Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2001.– Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 44–50

УДК 517.938

С. А. Щеголев
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О КОЛЕБАНИЯХ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО РЕЗОНАНСОВ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Теорія стійкості, теорія коливань у диференціальних рівняннях,
крайові задачі рівнянь математичної фізики" ОНУ 27.09.2001 р.

Для квазілінійної диференціальної системи четвертого порядку, коефіцієнти якої мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними параметрами, знайдено умови існування частинного розв'язку аналогічної структури при резонансних співвідношеннях між внутрішніми та зовнішніми частотами системи.

Для квазилинейной дифференциальной системы четвертого порядка, коэффициенты которой имеют вид рядов Фурье с медленно меняющимися параметрами, найдены условия существования частного решения аналогичной структуры при резонансных соотношениях между внутренними и внешними частотами системы.

For a forth-order quasilinear differential system, whose coefficients have the form of the Fourier series with slowly varying parameters, the conditions of existence of particular solution of analogous structure by the resonance correlations between internal and external frequences of system are proved.

Статья посвящена исследованию нелинейных колебаний в дифференциальных системах, содержащих медленно меняющиеся параметры [1-8], и продолжает исследования, начатые в [6-8].

Обозначим:

$$G = \left\{t, \varepsilon : t \in R,\ \varepsilon \in \left[0, \varepsilon_0\right],\ \varepsilon_0 \in R^+ = \left]0, +\infty\right[\right\}.$$

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = ir\varphi(t,\varepsilon)Jx + f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \varepsilon A(t,\varepsilon)x + \varepsilon B(t,\varepsilon)y + \mu X(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x,y),$$

$$\frac{dy}{dt} = ir\varphi(t,\varepsilon)Jy + g(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \varepsilon C(t,\varepsilon)x + \varepsilon D(t,\varepsilon)y + \mu Y(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x,y), \qquad (1)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

f_j, $g_j \in B_m$ $(m \geq 1)$, элементы двумерных матриц A, B, C, D принадлежат классу S_{m-1}, $\varphi = d\theta/dt \in S_m$, $\inf\limits_G|\varphi| > 0$, $r \in N$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in D^* \subset C$, нелинейности X_j, Y_j принадлежат классу B_m относительно t, ε, θ и обладают в D^* непрерывными частными производными до 5-го порядка включительно по x_1, x_2, y_1, y_2, и если $x_j, y_j \in B_m$, то эти частные производные также из класса B_m (определения классов S_m и B_m приведены в работе $[6]$).

Изучается вопрос о существовании у системы (1) частных решений классов $B_k\ (0 \le k \le m)$. В работах [6,7] аналогичная задача рассматривалась для систем n уравнений, но при условии, что вещественные части всех собственных значений матрицы коэффициентов линейной части отделены от нуля в G. В работе [8] соответствующий результат был получен для квазилинейной системы 2-го порядка с чисто мнимыми собственными значениями матрицы коэффициентов линейной части. При этом предполагалось отсутствие резонанса между собствеиной частотой системы и частотой вынуждающей силы. В настоящей работе предусматривается наличие резонансных соотношений как между собственными частотами системы (внутреиний резонанс), так и между собственными частотами и частотой вынуждающей силы (внешний резонанс). В отличие от известных результатов [1 – 5] компоненты искомого решения получены в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов классов B_k.

Введем следующие обозначения. Под нормой вектора $f = (f_1, f_2)^T$, где $f_j \in B_m$, будем понимать $\|f\| = \|f_1\|_{B_m} + \|f_2\|_{B_m}$.

