УДК 517.9

А. В. Арсирий
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

Благодарность д-ру физ.-мат. наук, проф. Плотникову Виктору Александровичу и канд. физ.-мат. наук, доц. Кичмаренко Ольге Дмитриевне

Арсірій А. В. Розв'язання задачі оптимального керування, яка описується диференційним рівнянням із похідною Хукухари. У статті розглядається задача оптимального керування, у якій стан системи описується многозначним відображенням. Якщо апроксимувати функцію керування кусочно-постійною функцією, то задачу знаходження оптимального керування можна звести до задачі багатомірної оптимізації.

Ключові слова: оптимальне керування, керовані диференціальні рівняння, диференційні рівняння з похідною Хукухари.

Арсирий А. В. Решение задачи оптимального управления процессом, описываемым дифференциальным уравнением с производной Хукухары.
В данной статье рассматривается задача оптимального управления с терминальным критерием качества, в которой состояние системы описывается многозначным отображением. Если аппроксимировать функцию управления кусочно-постоянной функцией, то задачу нахождения оптимального управления можно свести к задаче многомерной оптимизации.

Ключевые слова: оптимальное управление, управляемые дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с производной Хукухары.

Arsiry A. V. The decision of a problem of the optimal control described by the differential equation with the Hukuhara derivative. In the given article we consider the optimal control problem in which the condition of system is described by multiple-valued display. But if we assume, that function of control is set discretely the problem of a finding of optimum control can be reduced to a problem of multivariate optimization.

Key words: optimal control, controlled differential equations, differential equations with Hukuhara derivative.

Введение. В последнее время широкое развитие получила теория многозначных отображений. Так, в [7] M. Hukuhara ввел производную и интеграл от многозначных отображений и исследовал их связь между собой. Впоследствии в работах F. F. De Blasi и F. Iervolino [8] были рассмотрены дифференциальные уравнения с производной Хукухары. Затем были введены различные определения решений этих уравнений и доказаны теоремы их существования [9, 12]. M. Kisielewicz [13] и А. В. Плотников [1] рассмотрели возможность применения некоторых схем усреднения для такого типа уравнений.

Уравнения с производной Хукухары были использованы А. А. Толстоноговым [6] при изучении некоторых свойств "интегральной воронки" дифференциального включения в Банаховом пространстве, а O. Kaleva [10, 11] использовал их при исследовании уравнений с нечеткими начальными условиями.

Данная статья посвящена проблеме нахождения оптимального управления в задаче с терминальным критерием качества, где управляемый процесс описывается дифференциальным уравнением с производной Хукухары. Рассматривается возможность решения данной задачи путем сведения ее к задаче математического программирования.

Основные результаты.

1. Постановка задачи.

Вначале введем некоторые необходимые нам в дальнейшем определения.

Пусть $Conv(R^n)$ пространства непустых компактных и выпуклых подмножеств Евклидового пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = min\{r \geq 0 | A \subset S_r(B), B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in Conv(R^n)$.

Определение 1. [7] *Пусть $A, B \in Conv(R^n)$. Если существует множество $C \in Conv(R^n)$ такое, что $A = B + C$, то C называется разностью Хукухары множеств A и B и обозначается $A -^h B$.*

Определение 2. [7] *Пусть I — интервал действительных чисел. Многозначное отображение $F(\cdot) : I \to Conv(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t_0 \in I$, если существует $D_h F(t_0) \in Conv(R^n)$ такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{F(t_0 + \Delta t) -^h F(t_0)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{F(t_0) -^h F(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

существуют и равны $D_h F(t_0)$.

Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением с производной Хукухары вида

$$D_h X(t) = AX(t) + u(t) + F, \quad X(0) = X_0, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $X(\cdot) : [0,T] \to Conv(R^N)$ — многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t)$ — производная Хукухары, $t \in [0,T]$; A — постоянная матрица $(N \times N)$; $F \in Conv(R^N)$ — отклонение системы; $u(t) \in U \in Conv(R^N)$ — кусочно-постоянные управления.

Пусть качество функционирования системы (1) оценивается следующим критерием:

$$I(u) = \Phi(X(T,u)), \tag{2}$$

где $\Phi(\cdot) : Conv(R^N) \to R^1$.

Критерий многозначный (значениями являются отрезки), поэтому оптимальное управление мы будем понимать следующим образом.

Определение 3. [4] *Управление $u^* \in U$ назовем максиминным для задачи оптимального управления (1),(2), если для любого управления $u \in U$ справедливо неравенство*

$$mI(u) \leq mI(u^*),$$

где $mA = min\{a|a \in Conv(R^1)\}$.

