УДК 517.926

С. А. Щёголев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПОЛНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Щоголев С. А. Повне розщеплення лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь з коливними коефіцієнтами в особливому випадку. Для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої зображувані у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, отримано умови існування лінійного перетворення з коефіцієнтами аналогічної структури, що приводить цю систему до діагонального вигляду в одному особливому випадку.
Ключові слова: диференціальний, повільно змінний, розщеплення, ряди Фур'є.

Щёголев С. А. Полное разделение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами в особом случае. Для линейной однородной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования линейного преобразования с коэффициентами аналогичной структуры, приводящего эту систему к диагональному виду в одном особом случае.
Ключевые слова: дифференциальный, медленно меняющийся, разделение, ряды Фурье.

Shchogolev S. A. Full separation of the linear homogenous system with oscillate coefficients in some special case. For the linear homogenous system, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, conditions of existence of the linear transformation with coefficients of similar structure, this system leads to a diagonal form in a special case are obtained.
Key words: differential, slowly varying, separation, Fourier series.

1. Введение. В теории дифференциальных уравнений важной задачей является проблема построения для линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{1}$$

где $x = \mathrm{colon}(x_1, \cdots, x_n)$, $P(t) = (p_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$ ляпуновского преобразования

$$x = L(t)y, \tag{2}$$

приводящего систему (1) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y, \tag{3}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))$, то есть вопрос о полном разделении системы (1). Если преобразование (2) удаётся построить в явном виде, то систему (1) можно проинтегрировать в квадратурах, поскольку система (3) распадается на n независимых линейных однородных уравнений 1-го порядка. В то же время очевидно, что в общем случае построение преобразования (2) в явном виде невозможно, поскольку возникает необходимость интегрирования матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dL}{dt} = P(t)L - L\Lambda(t),$$

а это не менее сложная задача, чем интегрирование непосредственно самой системы (1). Поэтому в ряде исследований [1–8] не ставилась задача явного построения преобразования (2), а лишь доказывалось его существование, исследовались его свойства и возможность его приближённого построения, а также представление в виде асимптотических рядов. Также важным являлся вопрос о принадлежности элементов преобразующей матрицы $L(t)$ тем же классам, что и элементы матрицы $P(t)$.

В работах автора [9–11] задача полного разделения системы (1) рассматривалась в случае, когда матрица $P(t)$ имеет вид:

$$P(t) = \Lambda(t,\varepsilon) + \mu B(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)),$$

где $\Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_n(t,\varepsilon))$, причём функции $\lambda_j(t,\varepsilon)$ $(j = \overline{1,n})$ в определённом смысле медленно меняющиеся, μ – малый параметр, а элементы матрицы $B(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой $\varphi(t,\varepsilon) = d\theta/dt$. При этом показано, что элементы преобразующей матрицы $L(t) = L(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ имеют аналогичную структуру. В частности, в работе [10] задача полного разделения решена в предположении наличия определённых резонансных соотношений между функциями $\lambda_j(t,\varepsilon)$ $(j = \overline{1,n})$ и частотой $\varphi(t,\varepsilon)$. В настоящей статье также предполагается наличие этих соотношений, но рассматривается особый случай, который условиями теоремы, полученной в [10], не охватывается.

2. Основные обозначения и определения.

Пусть $G = \{t,\varepsilon:\ t \in \mathbf{R},\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0],\ \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\}$.

Определение 1. *Скажем, что функция* $p(t,\varepsilon)$ *принадлежит классу* $S(m;\varepsilon_0)$ $(m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, *если выполнены следующие условия:*

1) $p : G \to \mathbf{C}$;

2) $p(t,\varepsilon) \in \mathrm{C}^m(\mathbf{G})$ *по* t;

3) $d^k p(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon), \quad \sup\limits_G |p_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty \quad (0 \le k \le m)$.

Примерами функций класса $S(m;\varepsilon_0)$ являются в общем случае комплекснозначные, ограниченные вместе со своими производными до m-го порядка включительно, функции, зависящие от "медленного времени" $\tau = \varepsilon t$: $\sin\tau$, $\mathrm{arctg}\,\tau$ и т. д.

Определение 2. *Скажем, что функция $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ принадлежит классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(m\in\mathbf{N}\cup\{0\})$, если эта функция представима в виде:*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причём выполнены условия:

1) $f_n(t,\varepsilon)\in S(m;\varepsilon_0),\ d^kf_n(t,\varepsilon)/dt^k=\varepsilon^kf_{nk}(t,\varepsilon)\ (n\in\mathbf{Z},\ 0\le k\le m)$*;*

2) $\|f\|^*\stackrel{def}{=}\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\sup\limits_{G}|f_{nk}(t,\varepsilon)|<+\infty$*;*

3) $\theta(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t\varphi(\tau,\varepsilon)d\tau,\ \varphi(t,\varepsilon)\in\mathbf{R}^+,\ \varphi(t,\varepsilon)\in S(m;\varepsilon_0),\ \inf\limits_{G}\varphi(t,\varepsilon)>0.$

В частности, при $\varepsilon=0$: $\varphi=\mathrm{const}$, $\theta=\varphi t$, $f_n=\mathrm{const}$, функции класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ превращаются в $2\pi/\varphi$-периодические функции переменной t:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_ne^{in\varphi t},$$

такие, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|<+\infty.$$

Функции класса $S(m;\varepsilon_0)$, очевидно, являются частным случаем функций класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(f_n\equiv 0\ \forall n\neq 0)$.

Множество функций класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ образуют линейное пространство, которое превращается в полное нормированное пространство введением нормы $\|\cdot\|^*$. Справедлива цепочка включений:

$$F(0;\varepsilon_0;\theta)\supset F(1;\varepsilon_0;\theta)\supset\cdots\supset F(m;\varepsilon_0;\theta).$$

Пусть заданы две функции класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$:

$$u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)),$$

$$v(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Произведение этих функций определим по формуле [12]:

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}u_{n-s}(t,\varepsilon)v_s(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Очевидно, что $uv\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Сформулируем некоторые свойства нормы $\|\cdot\|^*$. Пусть $u,v\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $k=\mathrm{const}$. Тогда

1) $\|ku\|^*=|k|\|u\|^*$,

2) $\|u+v\|^*\le\|u\|^*+\|v\|^*$,

3) $\|uv\|^* \leq 2^m \|u\|^* \|v\|^*$.