$\forall\, h(t,\varepsilon,\theta) \in B_k\ (0 \le k \le m)$ обозначим

$$\Gamma_n(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta \quad (n \in Z).$$

Будем предполагать, что система (1) такова, что:

$$\Gamma_{\pm r}(f_j) \equiv \Gamma_{\pm r}(g_j) \equiv 0 \quad (j = 1,2). \tag{2}$$

Введем векторы $x^0(t,\varepsilon,\theta)$, $y^0(t,\varepsilon,\theta)$, в которых

$$x_j^0 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \ne (-1)^j r)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(f_j)}{i\left(n + (-1)^{j-1} r\right)\varphi}\exp(in\theta) + M_j(t,\varepsilon)\exp\left((-1)^j ir\theta\right),$$

$$y_j^0 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \ne (-1)^j r)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(g_j)}{i\left(n + (-1)^{j-1} r\right)\varphi}\exp(in\theta) + N_j(t,\varepsilon)\exp\left((-1)^j ir\theta\right), \qquad j = 1,2,$$

где функции M_j, N_j определяются из системы уравнений:

$$P_j(t,\varepsilon,M_1,M_2,N_1,N_2) = \Gamma_{(-1)^j r}\left(X_j\left(t,\varepsilon,\theta,x^0,y^0\right)\right) = 0,$$

$$Q_j(t,\varepsilon,M_1,M_2,N_1,N_2) = \Gamma_{(-1)^j r}\left(Y_j\left(t,\varepsilon,\theta,x^0,y^0\right)\right) = 0, \quad j = 1,2. \tag{3}$$

Наложим требование: $\forall t,\varepsilon \in G$ система (3) имеет решение $M_{j0}(t,\varepsilon), N_{j0}(t,\varepsilon)$, и для этого решения выполнено:

$$\inf_G \left|\det \frac{\partial(P_1,P_2,Q_1,Q_2)}{\partial(M_1,M_2,N_1,N_2)}\right| > 0 \tag{4}$$

при $M_j = M_{j0}$, $N_j = N_{j0}$ $(j = 1,2)$. При выполнении (4), очевидно $M_{j0}, N_{j0} \in S_m$, и, следовательно, $x_j^0, y_j^0 \in B_m\ (j = 1,2)$.

Введем векторы $u(t,\varepsilon,\theta) = X\left(t,\varepsilon,\theta,x^0,y^0\right)$, $v(t,\varepsilon,\theta) = Y\left(t,\varepsilon,\theta,x^0,y^0\right)$ и матрицы $k(t,\varepsilon,\theta) = \frac{\partial X(\ldots)}{\partial x}$, $l(t,\varepsilon,\theta) = \frac{\partial X(\ldots)}{\partial y}$, $m(t,\varepsilon,\theta) = \frac{\partial Y(\ldots)}{\partial x}$, $n(t,\varepsilon,\theta) = \frac{\partial Y(\ldots)}{\partial y}$.

Элементы всех этих векторов и матриц, очевидно, из класса B_m.

Произведем теперь в системе (1) подстановку:

$$x = x^0 + \xi, \quad y = y^0 + \eta, \tag{5}$$

где ξ, η – новые неизвестные функции. В результате получим:

$$\frac{d\xi}{dt} = ir\varphi(t,\varepsilon)J\xi + \mu u(t,\varepsilon,\theta) + \varepsilon f^1(t,\varepsilon,\theta) + \varepsilon A(t,\varepsilon)\xi + \varepsilon B(t,\varepsilon)\eta + \mu k(t,\varepsilon,\theta)\xi +$$
$$+\mu l(t,\varepsilon,\theta)\eta + \mu\Xi(t,\varepsilon,\theta,\xi,\eta,\mu),$$
$$\frac{d\eta}{dt} = ir\varphi(t,\varepsilon)J\eta + \mu v(t,\varepsilon,\theta) + \varepsilon g^1(t,\varepsilon,\theta) + \varepsilon C(t,\varepsilon)\xi + \varepsilon D(t,\varepsilon)\eta + \mu m(t,\varepsilon,\theta)\xi +$$
$$+\mu n(t,\varepsilon,\theta)\eta + \mu \mathrm{H}(t,\varepsilon,\theta,\xi,\eta,\mu), \tag{6}$$

где компоненты векторов f^1, g^1 из класса B_{m-1}, а нелинейности Ξ, H содержат слагаемые не ниже второго порядка относительно компонент векторов ξ, η.

