

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ЕХНОЛОГІЙ

Г. М. Вартанян

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇЇ ВИКОНАННЯ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ 1 КУРСУ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 051 ЕКОНОМІКА
II СЕМЕСТР

ОДЕСА
ОНУ
2022

УДК 517.9;517.91;517.37

Рекомендовано вченою радою ІМЕМ
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 1 від 09.09.2021 р.

Укладач: **Г. М. Варталян**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рецензенти:

Р. В. Шанін, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

С. А. Щоголев, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Варталян Г. М.

Диференціальні рівняння та кратні інтеграли : розрахунково-графічна робота з вищої математики і методичні вказівки до її виконання для студентів 1 курсу спеціальності 051 Економіка, II семестр / Г. М. Варталян. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2022. – 32 с.;

УДК 517.9;517.91;517.37

© Варталян Г. М., 2022

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2022

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Варіанти завдань.....	5
Зразок виконання завдань	20
Список рекомендованої літератури.....	31

ВСТУП

У другому семестрі курс вищої математики для студентів спеціальності «Економіка» передбачає виконання практичної роботи. Обсяг і зміст її завдань визначається робочою програмою курсу. Повністю виконана та захищена робота оцінюється, виходячи з 25 балів: на перший модульний контроль виділяється по 10 балів, на другий – 15 з урахуванням 5 балів на захист роботи.

При виконанні й оформленні практичної роботи студент повинен дотримуватися таких правил:

а) виконувати завдання в окремому зошиті у клітинку 12 або 18 аркушів;

б) вказати на обкладинці прізвище та ініціали, номер групи та номер варіанта;

в) розв'язання задач розташовувати в довільному порядку, зазначаючи їх номери, вписуючи перед розв'язанням кожної задачі її умову;

г) у разі необхідності розв'язання задач супроводжувати кресленнями, креслення виконувати олівцем.

До розрахунково-графічної роботи включені задачі з диференціальних рівнянь, теорії стійкості, кратних та криволінійних інтегралів, теорії поля. Розділ 2 містить умови всіх завдань. Кожна задача розрахунково-графічної роботи складається з 30 варіантів. Студент виконує варіант, номер якого визначається викладачем або за своїм номером у списку групи.

Розділ 3 містить докладні розв'язки усіх типових задач.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Задача 1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку

1	$2x(3 + y^2)dx = 3y(x^2 + 2)dy$	$xy' \cos(y/x) + x - y \cos(y/x) = 0$
2	$2x(1 + y^2)dx = y(x^2 - 2)dy$	$xy' = xe^{y/x} + y$
3	$\sqrt{4 + y^2} dx = y(x^2 - 1)dy$	$xy' = 2y - 2\sqrt{xy}$
4	$y(1 + \ln y) + xy' = 0$	$2y' = (y/x)^2 + 6y/x + 3$
5	$\sqrt{4 - x^2} y' + xy^2 + x = 0$	$y' = (3y^3 + 2yx^2) / (2y^2x + x^3)$
6	$y'y\sqrt{(1-x^2)/(1-y^2)} + 1 = 0$	$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$
7	$yy'e^{-x^2} - 2x = 0$	$y' = (x + 2y) / (2x - y)$
8	$(5 + e^{2x})dy + ye^{2x}dx = 0$	$xy' \ln(y/x) = x + y \ln(y/x)$
9	$xy \ln y - y' = 0$	$xy' - y = x \operatorname{tg}(y/x)$
10	$yy' \cos^2 x + \sin x = 0$	$y' = (3y^3 + 8yx^2) / (4y^2x + 4x^3)$
11	$y' = -y \operatorname{tg} x$	$2y' = (y/x)^2 + 8y/x + 8$
12	$y' = x/y$	$xyy' = 2x^2 + y^2$
13	$(3 + e^x)yy' = e^x$	$(xy' - y) \operatorname{arctg}(y/x) = x$
14	$y' = (1 - x) / y$	$y' = y/x + \sin(y/x)$
15	$y' = (y - 1) / x$	$xy' + y \cos(\ln(y/x)) = 0$
16	$y' = 2xy / (1 + x^2)$	$xy' \sin(y/x) + x = y \sin(y/x)$
17	$y' = y^2$	$xy' = y - xe^{y/x}$
18	$xy' + \sqrt{4 - y^2} = 0$	$y'(xy - x^2) = y^2$
19	$y' = -2xy$	$y' = (y/x)^2 + 4y/x + 2$
20	$y\sqrt{2 + x^2} dy + x\sqrt{3 + y^2} dx = 0$	$xy' = (3y^3 + 4yx^2) / (2y^2 + 2x^2)$
21	$y'\sqrt{1 + x^2} - y = 0$	$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$
22	$y' = 2\sqrt{y}$	$y' = (x - y) / (x + y)$
23	$(1 + e^x)y' = ye^x$	$xy' - y = (x + y) \ln((x + y) / x)$
24	$y \ln y + xy' = 0$	$y' = y/x + \cos(y/x)$
25	$y' = y \operatorname{ctg}(x/2)$	$y' = (-y^2 + 2xy + x^2) / (2yx + 2x^2)$
26	$y' = y / (2x + 5)$	$y' = (y/x)^2 + 8y/x + 12$
27	$y' = 2y/x$	$x^2y' + y^2 - 2xy = 0$

28	$y' = -y^2 / x^2$	$(xy' - y)y \sin(y/x) = x^2$
29	$y' - 2xy - y = 0$	$x^2 y' = xy + y^2 e^{-y/x}$
30	$y' = y \sin 2x$	$xy' = y \cos(\ln(y/x))$

Задача 2. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння та рівняння Бернуллі

1	$y' \sin x - y \cos x = 1; y(\pi/2) = 0$	$4y' + x^3 y = (x^3 + 8)y^2 e^{-2x}$
2	$y' \cos x - 2y \sin x = 2; y(0) = 3$	$2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)y^{-1} e^{2x}$
3	$2y' + 2y \cos x = \sin 2x; y(0) = 0$	$8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$
4	$y' - y/(x+1) = (x+1)e^x; y(0) = 1$	$3y' - 3y \operatorname{tg} x = -2y^4 \sin x$
5	$y' - y/(x \ln x) = x \ln x; y(e) = e^2/2$	$xy' + y = xy^2$
6	$y' - y \operatorname{tg} x = 1/\cos x; y(0) = 5$	$2y' + 2xy = (x-1)y^2 e^x$
7	$y' x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x; y(e) = 0$	$y' + y = e^{x/2} \sqrt{y}$
8	$y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x; y(\pi/4) = 1/2$	$2xy' + 2y = y^2 \ln x$
9	$y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x; y(0) = 1/3$	$2y' + 2y = xy^2$
10	$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x; y(\pi/2) = 0$	$(x-1)y' - y = y^2/x^2$
11	$y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x; y(0) = 1$	$y' + 2xy = 2x^3 y^3$
12	$y' + y = e^{-x}/(1+x^2); y(0) = 2$	$xy' - 4y = 2x^2 \sqrt{y}$
13	$y' - 2xy/(1+x^2) = 1+x^2; y(1) = 2$	$xy' + 2y = -x^5 y^3 e^x$
14	$y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x; y(0) = 0$	$3xy' + 3y = xy^2$
15	$y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3; y(0) = 1$	$xy' - y = x^2 y^{-2}$
16	$y' \cos x + y \sin x = 1; y(0) = 2$	$y' - 2y \operatorname{tg} x = -y^2 \sin^2 x$
17	$y' - y \cos x = -\cos x; y(0) = 3$	$3xy' + 5y = (4x-5)y^4$
18	$y' + 2y/x = -x^2; y(3) = 1$	$2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3$
19	$x^2 y' + xy + 1 = 0; y(1) = 2$	$y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x$
20	$xy' - 3y = x^4 e^x; y(1) = e$	$y' + y = xy^2$
21	$xy' - y/(x+1) = x; y(1) = 0$	$y' + 2y = e^x y^2$
22	$y' - 3y/x = x^3 e^x; y(1) = e$	$\cos^2 x (xy' + 2y) = 2x \sqrt{y}$
23	$y' + xy = -x^3; y(0) = 3$	$xy' + y = y^2 \ln x$
24	$xy' + 2y = 1/x; y(3) = 1$	$y' - y = 2xy^2$
25	$y' - y/x = -2 \ln x; y(1) = 1$	$y' - xy = y^2 x^3$

26	$y' - y / (1 - x^2) = 1 + x; y(0) = 0$	$xy' + y = x^3 y^3$
27	$y' + y / x = -2 / x^2; y(1) = 1$	$xy' - 2y = 2x^2 \sqrt{y}$
28	$xy' + y - e^x = 0; y(1) = e$	$xy' + y = x^3 y^3 e^x$
29	$y' + 2xy = xe^{-x^2}; y(0) = 4$	$xy' + y = x^3 y^2$
30	$xy' - 2y = x^3 \cos x; y(\pi) = 1$	$xy' + y = x^{-2} y^{-2}$

