omega)$ имеет существенно комплексный корень $a + i\gamma$, $a > 0$, $\gamma > 0$, то уравнение (1) имеет точку покоя $(0, i(\gamma - \theta))$, лежащую на оси ОУ, которая согласно лемме, является интегральной кривой уравнения (1). Аналогично, вместе с корнем $a + i\gamma$, корнем $H(\omega)$ будет и $a - i\gamma$. Значит, будет и точка покоя $(0, i(-\gamma - \theta))$.

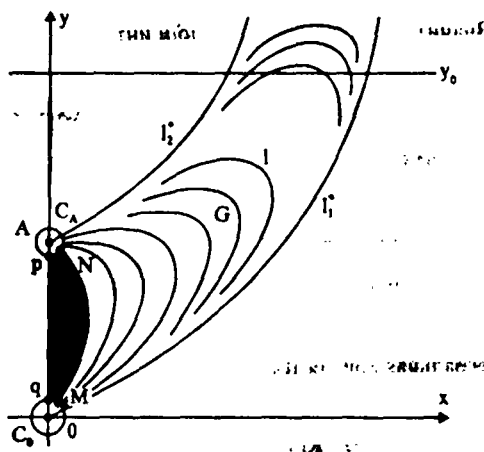


Рис. 5.

Идея нашего исследования следующая. Предположим, что $a + i\gamma$ – корень функции $H(\omega)$, нарисуем качественную картину интегральных кривых уравнения (1), опирающуюся на это предположение. Докажем, что эта качественная картина внутренне противоречива, т. е. предположение о существовании корня $a + i\gamma$ противоречит некоторым свойствам функции $H(\omega)$, которые мы укажем. Тогда наша теорема будет доказана.

Обратимся к рис.5. Поскольку ось OY в силу леммы является интегральной кривой, а точки $A = i(\gamma - \theta)$ и O – точки покоя на ней, то отрезок OA – интегральная кривая. Окружим точки A и O маленькими дугами окружностей C_A и C_O .

Поскольку rq – отрезок интегральной кривой, то при близкой M к q в силу непрерывной зависимости решения от начальной точки получим дугу интегральной кривой MN . В заштрихованной области нет точек покоя уравнения (1), т. к. на rq таких точек нет и потому не обращается в нуль правая часть уравнения (1). Значит,

функция $\frac{1}{\omega H(\omega + a + i\theta)H(\omega - a + i\theta)}$ аналитична в этой области. Поэтому

$$\oint \frac{d\omega}{\omega H(\omega + a + i\theta)H(\omega - a + i\theta)} = 0, \quad \text{Im} \int = 0, \quad \text{Im} \int_{MN} = \text{Im} \int_{pN} + \text{Im} \int_{qr} + \text{Im} \int_{Mq}.$$

Но интегралы справа ограничены некоторыми универсальными числами при любом положении точек M и N на окружностях C_A и C_O . Значит, $|\text{Im} \int_{MN}| < K$, где K – конечное число.

Заметим, что $\text{Im} \int_{MN}$ есть время пробега T_{MN} дуги MN , значит, $T_{MN} < K$. Дуги типа MN заполняют некоторую область между интегральными кривыми I_1^* и I_1^* . В этой области G нет точек покоя, т. к. входит в точку покоя, как известно, интегральная кривая может лишь при бесконечном значении времени, а у нас это время равномерно ограничено указанным выше числом K .

Докажем, что эта область G не может находиться при всех $x > 0$ в полосе $-y_0 \leq y \leq y_0$ фиксированной ширины $2y_0$.

Оценим функцию $\omega H(\omega + a + i\theta)H(\omega - a + i\theta)$ в этой полосе. Напомним, что

$$H(\omega; \chi) = \xi(\frac{1}{2} + i\omega\chi) \xi(\frac{1}{2} + i\omega\bar{\chi}). \quad \text{Здесь}$$

$$\xi(s; \chi) = \left(\frac{\pi}{K}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s; \chi).$$

Пусть $\omega = x + iy$. Тогда

$$H(x + iy + a + i\theta; \chi) = \xi(\frac{1}{2} + i(x+a) - (y+\theta)\chi) \xi(\frac{1}{2} + i(x+a) - (y+\theta)\bar{\chi}).$$

Подставим в (*) $s = \frac{1}{2} + i(x+a) - (y+\theta)$. Получим

$$\xi(\frac{1}{2} + i(x+a) - (y+\theta)) = \left(\frac{\pi}{K}\right)^{(\frac{1}{2} + i(x+a) - (y+\theta))/2} \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} + i(x+a) - (y+\theta) + \delta}{2}\right) L(\frac{1}{2} + i(x+a) - (y+\theta)\chi).$$

$$\text{Известно, что } \Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} [1 + O(|z|^{-1})] = \sqrt{2\pi} e^{(-1/2)\ln z - z} [1 + O(|z|^{-1})].$$