Для любой функции $f(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ обозначим:

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,u) \exp(-inu) du.$$

3. Постановка задачи. Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j(t,\varepsilon)x_j + \mu \sum_{k=1}^{n} b_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))x_k,\ j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

где $\lambda_j(t,\varepsilon) \in S_m$, $b_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\mu \in]0,1[$. Предполагается, что выполнены следующие соотношения:

$$\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon) = in_{jk}\varphi(t,\varepsilon),\ n_{jk} \in \mathbf{Z}\ (j,k=\overline{1,n}). \tag{5}$$

Как и в работе [10], изучается вопрос о существовании преобразования вида

$$x_j = y_j + \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq j)}}^{n} q_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))y_k,\ j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где $q_{jk} \in F(l;\varepsilon_0;\theta)$ $(0 \leq l \leq m)$, приводящего систему (4) к виду:

$$\frac{dy_j}{dt} = d_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),\mu)y_j,\ j=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где

$$d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \mu b_{jj}(t,\varepsilon,\theta) + \lambda_j(t,\varepsilon) + \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j)}}^{n} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{sj}(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{8}$$

Функции q_{jk} тогда могут быть найдены по формуле $q_{jk} = \mu\widetilde{q}_{jk}$, где функции $\widetilde{q}_{jk}$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\widetilde{q}_{jk}}{dt} = (\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon))\widetilde{q}_{jk} + (b_{jj}(t,\varepsilon,\theta) - b_{kk}(t,\varepsilon,\theta))\widetilde{q}_{jk} +$$

$$+ b_{jk}(t,\varepsilon,\theta) + \mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j, s\neq k)}}^{n} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{q}_{sk} - \mu^2 \widetilde{q}_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq k)}}^{n} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{q}_{sk}, \tag{9}$$

$j,k = \overline{1,n}\ (j \neq k)$.

Легко видеть, что система (9) распадается на n независимых подсистем порядка $n-1$, каждая из которых имеет вид:

$$\frac{d\chi_j}{dt} = in_j\varphi(t,\varepsilon)\chi_j + f_j(t,\varepsilon,\theta) + \mu \sum_{k=1}^{N} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\chi_k +$$

$$+\mu^2\chi_j\sum_{k=1}^{N}u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\chi_k,\ j=\overline{1,N}, \tag{10}$$

где f_j, p_{jk}, $u_{jk}\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j,k=\overline{1,N}$, $n_j\in\mathbf{Z})$, $\mu\in]0,1[$. Следовательно, вопрос о существовании преобразования (6), где $q_{jk}\in F(k;\varepsilon_0;\theta)$ $(0\le k\le m)$, сводится к вопросу о существовании у системы (10) частного решения $\chi(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=\overline{1,N})$, принадлежащего классу $F(k;\varepsilon_0;\theta)$ $(0\le k\le m)$.

Рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j-n_k}(p_{jk})M_{k0}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\substack{r=-\infty\\(r\ne n_j-n_k)}}^{\infty}\Gamma_r(p_{jk})\frac{\Gamma_{n_j-r}(f_k)}{i(n_j-n_k-r)\varphi}\right),\ j=\overline{1,N}. \tag{11}$$

Обозначим:

$$\Delta(t,\varepsilon)=\det(\Gamma_{n_j-n_k}(p_{jk}))_{j,k=\overline{1,N}}.$$

В работе [10] были получены условия существования решения класса $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ системы (10) в предположении, что

$$\Gamma_{n_j}(f_j)\equiv 0\ (j=\overline{1,N}), \tag{12}$$

$$\inf_G|\Delta(t,\varepsilon)|>0. \tag{13}$$

В настоящей работе условия существования решения класса $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ системы (10) устанавливаются в предположении, что выполнены тождества (12), а также, что:

$$\Gamma_{n_j-n_k}(p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\equiv 0\quad (j,k=\overline{1,N}), \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\substack{r=-\infty\\(r\ne n_j-n_k)}}^{\infty}\Gamma_r(p_{jk})\frac{\Gamma_{n_j-r}(f_k)}{i(n_j-n_k-r)\varphi}\right)\equiv 0,\quad j=\overline{1,N}. \tag{15}$$

Тогда равенства (11) выполняются для любых M_{j0} $(j=\overline{1,N})$, а условие (13), очевидно, не выполнено. Целью настоящей статьи является получение признаков существования для системы (4) преобразования вида (6), где $q_{jk}\in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, приводящего систему (4) к виду (7), в особом случае, который не охватывается результатами работы [10]. При этом d_j определяются равенствами (8).

4. Вспомогательные утверждения. Введём в рассмотрение следующие функции, выражающиеся через коэффициенты системы (10):

$$\widetilde{\xi}_{j0}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\ne n_j)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n(f_j(t,\varepsilon,\theta))}{i(n-n_j)\varphi}\,e^{in\theta},$$

$$\widetilde{\eta}_{j1}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\ne n_j)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n(p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{\xi}_{k0}(t,\varepsilon,\theta))}{i(n-n_j)\varphi}\,e^{in\theta}\right),$$

$$a_{jk}(t,\varepsilon)=\Gamma_{-n_k}(u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)),$$

$$b_j(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Gamma_\nu(u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\Gamma_{-\nu}(\widetilde{\xi}_{k0}(t,\varepsilon,\theta))\right),$$

$$d_{jk}(t,\varepsilon)=\sum_{l=1}^{N}\left(\sum_{\substack{\nu=-\infty\\(\nu\neq n_j)}}^{\infty}\frac{\Gamma_{n_j-\nu}(p_{jl}(t,\varepsilon,\theta))\Gamma_{\nu-n_k}(p_{lk}(t,\varepsilon,\theta))}{i(\nu-n_l)\varphi(t,\varepsilon)}\right)+$$

$$+\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Gamma_\nu(u_{jk}(t,\varepsilon,\theta))\Gamma_{n_j-n_k-\nu}(\widetilde{\xi}_{j0}(t,\varepsilon,\theta)),$$

$$g_j(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Gamma_\nu(p_{jk}(t,\varepsilon,\theta))\Gamma_{n_j-\nu}(\widetilde{\eta}_{k1}(t,\varepsilon,\theta))\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j}(u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{\xi}_{j0}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{\xi}_{k0}(t,\varepsilon,\theta))$$

$(j,k=\overline{1,N})$. Легко видеть, что $\widetilde{\xi}_{j0}$, $\widetilde{\eta}_{j1}\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, a_{jk}, b_j, d_{jk}, $g_j\in$ $\in S(m;\varepsilon_0)$.