Задача 3. Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку

1	$y''(e^x + 1) + y' = 0$	11	$x^2 y'' = y'^2$	21	$y''(1 + y) = y'^2 + y'$
2	$y''(1 + x^2) = -y'^2 - 1$	12	$2xy'y'' = y'^2 - 1$	22	$yy'' - yy' \ln y = y'^2$
3	$y'' \operatorname{ctg} 2x + 2y' = 0$	13	$y''x \ln x = y'$	23	$y'' = (2 + y)y'$
4	$(1 + \sin x)y'' = y' \cos x$	14	$xy'' + y' = 1$	24	$y''x = 2y' + 1$
5	$y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0$	15	$y'' \operatorname{ctg} y = -y'^2$	25	$y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$
6	$y'' \operatorname{tg} 5x = 5y'$	16	$yy'' - y'^2 = 0$	26	$(x - 1)y'' = y'$
7	$y'' = 2(y' - 1) \operatorname{ctg} x$	17	$y'' \sqrt{y} = y'$	27	$y'' - y'e^y = 0$
8	$(1 - \cos x)y'' = y' \sin x$	18	$y''(y + 2) = y'^2$	28	$yy'' - y'^2 - y'^3 = 0$
9	$y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$	19	$y'' = 2yy'$	29	$y'y'' + x = 0$
10	$y^4 - y^3 y'' = 1$	20	$yy'' - y'^2 - 1 = 0$	30	$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння із спеціальним виглядом правої частини

1	$y'' + 7y' + 10y = 40e^{3x}$	16	$y'' - y = 4xe^x$
2	$y'' + y' = 2x \sin x$	17	$y'' + 100y = 96 \sin 2x$
3	$y'' - y' = 4 - 6x$	18	$y'' + y' = 2x \cos x$
4	$y'' - 2y' + y = x^3$	19	$y'' - 5y' = 15x^2 + 4x + 3$
5	$y'' - 3y' + 2y = (2x^2 + 4x + 1)e^{3x}$	20	$y'' - 2y' + y = x^3 - 5x^2$
6	$y'' - 2y' + y = e^x \sin x$	21	$y'' + y' = 8xe^x$
7	$y'' - 9y = 37e^{-3x} \sin x$	22	$y'' + 2y' = 5(\sin x + \cos x)e^x$
8	$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$	23	$y'' + 3y' + 2y = 5e^{-x}$
9	$y'' + y = 9 \cos 2x$	24	$y'' - 5y' = 25(\sin 5x - \cos 5x)$
10	$y'' + 2y' + 5y = (8x - 4)e^x$	25	$y'' + 9y = 74e^x \cos 3x$

11	$y'' - 4y' + 8y = 4e^{2x}$	26	$y'' + 2y' + y = e^{-x}$
12	$y'' - 6y' + 25y = 30\sin x + 18\cos x$	27	$y'' + 4y = 8\sin 2x$
13	$y'' - 2y' - 3y = 9x^2 + 4$	28	$y'' + 2y' = 8x^3$
14	$y'' + y' - 2y = 10e^{3x} + 4e^{-3x}$	29	$y'' + 4y' = 16x + 3e^{-x}$
15	$y'' + y = 15\sin 4x + 30\cos 4x$	30	$y'' + 3y' = 20e^x \cos 2x$

Задача 5. За означенням стійкості по Ляпунову дослідити на стійкість розв'язок рівняння, що задовольняє задану початкову умову

1	$x' = 1 + t - x, \quad x(0) = 0$	16	$x' = -\sin x, \quad x(0) = 0$
2	$x' = t + x, \quad x(0) = 1$	17	$x' = -x/t, \quad x(1) = 0$
3	$x' = 2t(1 + x), \quad x(0) = 0$	18	$x' = 2t - x, \quad x(0) = 0$
4	$x' = t^2 - x, \quad x(1) = 1$	19	$x' = 1 - x^2, \quad x(0) = -1$
5	$x' = 2 + t, \quad x(0) = 1$	20	$x'(1 + t^2) = -x, \quad x(0) = 0$
6	$x' = 1 - x, \quad x(0) = 1$	21	$x' = t(x - 1), \quad x(0) = 1$
7	$x' = -t(x - 1), \quad x(0) = 1$	22	$x' = t - x, \quad x(0) = 1$
8	$x' = t + 2x, \quad x(0,5) = -0,5$	23	$x' = t - 1, \quad x(0) = -1$
9	$x' = x(4 - t^2), \quad x(0) = 0$	24	$3(t - 1)x' = x, \quad x(2) = 0$
10	$x' = \cos t, \quad x(0) = 1$	25	$x' = 2tx, \quad x(0) = 0$
11	$tx' = 2x, \quad x(1) = 0$	26	$tx' = (1 + t)x, \quad x(1) = e$
12	$x' = x \operatorname{ctg} t, \quad x(\pi/2) = 3$	27	$tx' = -3x, \quad x(1) = 0$
13	$(1 + e^t)x' = xe^t, \quad x(0) = 4$	28	$(t + 1)x' = -x, \quad x(-1) = e$
14	$x' = 1 + t - x, \quad x(0) = 0$	29	$x' = (2 - t^3)x, \quad x(0) = 0$
15	$t^2x' + x = 0, \quad x(1) = e$	30	$x' = 1 + x, \quad x(0) = -1$

Задача 6. Дослідити на стійкість систему диференціальних рівнянь

1	$\begin{cases} x'(t) = -4x + y \\ y'(t) = 3x - 2y \\ z'(t) = 2x + 3y - 4z \end{cases}$	11	$\begin{cases} x'(t) = x - 3y + 4z \\ y'(t) = 4x - 7y + 8z \\ z'(t) = 6x - 7y + 7z \end{cases}$	21	$\begin{cases} x'(t) = -2x - z \\ y'(t) = 3x - 4y + 7z \\ z'(t) = x - 2z \end{cases}$
2	$\begin{cases} x'(t) = x - 2y - z \\ y'(t) = -x + y + z \\ z'(t) = x - z \end{cases}$	12	$\begin{cases} x'(t) = -x + y + 5z \\ y'(t) = -2y + z \\ z'(t) = -3z \end{cases}$	22	$\begin{cases} x'(t) = -3x + 2y + z \\ y'(t) = -2y \\ z'(t) = -x + 4y - 3z \end{cases}$

3	$\begin{cases} x'(t) = 5x + 2y - 3z \\ y'(t) = 4x + 5y - 4z \\ z'(t) = 6x + 4y - 4z \end{cases}$	13	$\begin{cases} x'(t) = -x \\ y'(t) = 2x - y \\ z'(t) = x + y - z \end{cases}$	23	$\begin{cases} x'(t) = -2x \\ y'(t) = x - 5y - z \\ z'(t) = 4x + y - 5z \end{cases}$
4	$\begin{cases} x'(t) = -2x \\ y'(t) = 3x - 2y \\ z'(t) = -x - y - z \end{cases}$	14	$\begin{cases} x'(t) = -3x - y \\ y'(t) = x - 3y \\ z'(t) = x + 3y - z \end{cases}$	24	$\begin{cases} x'(t) = -2x - z \\ y'(t) = 4x - 5y + 3z \\ z'(t) = x - 2z \end{cases}$
5	$\begin{cases} x'(t) = -2x - y \\ y'(t) = x - 2y \\ z'(t) = x + 3y - z \end{cases}$	15	$\begin{cases} x'(t) = 3x - y + z \\ y'(t) = -x + 5y - z \\ z'(t) = x - y + 3z \end{cases}$	25	$\begin{cases} x'(t) = -x + y + 3z \\ y'(t) = -4y + z \\ z'(t) = -y - 4z \end{cases}$
6	$\begin{cases} x'(t) = -y - z \\ y'(t) = z \\ z'(t) = x - z \end{cases}$	16	$\begin{cases} x'(t) = -x + y + z \\ y'(t) = x - y + z \\ z'(t) = -x + y - z \end{cases}$	26	$\begin{cases} x'(t) = -3x + 7y + 2z \\ y'(t) = -5y + z \\ z'(t) = -3y - z \end{cases}$
7	$\begin{cases} x'(t) = 2x - y + 2z \\ y'(t) = 5x - 3y + 3z \\ z'(t) = -x - 2z \end{cases}$	17	$\begin{cases} x'(t) = 2x + y + z \\ y'(t) = x + 2y + z \\ z'(t) = x + y + 2z \end{cases}$	27	$\begin{cases} x'(t) = -2x + z \\ y'(t) = 5x - 4y + 2z \\ z'(t) = 2x - 3z \end{cases}$
8	$\begin{cases} x'(t) = -3x + 2y + z \\ y'(t) = x - 2y + 3z \\ z'(t) = -z \end{cases}$	18	$\begin{cases} x'(t) = -5x + 3y + 3z \\ y'(t) = -3y - z \\ z'(t) = -2y - 2z \end{cases}$	28	$\begin{cases} x'(t) = -4x + 2y + z \\ y'(t) = -2y + 2z \\ z'(t) = 2y - 2z \end{cases}$
9	$\begin{cases} x'(t) = -3x + 2y + z \\ y'(t) = -2y + 3z \\ z'(t) = y - 4z \end{cases}$	19	$\begin{cases} x'(t) = x + 2y + 2z \\ y'(t) = 2x + y + 2z \\ z'(t) = 2x + 2y + z \end{cases}$	29	$\begin{cases} x'(t) = -x - y - 3z \\ y'(t) = -x - y + 3z \\ z'(t) = -3x + 3y - 3z \end{cases}$
10	$\begin{cases} x'(t) = -2x + 2y \\ y'(t) = 2x + 5y + 2z \\ z'(t) = 2y - 2z \end{cases}$	20	$\begin{cases} x'(t) = -2x - 2y \\ y'(t) = 2x - 7y \\ z'(t) = -4z \end{cases}$	30	$\begin{cases} x'(t) = x + 2y - 5z \\ y'(t) = 2x - 2y + 2z \\ z'(t) = -5x + 2y + z \end{cases}$

