Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

А. А. Кореновский

ОЦЕНКИ КОЛЕБАНИЙ СОПРЯЖЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРДИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАЛЬДЕРОНА

§1. Определения и формулировки основных результатов

Рассматриваются неотрицательные, локально суммируемые на $\mathbf{R}_+ \equiv [0,\infty)$ функции f, для которых сходится интеграл $\int_1^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u}$. Оператор Харди, сопряженный оператор Харди и оператор Кальдерона определяются равенствами

$$\mathcal{P}f(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(u)\,du,\ \ t>0,$$

$$\mathcal{P}^*f(t) = \int\limits_t^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u},\ \ t>0,$$

$$\mathcal{S}f(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(u)\,du + \int\limits_t^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u} = \mathcal{P}f(t) + \mathcal{P}^*f(t), \quad t>0,$$

соответственно, ([1, 2]). Далее, нижнее и среднее колебания функции f на интервале $I \subset \mathbf{R}_+$ определяются соответственно равенствами

$$L(f;I) = \frac{1}{|I|}\int\limits_I f(u)\,du - \operatorname*{ess\,inf}_{u\in I} f(u)$$

и

$$\Omega(f;I) = \frac{1}{|I|}\int\limits_I |f(u) - f_I|\,du,$$

Работа частично поддержана ДФФД, грант No. Ф7/329-2001.

где $f_I = |I|^{-1}\int_I f(u)\,du$, а через $|E|$ обозначается лебегова мера множества E. Как обычно, полагаем

$$\|f\|_{BLO} = \sup_I L(f;I),$$

$$\|f\|_{BMO} = \sup_I \Omega(f;I),$$

где верхние грани берутся по всем интервалам $I \subset \mathbf{R}_+$. Класс BMO функций f с ограниченным средним колебанием, т.е. таких, что $\|f\|_{BMO} < \infty$, определен в работе [3]. Аналогично определяется класс BLO функций с ограниченным нижним колебанием (см. [4]). Легко видеть, что $BLO \subset BMO$, а для невозрастающих на $\mathbf{R}_+$ функций классы BMO и BLO совпадают.

В дальнейшем через χ_E обозначаем характеристическую функцию множества E, $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbf{R}_+} f(t)$.

Точная оценка сверху BMO-нормы преобразования Харди содержится, например, в [5]. Там же имеется и оценка снизу для невозрастающей функции, а уточнена эта оценка в [6]. Именно, в неравенстве

$$A\|f\|_{BMO} \leqslant \|\mathcal{P}f\|_{BMO} \leqslant \|f\|_{BMO}, \tag{1}$$

где f не возрастает на $\mathbf{R}_+$, постоянную 1 справа нельзя уменьшить, а вопрос о наибольшем значении постоянной A слева, насколько нам известно, открыт. Неулучшаемое в смысле констант неравенство

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\|f\|_{BLO} \leqslant \|\mathcal{P}f\|_{BLO} \leqslant \|f\|_{BLO}$$

для невозрастающей функции f получено в [6].

Легко видеть, что для существенно ограниченной функции f сопряженное преобразование Харди $\mathcal{P}^*f$ принадлежит BLO, а значит и BMO. Однако, условие существенной ограниченности функции f не является необходимым. Точнее, справедлива

Теорема 1. *Пусть неотрицательная, локально суммируемая на $\mathbf{R}_+$ функция f такова, что $\int_1^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u} < \infty$. Тогда*

$$\|\mathcal{P}^*f\|_{BLO} = \|\mathcal{P}f\|_\infty. \tag{2}$$

Один из основных результатов данной заметки состоит в нахождении точных оценок BMO-нормы сопряженного преобразования Харди.