Далее введем векторы ξ^0, η^0, компоненты которых определяются формулами:

$$\begin{Bmatrix} \xi_j^0 \\ \eta_j^0 \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq (-1)^j r)}}^{\infty} \frac{1}{i\left(n + (-1)^{j-1} r\right)\varphi} \Gamma_n\left(\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix}\right) \exp(in\theta), \quad j = 1,2,$$

и в системе (6) произведем подстановку:

$$\xi = \mu\xi^0 + \xi^1, \quad \eta = \mu\eta^0 + \eta^1, \tag{7}$$

где ξ^1, η^1 – новые неизвестные векторы. Получим:

$$\frac{d\xi^1}{dt} = ir\varphi(t,\varepsilon)J\xi^1 + \mu^2 f^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon f^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon A(t,\varepsilon)\xi^1 + \varepsilon B(t,\varepsilon)\eta^1 + \mu k(t,\varepsilon,\theta)\xi^1 +$$
$$+ \mu l(t,\varepsilon,\theta)\eta^1 + \left(\mu^2 + \varepsilon^2\right)\left(\alpha(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi^1 + \beta(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^1\right) + \mu\Xi^1(t,\varepsilon,\theta,\xi^1,\eta^1,\mu),$$
$$\frac{d\eta^1}{dt} = ir\varphi(t,\varepsilon)J\eta^1 + \mu^2 g^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon g^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon C(t,\varepsilon)\xi^1 + \varepsilon D(t,\varepsilon)\eta^1 + \mu m(t,\varepsilon,\theta)\xi^1 +$$
$$+ \mu n(t,\varepsilon,\theta)\eta^1 + \left(\mu^2 + \varepsilon^2\right)\left(\gamma(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi^1 + \delta(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^1\right) + \mu \mathrm{H}(t,\varepsilon,\theta,\xi^1,\eta^1,\mu), \tag{8}$$

где компоненты векторов f^2, f^*, g^2, g^* и матриц $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ из класса B_{m-1}.

С целью повышения порядка осциллирующих коэффициентов, пропорциональных μ, при неизвестных ξ^1, η^1, произведем в системе (8) подстановку:

$$\xi^1 = \xi^2 + \mu\left(\phi(t,\varepsilon,\theta)\xi^2 + \chi(t,\varepsilon,\theta)\eta^2\right), \quad \eta^1 = \eta^2 + \mu\left(\sigma(t,\varepsilon,\theta)\xi^2 + \rho(t,\varepsilon,\theta)\eta^2\right), \tag{9}$$

где ξ^2, η^2 – новые неизвестные векторы, а компоненты двумерных матриц $\varphi, \chi, \sigma, \rho$ определяются формулами:

$$\phi_{jj} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(k_{jj})}{in\varphi} \exp(in\theta), \quad \chi_{jj} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(l_{jj})}{in\varphi} \exp(in\theta),$$

$$\sigma_{jj} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(m_{jj})}{in\varphi} \exp(in\theta), \quad \rho_{jj} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(n_{jj})}{in\varphi} \exp(in\theta),$$

$$\phi_{jk} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq (-1)^j 2r)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(k_{jk})}{i\left(n + (-1)^{j-1} 2r\right)\varphi} \exp(in\theta), \quad \chi_{jk} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq (-1)^j 2r)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(l_{jk})}{i\left(n + (-1)^{j-1} 2r\right)\varphi} \exp(in\theta),$$

$$\sigma_{jk} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq (-1)^j 2r)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(m_{jk})}{i\left(n + (-1)^{j-1} 2r\right)\varphi} \exp(in\theta), \; \rho_{jk} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq (-1)^j 2r)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(n_{jk})}{i\left(n + (-1)^{j-1} 2r\right)\varphi} \exp(in\theta) \; (j \neq k).$$