Задача 7. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера.

Визначити характер точки спокою (0,0) та дослідити її на стійкість

1	$\begin{cases} y' = y + 6z \\ z' = -2y + 9z \end{cases}$	11	$\begin{cases} y' = 3y + z \\ z' = y + 3z \end{cases}$	21	$\begin{cases} y' = y - 8z \\ z' = 3y - 10z \end{cases}$
2	$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$	12	$\begin{cases} y' = 3y - z \\ z' = 4y - z \end{cases}$	22	$\begin{cases} y' = 6y - z \\ z' = 3y + 2z \end{cases}$
3	$\begin{cases} y' = -3y + 2z \\ z' = -2y + z \end{cases}$	13	$\begin{cases} y' = y - 2z \\ z' = 3y + 6z \end{cases}$	23	$\begin{cases} y' = -y + z \\ z' = y + z \end{cases}$

4	$\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -6y - 3z \end{cases}$	14	$\begin{cases} y' = 4y + 2z \\ z' = -y + z \end{cases}$	24	$\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = -y - z \end{cases}$
5	$\begin{cases} y' = 5y + z \\ z' = -3y + 9z \end{cases}$	15	$\begin{cases} y' = y + 5z \\ z' = -y - 3z \end{cases}$	25	$\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y + z \end{cases}$
6	$\begin{cases} y' = 7y + 2z \\ z' = 3y + 2z \end{cases}$	16	$\begin{cases} y' = 2y - 3z \\ z' = 3y + 2z \end{cases}$	26	$\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$
7	$\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$	17	$\begin{cases} y' = -y - 2z \\ z' = 3y + 4z \end{cases}$	27	$\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = -2y + 11z \end{cases}$
8	$\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -y + 4z \end{cases}$	18	$\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = y + z \end{cases}$	28	$\begin{cases} y' = 3y + z \\ z' = 20y + 4z \end{cases}$
9	$\begin{cases} y' = y - 3z \\ z' = 3y + z \end{cases}$	19	$\begin{cases} y' = -y + 5z \\ z' = -y + z \end{cases}$	29	$\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = 3y - 2z \end{cases}$
10	$\begin{cases} y' = y - 2z \\ z' = y - z \end{cases}$	20	$\begin{cases} y' = 7y + 2z \\ z' = 3y + 2z \end{cases}$	30	$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 3y - z \end{cases}$

Задача 8. Обчислити подвійний інтеграл по області D

1	$\iint_D 2ye^x dx dy, \quad D: y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 2$
2	$\iint_D xy dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = 2x, x + y = 2, (y \geq 0)$
3	$\iint_D (y^2 / x^2) dx dy, \quad D: y = x, xy = 1, x = 2$
4	$\iint_D xy dx dy, \quad D: y = x^3, x = y^2$
5	$\iint_D e^{x+y} dx dy, \quad D: y = x, x = 1, x = 2, y = 0$
6	$\iint_D xy dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = 1, x + y = 1, (y \geq 0)$
7	$\iint_D x^2 y^2 dx dy, \quad D: y = x^3, x = y^3, x = 1$
8	$\iint_D xy^2 dx dy, \quad D: y = -x^3, x = y^2$
9	$\iint_D xy dx dy, \quad D: x = \sqrt{y}, x = 1, y = 0$

10	$\iint_D x(y-4) dx dy, \quad D: y=x, y=4-x, x=1$
11	$\iint_D x^2 y dx dy, \quad D: y=x^2, x=y^2$
12	$\iint_D (x^2 - y) dx dy, \quad D: y=2-x, y=2x-1, x=0$
13	$\iint_D y^2 e^x dx dy, \quad D: y=e^x, x=0, y=2$
14	$\iint_D 2y dx dy, \quad D: y=e^x, x=0, x=1, y=0$
15	$\iint_D (x^2 + y) dx dy, \quad D: y=x^2, x=y^2$
16	$\iint_D e^{x-y} dx dy, \quad D: y=x, y=4-x, y=1$
17	$\iint_D y dx dy, \quad D: y=-\sqrt{x}, y=x-2, y=0$
18	$\iint_D x^2 \cos xy dx dy, \quad D: y=2x, y=\sqrt{\pi}, y=\sqrt{2\pi}, x=0$
19	$\iint_D y^2 \sin(xy^2) dx dy, \quad D: xy=2, y=\pi/12, y=\pi/4, x=0$
20	$\iint_D (y/x^2) dx dy, \quad D: y=x^2, y=x$
21	$\iint_D x dx dy, \quad D: y^2=2x, y=12-x$
22	$\iint_D (y^2/x) dx dy, \quad D: y=x, y=2x, x=2, x=4$
23	$\iint_D (x+2y) dx dy, \quad D: y=\sqrt{x}, y=2-x, y=0$
24	$\iint_D y^2 \cos(xy/2) dx dy, \quad D: y=x, y=\sqrt{\pi}, y=\sqrt{2\pi}, x=0$
25	$\iint_D x^2 \sin xy dx dy, \quad D: y=x, x=\sqrt{\pi/2}, y=0$
26	$\iint_D (x-2) dx dy, \quad D: x=y^2, y=2-x$
27	$\iint_D y dx dy, \quad D: xy=1, y=x, x=2$
28	$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: y=x, y=1, y=2, x=0$

29	$\iint_D (1/y) \sin(2x/y) dx dy, \quad D: y^2 = 4x, y = \pi/2, x = 0$
30	$\iint_D (3x^2 y^2 + 4xy) dx dy, \quad D: y = x^2, y = \sqrt{x}$

Задача 9. Обчислити площу фігури обмеженої заданими лініями, усі точки якої задовольняють умову $|y| \leq |x|$

1	$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0$	16	$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0$
2	$y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0$	17	$y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$
3	$x^2 + 2x + y^2 = 0, x^2 + 4x + y^2 = 0$	18	$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 + y^2 = 4$
4	$y^2 + 2y + x^2 = 0, y^2 + 4y + x^2 = 0$	19	$y^2 + 2y + x^2 = 0, y^2 + 6y + x^2 = 0$
5	$x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0$	20	$x^2 - 6x + y^2 = 0, x^2 + y^2 = 36$
6	$y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$	21	$y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 + x^2 = 36$
7	$x^2 + 4x + y^2 = 0, x^2 + 8x + y^2 = 0$	22	$x^2 + 6x + y^2 = 0, x^2 + y^2 = 36$
8	$y^2 + 4y + x^2 = 0, y^2 + 8y + x^2 = 0$	23	$y^2 + 6y + x^2 = 0, y^2 + x^2 = 36$
9	$x^2 + 2x + y^2 = 0, x^2 + 6x + y^2 = 0$	24	$y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 + x^2 = 4$
10	$x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0$	25	$y^2 + 2y + x^2 = 0, y^2 + x^2 = 4$
11	$y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$	26	$x^2 + 4x + y^2 = 0, x^2 + 6x + y^2 = 0$
12	$y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$	27	$y^2 + 4y + x^2 = 0, y^2 + 6y + x^2 = 0$
13	$x^2 - 6x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0$	28	$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0$
14	$y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$	29	$x^2 + 2x + y^2 = 0, x^2 + y^2 = 4$
15	$x^2 + 6x + y^2 = 0, x^2 + 8x + y^2 = 0$	30	$x^2 + 2x + y^2 = 0, x^2 + 8x + y^2 = 0$

Задача 10. Обчислити потрійний інтеграл від функції $f(x, y, z)$ по просторовій області V , яка задана обмежуючими її поверхнями

