Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Розв'язок класичної задачі теплопровідності для чвертьплощини із дефектом / Solution of the classic thermal conductivity problem for a quarter-plane with a defect»

Виконав(ла): здобувач(ка) денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Строгуш Микита Юрійович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Мойсеєнок О.П.________
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Фесенко Г.О.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2023 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № _____________

Протокол № ____ від ______________ 2023 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ _________________________

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Розвиток питань та появлення нових проблем у розділі математичної фізики призвів до необхідності побудови загальних способів розв'язку задач. Наприклад, існує відомий метод розділення змінних, який використовується для розв'язку рівнянь у часткових похідних. Але цей метод створен для свого типу задач: він погано працює з неоднорідними рівняннями та неоднорідними крайовими вимогами.
Також наявність диференціального оператора в часткових похідних рівнянь заважає створювати загальні методи для розв'язування задач.

Саме тому існують інтегральні перетворення, що дозволяють(звісно, не завжди) звести рівняння до звичайного диференціального чи алгебраічного рівняння, зменшити розмірність.
Цей метод застосовується у задачах теплопровідності, теорії пружності, теорії коливань, електродинамиці.

У роботі я використовую одне з інтегральних перетворень для розв'язку класичної задачі теплопровідності.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Маємо таку стаціонарну крайову задачу у часткових похідних для площини, де температура у тілі описується рівнянням Лапласу у полярних координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0, \quad 0\le\phi<\omega, \quad 0\le\omega<2\pi, \quad 0\le r\le\infty.$$

$$u(r,\phi)|_{\phi=\omega}=f(r), \quad \frac{\partial u(r,\phi)}{\partial\phi}|_{\phi=0}=0.$$

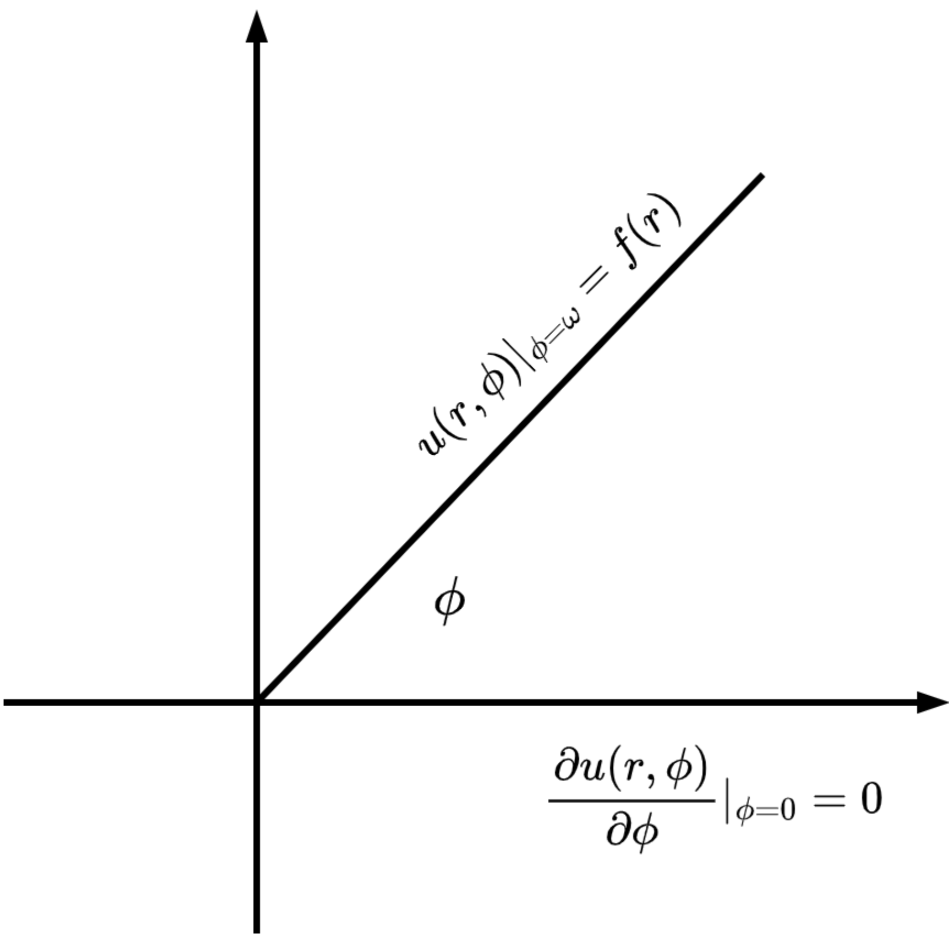

Рис. 1

Треба визначати функцію розповсюдження температури $u(r,\phi)$ в клині, що розташований у тілі, де на лівий грані($\phi=\omega$) підтримується температура за функцією $f(r)$, а тепловий потік дорівнює нулю на границі

$\phi = 0^\circ$, тобто нижня грань теплоізольована. Внутрішнього джерела тепла - немає.