Управление $u^* \in U$ назовем максимаксным, если для любого управления $u \in$ $\in U$ справедливо неравенство

$$mI(u) \leq mI(u^*),$$

где $mA = max\{a|a \in Conv(R^1)\}$.

2. Алгоритм решения задачи.

Приведем алгоритм решения данной задачи оптимального управления.

Разобъем отрезок $[0, L]$ на n частей:

$$t_0 = 0, t_n = T,\ \Delta t = T/n,\ t_i = t_0 + i\Delta t,\ i = 1..n. \tag{3}$$

Пусть на каждом из промежутков $[t_{i-1}, t_i]$ управление постоянно, то есть

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \ldots + u_n(t), \tag{4}$$

где

$$u_i(t) = \begin{cases} w_i, & t \in [t_{i-1}, t_i], w_i \in U, \\ 0, & t \notin [t_{i-1}, t_i]. \end{cases} \tag{5}$$

Будем решать задачу Коши (1). Перепишем ее в виде интегрального уравнения.

$$X(t) = X^0 + \int\limits_0^t [AX(s) + u(s) + F]\, ds. \tag{6}$$

На каждом из промежутков (3) получим

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} [AX(s) + u(s) + F]ds, \quad X(t_0) = X^0. \tag{7}$$

Воспользуемся формулой численного интегрирования

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \Delta t[AX(t_{i-1}) + u(t_{i-1}) + F], \quad X(t_0) = X^0. \tag{8}$$

Учтя (4) и (5) получим

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \Delta t[AX(t_{i-1}) + w_i + F], \quad X(t_0) = X^0. \tag{9}$$

Возьмем опорную функцию от обеих частей уравнения

$$C(X(t_i), \Psi) = C(X(t_{i-1}), \Psi) + \Delta t[C(X(t_{i-1}), A^T\Psi) + (w_i, \Psi) + C(F, \Psi)]. \tag{10}$$

Таким образом, получили расчетную формулу для интегрирования дифференциального уравнения с производной Хукухары. Значение $C(X(t_{i-1}), A^T\Psi)$ будем искать следующим образом:

$$C(X(t_{i-1}), A^T\Psi) = C(X(t_{i-1}), \frac{A^T\Psi}{\|A^T\Psi\|}) \left\| A^T\Psi \right\|. \tag{11}$$

Вектор Ψ меняется, поэтому найденное значение $C(X(t_{i-1}), A^T\Psi)$ следует суммировать со значениями $C(X(t_{i-1}), \Psi)$, $C(F, \Psi)$ и (w_i, Ψ), которым соответствует такое же значение Ψ.

Таким образом, решать задачу (1) в явном виде довольно трудно, т. к. решением является многозначное отображение, но это оказывается вполне выполнимым, если иметь дело не с самим множеством, а с его опорной функцией.

Разобьем круг $[0, 2\pi]$ на m частей и получим m значений угла γ. Вектор Ψ определим следующим образом:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \Psi_1 = \cos\gamma, \\ \Psi_2 = \sin\gamma. \end{array} \tag{12}$$

Затабулируем для каждого значения угла γ значение опорной функции начального множества $X^0(C(X^0, \Psi))$ и значения опорной функции множества F $(C(F, \Psi))$. В каждый момент времени t_i мы получаем m значений опорной функции и m значений опорного вектора Ψ, которые определяют m точек на границе множества $X(t_i)$. Однако сами точки мы получить не сможем, т. к. опорная функция определяет целую опорную гиперплоскость, и неизвестно, какая именно точка этой гиперплоскости является точкой границы множества $X(t_i)$. Но мы сможем построить приближение множества $X(t_i)$ в виде описанного многоугольника, вершинами которого являются точки пересечения гиперплоскостей, определяемых опорными функциями и опорными векторами. Для нахождения каждой j-ой вершины многоугольника для множества, образуемого отображением $X(t_i)$ в конкретный момент времени, будем решать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^1\Psi_1^j + x_1^2\Psi_2^j = C(X(t_i), \Psi^j), \\ x_1^1\Psi_1^{j+1} + x_1^2\Psi_2^{j+1} = C(X(t_i), \Psi^{j+1}). \end{cases} \tag{13}$$