1	$\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz; \quad V: x=0, y=1, y=x, z=0, z=1$
2	$\iiint_V x^2 z \sin(xyz) dx dy dz; \quad V: x=2, y=\pi, z=1, x=0, y=1, z=0$
3	$\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz; \quad V: x=0, y=-2, y=4x, z=0, z=2$
4	$\iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz; \quad V: x=-1, y=2, z=1, x=0, y=0, z=0$

5	$\iiint_V x^2 \text{sh}(3xy) dx dy dz; V : x=1, y=2x, y=0, z=0, z=36$
6	$\iiint_V y^2 z \cos(xyz) dx dy dz; V : x=1, y=2\pi, z=2, x=0, y=1, z=0$
7	$\iiint_V y^2 \cos(\pi xy / 4) dx dy dz; V : x=0, y=-1, y=x/2, z=0, z=-\pi^2$
8	$\iiint_V x^2 z \sin(xyz / 4) dx dy dz; V : x=1, y=2\pi, z=4, x=0, y=0, z=0$
9	$\iiint_V y^2 e^{-xy} dx dy dz; V : x=0, y=-2, y=4x, z=0, z=1$
10	$\iiint_V 2y^2 z e^{2xyz} dx dy dz; V : x=1, y=1, z=1, x=0, y=0, z=0$
11	$\iiint_V y^2 \text{ch}(2xy) dx dy dz; V : x=0, y=1, y=x, z=0, z=8$
12	$\iiint_V x^2 z \text{sh}(xyz) dx dy dz; V : x=2, y=1, z=1, x=0, y=0, z=0$
13	$\iiint_V y^2 e^{xy/2} dx dy dz; V : x=0, y=2, y=2x, z=0, z=-1$
14	$\iiint_V y^2 z \cos(xyz / 3) dx dy dz; V : x=3, y=1, z=2\pi, x=0, y=0, z=0$
15	$\iiint_V y^2 \cos(\pi xy/2) dx dy dz; V : x=0, y=-1, y=x, z=0, z=2\pi^2$
16	$\iiint_V x^2 z \text{sh}(xyz) dx dy dz; V : x=1, y=-1, z=1, x=0, y=0, z=0$
17	$\iiint_V y^2 \cos(\pi xy) dx dy dz; V : x=0, y=1, y=2x, z=0, z=\pi^2$
18	$\iiint_V 2x^2 z \text{sh}(2xyz) dx dy dz; V : x=2, y=0,5, z=0,5, x=0, y=0, z=0$
19	$\iiint_V x^2 \text{sh}(2xy) dx dy dz; V : x=-1, y=x, y=0, z=0, z=8$
20	$\iiint_V x^2 z \sin(xyz/2) dx dy dz; V : x=1, y=4, z=\pi, x=0, y=0, z=0$
21	$\iiint_V y^2 \text{ch}(xy) dx dy dz; V : x=0, y=-1, y=x, z=0, z=2$
22	$\iiint_V x^2 z \text{ch}(xyz) dx dy dz; V : x=1, y=1, z=1, x=0, y=0, z=0$
23	$\iiint_V x^2 \cos(\pi xy/2) dx dy dz; V : x=2, y=x, y=0, z=0, z=\pi$

24	$\iiint_V y^2 z \cos(xyz/9) dx dy dz; V: x=9, y=1, z=2\pi, x=0, y=0, z=0$
25	$\iiint_V x^2 \cos(\pi xy) dx dy dz; V: x=1, y=2x, y=0, z=0, z=4\pi$
26	$\iiint_V y^2 z \operatorname{ch}(xyz/2) dx dy dz; V: x=2, y=-1, z=2, x=0, y=0, z=0$
27	$\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(xy) dx dy dz; V: x=2, y=x/2, y=0, z=0, z=1$
28	$\iiint_V 2y^2 z \operatorname{ch}(2xyz) dx dy dz; V: x=1/2, y=2, z=-1, x=0, y=0, z=0$
29	$\iiint_V x^2 \sin(4\pi xy) dx dy dz; V: x=1, y=x/2, y=0, z=0, z=8\pi$
30	$\iiint_V 8y^2 z e^{-xyz} dx dy dz; V: x=2, y=-1, z=2, x=0, y=0, z=0$

Задача 11. Знайти об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

1	$x^2 + y^2 = 2y, \quad z = 5/4 - x^2, \quad z = 0$
2	$x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}x, \quad z = x^2 + y^2 - 64, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$
3	$x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 64, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$
4	$x^2 + y^2 = 2y, \quad z = 9/4 - x^2, \quad z = 0$
5	$x^2 + y^2 = 3y, \quad x^2 + y^2 = 6y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
6	$x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 36, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$
7	$x^2 + y^2 = y, \quad x^2 + y^2 = 4y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
8	$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y = 0, \quad z = x^2 + y^2 - 4, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$
9	$x^2 + y^2 = 7x, \quad x^2 + y^2 = 9x, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
10	$x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 = 5y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
11	$x^2 + y^2 = 5y, \quad x^2 + y^2 = 8y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
12	$x^2 + y^2 = 6x, \quad x^2 + y^2 = 9x, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
13	$x^2 + y^2 = 2y, \quad z = 13/4 - x^2, \quad z = 0$
14	$x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}x, \quad z = x^2 + y^2 - 36, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$
15	$x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 12 - y^2, \quad z = 0$
16	$x^2 + y^2 + 2x = 0, \quad z = 17/4 - y^2, \quad z = 0$

17	$x^2 + y^2 + 4x = 0, \quad z = 8 - y^2, \quad z = 0$
18	$x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 4, \quad z = 0 (z \geq 0)$
19	$x^2 + y^2 = 4y, \quad z = 4 - x^2, \quad z = 0$
20	$x^2 + y^2 + 2x = 0, \quad z = 25/4 - y^2, \quad z = 0$
21	$x^2 + y^2 = 4y, \quad x^2 + y^2 = 7y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
22	$x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 16, \quad z = 0 (z \geq 0)$
23	$x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 10 - y^2, \quad z = 0$
24	$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x = 0, \quad z = x^2 + y^2 - 4, \quad z = 0 (z \geq 0)$
25	$x^2 + y^2 = 8x, \quad x^2 + y^2 = 11x, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
26	$x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}x, \quad z = x^2 + y^2 - 16, \quad z = 0 (z \geq 0)$
27	$x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 21/4 - y^2, \quad z = 0$
28	$x^2 + y^2 = 4y, \quad z = 6 - x^2, \quad z = 0$
29	$x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}x, \quad z = x^2 + y^2 - 4, \quad z = 0 (z \geq 0)$
30	$x^2 + y^2 = 9x, \quad x^2 + y^2 = 12x, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$

Задача 12. Знайти роботу сили F при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N

1	$F = (xy - y^2)\bar{i} + x\bar{j}, \quad L: y = 2x^2, M(0,0), N(1,2)$
2	$F = (x^2 + y^2)(\bar{i} + 2\bar{j}), \quad L: x^2 + y^2 = R^2 (y \geq 0), M(R,0), N(-R,0)$
3	$F = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad L: \text{відрізок } MN, M(1,0), N(0,3)$
4	$F = y\bar{i} - x\bar{j}, \quad L: 2x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0), M(1/\sqrt{2},0), N(-1/\sqrt{2},0)$
5	$F = (xy - x)\bar{i} + 0,5x^2\bar{j}, \quad L: y = 2\sqrt{x}, M(0,0), N(1,2)$
6	$F = xy\bar{i} + 2y\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0), M(1,0), N(0,1)$
7	$F = (x - y)\bar{i} + \bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0), M(2,0), N(-2,0)$
8	$F = y\bar{i} - x\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 2 (y \geq 0), M(\sqrt{2},0), N(-\sqrt{2},0)$
9	$F = -y\bar{i} + x\bar{j}, \quad L: y = x^3, M(0,0), N(2,8)$
10	$F = (x - y)\bar{i} + (x + y)\bar{j}, \quad L: y = x^2, M(-1,1), N(1,1)$
11	$F = -x\bar{i} + y\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 / 9 = 1 (x \geq 0, y \geq 0), M(1,0), N(0,3)$
12	$F = y\bar{i} - x\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0), M(1,0), N(-1,0)$
13	$F = xy\bar{i}, \quad L: y = \sin x, M(\pi,0), N(0,0)$