Бачимо, що наші граничні вимоги - неоднорідні, рівняння має диференціальний оператор. Тому ефективним способом розв'язати задачу буде використання інтегрального перетворення. Заради отримання звичайного однорідного диференціального рівняння варто використовувати інтегральне перетворення Мелліна.

Задача зводиться до отримання звичайного однорідного диференціального рівняння у просторі трансформант, знаходження загального та часткового рішення цього рівняння та за допомогою зворотного перетворення Мелліна звернення до оригіналу функції, що і є необхідним розв'язком.

1.1 Розв'язок.

1.1.1 Пошук трансформанти.

Трохи спростуємо рівняння, домноживши його на r^2:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

Розглянемо перетворення Мелліна за змінною r:

$$U_p(\phi) = \int_0^\infty u(r,\phi) r^{p-1} dr.$$

Застосуємо його до нашого рівняння:

$$\int_0^\infty r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) r^{p-1} dr + \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} r^{p-1} dr.$$

$$\int_0^\infty r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) r^{p-1} dr = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) r^{p} dr = \frac{\partial u}{\partial r} r^{p+1}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty r\frac{\partial}{\partial r} r^{p-1} dr =$$

$$= p\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} r^p dr = pur^p\Big|_0^\infty + p^2\int_0^\infty ur^{p-1}dr = p^2U_p(\phi).$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} r^{p-1}dr = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\int_0^\infty ur^{p-1}dr = \frac{\partial^2 U_p(\phi)}{\partial \phi^2} = U_p^{''}(\phi).$$

Отримуємо:

$$U_p^{''}(\phi + p^2U_p(\phi) = 0$$

Застосуємо перетворення Мелліна до крайових умов по змінній ϕ.

$$\int_0^\infty u(r,\phi)\big|_{\phi=\omega} r^{p-1}dr = \int_0^\infty f(r)r^{p-1}dr = f_p.$$

(Заміна для зручності.)

$$\int_0^\infty \frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\big|_{\phi=0} r^{p-1}dr = 0.$$

Отримали наступну крайову задачу відносно трансформанти:

$$U_p''(\phi) + p^2U_p(\phi) = 0, \quad 0 < \phi < \omega.$$

$$U_p(0) = 0,\ U_p^{'}(\omega) = f_p.$$

Знаходимо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$U_p(\phi) = C_1 \cos p\phi + C_2 \sin p\phi.$$

Задовольняємо крайвоим умовам:.

$U_p^{'}(\phi) = p\,(-C_1 \sin p\phi + C_2 \cos p\phi) = 0.$

$U_p^{'}(0) = pC_2 = 0, C_2 = 0.$

$U_p(\phi) = C_1 \cos p\phi.$

$U_p(\omega) = C_1 \cos p\omega = f_p$, звідки

$$C_1 = \frac{f_p}{\cos p\omega}.$$

Отримали наступний вираз для трансформанти:

$$U_p(\phi) = \frac{f_p \cos p\phi}{\cos p\omega}.$$

1.1.2 Пошук оригіналу.

Формула зворотного перетворення від трансформанти $U_p(\phi)$:

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} U_p(\phi) r^{-p} dp, \quad \gamma > s_0$$

За формулою отримуємо:

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{f_p \cos p\phi}{\cos p\omega} r^{-p} dp.$$

Підставимо сюди вираз для f_p від η:

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\int_0^\infty f(\eta)\eta^{p-1} d\eta \cos p\phi}{\cos p\omega} r^{-p} dp =$$

$$= \int_0^\infty \frac{f(\eta)}{\eta} d\eta \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\cos p\phi}{\cos p\omega} \left(\frac{r}{\eta}\right)^{-p} dp. \tag{1.1}$$

Розглянемо внутрішній інтеграл:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\cos p\phi}{\cos p\omega} \left(\frac{r}{\eta}\right)^{-p} dp.$$

$$F(r,\eta) = \frac{\cos p\phi}{\cos p\omega} \left(\frac{r}{\eta}\right)^{-p}.$$