После первого шага мы получим выражения для значений опорной функции $C(X(t_1), \psi)$ и точек границы множества $X(t_1)$, зависящие от w_1:

$$C(X(t_1, w_1), \psi) : \left\{ \begin{array}{l} C(X(t_1, w_1), \psi^1) \\ C(X(t_1, w_1), \psi^2) \\ \dots \\ C(X(t_1, w_1), \psi^m) \end{array} \right\},$$

$$X(t_1, w_1) : \left\{ \begin{array}{l} X_{(1)}^1(t_1, w_1), X_{(1)}^2(t_1, w_1) \dots X_{(1)}^N(t_1, w_1) \\ X_{(2)}^1(t_1, w_1), X_{(2)}^2(t_1, w_1) \dots X_{(2)}^N(t_1, w_1) \\ \dots \\ X_{(m)}^1(t_1, w_1), X_{(m)}^2(t_1, w_1) \dots X_{(m)}^N(t_1, w_1) \end{array} \right\},$$

после второго шага — зависящие от w_1 и w_2:

$$C(X(t_2, w_1, w_2), \psi) : \left\{ \begin{array}{l} C(X(t_2, w_1, w_2), \psi^1) \\ C(X(t_2, w_1, w_2), \psi^2) \\ \dots \\ C(X(t_2, w_1, w_2), \psi^m) \end{array} \right\},$$

$$X(t_2, w_1, w_2) : \left\{ \begin{array}{l} X^1_{(1)}(t_2, w_1, w_2), X^2_{(1)}(t_2, w_1, w_2) \dots X^N_{(1)}(t_2, w_1, w_2) \\ X^1_{(2)}(t_2, w_1, w_2), X^2_{(2)}(t_2, w_1, w_2) \dots X^N_{(2)}(t_2, w_1, w_2) \\ \dots \\ X^1_{(m)}(t_2, w_1, w_2), X^2_{(m)}(t_2, w_1, w_2) \dots X^N_{(m)}(t_2, w_1, w_2) \end{array} \right\}$$

и т. д. И наконец, после всего интегрирования мы получим выражения для $C(X(T), \psi)$ и для $X(T)$, зависящие соответственно от $w_1, \dots, w_n$.

$$C(X(T, w_1, \dots, w_n), \psi) : \left\{ \begin{array}{l} C(X(T, w_1, \dots, w_n), \psi^1) \\ C(X(T, w_1, \dots, w_n), \psi^2) \\ \dots \\ C(X(T, w_1, \dots, w_n), \psi^m) \end{array} \right\},$$

$$X(T, w_1, \dots, w_n) : \left\{ \begin{array}{l} X^1_{(1)}(T, w_1, \dots, w_n), \dots X^N_{(1)}(T, w_1, \dots, w_n) \\ X^1_{(2)}(T, w_1, \dots, w_n), \dots X^N_{(2)}(T, w_1, \dots, w_n) \\ \dots \\ X^1_{(m)}(T, w_1, \dots, w_n), \dots X^N_{(m)}(T, w_1, \dots, w_n) \end{array} \right\}.$$

И теперь, чтобы найти оптимальное управление, понимаемое как максиминное или как максимаксное, которое будет гарантировать нам максимум критерия качества, нам следует решить задачу математического программирования.

$$I(w_1, w_2, \dots, w_n) = \Phi(X(T, w_1, w_2, \dots, w_n)) \to max, \tag{14}$$

$$\Omega : w_1, \dots, w_n \in U. \tag{15}$$

Если мы ищем максиминное управление, то сначала мы решаем m задач условной минимизации функций $n \times N$ переменных (так как сами вектора $w_1, \dots,$ w_n размерности N) на замкнутом множестве Ω.

$$\begin{array}{l} \Phi(X_{(1)}(T, w_1, w_2, \dots, w_n)) \to min, \\ \qquad w_1 \in U, \\ \qquad w_2 \in U, \\ \qquad \dots \\ \qquad w_n \in U, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Phi(X_{(2)}(T, w_1, w_2, \dots, w_n)) \to min, \\ \qquad w_1 \in U, \\ \qquad w_2 \in U, \\ \qquad \dots \\ \qquad w_n \in U, \end{array}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi(X_{(m)}(T, w_1, w_2, \dots, w_n)) \to min,\\
&\quad w_1 \in U,\\
&\quad w_2 \in U,\\
&\quad \dots\\
&\quad w_n \in U.
\end{aligned}
$$

После чего мы получим m значений целевой функции и m значений управления $(w_1, w_2, \dots, w_n)$.

Теперь мы находим максимальное значение из полученных значений целевых функций, и управление, соответствующее этому максимальному значению целевой функции, и будет искомым максиминным управлением.