Рассмотрим следующую систему алгебраических уравнений:

$$P_j(t,\varepsilon,M_{10},\ldots,M_{N0})=0,\ j=\overline{1,N}, \tag{16}$$

где

$$P_j=\sum_{k=1}^{N}a_{jk}(t,\varepsilon)M_{j0}M_{k0}+b_j(t,\varepsilon)M_{j0}+\sum_{k=1}^{N}d_{jk}(t,\varepsilon)M_{k0}+g_j(t,\varepsilon),\ j=\overline{1,N}.$$

Лемма. *Пусть система (10) удовлетворяет следующим условиям:*

1) выполнены тождества (12), (14), (15);

2) система (16) имеет такое решение $M_{10}^*,\ldots,M_{N0}^*$, *что для него выполнено:*

$$\inf_G\left|\det\frac{\partial(P_1,\ldots,P_N)}{\partial(M_{10},\ldots,M_{N0})}\right|>0.$$

Тогда существует $\mu_0\in]0,1[$ *такое, что для всех* $\mu\in]0,\mu_0[$ *существует преобразование вида*

$$\chi_j=\sum_{s=0}^{2q-1}\xi_{js}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s+\sum_{k=1}^{N}\Psi_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta_k,\ j=\overline{1,N}, \tag{17}$$

где функции ξ_{js}, Ψ_{jk} *принадлежат классу* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $\forall\,\mu\in]0,\mu_0[$, *приводящее систему (10) к виду:*

$$\frac{d\eta_j}{dt}=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{q}\beta_{jkl}(t,\varepsilon)\mu^l\right)\eta_k+\varepsilon r_j^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}h_j^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon m_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{q+1}m^*_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu))\eta_k+$$

$$+\mu\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}b_{jks}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta_k\eta_s,, \quad j=\overline{1,N}, \tag{18}$$

где $\beta_{jkl}\in S(m;\varepsilon_0)$, *и для всех* $\mu\in]0,\mu_0[$ *функции* r_j, h^*_j, m_{jk}, m^*_{jk}, b_{jks} *принадлежат классу* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Доказательство. Наряду с системой (10) рассмотрим вспомогательную систему:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_j}{d\theta}=in_j\varphi(t,\varepsilon)\xi_j+f_j(t,\varepsilon,\theta)+\mu\sum_{k=1}^{N}p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_k+$$

$$+\mu^2\xi_j\sum_{k=1}^{N}u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_k, \quad j=\overline{1,N}, \tag{19}$$

в которой t,φ рассматриваются как постоянные. Коэффициенты $f_j(t,\varepsilon,\theta)$, $p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)$, $u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)$ – 2π-периодичны по θ. Построим, согласно методу малого параметра Пуанкаре [13], приближённое 2π-периодическое по θ решение системы (16) в виде частичной суммы ряда по степеням малого параметра μ:

$$\xi_j=\sum_{s=0}^{2q-1}\xi_{js}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s, \quad j=\overline{1,N}. \tag{20}$$

Коэффициенты ξ_{js} определяются из следующей цепочки линейных неоднородных дифференциальных систем:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j0}}{d\theta}=in_j\varphi(t,\varepsilon)\xi_{j0}+f_j(t,\varepsilon,\theta), \quad j=\overline{1,N}, \tag{21}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j1}}{d\theta}=in_j\varphi(t,\varepsilon)\xi_{j1}+\sum_{k=1}^{N}p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k0}, \quad j=\overline{1,N}, \tag{22}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j2}}{d\theta}=in_j\varphi(t,\varepsilon)\xi_{j2}+\sum_{k=1}^{N}p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k1}+$$

$$+\xi_{j0}\sum_{k=1}^{N}u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k0}, \quad j=\overline{1,N}, \tag{23}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{js}}{d\theta}=in_j\varphi(t,\varepsilon)\xi_{js}+\sum_{k=1}^{N}p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k,s-1}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{s-2}\xi_{j\nu}\sum_{k=1}^{N}u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k,s-2-\nu}, \quad j=\overline{1,N},\ s=\overline{3,2q-1}. \tag{24}$$

Условие (12) обеспечивает существование у системы (21) 2π-периодического по θ решения $\xi_{j0}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j=\overline{1,N})$, имеющего вид:

$$\xi_{j0}(t,\varepsilon,\theta)=M_{j0}(t,\varepsilon)e^{in_j\theta}+\widetilde{\xi}_{j0}(t,\varepsilon,\theta). \tag{25}$$

Рассмотрим систему (22). Условия (14), (15) обеспечивают существование у системы (22) 2π-периодического по θ решения, имеющего вид (для сокращения записи t,ε в аргументах функций опустим):

$$\xi_{j1}(\theta)=M_{j1}e^{in_j\theta}+\widetilde{\xi}_{j1}(\theta),\quad j=\overline{1,N}, \tag{26}$$

где

$$\widetilde{\xi}_{j1}(\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq n_j)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n\left(\sum_{k=1}^{N}p_{jk}(\theta)\xi_{k0}\right)}{i(n-n_j)\varphi}\,e^{in\theta},\ j=\overline{1,N}.$$

Запишем условия существования 2π-периодического по θ решения системы (23):

$$\Gamma_{n_j}\left(\sum_{k=1}^{N}p_{jk}(\theta)\xi_{k1}(\theta)+\xi_{j0}(\theta)\sum_{k=1}^{N}u_{jk}(\theta)\xi_{k0}(\theta)\right)\equiv 0,\ j=\overline{1,N}. \tag{27}$$