Отримали прості полюси у точках, де

$$\cos p\omega = 0.\ p\omega = 0,\ p\omega = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$p_k = \frac{\pi(2k+1)}{2\omega}.$$

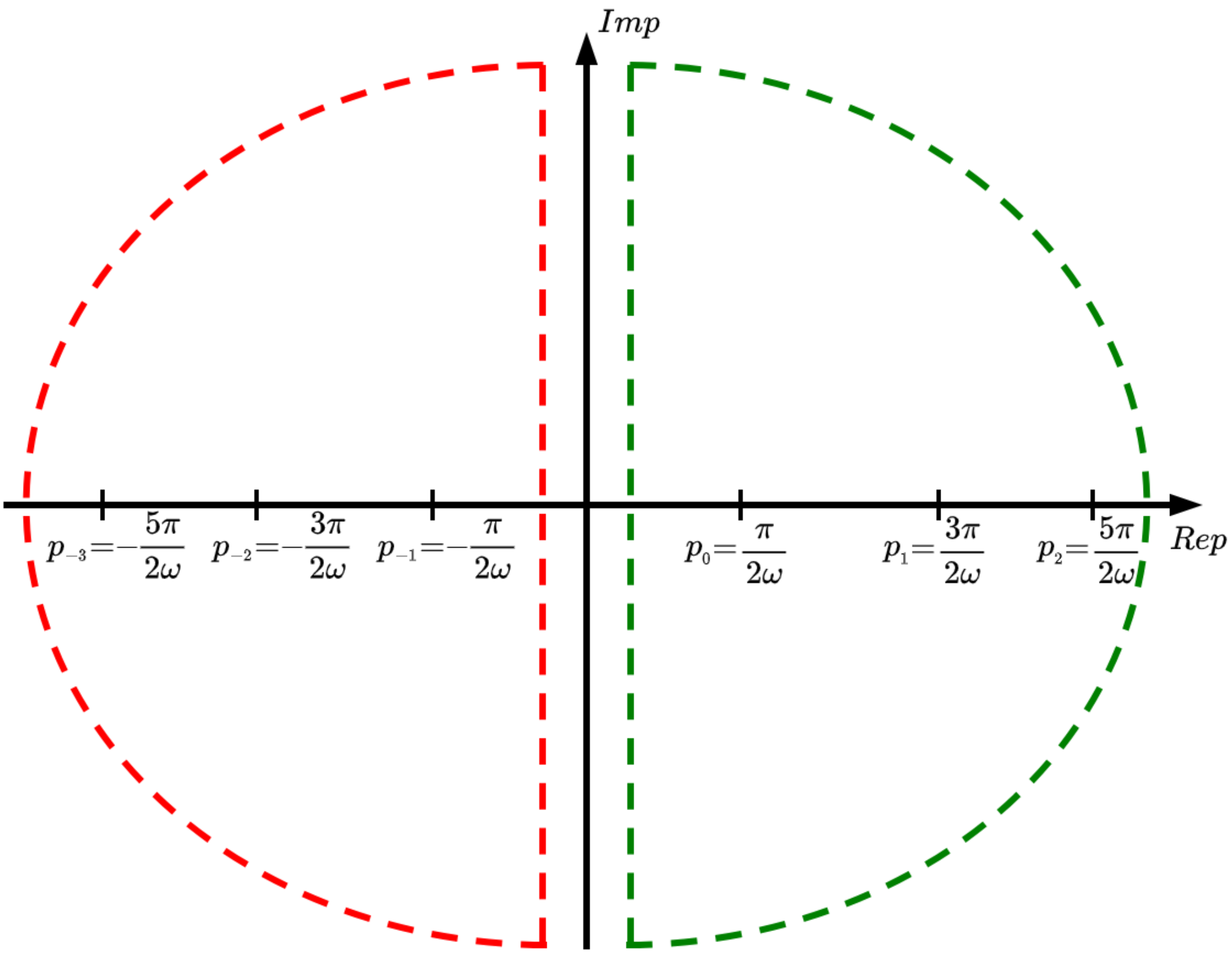

Рис. 2

Таким чином, полюси підінтегральної функції розташовані на дійсній вісі. Закрепимо контур інтегрування у правій півплощині.

Так як при $\eta = r$ ряд не буде збігатись розглянемо два випадки: $r > \eta$ та $r < \eta$.