Теорема 2. *Пусть неотрицательная, локально суммируемая на* $\mathbf{R}_+$ *функция* f *такова, что* $\int_1^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u} < \infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\max\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\lim_{t\to 0+}\operatorname*{ess\,inf}_{u\in(0,t)} f(u),\ \frac{1}{2}\|\mathcal{P}f\|_\infty\right) \leqslant \\ \leqslant \|\mathcal{P}^* f\|_{BMO} \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}\|\mathcal{P}f\|_\infty,\end{aligned} \tag{3}$$

причем постоянные $\frac{2}{\mathrm{e}}$ *слева и справа и* $\frac{1}{2}$ *слева нельзя улучшить.*

Доказательства теорем 1 и 2 приводятся в §2.

Для преобразования Кальдерона аналог теоремы 1 выглядит так.

Теорема 3. *Пусть неотрицательная, локально суммируемая на* $\mathbf{R}_+$ *функция* f *такова, что* $\int_1^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u} < \infty$. *Тогда*

$$\|\mathcal{S}f\|_{BLO} = \|\mathcal{P}(\mathcal{P}f)\|_\infty. \tag{4}$$

Другой основной результат этой работы заключается в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть неотрицательная, локально суммируемая на* $\mathbf{R}_+$ *функция* f *такова, что* $\int_1^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u} < \infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\max\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\lim_{t\to 0+}\operatorname*{ess\,inf}_{u\in(0,t)} f(u),\ \frac{1}{2}\|\mathcal{P}(\mathcal{P}f)\|_\infty\right) \leqslant \\ \leqslant \|\mathcal{S}f\|_{BMO} \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}\|\mathcal{P}(\mathcal{P}f)\|_\infty,\end{aligned} \tag{5}$$

причем постоянные $\frac{2}{\mathrm{e}}$ *слева и справа нельзя улучшить.*

Теоремы 3 и 4 также доказаны в §2.

Замечание 1. В левых частях неравенств (3) и (5) вместо ess inf нельзя поставить ess sup. Действительно, для функции

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1}\chi_{[2^{-k}-2^{-2k-2},\,2^{-k}]}(t), \qquad t > 0,$$

очевидно, $\lim\limits_{t\to 0+}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{u\in(0,t)} f(u) = +\infty$ и $\|\mathcal{P}(\mathcal{P}f)\|_\infty \leqslant \|\mathcal{P}f\|_\infty = 1$.

Замечание 2. Нам неизвестно, является ли постоянная $\frac{1}{2}$ в левой части неравенства (5) наилучшей.

Замечание 3. Ясно, что $\|\mathcal{P}f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, но условие $\|f\|_\infty < \infty$ не является необходимым для ограниченности $\mathcal{P}f$. С другой стороны, из очевидного неравенства $u\mathcal{P}f(u) \geqslant t\mathcal{P}f(t)$, $u \geqslant t > 0$, следует

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}f)(2t) \geqslant \frac{1}{2t}\int\limits_t^{2t} \mathcal{P}f(u)\,du \geqslant \frac{\ln 2}{2}\mathcal{P}f(t), \quad t > 0.$$

Это означает, что условия $\|\mathcal{P}f\|_\infty < \infty$ и $\|\mathcal{P}(\mathcal{P}f)\|_\infty < \infty$ равносильны. Таким образом, теоремы 1–4 показывают, что необходимым и достаточным условием принадлежности $\mathcal{P}^*f$ и $\mathcal{S}f$ классам BMO и BLO является ограниченность функции $\mathcal{P}f$, но не существенная ограниченность функции f.

Из теорем 2 и 4 мгновенно вытекает

Следствие 1. *Если в теоремах 2 и 4 дополнительно предположить, что функция f не возрастает на $\mathbf{R}_+$, то*

$$\|\mathcal{P}^*f\|_{BMO} = \|\mathcal{S}f\|_{BMO} = \frac{2}{\mathrm{e}}\lim_{t\to 0+} f(t) = \frac{2}{\mathrm{e}}\|\mathcal{P}f\|_\infty.$$

Далее, если f существенно ограничена на $\mathbf{R}_+$, то $\|\mathcal{P}f\|_\infty<\infty$. Тогда, как следует из леммы 5 §2, $\|\mathcal{P}f\|_\infty \geqslant 2\|\mathcal{P}f\|_{BMO}$. Это неравенство вместе с (1) и следствием 1 приводит к следующему утверждению.