С учётом (26) условия (27) перепишутся в виде:

$$\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j}(p_{jk}(\theta)e^{in_k\theta})M_{k1}+\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j}(p_{jk}(\theta)\widetilde{\xi}_{k1}(\theta))+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j}(u_{jk}(\theta)\xi_{j0}(\theta)\xi_{k0}(\theta))\equiv 0,\ j=\overline{1,N}. \tag{28}$$

В силу условия (14) имеем:

$$\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j}(p_{jk}(\theta)e^{in_k\theta})M_{k1}=\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j-n_k}(p_{jk}(\theta))M_{k1}\equiv 0,\ j=\overline{1,N}.$$

Функции $\xi_{j1}(\theta)$ $(j=\overline{1,N})$ зависят также от $M_{10},\ldots,M_{N0}$. Используя равенства (25), несложно получить, что

$$\widetilde{\xi}_{j1}(\theta)=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq n_j)}}^{\infty}\frac{\Gamma_{n-n_k}(p_{jk}(\theta))}{i(n-n_j)\varphi}\,e^{in\theta}\right)M_{k0}+\widetilde{\eta}_{j1}(\theta),\ j=\overline{1,N}, \tag{29}$$

Используя (29), получим:

$$\Gamma_{n_j}\left(\sum_{k=1}^{N}p_{jk}(\theta)\widetilde{\xi}_{k1}(\theta)\right)=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{N}\left(\sum_{\substack{\nu=-\infty\\(\nu\neq n_j)}}^{\infty}\frac{\Gamma_{n_j-\nu}(p_{jl}(\theta))\Gamma_{\nu-n_k}(p_{lk}(\theta))}{i(\nu-n_l)\varphi}\right)\right)M_{k0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Gamma_{\nu}(p_{jk}(\theta))\Gamma_{n_j-\nu}(\widetilde{\eta}_{k1}(\theta))\right),\ j=\overline{1,N}. \tag{30}$$

Вторая сумма в правой части (30) является известной функцией, не зависящей от $M_{10},\dots,M_{N0}$.

С учётом (25) несложно установить справедливость равенств:

$$\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j}(u_{jk}(\theta)\xi_{j0}(\theta)\xi_{k0}(\theta))=\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{-n_k}(u_{jk}(\theta))M_{j0}M_{k0}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Gamma_{\nu}(u_{jk}(\theta))\Gamma_{-\nu}(\widetilde{\xi}_{k0}(\theta))\right)\right)M_{j0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Gamma_{\nu}(u_{jk}(\theta))\Gamma_{n_j-n_k-\nu}(\widetilde{\xi}_{j0}(\theta))\right)M_{k0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j}(u_{jk}(\theta)\widetilde{\xi}_{j0}(\theta)\widetilde{\xi}_{k0}(\theta)),\ j=\overline{1,N}.$$

Таким образом система (28) принимает вид (16). Заметим, что, в отличие от системы (11), система (16) является нелинейной.

Найдём:

$$\frac{\partial P_j}{\partial M_{s0}}=\begin{cases}2a_{jj}M_{j0}+\sum_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{N}a_{jk}M_{k0}+b_j+d_{jj},\ s=j,\\ a_{js}M_{s0}+d_{js},\ s\neq j.\end{cases} \tag{31}$$

Рассмотрим теперь систему для функций $\xi_{j,s+2}$ $(j=\overline{1,N})$, выделив в ней явно слагаемые, зависящие от $\xi_{j,s+1}$, ξ_{js} $(j=\overline{1,N})$:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j,s+2}}{d\theta}=in_j\varphi(t,\varepsilon)\xi_{j,s+2}+\sum_{k=1}^{N}p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k,s+1}+$$

$$+\xi_{j0}\sum_{k=1}^{N}u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{ks}+\xi_{js}\sum_{k=1}^{N}u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k0}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{s-1}\xi_{j\nu}\sum_{k=1}^{N}u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k,s-\nu},\ j=\overline{1,N}. \tag{32}$$

Для $\alpha=\overline{0,s+1}$ имеем:

$$\xi_{j\alpha}=M_{j\alpha}(t,\varepsilon)e^{in_j\theta}+\widetilde{\xi}_{j\alpha}(t,\varepsilon,\theta),\ j=\overline{1,N}, \tag{33}$$

где $\widetilde{\xi}_{j\alpha}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j=\overline{1,N})$ – известные функции класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Допустим, что функции $\xi_{j0}(t,\varepsilon,\theta)$, $\xi_{j1}(t,\varepsilon,\theta)$, ..., $\xi_{j,s-1}(t,\varepsilon,\theta)$ определены полностью, включая функции $M_{j,s-1}(t,\varepsilon)\in S(m;\varepsilon_0)$, а функции $M_{js}(t,\varepsilon)$, $M_{j,s+1}(t,\varepsilon)$ ещё подлежат определению. Запишем условия существования 2π-периодического по θ

решения системы (32):

$$\Gamma_{n_j}\left(\sum_{k=1}^{N} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k,s+1} + \sum_{k=1}^{N} u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)(\xi_{j0}\xi_{ks} + \xi_{js}\xi_{k0}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{s-1}\xi_{j\nu}\sum_{k=1}^{N} u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k,s-\nu}\right) = 0,\ j=\overline{1,N}. \tag{34}$$

Функции $\widetilde{\xi}_{j,s+1}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j=\overline{1,N})$ можно представить в виде:

$$\widetilde{\xi}_{j,s+1}(t,\varepsilon,\theta) = \widetilde{\xi}^{(1)}_{j,s+1}(t,\varepsilon,\theta) + \widetilde{\xi}^{(2)}_{j,s+1}(t,\varepsilon,\theta), \tag{35}$$

где $\widetilde{\xi}^{(1)}_{j,s+1}$ – частное 2π-периодическое по θ решение системы:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j,s+1}}{d\theta} = in_j\varphi(t,\varepsilon)\xi_{j,s+1} + \sum_{k=1}^{N} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)M_{ks}(t,\varepsilon)e^{in_k\theta},\ j=\overline{1,N}, \tag{36}$$