Користуючись Лемою Жордана та основною теоремою про лишки (2.1), розглянемо ці випадки:

$$I = \begin{cases} -\sum\limits_{p_k>0}^{\infty} \operatorname*{Res}\limits_{p=p_k} F_p(r,\phi), \quad r > \eta \\ \\ \sum\limits_{p_k<0}^{\infty} \operatorname*{Res}\limits_{p=-p_k} F_p(r,\phi), \quad r < \eta \end{cases} \tag{1.2}$$

$$I = \begin{cases} -\sum\limits_{p_k>0}^{\infty} \operatorname*{Res}\limits_{p=p_k} \dfrac{\cos p\phi}{\cos p\omega} \left(\dfrac{r}{\eta}\right)^{-(1+2k)}, \quad r > \eta \\ \\ \sum\limits_{p_k<0}^{\infty} \operatorname*{Res}\limits_{p=-p_k} \dfrac{\cos p\phi}{\cos p\omega} \left(\dfrac{r}{\eta}\right)^{(1+2k)}, \quad r < \eta \end{cases} \tag{1.3}$$

$$I = \frac{1}{\omega} \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \dfrac{\pi(1+2k)\phi}{2\omega} \left(\dfrac{\eta}{r}\right)^{\frac{\pi(1+2k)}{2\omega}}, r > \eta \\ \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \dfrac{\pi(1+2k)\phi}{2\omega} \left(\dfrac{r}{\eta}\right)^{\frac{\pi(1+2k)}{2\omega}}, \quad r < \eta \end{cases} \tag{1.4}$$

Спростуємо наші вирази щоб отримати ряд, який можна обернути за формулою (2.2) з додатку А:

$$\left(\frac{r}{\eta}\right)^{\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)} = e^{\ln\left(\frac{r}{\eta}\right)^{\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)}} = e^{\left(\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)\ln\left(\frac{r}{\eta}\right)\right)}.$$

$$\left(\frac{\eta}{r}\right)^{\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)} = e^{\left(\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)\ln\left(\frac{\eta}{r}\right)\right)}. \tag{1.5}$$

Так як розглядаємо два випадки $r > \eta$ та $r < \eta$, то зручно скористатись модулем:

$$\left|\ln\left(\frac{r}{\eta}\right)\right| = \begin{cases} \ln\frac{r}{\eta}, & r > \eta \\ \\ -\ln\frac{r}{\eta} = \ln\frac{\eta}{r}, & r < \eta \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} \left(\dfrac{\eta}{r}\right)^{\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)} = \left(\dfrac{r}{\eta}\right)^{-\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)} = e^{-\left(\dfrac{\pi}{2\omega}|\ln\frac{r}{\eta}|(2k+1)\right)}, & r > \eta \\ \\ \left(\dfrac{r}{\eta}\right)^{\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)} = \left(\dfrac{\eta}{r}\right)^{-\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)} = e^{-\left(\dfrac{\pi}{2\omega}|\ln\frac{r}{\eta}|(2k+1)\right)}, & r < \eta \end{cases} \tag{1.6}$$

$$I = \begin{cases} \left(\dfrac{\eta}{r}\right)^{\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)} = e^{-\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\ln|\frac{r}{\eta}|(2k+1)\right)} = e^{\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\ln\left(\frac{\eta}{r}\right)(2k+1)\right)}, & r > \eta \\ \\ \left(\dfrac{r}{\eta}\right)^{\dfrac{\pi}{2\omega}(2k+1)} = e^{-\left(\dfrac{\pi}{2\omega}|\ln\frac{r}{\eta}|(2k+1)\right)} = e^{\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\ln\left(\frac{r}{\eta}\right)(2k+1)\right)}, & r < \eta \end{cases}$$

Тепер замість двох випадків можемо звести до одного:

$$I = e^{-\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\ln|\frac{r}{\eta}|(2k+1)\right)}. \tag{1.7}$$

Проведемо заміни:

$$\frac{\pi\phi}{2\omega} = x, \qquad \frac{\pi}{2\omega}\left|\ln\frac{r}{\eta}\right| = a, \quad I_\eta = e^{-a(2k+1)}.$$

Здобудимо кінцевий вираз відповідно замінивши компоненти з (1.4) на x:

$$I(r,\phi) = \frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cos{(2k+1)x} e^{-a(2k+1)}. \tag{1.8}$$