Следствие 2. *Пусть неотрицательная, ограниченная на $\mathbf{R}_+$, невозрастающая функция f такова, что $\int_1^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u} < \infty$. Тогда*

$$\|f\|_{BMO} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4A}\|\mathcal{P}^*f\|_{BMO}, \tag{6}$$

$$\|f\|_{BMO} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4A}\|\mathcal{S}f\|_{BMO}, \tag{7}$$

где A – постоянная из левой части неравенства (1).

Замечание 4. Как следует из (3) и (5), без предположения ограниченности функции f неравенства (6) и (7) теряют силу, даже если постоянные в их правых частях заменить сколь угодно большими. Аналогично, условие монотонности функции f в следствии 2 также нельзя отбросить. В этом легко убедиться на примере функции $f(t) = \chi_{[1-\varepsilon,1]}(t)$, $t \geqslant 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$, для которой $\|f\|_{BMO} = \frac{1}{2}$, а $\max(\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO}, \|\mathcal{S}f\|_{BMO}) \leqslant \|\mathcal{S}f\|_\infty \leqslant \varepsilon + \ln\frac{1}{1-\varepsilon}$.

Следующая теорема показывает, что обратные по отношению к (6) и (7) оценки невозможны, даже если предполагать монотонность и ограниченность функции f.

Теорема 5. *Для любой положительной постоянной c найдется ограниченная, невозрастающая на $\mathbf{R}_+$, неотрицательная функция f, такая, что $\int_1^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u} < \infty$ и*

$$\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO} \geqslant c\|f\|_{BMO}, \tag{8}$$

$$\|\mathcal{S}f\|_{BMO} \geqslant c\|f\|_{BMO}. \tag{9}$$

Доказательство этой теоремы дано в §2.

Замечание 5. Так как для невозрастающей функции отношение ее BMO- и BLO-норм отделено от нуля и ограничено (см. лемму 3 в §2), то аналоги неравенств (6)–(9) для норм в BLO также справедливы (с другими постоянными в первых двух неравенствах).

§2. Леммы и доказательства теорем

Лемма 1. *Если функция f не возрастает на $\mathbf{R}_+$, то*

$$\|f\|_{BLO} = \sup_{t>0} L(f;(0,t)) = \sup_{t>0}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du - f(t)\right),$$

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{t>0} \Omega(f;(0,t)).$$

Доказательство см., например, в [7, 6].

Лемма 2 (Неравенство Джона–Ниренберга). *Пусть $\varphi \in BMO$. Тогда для любого интервала $I \subset \mathbf{R}_+$ справедливо неравенство*

$$|\{x \in I : |\varphi(x) - \varphi_I| > \lambda\}| \leqslant B \cdot |I| \cdot \exp\left(-\frac{2}{\mathrm{e}}\cdot\frac{\lambda}{\|\varphi\|_{BMO}}\right),\ \lambda > 0, \tag{10}$$

где B – абсолютная постоянная.

С постоянной $\frac{1}{2\mathrm{e}}$ вместо $\frac{2}{\mathrm{e}}$ в показателе экспоненты такое неравенство было доказано в [3]. С точным показателем $\frac{2}{\mathrm{e}}$ неравенство (10) получено в [8, 9].

Лемма 3. *Если функция f не возрастает на $\mathbf{R}_+$, то*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BLO} \leqslant \|f\|_{BMO} \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}\|f\|_{BLO},$$

причем постоянные $\frac{1}{2}$ слева и $\frac{2}{\mathrm{e}}$ справа нельзя улучшить.