14	$F = x\bar{i} + (x - y)\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 / 9 = 1 (x \geq 0, y \geq 0), M(1, 0), N(0, 3)$
15	$F = (y^2 - y)\bar{i} + x(2y + 1)\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0), M(3, 0), N(-3, 0)$
16	$F = (2xy - y)\bar{i} + (x^2 + x)\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0), M(3, 0), N(-3, 0)$
17	$F = x^2\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 9 (x \geq 0, y \geq 0), M(3, 0), N(0, 3)$
18	$F = (x^2 - 2y)\bar{i} + (y^2 - 2x)\bar{j}, \quad L: \text{отрезок } MN, M(-4, 0), N(0, 2)$
19	$F = (x^2 + y^2)\bar{i} + y^2\bar{j}, \quad L: \text{отрезок } MN, M(2, 0), N(0, 2)$
20	$F = (x^2 + 2y)\bar{i} + (y^2 + 2x)\bar{j}, \quad L: \text{отрезок } MN, M(-4, 0), N(0, 2)$
21	$F = (x + y)^2\bar{i} - (x^2 + y^2)\bar{j}, \quad L: \text{отрезок } MN, M(1, 0), N(0, 1)$
22	$F = (x^2 + 2y)\bar{i} + (y^2 + 2x)\bar{j}, \quad L: 2 - x^2 / 8 = y, M(-4, 0), N(0, 2)$
23	$F = y^2\bar{i} - x^2\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 9 (x \geq 0, y \geq 0), M(3, 0), N(0, 3)$
24	$F = (x + y)\bar{i} + 2x\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0), M(2, 0), N(-2, 0)$
25	$F = y\bar{i} - x^2\bar{j}, \quad L: \text{отрезок } MN, M(-1, 0), N(0, 1)$
26	$F = x^3\bar{i} - y^3\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 4 (x \geq 0, y \geq 0), M(2, 0), N(0, 2)$
27	$F = x^2y\bar{i} - xy^2\bar{j}, \quad L: x^2 + y^2 = 4 (x \geq 0, y \geq 0), M(2, 0), N(0, 2)$
28	$F = (x + y)\bar{i} + (x - y)\bar{j}, \quad L: y = x^2, M(-1, 1), N(1, 1)$
29	$F = y\bar{i} - 2x\bar{j}, \quad L: y = x^3, M(0, 0), N(2, 8)$
30	$F = x^2y\bar{i} - y\bar{j}, \quad L: \text{отрезок } MN, M(-1, 0), N(0, 1)$

Задача 13. Знайти потенціал векторного поля

1	$\bar{a} = (y + z)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + (x + y)\bar{k}$
2	$\bar{a} = 2xyz\bar{i} + x^2z\bar{j} + x^2y\bar{k}$
3	$\bar{a} = (3yz - 5x)\bar{i} + (3xz - 5y)\bar{j} + (3xy - 5z)\bar{k}$
4	$\bar{a} = (yz + 1)\bar{i} + (xz + 2)\bar{j} + (xy + 3)\bar{k}$
5	$\bar{a} = y^2z\bar{i} + 2xyz\bar{j} + y^2x\bar{k}$
6	$\bar{a} = (2yz - 7x)\bar{i} + (2xz - 7y)\bar{j} + (2xy - 7z)\bar{k}$
7	$\bar{a} = (yz - 1)\bar{i} + (xz + 2)\bar{j} + (xy - 4)\bar{k}$
8	$\bar{a} = z^2y\bar{i} + z^2x\bar{j} + 2xyz\bar{k}$
9	$\bar{a} = (4yz - 6x)\bar{i} + (4xz - 6y)\bar{j} + (4xy - 6z)\bar{k}$
10	$\bar{a} = (yz + 5)\bar{i} + (xz + 1)\bar{j} + (xy - 3)\bar{k}$
11	$\bar{a} = (2xy + z^2)\bar{i} + (2yz + x^2)\bar{j} + (2xz + y^2)\bar{k}$

12	$\bar{a} = (9yz - x)\bar{i} + (9xz - y)\bar{j} + (9xy - z)\bar{k}$
13	$\bar{a} = (yz + 7)\bar{i} + (xz - 5)\bar{j} + (xy + 2)\bar{k}$
14	$\bar{a} = (2xz + y^2)\bar{i} + (2xy + z^2)\bar{j} + (2yz + x^2)\bar{k}$
15	$\bar{a} = (yz - 8x)\bar{i} + (xz - 8y)\bar{j} + (xy - 8z)\bar{k}$
16	$\bar{a} = e^x \sin y \bar{i} + e^x \cos y \bar{j} + z \bar{k}$
17	$\bar{a} = (3x + 5yz)\bar{i} + (3y + 5xz)\bar{j} + (3z + 5xy)\bar{k}$
18	$\bar{a} = (yz - 8)\bar{i} + (xz + 4)\bar{j} + (xy - 7)\bar{k}$
19	$\bar{a} = e^y \cos x \bar{i} + e^y \sin x \bar{j} + z \bar{k}$
20	$\bar{a} = (7x + 2yz)\bar{i} + (7y + 2xz)\bar{j} + (7z + 2xy)\bar{k}$
21	$\bar{a} = (yz - 2)\bar{i} + (xz - 3)\bar{j} + (xy - 4)\bar{k}$
22	$\bar{a} = e^x \cos y \bar{i} - e^x \sin y \bar{j} + z \bar{k}$
23	$\bar{a} = (4x + 6yz)\bar{i} + (4y + 6xz)\bar{j} + (4z + 6xy)\bar{k}$
24	$\bar{a} = e^y \sin x \bar{i} - e^y \cos x \bar{j} + z \bar{k}$
25	$\bar{a} = (2xy + z)\bar{i} + (x^2 - 2y)\bar{j} + x\bar{k}$
26	$\bar{a} = (x + 9yz)\bar{i} + (y + 9xz)\bar{j} + (z + 9xy)\bar{k}$
27	$\bar{a} = (1 + yz)\bar{i} + (5 + xz)\bar{j} + (7 + xy)\bar{k}$
28	$\bar{a} = y\bar{i} + (2yz + x)\bar{j} + (y^2 - 2z)\bar{k}$
29	$\bar{a} = (2x + 8yz)\bar{i} + (2y + 8xz)\bar{j} + (2z + 8xy)\bar{k}$
30	$\bar{a} = (z^2 - 2x)\bar{i} + z\bar{j} + (2x + y)\bar{k}$

Задача 14. Знайти потік векторного поля \bar{a} крізь частину поверхні S , що вирізається площинами P_1, P_2 або площиною P (нормаль, зовнішня до замкненої поверхні, яка утворюється даними поверхнями)

1	$\bar{a} = x\bar{i} + y(1 + z^2)\bar{j} + z(1 - y^2)\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, P: z = 0 (z \geq 0)$
2	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 2$
3	$\bar{a} = x\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (z - y)\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 9, P: z = 0 (z \geq 0)$
4	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + \bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 2$
5	$\bar{a} = x\bar{i} + y(1 + z)\bar{j} + (1 - y^2)\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, P: z = 0 (z \geq 0)$
6	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z^3\bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 1$
7	$\bar{a} = (x + xz)\bar{i} + y\bar{j} + (z - x^2)\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0), P: z = 0$
8	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + 2z\bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 3$

9	$\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (y-x)\bar{j} + z\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, P: z = 0 (z \geq 0)$
10	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + \sin z\bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 5$
11	$\bar{a} = (x+xy^2)\bar{i} + (y-yx^2)\bar{j} + z\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 9, P: z = 0 (z \geq 0)$
12	$\bar{a} = (x+xz^2)\bar{i} + y\bar{j} + (z-zx^2)\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 9, P: z = 0 (z \geq 0)$
13	$\bar{a} = x\bar{i} + (y+yz)\bar{j} + (z-y^2)\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, P: z = 0 (z \geq 0)$
14	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + (z-2)\bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 1$
15	$\bar{a} = (x+z)\bar{i} + y\bar{j} + (z-x)\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, P: z = 0 (z \geq 0)$
16	$\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (y-x)\bar{j} - z\bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 2$
17	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 4$
18	$\bar{a} = x(1+y)\bar{i} - yx\bar{j} + (z-1)\bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 3$
19	$\bar{a} = (x+xy)\bar{i} + (y-x^2)\bar{j} + z\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, P: z = 0 (z \geq 0)$
20	$\bar{a} = xyz\bar{i} - x^2z\bar{j} + 3\bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 2$
21	$\bar{a} = 3x\bar{i} - 2y\bar{j} + z\bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 1, P_2: z = 5$
22	$\bar{a} = xy^2\bar{i} - x^2y\bar{j} + \bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 5$
23	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + xyz\bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 5$
24	$\bar{a} = xz\bar{i} + yz\bar{j} + (z^2-1)\bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 4$
25	$\bar{a} = (x-y)\bar{i} + (x+y)\bar{j} + z^2\bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 2$
26	$\bar{a} = xy\bar{i} - x^2\bar{j} + 3\bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 1$
27	$\bar{a} = (x+y)\bar{i} - (x-y)\bar{j} + xz\bar{k}, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 4$
28	$\bar{a} = x(1+y^2)\bar{i} - x\bar{j} + (z-3)\bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 1$
29	$\bar{a} = (xz+y)\bar{i} + (yz-x)\bar{j} + \bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 1$
30	$\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + \bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 4$