Если же мы будем искать максимаксное управление, то m задач условной минимизации функций на замкнутом множестве Ω превратятся в m задач условной максимизации функций на замкнутом множестве Ω. В конце точно так же, как и в случае максиминного управления, следует найти максимальное значение из полученных значений целевых функций, и управление, соответствующее этому максимальному значению целевой функции, и будет искомым максимаксным управлением.

Точность найденного управления зависит от разбиения промежутка времени. То есть мы будем увеличивать число точек разбиения промежутка времени до тех пор, пока не достигнем нужной нам точности нахождения оптимального управления.

Будем считать, что оптимальное управление найдено с точностью ε, если

$$\|u(k) - u(k-1)\| \leqslant \varepsilon, \tag{16}$$

где k, $k-1$ — последняя и предпоследняя итерации алгоритма.

Наконец, мы сможем получить численное выражение для решения дифференциального уравнения с производной Хукухары, подставив в найденные выше выражения для $X(t_i)$, зависящие от $w_1, \dots, w_i$, полученные оптимальные значения управления.

Исходя из приведенного выше, мы можем привести формализованную запись алгоритма. Итак, *алгоритм решения задачи оптимального управления процессом, описываемым дифференциальным уравнением с производной Хукухары (1)-(2).*

ШАГ 1. Задаем разбиение промежутка времени по формуле (3) на n частей.

ШАГ 2. Обозначаем w_i управление на каждом из промежутков времени $[t_{i-1}, t_i]$ по формулам (4),(5).

ШАГ 3. Решаем задачу Коши (1) интегрированием при помощи формулы (10), используя аппарат опорных функций для m значений опорного вектора Ψ, и по формуле (13) восстанавливаем m значений точек границы многозначного отображения Y в каждый из моментов времени.

ШАГ 4. Подставляем найденное значение Y в выражение для критерия качества (2) и получим задачу математического программирования (14)-(15). Вернее, мы получим m задач математического программирования, которые могут быть решены любым из существующих методов. Если мы понимаем оптимальное управление как максиминное, то это будут m задач условной минимизации функций на замкнутом множестве Ω, если как максимаксное — то это будут m задач условной максимизации функций на замкнутом множестве Ω.

ШАГ 5. Находим оптимальное (соответственно, максиминное или максимаксное) управление — это то управление, которое привело к максимальной из полученных m целевых функций.

ШАГ 6. Если это первая итерация, то повторяем шаги с 1 по 5 и затем переходим к шагу 7. В противном случае сразу же переходим к шагу 7.

ШАГ 7. Если выполняется неравенство (16), то найденное на последней итерации управление является оптимальным. Иначе мы переходим к шагу 1 и задаем разбиение промежутка времени на $n/2$ частей.

Заключение. Для задачи оптимального управления процессом, описываемым дифференциальным уравнением с производной Хукухары, разработан численно-ассимптотический метод решения, основанный на сведении задачи управления к задаче математического программирования при замене исходной функции управления на приближенную кусочно-постоянную функцию.

1. **Болтянский В. Г.** Оптимальное управление дискретными системами [текст] / В. Г. Болтянский. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
2. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач [текст] / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
3. **Плотников А. В.** Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью: Диссертация доктора физ.-мат. наук: 01.01.02, 01.01.09 [текст] / А. В. Плотников. – Одесса, 1994.
4. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
5. **Пропой А. И.** Элементы теории оптимальных дискретных процессов [текст] / А. И. Пропой. – М.: Наука, 1973. – 368 с.
6. **Толстоногов А. А.** Дифференциальные включения в Банаховом пространстве [текст] / А. А. Толстоногов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 297 с.
7. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorem for differenequation with compact convex valued solution [text] / A. J. Brandao Lopes Pinto, F. S. De Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat. Ital. – 1970. – Vol. 4. – P. 534–538.
8. **De Blasi F. S.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso [text] / F. S. De Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat. Ital. – 1969. – Vol. 2. – P. 491–501.
9. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convex [text] / M. Hukuhara // Functial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 205–223.
10. **Kaleva O.** Fuzzy differential equations [text] / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – Vol. 24. – №3. – P. 301–317.
11. **Kaleva O.** The Cauchy problem for fuzzy differential equations [text] / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. – 1990. – Vol. 35. – P. 389–396.

12. **Kisielewicz M.** Description of a class of differential equations with set — valued solutions [text] / M. Kisielewicz // Lincei - Rend. Sc. fis. mat. e nat. – 1975. – Vol 58. – P. 158–162.
13. **Kisielewicz M.** Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions [text] / M. Kisielewicz // Rend. Mat. – 1976. – Vol 9. – №3. – P. 397–408.