Предполагая μ достаточно малым, в результате подстановки (9) получим:

$$\frac{d\xi^2}{dt} = \mu\left(\Gamma(k(t,\varepsilon,\theta))\xi^2 + \Gamma(l(t,\varepsilon,\theta))\eta^2\right) + ir\varphi(t,\varepsilon)J\xi^2 + \mu^2 p^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon p^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$
$$+\varepsilon A(t,\varepsilon)\xi^2 + \varepsilon B(t,\varepsilon)\eta^2 + \left(\mu^2+\varepsilon^2\right)\left(P(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi^2 + Q(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^2\right) +$$
$$+\mu\Xi^2\left(t,\varepsilon,\theta,\xi^2,\eta^2,\mu\right),$$

$$\frac{d\eta^2}{dt} = \mu\left(\Gamma(m(t,\varepsilon,\theta))\xi^2 + \Gamma(n(t,\varepsilon,\theta))\eta^2\right) + ir\varphi(t,\varepsilon)J\eta^2 + \mu^2 q^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon q^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$
$$+\varepsilon C(t,\varepsilon)\xi^2 + \varepsilon D(t,\varepsilon)\eta^2 + \left(\mu^2+\varepsilon^2\right)\left(R(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi^2 + S(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^2\right) +$$
$$+\mu H^2\left(t,\varepsilon,\theta,\xi^2,\eta^2,\mu\right), \qquad (10)$$

где компоненты векторов p^2, p^*, q^2, q^* и матриц P,Q,R,S из класса B_{m-1}, а под символом $\Gamma(A(t,\varepsilon,\theta))$ ($A = (a_{jk})_{j,k=1,2}$ – матрица с коэффициентами из B_m) понимается матрица вида:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_0(a_{11}) & \Gamma_{-2r}(a_{12})\exp(-i2r\theta) \\ \Gamma_{2r}(a_{21})\exp(i2r\theta) & \Gamma_0(a_{22}) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим блочную матрицу 4-го порядка:

$$W(t,\varepsilon,\theta) = \begin{pmatrix} \Gamma(k(t,\varepsilon,\theta)) & \Gamma(l(t,\varepsilon,\theta)) \\ \Gamma(m(t,\varepsilon,\theta)) & \Gamma(n(t,\varepsilon,\theta)) \end{pmatrix}.$$

Несложно убедиться в справедливости равенства:

$W(t,\varepsilon,\theta) = V(t,\varepsilon,\theta)L(t,\varepsilon)V^{-1}(t,\varepsilon,\theta)$, где $V = \mathrm{diag}(1, \exp(i2r\theta), 1, \exp(-i2r\theta))$,

$$L(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \Gamma_0(k_{11}) & \Gamma_{-2r}(k_{12}) & \Gamma_0(l_{11}) & \Gamma_{-2r}(l_{12}) \\ \Gamma_{2r}(k_{21}) & \Gamma_0(k_{22}) & \Gamma_{2r}(l_{21}) & \Gamma_0(l_{22}) \\ \Gamma_0(m_{11}) & \Gamma_{-2r}(m_{12}) & \Gamma_0(n_{11}) & \Gamma_{-2r}(n_{12}) \\ \Gamma_{2r}(m_{21}) & \Gamma_0(m_{22}) & \Gamma_{2r}(n_{21}) & \Gamma_0(n_{22}) \end{pmatrix}.$$

Матрица $L(t,\varepsilon)$ состоит из элементов класса S_m.

Теорема 1. *Пусть система* (10) *такова, что для матрицы* $L(t,\varepsilon)$ *существует матрица* $U(t,\varepsilon)$ *с элементами из* S_m, *удовлетворяющая условиям:*

1) $\inf\limits_G \left|\det U(t,\varepsilon)\right| > 0$,

2) $U^{-1}LU = T(t,\varepsilon)$ - *нижняя треугольная матрица 4-го порядка,*

3) $\inf\limits_G \left|\mathrm{Re}\,\lambda_j(t,\varepsilon)\right| > 0$ $(j = \overline{1,4})$,

где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ *– собственные значения матрицы* L.

Тогда $\exists\mu^* > 0,\ \varepsilon^* > 0$ *такие, что в области* $G_1 = \left\{t\in R, \varepsilon\in[0,\varepsilon_0], \mu\in\left]0,\mu^*\right]\right\}$ *система (10) имеет по меньшей мере одно частное решение класса* B_{m-1}.