а $\widetilde{\xi}^{(2)}_{j,s+1}$ – частное 2π-периодическое по θ решение системы:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j,s+1}}{d\theta} = in_j\varphi(t,\varepsilon)\xi_{j,s+1} + \sum_{k=1}^{N} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{\xi}_{ks}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{s-1}\xi_{j\nu}(t,\varepsilon,\theta)\sum_{k=1}^{N} u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k,s-1-\nu}(t,\varepsilon,\theta),\ j=\overline{1,N}. \tag{37}$$

Условия существования 2π-периодического по θ решения системы (36) имеют вид:

$$\Gamma_{n_j}\left(\sum_{k=1}^{N} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)M_{ks}(t,\varepsilon)e^{in_k\theta}\right) = 0,\ j=\overline{1,N}. \tag{38}$$

Эти условия можно переписать так:

$$\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j-n_k}(p_{jk}(t,\varepsilon,\theta))M_{ks} = 0,\ j=\overline{1,N}, \tag{39}$$

и в силу (14) эти условия выполнены для любых $M_{1s},\dots,M_{Ns}$. Поэтому система (36) имеет 2π-периодическое по θ решение вида:

$$\widetilde{\xi}^{(1)}_{j,s+1} = \sum_{\substack{\nu=-\infty\\(\nu\neq n_j)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n\left(\sum_{k=1}^{N} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)M_{ks}(t,\varepsilon)e^{in_k\theta}\right)}{i(n-n_j)\varphi(t,\varepsilon)}\,e^{in\theta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\substack{\nu=-\infty\\(\nu\neq n_j)}}^{\infty}\frac{\Gamma_{n-n_k}(p_{jk}(t,\varepsilon,\theta))}{i(n-n_j)\varphi(t,\varepsilon)}\right)M_{ks}(t,\varepsilon),\ j=\overline{1,N}.$$

С учётом (33) и (35) условия (34) можно записать так:

$$\Gamma_{n_j}\left(\sum_{k=1}^{N} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\left(M_{k,s+1}e^{in_k\theta}+\widetilde{\xi}^{(1)}_{k,s+1}+\widetilde{\xi}^{(2)}_{k,s+1}\right)+\right.$$

$$\left.+\xi_{j0}\sum_{k=1}^{N} u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{ks}+\xi_{js}\sum_{k=1}^{N} u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_{k0}\right)+v_{js}(t,\varepsilon),\ j=\overline{1,N}, \qquad (40)$$

где $v_{js}(t,\varepsilon)$ $(j=\overline{1,N})$ – известные функции, принадлежащие классу $S(m;\varepsilon_0)$. Поскольку в силу (14):

$$\Gamma_{n_j}\left(\sum_{k=1}^{N} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)M_{k,s+1}e^{in_k\theta}\right)=\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{n_j-n_k}(p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)M_{k,s+1}=0,\ j=\overline{1,N},$$

то с учётом (33), (35), (39), а также выражений для функций $a_{jk}(t,\varepsilon)$, $b_j(t,\varepsilon)$, $d_{jk}(t,\varepsilon)$, $g_j(t,\varepsilon)$, условия (40) перепишутся в виде:

$$\sum_{k=1}^{N} d_{jk}(t,\varepsilon)M_{ks}+M_{j0}\sum_{k=1}^{N} a_{jk}(t,\varepsilon)M_{ks}+M_{js}\sum_{k=1}^{N} a_{jk}(t,\varepsilon)M_{k0}+$$

$$+b_j(t,\varepsilon)M_{j0}+h_{js}(t,\varepsilon)=0,\ j=\overline{1,N}, \qquad (41)$$

где $h_{js}(t,\varepsilon)$ – известные функции, принадлежащие классу $S(m;\varepsilon_0)$.

Учитывая равенства (31), условия (41) принимают вид:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial P_j}{\partial M_{k0}}\ M_{ks}=-h_{js},\ j=\overline{1,N}. \qquad (42)$$

То есть получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно M_{js} $(j=\overline{1,N})$. Вследствие условия 2) леммы система (42) имеет единственное решение $M_{1s}(t,\varepsilon),\ldots,M_{Ns}(t,\varepsilon)$, и это решение принадлежит классу $S(m;\varepsilon_0)$.

Таким образом, все функции $\xi_{js}(t,\varepsilon,\theta)$ ($j=\overline{1,N};\quad s=\overline{1,2q-1}$) являются полностью определёнными и принадлежащими классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Следовательно, в силу (20), полностью определёнными и $\forall\ \mu\in]0,1[$ принадлежащими классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ будут и функции $\xi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ ($j=\overline{1,N}$).

В системе (10) совершим подстановку:

$$\chi_j=\xi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\sigma_j,\quad j=\overline{1,N}, \qquad (43)$$

где σ_j ($j=\overline{1,N}$) – новые неизвестные функции. В результате придём к системе вида:

$$\tfrac{d\sigma_j}{dt}=in_j\varphi(t,\varepsilon)\sigma_j+\varepsilon r_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}h_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$

$$+\textstyle\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{q} v_{jkl}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\sigma_k+\mu^{q+1}\sum_{k=1}^{N} w_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\sigma_k+ \qquad (44)$$

$$+\mu^2\sigma_j\textstyle\sum_{k=1}^{N} u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\sigma_k,\quad j=\overline{1,N},$$

где $r_j \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, h_j, v_{jkl}, $w_{jk} \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

В работе [10] было показано, что систему (44) с помощью преобразования вида

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{q}\psi_{jkl}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\eta_k, \quad j=\overline{1,N}, \tag{45}$$

где $\psi_{jkl} \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, при достаточно малых μ можно привести к виду (18).

Лемма доказана.

5. Основные результаты. Рассмотрим матрицу:

$$B(t,\varepsilon,\mu) = \sum_{l=1}^{q} B_l(t,\varepsilon)\mu^l,$$

где $B_l(t,\varepsilon) = (\beta_{jkl}(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}$ ($l=\overline{1,q}$), а $\beta_{jkl}(t,\varepsilon)$ определены леммой.