Суму цього ряду знайдемо за домогою відомої формули (2.2) з додатку А:

$$I(r,\phi) = \frac{1}{\omega}\frac{\cos\left(\frac{\pi\phi}{2\omega}\right)\sinh\left(\frac{\pi}{2\omega}\left|\ln\frac{r}{\eta}\right|\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{\omega}\left|\ln\frac{r}{\eta}\right|\right)+\cos\left(\frac{\pi\phi}{\omega}\right)}. \tag{1.9}$$

Повернемось до оригіналу з виразу (1.1) :

$$u(r,\phi) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\infty} f(\eta)\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi\phi}{2\omega}\right)\sinh\left(\frac{\pi}{2\omega}\left|\ln\frac{r}{\eta}\right|\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{\omega}\left|\ln\frac{r}{\eta}\right|\right)+\cos\left(\frac{\pi\phi}{\omega}\right)}\right)\frac{d\eta}{\eta}. \tag{1.10}$$

1.2 Розрахунки та графіки

1.2.1 Розрахунки

Протягом розв'язку отримали невласний інтеграл. Щоб шукати чисельний розв'язок додамо наступну умову:

$$f(\eta) = \begin{cases} a, & 0<\eta<b \\ 0, & b<\eta<\infty. \end{cases}$$

Нехай напруга $f(\eta)$ дорівнює одиниці. Тоді ми отримуємо визначений інтеграл від 0 до b. Чисельний розв'язок цього інтегралу знайдемо за допомогую формули Сімпсона та мови програмування python. Листінг коду необхідних для обчислень функцій надається у додатку Б.

Спочатку розглянемо площину від 0 до $\omega, \phi < \omega$.

Для $r = 1$ та $\phi = \frac{\pi}{4}$:

$u(r,\phi) = 0.284725242969405.$

Для $r = 1$ та $\phi = \frac{5\pi}{4}$:

$u(r, \phi) = 0.23580551164006439.$

Для $r = 0.2$ та $\phi = \frac{5\pi}{4}$:

$u(r, \phi) = 0.22404818754779207.$

Тепер розглянемо площину від 0 до $\omega, \phi < \omega$.

Для $r = 1$ та $\phi = \frac{\pi}{2}$:

$u(r, \phi) = 0.27931054351861007.$

Для $r = 1$ та $\phi = \frac{\pi}{6}$:

$u(r, \phi) = 0.295186815320266.$

Для $r = 0.01$ та $\phi = \frac{\pi}{6}$:

$u(r, \phi) = 0.3129259810510334.$

Для $r = 1$ та $\phi = \frac{3\pi}{4}$:

$u(r, \phi) = 0.2805454223369931.$

За розрахунками можна помітити, що на заданому інтервалі більш всього на кількість температури впливає кут, а вже потім - значення радіусу.

1.2.2 Графіки

Закрепимо одну з змінних r чи ϕ.

Нехай $r = 1,\ \ \phi = \frac{\pi}{2} - 0.1,\ \omega = \frac{\pi}{2}$.

Закрепимо кожну з змінних та знайдемо чисельне значення інтегралу з (1.10) для кожної іншої змінної з інтервалу відповідно.

Кількість кроків дорівнює $h = 300$, тобто будемо мати 300 точок.