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$\mu(VU)^{-1}VLV^{-1}(VU) + ir\varphi(VU)^{-1}\Lambda(VU) - \left(VU^{-1}\right)\frac{d}{dt}(VU) = \mu T - ir\varphi E_4 - U^{-1}\frac{dU}{dt}, \qquad (11)$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(-1,1,-1,1)$, $E_4 = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$. Применив к системе (10) преобразование

$$\mathrm{colon}\left(\xi^2,\eta^2\right) = V(t,\varepsilon,\theta)\,U(t,\varepsilon)\mathrm{colon}\left(\xi^3,\eta^3\right), \qquad (12)$$

где ξ^3,η^3 – новые неизвестные векторы, придем к системе:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi^3\\ \eta^3\end{pmatrix} = (\mu T(t,\varepsilon) - ir\varphi(t,\varepsilon)E_4)\begin{pmatrix}\xi^3\\ \eta^3\end{pmatrix} + \mu^2\begin{pmatrix}f^3(t,\varepsilon,\theta,\mu) & p^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\\ g^3(t,\varepsilon,\theta,\mu) & q^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\end{pmatrix} +$$

$$+\mu^2 P^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)\begin{pmatrix}\xi^3\\ \eta^3\end{pmatrix} + \varepsilon R^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)\begin{pmatrix}\xi^3\\ \eta^3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\Xi^3(t,\varepsilon,\theta,\xi^3\eta^3,\mu)\\ \mathrm{H}^3(t,\varepsilon,\theta,\xi^3,\eta^3\mu)\end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Все коэффициенты системы (13) из класса B_{m-1}. Нелинейности Ξ^3, H^3 содержат слагаемые не ниже второго порядка относительно компонент векторов ξ^3, η^3.

Наряду с системой (13) рассмотрим вспомогательную систему:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi^3\\ \eta^3\end{pmatrix} = (\mu T(t,\varepsilon) - ir\varphi(t,\varepsilon)E_4)\begin{pmatrix}\xi^3\\ \eta^3\end{pmatrix} + \mu^2\begin{pmatrix}f^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\\ g^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\end{pmatrix} + \varepsilon^*\begin{pmatrix}p^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\\ q^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\end{pmatrix} +$$

$$+\mu^2 P^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)\begin{pmatrix}\xi^3\\ \eta^3\end{pmatrix} + \varepsilon^* R^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)\begin{pmatrix}\xi^3\\ \eta^3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\Xi^3(t,\varepsilon,\theta,\xi^3,\eta^3,\mu)\\ \mathrm{H}^3(t,\varepsilon,\theta,\xi^3,\eta^3,\mu)\end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Произведя в системе (14) подстановку

$$\begin{pmatrix}\xi^3\\ \eta^3\end{pmatrix} = \frac{\varepsilon^* + \mu^2}{\mu}\begin{pmatrix}\xi^4\\ \eta^4\end{pmatrix}, \qquad (15)$$

придем к системе:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi^4\\ \eta^4\end{pmatrix} = (\mu T(t,\varepsilon) - ir\varphi(t,\varepsilon)E_4)\begin{pmatrix}\xi^4\\ \eta^4\end{pmatrix} + \frac{\mu^3}{\mu^2+\varepsilon^*}\begin{pmatrix}f^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\\ g^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^*\mu}{\mu^2+\varepsilon^*}\begin{pmatrix}p^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\\ q^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\end{pmatrix} +$$

$$+\mu^2 P(t,\varepsilon,\theta,\mu)\begin{pmatrix}\xi^4\\ \eta^4\end{pmatrix} + \varepsilon^* R^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)\begin{pmatrix}\xi^4\\ \eta^4\end{pmatrix} + (\mu^2+\varepsilon^*)\begin{pmatrix}\Xi^4(t,\varepsilon,\theta,\xi^4,\eta^4,\mu)\\ \mathrm{H}^4(t,\varepsilon,\theta,\xi^4,\eta^4,\mu)\end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Рассмотрим соответствующую системе (16) порождающую систему:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi_0^4\\ \eta_0^4\end{pmatrix} = (\mu T - ir\varphi E_4)\begin{pmatrix}\xi_0^4\\ \eta_0^4\end{pmatrix} + \frac{\mu^3}{\mu^2+\varepsilon^*}\begin{pmatrix}f^3\\ g^3\end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^*\mu}{\mu^2+\varepsilon^*}\begin{pmatrix}p^3\\ q^3\end{pmatrix}. \qquad (17)$$