Теорема 1. *Пусть система (10) такова, что:*
1) выполнены все условия леммы;
2) система (18), полученная из системы (10) с помощью преобразования (17), удовлетворяет условию: для матрицы $B(t,\varepsilon,\mu)$ существует матрица $U(t,\varepsilon,\mu)$, элементы которой $\forall\ \mu \in]0,\mu_0[$ (μ_0 определено в лемме) принадлежат классу $S(m;\varepsilon_0)$, такая, что:

а) $\forall\ \mu \in]0,\mu_0[:\ \inf\limits_G |\mathrm{det}U(t,\varepsilon,\mu)| > 0$,

б) $U^{-1}BU = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)$ – диагональная матрица,

в) $\exists q_0 \in \mathbf{N}$ $(1 \le q_0 \le q)$: $\inf\limits_G |\mathrm{Re}\lambda_j^*(t,\varepsilon,\mu)| \ge \gamma_0\mu^{q_0-1}$, где $\lambda_j^*(t,\varepsilon,\mu)$ — собственные значения матрицы B; $\gamma_0 > 0$.

Тогда $\exists\ \mu_1 \in]0,\mu_0[$, $K_1 \in]0,+\infty[$ такие, что $\forall\ \mu \in]0,\mu_1[$ система (10) имеет частное решение $\chi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=\overline{1,N})$, принадлежащее классу $F(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$, где $\varepsilon_1(\mu) = K_1\mu^{2q_0-1}$.

Доказательство. На основании условия 1) теоремы приведём систему (10) к виду (18). В работе [10] было показано, что условие 2) теоремы обеспечивает существование $\mu_1 \in]0,\mu_0[$ и $K_1 \in]0,+\infty[$ таких, что $\forall\ \mu \in]0,\mu_1[$ система (18) имеет частное решение $\eta_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=\overline{1,N})$, принадлежащее классу $F(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$. С учётом соотношений (43), (45) отсюда следует утверждение теоремы.

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\forall\ k=\overline{1,N}$ система (9) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.Тогда $\exists\ \mu_2 \in]0,1[$, $K_2 \in]0,+\infty[$ такие, что $\forall\ \mu \in]0,\mu_2[$ существует преобразование с коэффициентами из класса $F(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$, где $\varepsilon_2(\mu) = K_2\mu^{2q_0-1}$, приводящее систему (4) к диагональному виду (7), причём d_j $(j=\overline{1,N})$ определяются формулами (8).*

6. Пример. Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= \lambda_1(t,\varepsilon)x_1 + \mu(b_{11}(t,\varepsilon,\theta)x_1 + b_{12}(t,\varepsilon,\theta)x_2), \\ \tfrac{dx_2}{dt} &= \lambda_2(t,\varepsilon)x_1 + \mu(b_{21}(t,\varepsilon,\theta)x_1 + b_{22}(t,\varepsilon,\theta)x_2), \end{aligned} \tag{46}$$

где $\lambda_j(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$, $b_{jk}(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j,k=1,2)$.

Предполагаем, что

$$\lambda_1(t,\varepsilon) - \lambda_2(t,\varepsilon) = in_0\varphi(t,\varepsilon),\ n_0 \in \mathbf{N}. \tag{47}$$

Производя в системе (46) подстановку

$$x_1 = y_1 + q_{12}y_2, \quad x_2 = q_{21}y_1 + y_2, \tag{48}$$

с учётом диагональности преобразованной систем и равенства (47) получим следующую систему дифференциальных уравнений для коэффициентов q_{12}, q_{21}, распадающуюся на 2 независимых уравнения 1-го порядка типа Риккати:

$$\begin{gathered}\tfrac{dq_{12}}{dt} = in_0\varphi(t,\varepsilon)q_{12} + \mu(b_{11}(t,\varepsilon,\theta) - b_{22}(t,\varepsilon,\theta))q_{12} + \mu b_{12}(t,\varepsilon,\theta) - \\ -\mu b_{21}(t,\varepsilon,\theta)q_{12}^2, \\ \tfrac{dq_{21}}{dt} = -in_0\varphi(t,\varepsilon)q_{21} + \mu(b_{22}(t,\varepsilon,\theta) - b_{11}(t,\varepsilon,\theta))q_{12} + \mu b_{121}(t,\varepsilon,\theta) - \\ -\mu b_{12}(t,\varepsilon,\theta)q_{12}^2.\end{gathered} \tag{49}$$

При этом для y_1, y_2 получим систему:

$$\frac{dy_1}{dt} = (\lambda_1(t,\varepsilon) + \mu b_{11}(t,\varepsilon,\theta) + \mu b_{12}(t,\varepsilon,\theta)q_{21}(t,\varepsilon,\theta,\mu))y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (\lambda_2(t,\varepsilon) + \mu b_{22}(t,\varepsilon,\theta) + \mu b_{21}(t,\varepsilon,\theta)q_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu))y_2.$$

Положим $q=2$, $n_0=2$, $b_{11}=b_{22}$, $b_{12}=Ae^{3i\theta}$, $b_{21}=Ae^{-3i\theta}$, $A=\mathrm{const}$. Тогда система (49) принимает вид:

$$\begin{gathered}\tfrac{dq_{12}}{dt} = 2i\varphi(t,\varepsilon)q_{12} + \mu Ae^{3i\theta} - \mu Ae^{-3i\theta}q_{12}^2, \\ \tfrac{dq_{21}}{dt} = -2i\varphi(t,\varepsilon)q_{21} + \mu Ae^{-3i\theta} - \mu Ae^{3i\theta}q_{21}^2.\end{gathered} \tag{50}$$

После подстановки в системе (50) $q_{12} = \mu\widetilde{q}_{12}$, $q_{21} = \mu\widetilde{q}_{21}$ получим:

$$\begin{gathered}\tfrac{d\widetilde{q}_{12}}{dt} = 2i\varphi(t,\varepsilon)\widetilde{q}_{12} + ae^{3i\theta} - \mu^2 Ae^{-3i\theta}\widetilde{q}_{12}^2, \\ \tfrac{d\widetilde{q}_{21}}{dt} = 2i\varphi(t,\varepsilon)\widetilde{q}_{12} + ae^{3i\theta} - \mu^2 Ae^{-3i\theta}\widetilde{q}_{12}^2.\end{gathered} \tag{51}$$

