Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: **«Розподіл значень арифметичних функцій в коротких інтервалах»**

«Distribution of values of arithmetic functions in short intervals»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Златєва Олена Степанівна

Керівник: к. ф.-м. н., доц. Савастру О.В
Рецензент: д. ф.-м. н. Варбанець П. Д.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від «_____» ________ р.
Завідувач кафедри
_____________ __________________

Захищено на засіданні ЕК № _______
Протокол № _____ від «_____» _____ р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
_____________ ______________________

Одеса — 2019 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Вивчення поведінки арифметичних функцій на коротких інтервалах є однією з основних задач аналітичної теорії чисел. Під розподілом арифметичної функції $f(x)$ на коротких інтервалах будемо розуміти дослідженння сум виду

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} f(n)$$

де $y = o(x)$ при $x \to \infty$.

Арифметична функція $f(x)$ — це така функція, яка визначена на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, що приймає значення в множині комплексних чисел $\mathbb{C}$.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

Арифметична функція $f(n)$ називається мультиплікативною, якщо для будь-яких взаємно простих чисел n_1 та n_2, виконується рівність:

$$f(n_1 \cdot n_2) = f(n_1)f(n_2)$$

Одним із перших результатів, який був опублікован щодо цієї проблеми, була стаття Рамачандра [7], який пізніше був доопрацьований Катаї та Субарао[12]. Зовсім недавно Куї отримав короткий інтервальний варіант методу Сельберга-Деланжа, який розроблен Сельбергом і Деланжем в період з 1954 по 1971 рр. Це дає можливість доведення загальної теореми, що задає правильний порядок величини багатьох арифметичних функцій.

У статті [13] було розроблено новий метод для мультиплікативних функцій f, таких, що $f(p)$ близька до 1 для кожного простого p, який спирається на теореми Філасети-Трифонова та результати Хакслі-Саргоса для цілих точок поблизу певних гладких кривих. Він призводить до більш точних оцінок великого класу мультиплікативних функцій.

У цій роботі ми отримуємо асимптотичні результати для коротких сум арифметичних функцій F, таких як $\tau(n), \tau^2(n), r(n)$.

Об'єкт дослідження – арифметичні функції.

Предмет дослідження – розподіл значень арифметичних функцій в коротких інтервалах

Задачі:

1) розглянути методи побудови інтервальних оцінок певного класу мультиплікативних функцій;

2) розглянути теорему Бруна-Тітчмарша та її застосування;

3) розподіл в коротких інтервалах спеціального класу арифметичних функці, які є згорткою Діріхле.

4) розглянути теорему Рамачандра та її уточнення.

ВИСНОВКИ

У данній работі ми визначали поведінки арифметичних функцій на коротких інтервалах. Під розподілом арифметичної функції $f(x)$ на коротких інтервалах розглядали сум виду

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} f(n)$$

де $y = o(x)$ при $x \to \infty$.

Одним із перших результатів, який був опублікован щодо цієї проблеми, була стаття Рамачандра. Зовсім недавно Куї отримав короткий інтервальний варіант методу Сельберга-Деланжа, який розроблен Сельбергом і Деланжем в період з 1954 по 1971 рр. Це дає можливість доведення загальної теореми, що задає правильний порядок величини багатьох арифметичних функцій.

Спочатку, ми розглянули теорему Бруна-Тітчмарша про інтервальні оцінки певного класу мультиплікативних функцій. Потім, ми розглянили метод гіперболи Діріхле для коротких інтервалах та цей метод застосували на деяких арифметичних функціях. Була розглянута теорема Рамчандра. Ми отримали асимптотичні результати деяких арифметичних функцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ju.V. Linnik, A.I.Vinogradov, Estimate of the sum of the number of divisors in a short segment of an arithmetic progression, Uspetu. Math. Nauk 12(1957), 4(76), 277-280.
2. D. Wolke, Multiplikative Funktionen auf schnell washsenden Folgen, J. reine angew. Math, 251(1971).
3. P.Erdos, On the sum $\sum d(f(k))$, J.London Math. Soc. 27(952). 7-15.
4. Chandrasekharann K., Narasimhan R., Heche's Functional equation and the overage order of arithmeticdl functions, Acta Arithm., 1961, 487-503.
5. B. Gordon, K. Rogers, Sums of the divisor function, Canad. J. Math. 16 (1964), 151–158
6. Kai-Man Tsang, Recent progresson the dirichlet divisor problem and the mean square of the riemann zeta-function, Mathematics Subject Classification, 2000.
7. K. Ramachandra, Some problems of analytic number theory, Acta Arith. 31 (1976), 313–32
8. P. Shiu, A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions, J. Reine Angew. Math. 313 (1980), 161–170
9. J. P. Kubilius, Probabilistic Methods in the Theory of Numbers [in Russian], Vilnius (1959).
10. A. Ivic, Mat. Vesnik (Belgrade), 1(29), 79–90 (1977).
11. R. Balasabramanian and K.Ramachandra, On the theorem of integers n such that $nd(n) \leqslant x$, Acta Arith., 49, 313–322 (1988).
12. I. Katai, M. V. Subbarao, Some remarks on a paper of Ramachandra, Lithuanian Math. J. 43 (2003), 410–418.
13. O. Bordelles, Multiplicative functions over short segments, Acta Arith. 157 (2013), 1–10.