В силу условия 3) теоремы на основании леммы из работы [8] можем заключить, что система (17) имеет единственное частное решение ξ_0^4, η_0^4 класса B_{m-1}, и $\exists K \in \left]0,+\infty\right[$ такое, что:

$$\|\xi_0^4\| + \|\eta_0^4\| \le K\left(\|f^3\| + \|g^3\| + \|p^3\| + \|q^3\|\right).$$

Решение класса B_{m-1} системы (16) ищем методом последовательных приближений, выбрав в качестве начального ξ_0^4, η_0^4, а последующие определив как решения класса B_{m-1} линейных неоднородных систем:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi_{j+1}^4\\ \eta_{j+1}^4\end{pmatrix} = (\mu T - ir\varphi E_4)\begin{pmatrix}\xi_{j+1}^4\\ \eta_{j+1}^4\end{pmatrix} + \frac{\mu^3}{\mu^2+\varepsilon^*}\begin{pmatrix}f^3\\ g^3\end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^*\mu}{\mu^2+\varepsilon^*}\begin{pmatrix}p^3\\ q^3\end{pmatrix} + \mu^2 P^*\begin{pmatrix}\xi_j^4\\ \eta_j^4\end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon^* R^*\begin{pmatrix}\xi_j^4\\ \eta_j^4\end{pmatrix} + (\mu^2+\varepsilon^*)\begin{pmatrix}\Xi^4(t,\varepsilon,\theta,\xi_j^4,\eta_j^4,\mu)\\ \mathrm{H}^4(t,\varepsilon,\theta,\xi_j^4,\eta_j^4,\mu)\end{pmatrix}, \quad j = 0,1,2,\ldots \qquad (18)$$

Используя методику работы [8] и принцип сжатых отображений [9], несложно показать, что при достаточно малых значениях μ и $\varepsilon^*\mu^{-1}$ процесс (18) сходится по норме $\|\cdot\|_{B_{m-1}}$ к решению класса B_{m-1} системы (16).

Выбирая теперь в системе (13) $\varepsilon < \varepsilon^*$, получим, что эта система также обладает частным решением класса B_{m-1}, что с учетом (12) влечет при достаточно малых μ и ε существование частного решения класса B_{m-1} системы (10).

Теорема доказана.

Из теоремы 1 с учетом (5), (7), (9) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *такова, что*

1) *выполнены соотношения* (2), (4),
2) *для системы* (10) *выполнены все условия теоремы* 1.

Тогда $\exists \mu_1 > 0,\ \varepsilon_1 > 0$ *такие, что в области*

$G_1 = \{t \in R, \varepsilon \in [0, \varepsilon_1],\ \mu \in]0, \mu_1]\}$

система (1) *имеет частное решение класса* B_{m-1}.

В качестве примера использования теоремы 2 рассмотрим систему, описывающую колебания двух слабосвязанных осцилляторов типа Ван-дер-Поля [10]:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2} + \phi^2(t,\varepsilon)\xi = l(t,\varepsilon)\sin\theta(t,\varepsilon) + \mu\left(1-\xi^2-\eta^2\right)\frac{d\xi}{dt},\\ &\frac{d^2\eta}{dt^2} + \phi^2(t,\varepsilon)\eta = \mu\left(1-\xi^2-\eta^2\right)\frac{d\eta}{dt},\end{aligned} \tag{19}$$

скалярные вещественные функции $l, \varphi = d\theta/dt \in S_m$, $d\varphi/dt = \varepsilon\varphi_1(t,\varepsilon)$, $\inf\limits_G |\varphi| > 0$.