Эта лемма доказана в [6].

Лемма 4. *Для функции $f_0(t) = \left(1+\ln\frac{1}{t}\right)\chi_{[0,1]}(t)+\frac{1}{t}\chi_{(1,+\infty)}(t)$, $t>0$, справедливо равенство*

$$\|f_0\|_{BMO} = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Доказательство. В силу леммы 1, достаточно показать, что $\sup\limits_{t>0}\Omega(f_0;(0,t)) = \frac{2}{\mathrm{e}}$.

Если $0<t\leqslant 1$, то $(f_0)_{(0,t)} = 2+\ln\frac{1}{t}$ и

$$\Omega(f_0;(0,t)) = \frac{2}{t}\int\limits_0^{t/\mathrm{e}}\left(\ln\frac{1}{u}-\ln\frac{\mathrm{e}}{t}\right)du = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Поэтому остается показать, что $\Omega(f_0;(0,t)) \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}$ при $t>1$.

Предположим сначала, что $1<t\leqslant t_0$, где $t_0>\mathrm{e}$ – корень уравнения $\ln x = x-2$. Это означает, что $(f_0)_{(0,t)} \geqslant 1$. Так как $1+\ln\frac{1}{u}\leqslant\frac{1}{u}$, $u\geqslant 1$, то найдется такое t_1, $1\leqslant t_1<t$, что

$$(f_0)_{(0,t)} = \frac{1}{t_1}\int\limits_0^{t_1}\left(1+\ln\frac{1}{u}\right)du \equiv g_{(0,t_1)},$$

где $g(u) = 1+\ln\frac{1}{u}$, $u>0$. Тогда получим

$$\Omega(f_0;(0,t)) = \frac{2}{t}\int\limits_{\left\{u:1+\ln\frac{1}{u}>(f_0)_{(0,t)}\right\}}\left(1+\ln\frac{1}{u}-(f_0)_{(0,t)}\right)du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{t_1}\int\limits_{\left\{u:1+\ln\frac{1}{u}>(f_0)_{(0,t)}\right\}}\left(1+\ln\frac{1}{u}-g_{(0,t_1)}\right)du = \Omega(g;(0,t_1)) = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Осталось рассмотреть случай $t > t_0$, т.е. когда $(f_0)_{(0,t)} = \frac{1}{t}(2+\ln t) < 1$. В этом случае имеем

$$\Omega(f_0;(0,t)) = \frac{2}{t}\int\limits_0^{t_2}\left(f_0(u) - (f_0)_{(0,t)}\right)\,du =$$

$$= 2\cdot\frac{1+\ln t - \ln(2+\ln t)}{t},$$

где t_2 определяется из условия $\frac{1}{t_2} = (f_0)_{(0,t)}$, т.е. $t_2 = \frac{t}{2+\ln t}$. Обозначим $\psi(t) = \frac{1+\ln t-\ln(2+\ln t)}{t}$, $t \geqslant t_0$. Так как $t_0 > \mathrm{e}$, то $\psi(t_0) = \frac{1}{t_0} < \frac{1}{\mathrm{e}}$. Легко также убедиться в том, что производная $\psi'(t)$ строго отрицательна при $t \geqslant t_0$. Поэтому $\psi(t) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$, $t \geqslant t_0$, и тем самым завершается доказательство леммы.

Следующая простая лемма была использована в §1 при доказательстве следствия 2.