Очевидно, что система (51) имеет вид (10). И для неё выполнено условие (12). Рассмотрим вспомогательную систему (19), которая в данном случае имеет вид:

$$\begin{gathered}\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_1}{d\theta} = 2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_1 + Ae^{3i\theta} - \mu^2 Ae^{-3i\theta}\xi_1^2, \\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_2}{d\theta} = -2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_2 + Ae^{-3i\theta} - \mu^2 Ae^{3i\theta}\xi_2^2.\end{gathered} \tag{52}$$

Приближённое 2π-периодическое по θ решение системы (52) ищем в виде:

$$\xi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \sum_{k=0}^{3}\xi_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\mu^k, \quad j=1,2. \tag{53}$$

Тогда для ξ_{jk} ($j=1,2;\ k=0,1,2,3$) получим следующие линейные системы:

$$\begin{gathered}\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{10}}{d\theta}=2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{10}+Ae^{3i\theta},\\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{20}}{d\theta}=-2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{20}+Ae^{-3i\theta};\end{gathered}\tag{54}$$

$$\begin{gathered}\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{11}}{d\theta}=2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{11},\\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{21}}{d\theta}=-2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{21};\end{gathered}\tag{55}$$

$$\begin{gathered}\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{12}}{d\theta}=2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{12}-Ae^{-3i\theta}\xi_{10}^2,\\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{22}}{d\theta}=-2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{22}-Ae^{3i\theta}\xi_{20}^2;\end{gathered}\tag{56}$$

$$\begin{gathered}\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{13}}{d\theta}=2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{13}-2Ae^{-3i\theta}\xi_{10}\xi_{11},\\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{23}}{d\theta}=-2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{23}-2Ae^{3i\theta}\xi_{20}\xi_{21}.\end{gathered}\tag{57}$$

Рассмотрим систему (54). Она имеет 2π-периодическое по θ решение:

$$\xi_{10}(t,\varepsilon,\theta)=M_{10}(t,\varepsilon)e^{2i\theta}-\frac{iA}{\varphi(t,\varepsilon)}\,e^{3i\theta},\tag{58}$$

$$\xi_{20}(t,\varepsilon,\theta)=M_{20}(t,\varepsilon)e^{-2i\theta}+\frac{iA}{\varphi(t,\varepsilon)}\,e^{-3i\theta},\tag{59}$$

где $M_{10}(t,\varepsilon)$, $M_{20}(t,\varepsilon)$ – пока ещё не определённые функции.

Система (55) имеет 2π-периодическое по θ решение:

$$\xi_{11}(t,\varepsilon,\theta)=M_{11}(t,\varepsilon)e^{2i\theta},\quad \xi_{21}(t,\varepsilon,\theta)=M_{21}(t,\varepsilon)e^{-2i\theta},$$

где $M_{11}(t,\varepsilon)$, $M_{21}(t,\varepsilon)$ – также пока не определённые функции.

Рассмотрим систему (56). Подставив в правые её части выражения (58), (59), получим:

$$\begin{gathered}\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{12}}{d\theta}=2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{12}-AM_{10}^2e^{i\theta}+\tfrac{2iA^2}{\varphi(t,\varepsilon)}\,M_{10}e^{2i\theta}+\tfrac{A^3}{\varphi^2(t,\varepsilon)}\,e^{3i\theta},\\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{22}}{d\theta}=-2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{22}-AM_{20}^2e^{-i\theta}-\tfrac{2iA^2}{\varphi(t,\varepsilon)}\,M_{20}e^{-2i\theta}+\tfrac{A^3}{\varphi^2(t,\varepsilon)}\,e^{-3i\theta}.\end{gathered}\tag{60}$$

Отсюда видно, что для существования 2π-периодического по θ решения системы (60) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{2iA^2}{\varphi(t,\varepsilon)}\,M_{j0}(t,\varepsilon)\equiv 0,\quad j=1,2.\tag{61}$$

А отсюда получаем, что $M_{10}(t,\varepsilon)\equiv 0$, $M_{20}(t,\varepsilon)\equiv 0$, и т.о.

$$\xi_{10}(t,\varepsilon,\theta)=-\frac{iA}{\varphi(t,\varepsilon)}\,e^{3i\theta},\quad \xi_{20}(t,\varepsilon,\theta)=\frac{iA}{\varphi(t,\varepsilon)}\,e^{-3i\theta}.$$

В качестве 2π-периодического по θ решения системы (57) можно взять:

$$\xi_{12}(t,\varepsilon,\theta) = -\frac{iA^3}{\varphi^3(t,\varepsilon)}\ e^{3i\theta}, \quad \xi_{22}(t,\varepsilon,\theta) = \frac{iA^3}{\varphi^3(t,\varepsilon)}\ e^{-3i\theta}.$$

Подставим найденные выражения для ξ_{j0}, ξ_{j1} $(j = 1, 2)$ в правые части системы (57):

$$\begin{gathered} \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{13}}{d\theta} = 2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{13} + \tfrac{2iA^2}{\varphi^2(t,\varepsilon)}\ M_{11}(t,\varepsilon)e^{2i\theta}, \\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{23}}{d\theta} = -2i\varphi(t,\varepsilon)\xi_{23} - \tfrac{2iA^2}{\varphi^2(t,\varepsilon)}\ M_{21}(t,\varepsilon)e^{-2i\theta}. \end{gathered} \tag{62}$$

Для существования 2π-периодического по θ решения системы (62) необходимо и достаточно, чтобы $M_{11}(t,\varepsilon) \equiv 0$, $M_{21}(t,\varepsilon) \equiv 0$, и т. о.

$$\xi_{11}(t,\varepsilon,\theta) \equiv 0, \quad \xi_{21}(t,\varepsilon,\theta) \equiv 0.$$

В качестве 2π-периодического по θ решения системы (59) можно взять $\xi_{13}(t,\varepsilon,\theta) \equiv 0$, $\xi_{23}(t,\varepsilon,\theta) \equiv 0$.