Поставим сюда $z = \frac{y_2 + i(x+a) - (y+\theta) + \delta}{2}$. Получим

$$\left(\frac{y_2 + i(x+a) - (y+\theta) + \delta}{2} \right) = \sqrt{2\pi} e^A \left[1 + O(|z|^{-1}) \right],$$

$$= \frac{-y_2 + i(x+a) - (y+\theta) + \delta}{2} \ln \frac{y_2 + i(x+a) - (y+\theta) + \delta}{2} - \frac{y_2 + i(x+a) - (y+\theta) + \delta}{2}$$

$$\text{ку } \ln \frac{y_2 + i(x+a) - (y+\theta) + \delta}{2} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{4} [y_2 - (y+\theta) + \delta]^2 + \frac{1}{4} (x+a)^2 \right] + i\varphi,$$

$$\theta = \pi \left(\frac{y_2 + i(x+a) - (y+\theta) + \delta}{2} \right) = \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y_2 - (y+\theta) + \delta}, \text{ то } |\Gamma(z)| = \sqrt{2\pi} e^B \left[1 + O(|z|^{-1}) \right], \text{ где}$$

$$B = \frac{-(y+\theta) + \delta}{4} - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{4} [y_2 - (y+\theta) + \delta]^2 + \frac{1}{4} (x+a)^2 \right] - \frac{x+a}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y_2 - (y+\theta) + \delta} - \frac{y_2 - (y+\theta) + \delta}{4}.$$

В функцию $\xi(y_2 + i(x+a) - (y+\theta))$, как показано выше, входит множителем $-(y+\theta) + \delta$. Если наше предположение о том, что область G , указанная на рис.5, лежит в полосе $-y_0 \leq y \leq y_0$, где $\omega = x + iy$, то в этой области вещественная часть $y_2 - (y+\theta) + i(x+a)$ ограничена, а $x \rightarrow \infty$. Известно [2], что в силу свойства L-функции Дирихле как функции "конечного порядка", отвечающей первообразному характеру χ , $L(\omega, \chi) < M_0 x^m$, где M_0, m — постоянные числа, $M_0 > 0, m > 0$.

Получим, что $-y_0 \leq y \leq y_0$ состоит из двух полос $-y_0 \leq y \leq 0$ и $0 \leq y \leq y_0$. В каждой из них, по предыдущему, величина B оценивается аналогично. Например, в полосе $y \leq 0$ величина B при больших $x > 0$ определяется отрицательными слагаемыми

$$\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y_2 - (y+\theta) + \delta} \approx -\frac{x+a}{4} \pi, \text{ т. к. при больших } x+a > 0 \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y_2 - (y+\theta) + \delta} \approx \frac{\pi}{2}, \text{ т. е.}$$

$$-\frac{\pi}{4} \pi. \text{ Аналогичная оценка имеет место и в полосе } 0 \leq y \leq y_0 \text{ (с заменой } y \text{ на } -y).$$

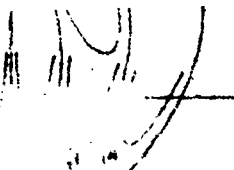
В итоге,

$$|H(x + iy + a + i\theta)| < \left(\frac{\pi}{K} \right)^{(y_2 - y)/2} e^{-\frac{x+a}{4} \pi} M_0 x^m. \quad (4)$$



Такая же оценка имеет место и для $|H(x + iy - a + i\theta)|$. Но тогда вернемся к уравнению (1). Если область G находится в полосе ширины $2y_0$, то при больших x получим оценку для части этого уравнения

$$(x + iy + a + i\theta) H(x + iy - a + i\theta) < \left(\frac{\pi}{K} \right)^{(y_2 + y)/2} e^{-(x-a)\pi} M_0 x^m.$$



$$\text{Получим тогда } J = \int \frac{d\omega}{\omega H(x + iy + a + i\theta; \chi) H(x + iy - a + i\theta; \bar{\chi})}.$$

Из (1) следует, что подынтегральное выражение есть $dt > 0$, т. к. время t по кривой уравнения (1) меняется в одном направлении. Мы выбрали направление так, что $dt > 0$. Значит, J есть время пробега куска l интегральной кривой, рис.5 и доказано выше, ограничено числом K для любой дуги l . Значит, подынтегральное dt можно заменить на его модуль, т. е.

$$\left| \frac{d\omega}{H(x + iy + a + i\theta; \chi) H(x + iy - a + i\theta; \bar{\chi})} \right| =$$

$$J = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{|\omega H(x + iy + a + i\theta; \chi) H(x + iy - a + i\theta; \bar{\chi})|}.$$

Распространим интегрирование только на те части кривой 1, на которых $dx > 0$. Пусть они составляют сумму Σ . Поскольку $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$, то на этих частях $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} > dx$ и мы получим оценку

$$J > \int_{\Sigma} \frac{d\omega}{|\omega H(x + iy + a + i\theta; \chi) H(x + iy - a + i\theta; \bar{\chi})|} > \int_1^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{-(\frac{1}{2} + |\gamma|)} e^{(\gamma - a)x} \frac{dx}{|\omega| M_0 x^m}$$

в силу неравенства (4) при $x > x_0$, где $x_0 > 0$ некоторое число. Если $x > x_0$ достаточно велик, то суммарный интервал Σ изменения x велик и потому последний интеграл расходится. Мы пришли к противоречию. Значит, область G выйдет из полосы $-y_0 \leq y \leq y_0$ и уйдет либо вверх либо вниз, оставаясь между интегральными кривыми либо l_1 и l_2 либо l_1^* и l_2^* .