Лемма 5. *Пусть функция η неотрицательна и ограничена на $\mathbf{R}_+$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|\eta\|_{BMO} \leqslant \frac{1}{2}\|\eta\|_\infty.$$

Доказательство. Обозначим $\zeta(t) = \eta(t) - \frac{1}{2}\|\eta\|_\infty$. Тогда, очевидно,

$$\|\zeta\|_{BMO} = \|\eta\|_{BMO},$$

$$\|\zeta\|_\infty \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbf{R}_+}|\zeta(t)| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbf{R}_+}\left|\eta(t) - \frac{1}{2}\|\eta\|_\infty\right| = \frac{1}{2}\|\eta\|_\infty.$$

Поэтому, в силу неравенства Шварца, имеем

$$\|\eta\|_{BMO} = \|\zeta\|_{BMO} = \sup_{I\subset\mathbf{R}_+}\frac{1}{|I|}\int\limits_I|\zeta(t)-\zeta_I|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{I\subset\mathbf{R}_+}\left\{\frac{1}{|I|}\int\limits_I\left(\zeta(t)-\zeta_I\right)^2\,dt\right\}^{1/2} =$$

$$= \sup_{I\subset\mathbf{R}_+}\left\{\frac{1}{|I|}\int\limits_I\zeta^2(t)\,dt - (\zeta_I)^2\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{I\subset\mathbf{R}_+}\left\{\frac{1}{|I|}\int\limits_I \zeta^2(t)\,dt\right\}^{1/2} \leqslant \|\zeta\|_\infty = \frac{1}{2}\|\eta\|_\infty.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для $t>0$ имеем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathcal{P}^*f(u)\,du - \mathcal{P}^*f(t) =$$

$$= \frac{1}{t}\int\limits_0^t \left(\int\limits_u^{+\infty} f(v)\,\frac{dv}{v} - \int\limits_t^{+\infty} f(v)\,\frac{dv}{v}\right)\,du =$$

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t\int\limits_u^t f(v)\,\frac{dv}{v}\,du = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(v)\,dv = \mathcal{P}f(t).$$

Так как f неотрицательна, то $\mathcal{P}^*f$ не возрастает на $\mathbf{R}_+$. Поэтому (2) следует из леммы 1 и полученного равенства.

Доказательство теоремы 2. Правое неравенство в (3) следует из монотонности $\mathcal{P}^*f$, леммы 3 и теоремы 1. Действительно,

$$\|\mathcal{P}^*f\|_{BMO} \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}\|\mathcal{P}^*f\|_{BLO} = \frac{2}{\mathrm{e}}\|\mathcal{P}f\|_\infty.$$

Далее, для функции $f_1(t) = \chi_{[0,1]}(t)$, $t\geqslant 0$, имеем $\mathcal{P}^*f_1(t) = \ln\frac{1}{t}\times$ $\times\chi_{[0,1]}(t)$, $t>0$, и легко подсчитать, что $\|\mathcal{P}^*f_1\|_{BMO} = \frac{2}{\mathrm{e}}$. Значит, для f_1 правое неравенство в (3) обращается в равенство, так что постоянную $\frac{2}{\mathrm{e}}$ справа в (3) нельзя уменьшить.

Докажем левое неравенство в (3). Поскольку $\mathcal{P}^*f$ не возрастает, из леммы 3 и теоремы 1 следует, что

$$\|\mathcal{P}^*f\|_{BMO} \geqslant \frac{1}{2}\|\mathcal{P}^*f\|_{BLO} = \frac{1}{2}\|\mathcal{P}f\|_\infty. \tag{11}$$

Покажем теперь, что в этом неравенстве постоянную $\frac{1}{2}$ нельзя увеличить. Пусть $0<\varepsilon<1$. Положим

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[1-\varepsilon,1]}(t), \quad t\geqslant 0.$$

Тогда

$$\|\mathcal{P}f_\varepsilon\|_\infty = 1, \quad \mathcal{P}^* f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \min\left(\ln\frac{1}{1-\varepsilon}, \ln\frac{1}{t}\right) \cdot \chi_{[0,1]}(t), \quad t > 0.$$

Легко видеть, что $\|\mathcal{P}^* f_\varepsilon\|_{BMO} \to \frac{1}{2}$ при $\varepsilon \to 0+$. Это означает, что постоянная $\frac{1}{2}$ слева в (3) точная.