Таким образом, определяемые равенством (53) функции ξ_j $(j = 1, 2)$ таковы:

$$\xi_1(t,\varepsilon,\theta,\mu) = -i\left(\frac{A}{\varphi(t,\varepsilon)} + \mu^2\frac{A^3}{\varphi^3(t,\varepsilon)}\right)e^{3i\theta},$$

$$\xi_2(t,\varepsilon,\theta,\mu) = i\left(\frac{A}{\varphi(t,\varepsilon)} + \mu^2\frac{A^3}{\varphi^3(t,\varepsilon)}\right)e^{-3i\theta}.$$

В системе (51) совершим подстановку:

$$\widetilde{q}_{12} = \xi_1 + \eta_1, \quad \widetilde{q}_{21} = \xi_2 + \eta_2, \tag{63}$$

где η_1, η_2 – новые неизвестные функции. В результате придём к системе вида:

$$\begin{gathered} \tfrac{d\eta_1}{dt} = \left(2i\varphi(t,\varepsilon) + 2i\mu^2\tfrac{A^2}{\varphi(t,\varepsilon)} + 2i\mu^4\tfrac{A^4}{\varphi^3(t,\varepsilon)}\right)\eta_1 + \varepsilon p(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ +2\mu^4\tfrac{A^5}{\varphi^4(t,\varepsilon)}\ e^{3i\theta} + \mu^6\tfrac{A^7}{\varphi^6(t,\varepsilon)}\ e^{3i\theta} - 2i\mu^4\tfrac{A^4}{\varphi^3(t,\varepsilon)}\ e^{3i\theta} - \mu^2Ae^{-3i\theta}\eta_1^2, \\ \tfrac{d\eta_2}{dt} = \left(-2i\varphi(t,\varepsilon) - 2i\mu^2\tfrac{A^2}{\varphi(t,\varepsilon)} - 2i\mu^4\tfrac{A^4}{\varphi^3(t,\varepsilon)}\right)\eta_1 + \varepsilon r(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ +2\mu^4\tfrac{A^5}{\varphi^4(t,\varepsilon)}\ e^{-3i\theta} + \mu^6\tfrac{A^7}{\varphi^6(t,\varepsilon)}\ e_3i\theta - 2i\mu^4\tfrac{A^4}{\varphi^3(t,\varepsilon)}\ e^{-3i\theta} - \mu^2Ae^{3i\theta}\eta_2^2, \end{gathered} \tag{64}$$

где $p, r \in F(m-1; \varepsilon_0; \theta)$. Отсюда видно, что система (64) имеет вид (18), причём матрица $B(t,\varepsilon,\mu)$ такова:

$$B(t,\varepsilon,\mu) = \left(2i\varphi(t,\varepsilon) + 2i\mu^2\frac{A^2}{\varphi(t,\varepsilon)} + 2i\mu^4\frac{A^4}{\varphi^3(t,\varepsilon)}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это диагональная матрица, следовательно, в качестве матрицы $U(t,\varepsilon,\mu)$ в теореме 1 можно взять единичную. Для выполнения условий теоремы 1 достаточно потребовать, чтобы

$$\left|\mathrm{Re}\frac{2iA^2}{\varphi(t,\varepsilon)}\right| \geq \gamma > 0. \tag{65}$$

Условие (65) выполнено, например, при $A = 1 + i$. Тогда для собственных значений матрицы B справедлива оценка:

$$|\mathrm{Re}\lambda_j^*(t, \varepsilon, \mu)| \geq \gamma\mu^2 \quad (j = 1, 2).$$

Таким образом, имеет место

Следствие. *Для системы (46), в которой* $b_{11} = -b_{22}$, $b_{12} = (1 + i)e^{3i\theta}$, $b_{21} = (1 + i)e^{-3i\theta}$, *существуют такие* $\mu_3 \in]0, 1[$, $K_3 \in]0, +\infty[$, *что* $\forall \mu \in]0, \mu_3[$ *существует преобразование (48) с коэффициентами, принадлежащими классу* $F(m - 1; K_3\mu^2; \theta)$, *приводящее систему (46) к диагональному виду.*

Заключение. Для системы вида (4) получены условия существования преобразования с коэффициентами, имеющими вид абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, приводящего систему (4) к диагональному виду (7), в особом случае, который не охватывался предыдущими результатами. Возможность выполнения условий доказанных теорем иллюстрируется на конкретном примере.

1. **Абгарян К. А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем [текст] / Карлен Арамович Абгарян. – М.: Наука, 1973. – 431 с.
2. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений и некоторых свойствах матрицы разделения [текст] / Н. Я. Лященко // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7, № 4. – С. 403–418.
3. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме разделения линейной системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами [текст] / Н. Я. Лященко // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7, № 1. – С. 47–55.
4. **Костін В. В.** Деякі питання повного розподілу та асимптотичної поведінки розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь [текст] / В. В. Костін // Доп. АН УРСР, сер. Ф. – 1967, № 7. – С. 593–595.
5. **Митропольский Ю. А.** Исследование дихотомии линейных систем с помощью функций Ляпунова [текст] / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик. – К. : Наук. думка, 1990. – 272 с.
6. **Фещенко С. Ф.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений [текст] / С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. – К.: Наук. думка, 1966. – 251 с.
7. **Митропольский Ю. А.** О построении решений почти диагональных систем линейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего ускоренную сходимость [текст] / Ю. А. Митропольский, Е. П. Белан // Укр. матем. журн. – 1968. – Т. 20, № 2. – С. 166–175.
8. **Амелькин К. В.** О расщеплении линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / К. В. Амелькин, А. В. Костин // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – Т. 6, вип. Фіз.-мат.науки. – С. 1–7.
9. **Щёголев С. А.** Об одном варианте теоремы полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений [текст] / С. А. Щёголев // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Чернівецький держ. ун-т ім. Ю. Федьковича, 1999. – Вип. 4. – С. 282–289.

10. **Щёголев С. А.** Резонансный случай полного разделения линейной дифференциальной системы с медленно меняющимися параметрами [текст] / С. А. Щёголев // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: ІМ НАНУ, 1998. – Вип. 3. – С. 165–175.
11. **Щёголев С. А.** О полном разделении некоторых классов линейных однородных систем дифференциальных уравнений [текст] / С. А. Щёголев // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. – 2008. – Т. 13, вип. 18. Матем і механ. – С. 119–131.
12. **Бари Н. К.** Тригонометрические ряды [текст] / Нинель Карловна Бари. – М.: Физматгиз, 1961. – 935 с.
13. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний [текст] / И. Г. Малкин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.