Задача 15. Знайти модуль циркуляції векторного поля \bar{a} вздовж контуру Γ

1	$\bar{a} = (x^2 - y)\bar{i} + x\bar{j} + \bar{k}, \Gamma: x^2 + y^2 = 1, z = 1$
2	$\bar{a} = xz\bar{i} - \bar{j} + y\bar{k}, \Gamma: z = 5(x^2 + y^2) - 1, z = 4$
3	$\bar{a} = yz\bar{i} + 2xz\bar{j} + xy\bar{k}, \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = 9, (z > 0)$
4	$\bar{a} = x\bar{i} + yz\bar{j} - x\bar{k}, \Gamma: x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1$
5	$\bar{a} = (x-y)\bar{i} + x\bar{j} - z\bar{k}, \Gamma: x^2 + y^2 = 1, z = 1$
6	$\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}, \Gamma: z = 3(x^2 + y^2) + 1, z = 4$

7	$\bar{a} = yz\bar{i} + 2xz\bar{j} + y^2\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = 16, (z > 0)$
8	$\bar{a} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 9, x + y + z = 1$
9	$\bar{a} = y\bar{i} + (1-x)\bar{j} - z\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 1, (z > 0)$
10	$\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 1, z = 4$
11	$\bar{a} = 4x\bar{i} + 2\bar{j} - xy\bar{k}, \quad \Gamma: z = 2(x^2 + y^2) + 1, z = 7$
12	$\bar{a} = 2y\bar{i} - 3x\bar{j} + z^2\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = z, z = 1$
13	$\bar{a} = -3z\bar{i} + y^2\bar{j} + 2y\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 4, x - 3y - 2z = 1$
14	$\bar{a} = 2y\bar{i} + 5z\bar{j} + 3x\bar{k}, \quad \Gamma: 2x^2 + 2y^2 = 1, x + y + z = 3$
15	$\bar{a} = 2y\bar{i} + \bar{j} - 2yz\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = z^2, z = 2$
16	$\bar{a} = (x - y)\bar{i} + x\bar{j} + z^2\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 4z^2, z = 1/2$
17	$\bar{a} = xz\bar{i} - \bar{j} + y\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 1$
18	$\bar{a} = 2yz\bar{i} + xz\bar{j} - x^2\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = 9, (z > 0)$
19	$\bar{a} = 4x\bar{i} - yz\bar{j} + x\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1$
20	$\bar{a} = -y\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = z^2, z = 1$
21	$\bar{a} = y\bar{i} + 3x\bar{j} + z^2\bar{k}, \quad \Gamma: z = x^2 + y^2 - 1, z = 3$
22	$\bar{a} = 2yz\bar{i} + xz\bar{j} + y^2\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = 16, (z > 0)$
23	$\bar{a} = (2 - xy)\bar{i} - yz\bar{j} - xz\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 4, x + y + z = 1$
24	$\bar{a} = -y\bar{i} + x\bar{j} + 3z^2\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = 1, (z > 0)$
25	$\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + 2z\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = z^2 / 4, z = 2$
26	$\bar{a} = x^2\bar{i} + yz\bar{j} + 2z\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 4$
27	$\bar{a} = y\bar{i} - 2x\bar{j} + z^2\bar{k}, \quad \Gamma: z = 4(x^2 + y^2) + 2, z = 6$
28	$\bar{a} = 3z\bar{i} - 2y\bar{j} + 2y\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 4, 2x - 3y - 2z = 1$
29	$\bar{a} = (x + y)\bar{i} - x\bar{j} + 6\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 1, z = 2$
30	$\bar{a} = 4\bar{i} + 3x\bar{j} + 3xz\bar{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = z^2, z = 3$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Задача 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

1) з відокремлюваними змінними $20x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 5xy^2 dx$.

Розв'язання

Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Виконуючи тотожні перетворення, відокремлюємо змінні:

$$5x(4 + y^2)dx = 3y(1 + x^2)dy,$$

$$\frac{5x}{1 + x^2} dx = \frac{3y}{4 + y^2} dy.$$

Інтегрування дає загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$2,5 \ln |1 + x^2| = 1,5 \ln |4 + y^2| + \ln c.$$

2) Знайти загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Виконуючи заміну $\frac{y}{x} = t$, $y = tx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}x + t$, маємо:

$$x \frac{dt}{dx} + t = \frac{x \cdot tx}{x^2 - t^2 x^2}.$$

Виконуючи тотожні перетворення, дістанемо:

$$x \frac{dt}{dx} + t = \frac{t}{1 - t^2},$$

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{t}{1 - t^2} - t,$$

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{t^3}{1 - t^2}.$$

Заміною змінної рівняння звелось до рівняння з відокремлюваними змінними.

Отже,

$$\frac{(1 - t^2) dt}{t^3} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$-\frac{1}{2t^2} - \ln|t| = \ln|x| + \ln c.$$

Повертаючись до змінної y , дістанемо загальний інтеграл даного диференціального рівняння:

$$-\frac{x^2}{2y^2} - \ln \left| \frac{y}{x} \right| = \ln|x| + \ln c.$$

Задача 2. 1) Розв'язати задачу Коші $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Розв'язання

Маємо лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку. Розв'яжемо його методом Лагранжа варіації довільної сталої. Розглянемо відповідне лінійне однорідне рівняння, що є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \text{ або } \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи дістанемо:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln c \text{ або } y = \frac{c}{x}, \text{ де } c = c(x).$$

Знайдемо $y' = \frac{c'x - c}{x^2}$ і підставимо значення y, y' у дане лінійне неоднорідне рівняння:

$$\frac{c'x - c}{x^2} + \frac{c}{x^2} = \frac{\sin x}{x},$$

звідки за умови $x \neq 0$ дістанемо $c' = \sin x$. Інтегруючи, знайдемо $c = -\cos x + c_1$, $c_1 \equiv \text{const}$.

Підставляємо значення c у розв'язок лінійного однорідного рівняння та дістанемо загальний розв'язок даного лінійного неоднорідного рівняння:

$$y = (c_1 - \cos x) / x.$$

Значення c_1 знайдемо з початкової умови $y(\pi/2) = 1$. Отже $c_1 = 2/\pi$. Таким чином, розв'язок задачі Коші:

$$y = (2/\pi - \cos x) / x.$$

2) Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння Бернуллі:

$$y' + xy = x^3 y^3.$$

Розв'язання

Розв'яжемо рівняння методом Бернуллі. Будемо шукати розв'язок у вигляді добутку $y = u(x)v(x)$, який підставимо у задане рівняння:

$$u'v + uv' + xuv = x^3 u^3 v^3.$$

Винесемо за дужки спільний множник u :

$$u'v + u(v' + xv) = x^3 u^3 v^3.$$

Будемо шукати невідомі функції $u(x)$ та $v(x)$ так, щоб:

$$\begin{cases} v' + xv = 0, \\ u'v = x^3 u^3 v^3. \end{cases}$$

Перше рівняння системи є рівнянням з відокремлюваними змінними, отже:

$$\frac{dv}{dx} = -xv, \quad \frac{dv}{v} = -x dx.$$

Інтегруючи, знайдемо $\ln|v| = -x^2/2$, звідки $v = e^{-x^2/2}$. Знайдене значення $v(x)$ підставимо у друге рівняння системи:

$$u'e^{-x^2/2} = x^3 u^3 e^{-3x^2/2}.$$

Розділяючи змінні, дістанемо:

$$\frac{du}{u^3} = x^3 e^{-x^2} dx.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2u^2} &= \int x^3 e^{-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = x e^{-x^2} dx, \quad v = -e^{-x^2}/2 \end{array} \right] = -\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} + \int x e^{-x^2} dx = \\ &= -\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} - \frac{c}{2} = -\frac{x^2 + 1}{2} e^{-x^2} - \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Звідси виразимо:

$$\frac{1}{u^2} = \frac{x^2 + 1}{e^{x^2}} + c = \frac{x^2 + 1 + ce^{x^2}}{e^{x^2}}, \quad u^2 = \frac{e^{x^2}}{x^2 + 1 + ce^{x^2}}, \quad u(x) = \pm \sqrt{\frac{e^{x^2}}{x^2 + 1 + ce^{x^2}}}.$$

Підставляючи знайдені значення у добуток $y = u(x)v(x)$, дістанемо загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = \pm \sqrt{\frac{e^{x^2}}{x^2 + 1 + ce^{x^2}}} \cdot e^{-x^2/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}}.$$

Задача 3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння другого порядку $y''(y - 4) = y'^2$, що допускає зниження порядку.

Розв'язання

Маємо диференціальне рівняння 2-го порядку, що не містить явно x .