Теперь докажем неравенство

$$\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO} \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}} \lim_{t\to 0+} \operatorname*{ess\,inf}_{u\in(0,t)} f(u). \tag{12}$$

Ясно, что достаточно рассматривать случай $\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO} < \infty$. Обозначим $b = \lim\limits_{t\to 0+} \operatorname*{ess\,inf}\limits_{u\in(0,t)} f(u)$. Если $b = 0$, то (12) очевидно. Пусть $b > 0$. Зафиксируем a, $0 < a < b$, и найдем такое $\varepsilon > 0$, что $f(u) > a$ для почти всех $u \in (0, \varepsilon)$. Тогда для $t < \varepsilon$ будем иметь

$$\mathcal{P}^* f(t) \geqslant \int_t^\varepsilon f(u)\,\frac{du}{u} \geqslant a \cdot \ln\frac{\varepsilon}{t},$$

так что

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{\mathcal{P}^* f(t)}{\ln\frac{\varepsilon}{t}} \geqslant a. \tag{13}$$

Воспользуемся теперь леммой 2. Для невозрастающей функции $\varphi = \mathcal{P}^* f$ и интервала $I = (0, 1)$ неравенство (10) можно переписать так:

$$\mathcal{P}^* f(t) \leqslant C + \frac{\mathrm{e}}{2}\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO}\left(\ln\frac{1}{t} + \ln B\right),$$

где

$$0 < t < t' \equiv B \cdot \exp\left(-\frac{2}{\mathrm{e}} \cdot \frac{2C}{\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO}}\right), \quad C = (\mathcal{P}^* f)_{(0,1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO} \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\mathcal{P}^* f(t) - C}{\ln\frac{1}{t} + \ln B}, \ 0 < t < t'.$$

Устремив в этом неравенстве $t \to 0+$, используя (13), получим

$$\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO} \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}} \cdot a.$$

Поскольку число a, $a < b$, произвольно, отсюда следует (12). Наконец, для рассмотренной выше функции f_1 (12) обращается в равенство, так что $\frac{2}{e}$ справа в (12) нельзя увеличить.

Левое неравенство в (3) следует из (11) и (12).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Если $0 < t < s$, то

$$\mathcal{S}f(t) - \mathcal{S}f(s) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) \int_0^t f(u)\,du + \int_t^s f(u)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{s}\right) du \geqslant 0.$$

Это означает, что $\mathcal{S}f$ не возрастает на $\mathbf{R}_+$. Поэтому (4) вытекает из леммы 1 и следующего равенства:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{S}f(u)\,du - \mathcal{S}f(t) =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{u}\int_0^u f(v)\,dv\,du - \frac{1}{t}\int_0^t f(v)\,dv + \frac{1}{t}\int_0^t \int_u^t f(v)\,\frac{dv}{v}\,du =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{u}\int_0^u f(v)\,dv\,du = \mathcal{P}(\mathcal{P}f)(t),\ \ t > 0.$$

Доказательство теоремы 4. С использованием теоремы 3 неравенство (5) может быть получено такими же рассуждениями, с помощью которых (3) получено на основании теоремы 1. Далее, для функции $f_1(t) = \chi_{[0,1]}(t)$, $t \geqslant 0$, имеем $\mathcal{S}f_1 = f_0$, где f_0 – функция, рассмотренная в лемме 4. Так как

$$\|\mathcal{P}(\mathcal{P}f_1)\|_\infty = 1, \quad \lim_{t\to 0+} \operatorname*{ess\,inf}_{u\in(0,t)} f_1(u) = 1$$

и, в силу леммы 4, $\|\mathcal{S}f_1\|_{BMO} = \|f_0\|_{BMO} = \frac{2}{e}$, то обе постоянные $\frac{2}{e}$ слева и справа в (5) точные.