Пусть, например, область G ушла вниз между l_1^* и l_2^* , которые имеют, как доказано выше, асимптотическое направление оси OY . Тогда будет картина расположения интегральных кривых, рис. 6. в силу доказанной выше симметрии интегральных кривых уравнения (1). По сказанному выше, предположение, что функция $H(\omega)$ имеет существенно комплексный корень $a - i\gamma$ влечет за собой появление точки покоя $i(-\gamma - \theta)$ уравнения (1). Область G изображена на рис. 6 вместе с симметричной с ней относительно OY областью. Точка покоя O , вообще говоря, может быть мультиполюс, если она — корень правой части уравнения (1) кратности $k \geq 2$, т. е. когда она одновременно является корнем функции

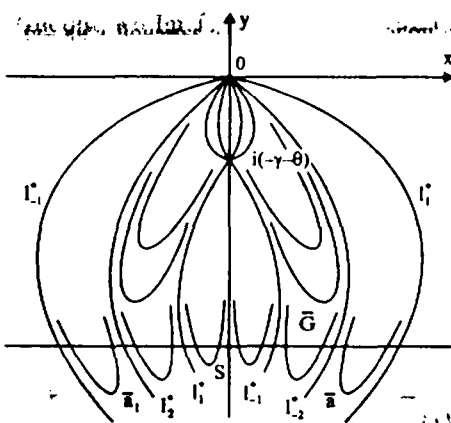


Рис. 6.

Однако, параметр θ можно всегда выбрать так, что $\omega = 0$ не будет корнем этой функции, т. к. при $\omega = 0$ имеем $H(-a + i\theta) \neq 0$. Значит, $\omega = 0$ — простой корень правой части уравнения (1). Значит, $\omega = 0$ — узел. Значит, вдоль кривой l_1^* параметр $\mu \neq 0$, а вдоль l_1^* , в силу ее симметрии с l_1^* , μ имеет противоположный знак. Поскольку l_1^* пересекает прямую $y = -y_0$, то в силу специфики кривых a и a_1 , каждая такая кривая одним концом касается кривой l_1^* , а другим соседних кривых типа l_k^* и, в частности, оси OY . Значит, на всех кривых типа l_1^* и, в частности, на осевой кривой — оси OY справа будет одно и то же значение параметра μ , а на всех левых кривых типа l_1^* параметр равен $-\mu$. Значит, в точке S , рис. 6, равно как и на всей нижней полуоси OY , будет скачок параметра μ , равный 2μ , отличный от нуля. Однако, это противоречит установленному в лемме п.3 отсутствию скачка параметра μ на интегральных кривых уравнения (1), в том числе и на интегральной кривой — оси OY .

В итоге, если предположить, что нетривиальные корни функции $H(\omega)$ не лежат на вещественной оси, т. е. если существует комплексный корень $a \pm i\gamma$, $a > 0$, $\gamma > 0$, то будет существовать точка покоя $(0, -i(\gamma + \theta))$ уравнения (1), на которой и «держится» вся гипотетическая

картина интегральных кривых уравнения (1), рис.6. Однако, эта гипотетическая картина внутренне противоречива, т. к. противоречит п.3 леммы. Значит, предположение о существовании нуля $a \pm i\gamma$, $a > 0$, $\gamma > 0$ функции $H(\omega)$ приводит к противоречию. Значит, все корни функции $H(\omega)$ вещественны. Теорема доказана.

Замечание 1. Мы рассмотрели выше случай, когда характер $\chi(n, K)$ был первообразным комплексным. Если же $\chi(n, K)$ – вещественный первообразный характер, то следует вместо уравнения (1) рассмотреть более простое уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \omega \xi\left(\frac{1}{2} + i\omega - \theta + ia; \chi\right) \xi\left(\frac{1}{2} + i\omega - \theta - ia; \chi\right) \quad (5)$$

Формулировка леммы и ее доказательство остаются без изменений, а потому без изменения остается и доказательство основной теоремы. Значит, если L-функция Дирихле $L(s; \chi)$ отвечает вещественному первообразному характеру, то все корни этой функции, лежащие в критической полосе, расположены на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, где $s = \sigma + it$. Положим $a = 0$. Тогда дословно проведя доказательство, придем к выводу, что у L-функций Дирихле $L(s; \chi)$, отвечающих первообразному характеру χ , не существует вещественных нетривиальных корней $\omega = \sigma$, $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$.

Замечание 2. Обратимся теперь к дзета-функции Римана. Отвечающий ей характер $\chi(n, K) = 1$ для любого n и потому дзета-функция должна быть рассмотрена отдельно. В последнее время мне удалось существенно сократить мое доказательство в [1]. В настоящее время оно готовится к опубликованию.

Жданов Н.И. Проблема Римана о распределении корней дзета-функции. – Львов: Изд-во Львовского университета, 1970. – 170 с.

Жданов Н.Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 202 с.