Заміна $y' = z(y)$, $y'' = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$ дозволяє перейти до рівняння першого порядку:

$$z \frac{dz}{dy} (y - 4) = z^2,$$

яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. У випадку $z \neq 0$ скоротимо рівняння на z та відокремимо змінні:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y - 4}.$$

Інтегруючи, знайдемо $\ln|z| = \ln|y-4| + \ln c_1$ або $z = c_1(y-4)$. Підставимо y' замість z . Дістанемо рівняння 1-го порядку $y' = c_1(y-4)$, яке теж є рівнянням з відокремлюваними змінними. Отже, $\frac{dy}{y-4} = c_1 dx$. Інтегруючи, маємо шуканий загальний інтеграл:

$$\ln|y-4| = c_1 x + c_2.$$

Розглянемо окремо випадок $z = 0$. Тоді $y' = 0$ або $y = c$.

Ми знайшли особливий розв'язок диференціального рівняння.

Задача 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння із спеціальним виглядом правої частини:

$$y'' - 4y' + 4y = (23\sin 6x + 47\cos 6x)e^x.$$

Розв'язання

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальним виглядом правої частини. Розглянемо відповідне лінійне однорідне рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ або $(\lambda - 2)^2 = 0$ має єдиний корінь другої кратності $\lambda = 2$. Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$\tilde{y} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

З огляду на праву частину лінійного неоднорідного рівняння запишемо його частинний розв'язок:

$$\bar{y} = e^x (A \sin 6x + B \cos 6x).$$

Для обчислення числових значень сталих A та B , знайдемо:

$$\bar{y}' = e^x ((A - 6B) \sin 6x + (B + 6A) \cos 6x),$$

$$\bar{y}'' = e^x ((-35A - 12B) \sin 6x + (12A - 35B) \cos 6x)$$

та підставимо їх у дане лінійне неоднорідне рівняння:

$$e^x ((-35A - 12B) \sin 6x + (12A - 35B) \cos 6x) - 4e^x ((A - 6B) \sin 6x + (B + 6A) \cos 6x) + 4e^x (A \sin 6x + B \cos 6x) = (23 \sin 6x + 47 \cos 6x) e^x.$$

Виконуючи тотожні перетворення, дістанемо:

$$(-35A + 12B) \sin 6x + (-12A - 35B) \cos 6x = 23 \sin 6x + 47 \cos 6x.$$

Дорівнюючи коефіцієнти при $\sin 6x$ та $\cos 6x$ в обох частинах рівняння, дістанемо систему лінійних рівнянь для обчислення значень A та B :

$$\begin{cases} -35A + 12B = 23 \\ -12A - 35B = 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow \bar{y} = -e^x (\sin 6x + \cos 6x).$$

Загальний розв'язок даного диференціального рівняння знайдемо за формулою:

$$y = \tilde{y} + \bar{y} = e^{2x}(c_1 + c_2x) - e^x(\sin 6x + \cos 6x).$$

Задача 5. За означенням стійкості по Ляпунову, дослідити на стійкість розв'язок рівняння $x'(t) = -x$, що задовольняє задану початкову умову $x(0) = 1$.

Розв'язання

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{dx}{dt} = -x \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = -\int dt, \ln|x| = -t + \ln C.$$

Знаходимо загальний розв'язок $x = Ce^{-t}$.

Знайдемо частинний розв'язок $\varphi(t)$, що задовольняє задану початкову умову $x(0) = 1$:

$$x(0) = Ce^0 = C = 1 \Rightarrow \varphi(t) = e^{-t}.$$

Знайдемо інший частинний розв'язок $x(t)$, що задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$:

$$x(0) = Ce^0 = C = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-t}.$$

Зауважимо, що початкова умова $x(t_0) = C_0$ у даному випадку має вигляд $x(0) = 1$. Отже, $t_0 = 0, C_0 = 1$. Розглянемо різницю розв'язків $x(t)$ та $\varphi(t)$ для всіх $t \geq t_0 = 0$:

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 e^{-t} - e^{-t}| \leq |x_0 - 1|.$$

Беремо $\forall \varepsilon > 0$. Тоді $\exists \delta = \varepsilon$, що для кожного розв'язку $x(t)$, значення якого в точці $t_0 = 0$ задовольняють нерівність $|x_0 - C_0| = |x_0 - 1| < \delta$, виконується нерівність $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$. Це означає, що розв'язок рівняння $\varphi(t) = e^{-t}$ стійкий. Крім того, маємо:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |(x_0 - 1)e^{-t}| = 0.$$

Отже, розв'язок досліджуваної задачі Коші асимптотично стійкий.

Задача 6. Дослідити на стійкість систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'(t) = -7x + 8y + 5z, \\ y'(t) = -2y + 3z, \\ z'(t) = 2y - 3z. \end{cases}$$

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння системи:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -7 - \lambda & 8 & 5 \\ 0 & -2 - \lambda & 3 \\ 0 & 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (-7 - \lambda)((-2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 6) =$$

$$= (-7 - \lambda)(\lambda^2 + 5\lambda) = (-7 - \lambda)\lambda(5 + \lambda) = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = -7 < 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -5 < 0$.

Всі $\lambda_i (i=1,2,3)$ мають недодатну дійсну частину, причому корінь з нульовою дійсною частиною простий, отже, система стійка, але асимптотичної стійкості немає.

Задача 7. Розв'язати методом Ейлера систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y' = 2y + 2z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$$

Визначити характер точки спокою $(0,0)$ та дослідити її на стійкість.

Розв'язання

Розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1.$$

Розглянемо корінь $\lambda_1 = 4$. Знайдемо відповідний йому частинний розв'язок:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Розглянемо корінь $\lambda_2 = 1$. Знайдемо відповідний йому частинний розв'язок:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^x.$$

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь має вигляд :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$$

або:

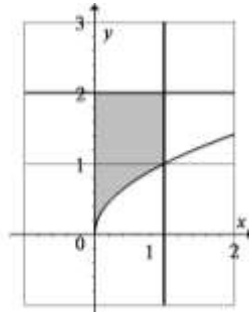
$$\begin{cases} y = C_1 e^{4x} - 2C_2 e^x, \\ z = C_1 e^{4x} + C_2 e^x. \end{cases}$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$ є різними дійсними додатними числами, тому точка спокою $(0,0)$ є нестійким вузлом. Точка спокою нестійка.

Задача 8. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 2xy dx dy$ по області, яка обмежена кривими $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0, x = 1$.

Розв'язання

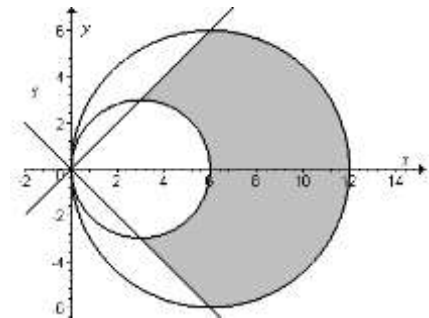
Будуємо область D на рисунку. Бачимо, що в області D x змінюється від 0 до 1, а y від \sqrt{x} до 2.



Обчислимо інтеграл, переходячи від подвійного інтеграла до повторного:

$$\iint_D 2xy dx dy = \int_0^1 x dx \int_{\sqrt{x}}^2 2y dy = \int_0^1 xy^2 \Big|_{\sqrt{x}}^2 dx = \int_0^1 x(4-x) dx = \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Задача 9. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $x^2 - 12x + y^2 = 0$, всі точки якої задовольняють умову $|y| \leq x$.



Розв'язання

Побудуємо задану фігуру на рисунку. Площу даної фігури обчислимо за формулою $S = \iint_D dx dy$. Для обчислення подвійного інтеграла перейдемо до

полярних координат $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Підставимо значення змінних в рівняння кіл, дістанемо рівняння кіл в полярних координатах $r = 6 \cos \varphi, r = 12 \cos \varphi$. З малюнка бачимо, що кут φ між радіус-вектором довільної точки області і додатним напрямком осі Ox змінюється від $-\pi/4$ до $\pi/4$, а довжина r радіус-вектору від $6 \cos \varphi$ до $12 \cos \varphi$. Виконуємо заміну змінних в подвійному інтегралі:

$$S = \iint_D dx dy = \iint_D r dr d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_{6 \cos \varphi}^{12 \cos \varphi} r dr = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 \Big|_{6 \cos \varphi}^{12 \cos \varphi} d\varphi =$$

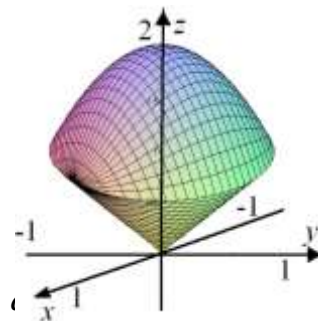
$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 108 \cos^2 \varphi d\varphi = 27 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 54 \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 27 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \text{ (кв.}$$

од.)