Доказательство теоремы 5. Предположим, что (8) не выполнено. Тогда найдется такое c_1, что для любой ограниченной, невозрастающей на $\mathbf{R}_+$, неотрицательной функции f справедливо неравенство $\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO} \leqslant c_1\|f\|_{BMO}$. Применяя следствие 1 и лемму

3, отсюда получим

$$\|f\|_\infty = \|\mathcal{P}f\|_\infty = \frac{\mathrm{e}}{2}\|\mathcal{P}^* f\|_{BMO} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}c_1\|f\|_{BMO} \leqslant c_1\|f\|_{BLO}. \tag{14}$$

Построим последовательность функций f_N, для которых $\|f_N\|_\infty = 1$ и $\|f_N\|_{BLO} \to 0$ при $N \to \infty$, и тем самым получим противоречие с (14). Зададим N и положим

$$f_N(t) = \left(1 - \frac{1}{N}\ln(t+1)\right)\chi_{[0,\mathrm{e}^N-1)}(t), \ \ t \geqslant 0.$$

Ясно, что функция f_N неотрицательна, не возрастает на $\mathbf{R}_+$ и $\|f_N\|_\infty = 1$. Если $0 < t \leqslant \mathrm{e}^N - 1$, то

$$(f_N)_{(0,t)} = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \left(1 - \frac{1}{N}\ln(u+1)\right) du =$$

$$= 1 - \frac{1}{N}\left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)\ln(t+1) - 1\right],$$

$$L\left(f_N; (0,t)\right) = (f_N)_{(0,t)} - f_N(t) = \frac{1}{N}\left[1 - \frac{1}{t}\ln(t+1)\right] \leqslant \frac{1}{N}.$$

Если же $t > \mathrm{e}^N - 1$, то $f_N(t) = 0$ и

$$L\left(f_N; (0,t)\right) = (f_N)_{(0,t)} \leqslant (f_N)_{(0,\mathrm{e}^N-1)} = L\left(f_N; \left(0, \mathrm{e}^N - 1\right)\right) \leqslant \frac{1}{N}.$$

Таким образом,

$$\|f_N\|_{BLO} = \sup_{t>0} L\left(f_N; (0,t)\right) \leqslant \frac{1}{N},$$

и тем самым завершается доказательство неравенства (8).

Ясно, что (9) можно получить таким же способом.

Теорема доказана.

Литература

1. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. И. Семенов, *Интерполяция линейных операторов.* Наука, М. (1978).
2. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators.* Academic Press, New York (1988).
3. F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation.* — Comm. Pure Appl. Math. **14** (4) (1961), 415–426.

4. R. R. Coifman, R. Rochberg, *Another characterization of BMO.* — Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 249–254.
5. Jie Xiao, *A reverse BMO-Hardy inequality.* — Real Analysis Exchange **25** (2) (1999/2000), 673–678.
6. А. А. Кореновский, *Оценки колебаний преобразования Харди.* — Матем. заметки. (в печати).
7. I. Klemes, *A mean oscillation inequality.* — Proc. Am. Math. Soc. **93** (3) (1985), 497–500.
8. А. А. Кореновский, *О связи между средними колебаниями и точными показателями суммируемости функций.* — Матем. сб. **181** (12) (1990), 1721–1727.
9. A. A. Korenovskij, *On the connection between mean oscillation and exact integrability classes of functions.* — Math. USSR Sbornik **71** (2) (1992), 561–567.

Korenovskii A. A. Estimates of oscillations of the conjugate Hardy transform and Calderon transform.

For the conjugate Hardy transform and Calderon transform the BLO-norm is calculated and the two-sides estimates of norm in BMO are obtained, most of which are exact.

Киевский национальный
университет им. Т. Г. Шевченко,
Одесский национальный
университет им. И. И. Мечникова
E-mail: anakor@paco.net
koren@mail.univ.kiev.ua

Поступило 10 мая 2001 г.