Перейдем от системы (19) к системе вида (1), в которой:

$$r = 1, f = \frac{il}{2\varphi}\sin 2\theta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, A = D = \frac{\varphi_1}{2\varphi}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, B = C = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_1 = -X_2 = -\frac{1}{2}\left(1-(x_1+x_2)^2-(y_1+y_2)^2\right)(x_2-x_1),$$

$$Y_1 = -Y_2 = -\frac{1}{2}\left(1-(x_1+x_2)^2-(y_1+y_2)^2\right)(y_2-y_1).$$

Очевидно, соотиошения (2) выполиены. Система (3) в данном случае имеет вид:

$$-M_1 + 4A_1^2M_2 + M_1^2M_2 - N_1^2M_2 + 2M_1N_1N_2 = 0,$$

$$M_2 + 4A_1^2M_1 - M_1M_2^2 + M_1N_2^2 - 2N_1N_2M_2 = 0,$$

$$-N_1 + 4A_1^2N_2 - M_1^2N_2 + N_1^2N_2 + 2M_1M_2N_1 = 0,$$

$$N_2 + 4A_1^2N_1 + M_2^2N_1 - N_2^2N_1 - 2M_1M_2N_2 = 0,$$

где $A_1 = il\left(12\varphi^2\right)^{-1}$.

Эта система имеет решение $M_1 = M_2 = N_1 = N_2 = 0$. Определитель в соотношении (4) имеет вид:

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 4A_1^2 & 0 & 0\\ 4A_1^2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 4A_1^2\\ 0 & 0 & 4A_1^2 & 1\end{pmatrix} = \left(\frac{l^2}{1296\varphi^8}+1\right)^2 \geq 1 > 0,$$

т.е. условис (4) выполнсно.

Матрица $L(t,\varepsilon)$, фигурирующая в условии теоремы 1, имеет вид $\left(\frac{1}{2}4A_1^2\right)E_4$. Все ее собственные значения $\lambda_j=\frac{1}{2}\left(1-\frac{l^2}{18\varphi^4}\right)$ $\left(j=\overline{1,4}\right)$. Тогда, очевидно $U(t,\varepsilon)=E_4$.

Следовательно, для выполнения условий теоремы 1 достаточно выполнения неравенства:

$$\inf_G\left|1-l^2(t,\varepsilon)/\left(18\varphi^4(t,\varepsilon)\right)\right|>0.$$

1. **Митропольский Ю. А.** Нелинейная механика. Асимптотические методы.– К.: ИМ НАНУ, 1995.– 397 с.
2. **Самойленко А.М., Петришин Р.І.** Багаточастотні коливання нелінійних систем. – К.: ІМ НАНУ, 1998.– 340 с.
3. **Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н.** Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.– К.: Вища школа, 1985. – 248 с.
4. **Меркин М. Р., Фридман В. М.** Проекционный метод решения задачи о вынужденных колебаниях в нелинейных системах с медленно меняющимися параметрами // Прикл. матем. и механ.– 1981.– Т. 45, вып. 1.– С. 71–76.
5. **Бурд В. Ш.** Резонансные почти периодические колебания в нелинейных двумерных системах с медленно меняющимися параметрами // Прикл. матем. и механ.– 1996.– Т. 60, вып. 3.– С. 397–404.
6. **Костин А. В., Щеголев С. А.** Об одном классе решений дифференциальной системы с медленно меняющимися параметрами // Укр. матем. журн.– 1989.– Т. 41, № 1.– С. 101–103.
7. **Щеголев С. А.** О решениях квазилинейной дифференциальной системы с периодическими коэффициентами // Укр. матем. журн.– 1993.– Т. 45, № 8.– С. 1157-1161.
8. **Костин А. В., Щеголев С. А.** О решениях квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами // Укр. матем. журн.– 1998.– Т. 50, № 5.– С. 654–664.
9. **Треногин В. А.** Функциональный анализ.– М.: Наука, 1980.– 496 с.
10. **Старжинский В. М.** Прикладные методы нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977.– 256 с.