Задача 10. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V 2x^2 e^{-xy} dx dy dz$ по просторовій області V , що задана обмежувачими її поверхнями $x=0, y=1, y=-x, z=0, z=1$.

Розв'язання

За умовою z змінюється від 0 до 1. Для визначення границь інтегрування по x і по y побудуємо проекцію заданої призми на площину XOY на рисунку. Переходимо до повторного інтегралу:



$$\begin{aligned} \iiint_V 2x^2 e^{-xy} dx dy dz &= 2 \int_0^1 dz \int_{-1}^0 x^2 dx \int_{-x}^1 e^{-xy} dy = 2z \Big|_0^1 \cdot \int_{-1}^0 x^2 \left(\frac{e^{-xy}}{-x} \right) \Big|_{-x}^1 dx \\ &= \int_{-1}^0 2x(e^{x^2} - e^{-x}) dx = \int_{-1}^0 2xe^{x^2} dx - \int_{-1}^0 2xe^{-x} dx. \end{aligned}$$

Знайдемо 1-й інтеграл внесенням під знак диференціалу:

$$\int_{-1}^0 2xe^{x^2} dx = \int_{-1}^0 e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} \Big|_{-1}^0 = 1 - e.$$

Обчислимо 2-й інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int_{-1}^0 xe^{-x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{array} \right] = -xe^{-x} \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x} dx = -e - e^{-x} \Big|_{-1}^0 = -1.$$

Остаточно дістанемо:

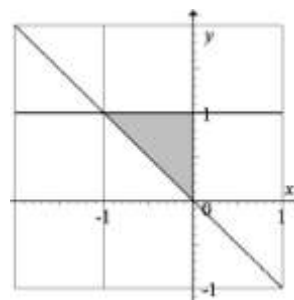
$$\iiint_V 2x^2 e^{-xy} dx dy dz = 1 - e + 2 = 3 - e.$$

Задача 11. Знайти об'єм тіла, заданого обмежувачими його поверхнями $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 2 - z, (z > 0)$.

Розв'язання

Задане тіло обмежене знизу конусом $x^2 + y^2 = z^2$, а зверху параболоїдом $x^2 + y^2 = 2 - z$. Знайдемо лінію їхнього перетину. Прирівняємо $z^2 = 2 - z$. Коренями квадратного рівняння $z^2 + z - 2 = 0$ є $z=1$ і $z=-2$. Нас цікавить додатне значення, підставляючи яке в рівняння конуса або параболоїда, дістанемо лінію їх перетину – коло $x^2 + y^2 = 1$.

Переходимо до циліндричних координат $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$. Задане просторове тіло проектується на площину XOY в круг, тому $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$. Запишемо рівняння конуса і



параболоїда в циліндричних координатах: $z = r$ і $z = 2 - r^2$. Обчислимо об'єм тіла за формулою:

$$V = \iiint_V dv = \iiint_V r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^{2-r^2} dz = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 r z \Big|_r^{2-r^2} dr = 2\pi \int_0^1 r(2 - r^2 - r) dr =$$

$$= 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{5\pi}{6} \text{ (куб. од.)}.$$

Задача 12. Знайти роботу сили $F = x\bar{i} + (xy - 1)\bar{j}$ при переміщенні уздовж лінії $L: y = x^3$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,1)$.

Розв'язання

Обчислимо роботу сили за допомогою криволінійного інтеграла 2-го роду вздовж параболи $y = x^3$ від точки M до точки N , при цьому x змінюється від 0 до 1:

$$A = \int_L x dx + (xy - 1) dy = \left[\begin{array}{l} y = x^3 \\ dy = 3x^2 dx \end{array} \right] = \int_0^1 (x + (x^4 - 1) 3x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x^7}{7} - x^3 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{14}$$

Задача 13. Перевірити, чи є потенційним векторне поле $\bar{a} = (3yz - x)\bar{i} + (3xz - y)\bar{j} + (3xy - z)\bar{k}$, і знайти його потенціал.

Розв'язання

Пересвідчимося, що вектор ротор є нульовим, тому поле є потенційним:

$$\text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3yz - x & 3xz - y & 3xy - z \end{vmatrix} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}.$$

Знайдемо його потенціал:

$$U = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (3yz - x)dx + (3xz - y)dy + (3xy - z)dz.$$

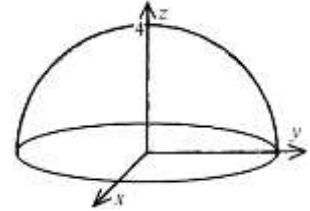
Інтегрування ведеться від початку координат до деякої точки (x, y, z) по ламаній, ланки якої паралельні осям координат OX, OY, OZ . На першій ланці цієї ламаної $y = z = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$. На другій $x = const$, $z = 0$, $dx = 0$, $dz = 0$. На третій $x = const$, $y = const$, $dx = dy = 0$.

Переходимо до суми інтегралів по кожній ланці ламаної:

$$U = \int_0^x (-x) dx + \int_0^y (-y) dy + \int_0^z (3xy - z) dz = -\frac{x^2}{2} \Big|_0^x - \frac{y^2}{2} \Big|_0^y + \left(3xyz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^z =$$

$$= 3xyz - x^2 - y^2 - z^2 + C.$$

Задача 14. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + z^2\vec{k}$ крізь частину поверхні $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16$, вирізану площиною $P: z = 0$ ($z \geq 0$) (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).



Розв'язання

Замкнемо верхню половину сфери частиною площини $P: z = 0$. Обчислимо спочатку потік векторного поля крізь замкнену поверхню за теоремою Гауса – Остроградського.

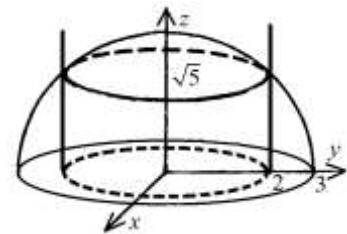
Враховуючи, що $\operatorname{div} \vec{a} = 4 + 2z$, маємо в сферичних координатах:

$$P_{\vec{a}}^{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta (4 + 2r \cos \theta) d\theta =$$

$$= \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^4 r^2 (-4 \cos \theta - r \cos^2 \theta) \Big|_0^{\pi/2} dr = 2\pi \int_0^4 r^2 (4 + r) dr = 2\pi \left(\frac{4r^3}{3} + \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^4 = \frac{896\pi}{3}.$$

Потім обчислимо потік крізь додану частину площини, враховуючи, що на ній $z = 0$ і $dz = 0$. Дістанемо:

$$P_{\vec{a}}^P = \iint_P x dydz + 3y dx dz + z^2 dx dy = 0.$$



Остаточно маємо:

$$P = P_{\vec{a}}^{\sigma} - P_{\vec{a}}^P = 896\pi / 3.$$

Задача 15. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} - xz\vec{j} + xy\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 4, (z > 0). \end{cases}$

Розв'язання

Контуром є лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ і циліндра $x^2 + y^2 = 4$. Це коло з центром у початку координат радіусу 2, розташоване на висоті $z = \sqrt{5}$.

За теоремою Стокса, циркуляція векторного поля по замкненому контуру дорівнює потоку вектору ротора цього поля крізь поверхню σ , натягнену на цей контур. Нехай поверхнею σ буде круг $x^2 + y^2 \leq 4$, розташований на висоті $z = \sqrt{5}$. Одинична нормаль до цієї поверхні $\bar{n}(0,0,1)$.

Обчислимо:

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & xy \end{vmatrix} = 2x \bar{i} - 2z \bar{k}.$$

Тоді:

$$C_a^\Gamma = \iint_{\sigma} (\operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}) d\sigma = - \iint_{\sigma} 2z d\sigma = [z = \sqrt{5}] = -2\sqrt{5} \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Обчислимо поверхневий інтеграл першого роду як площу поверхні, тобто площу круга радіусу 2:

$$C_a^\Gamma = -2\sqrt{5} \pi R^2 = -8\sqrt{5}.$$

Знайдемо модуль циркуляції $|C_a^\Gamma| = 8\sqrt{5}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика. – К. : Либідь, 1996.
2. Вища математика: основні розділи: Підруч.: У 2 кн. /За ред. Кулініча Г. Л. – К. : Либідь, 1997.
3. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: У 2 кн. /За ред. Васильченка І. П. – К. : Либідь, 1992.

Навчальне видання

Вартанян Григорій Михайлович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇЇ ВИКОНАННЯ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ 1 КУРСУ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 051 ЕКОНОМІКА
II СЕМЕСТР**

В авторській редакції

Підп. до друку 14.02.2022. Формат 60x84/16.
Ум.-друк. арк. 1,82. Тираж 11 пр.
Зам. № 2430.

**Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова**

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.