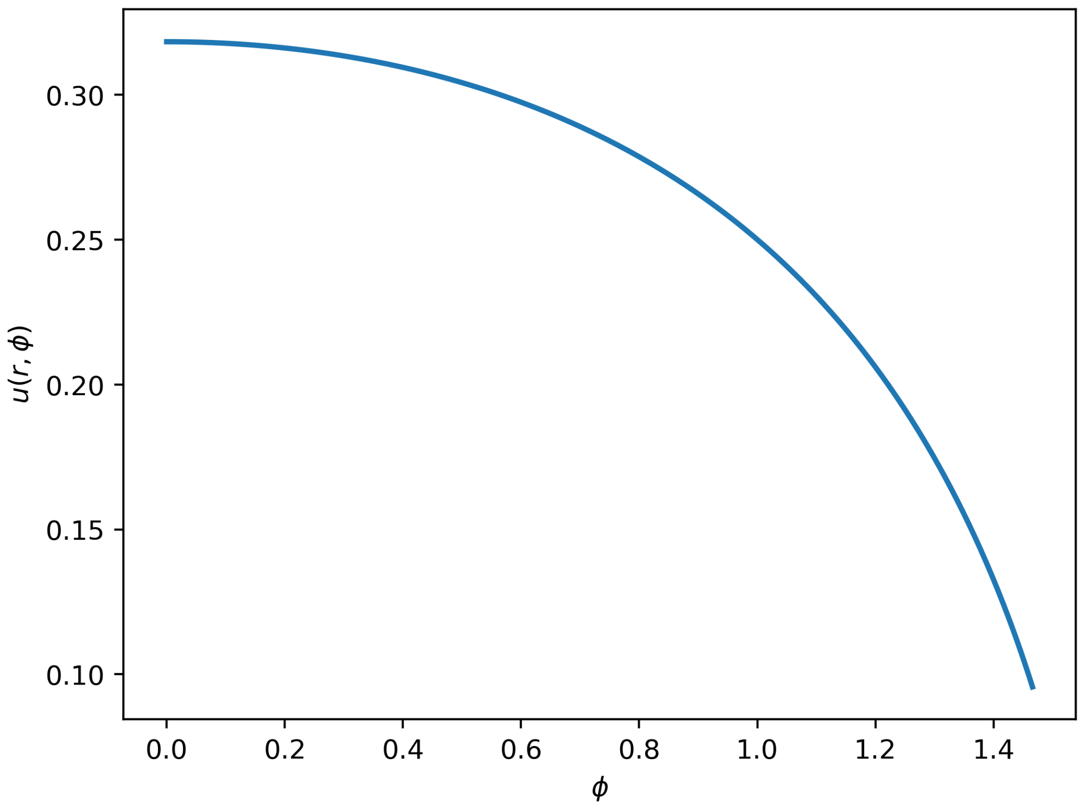
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
$u(r,\phi)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
ϕ

Рис. 3

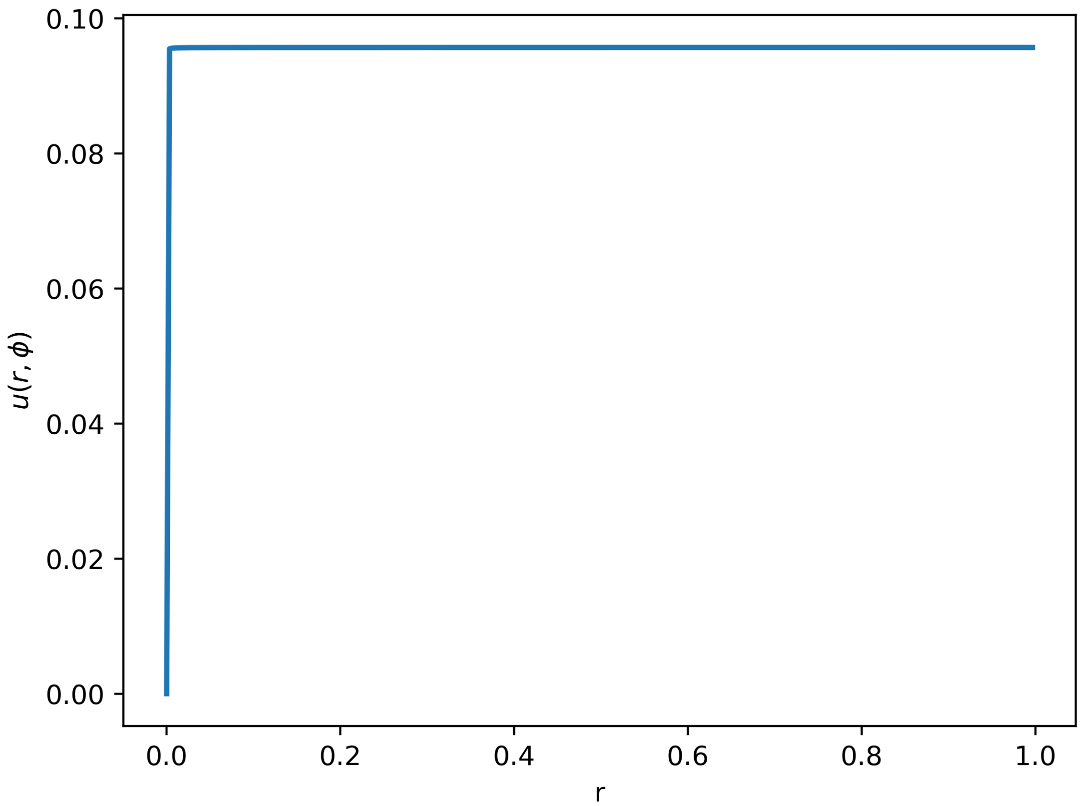
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
$u(r,\phi)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
r

Рис. 4

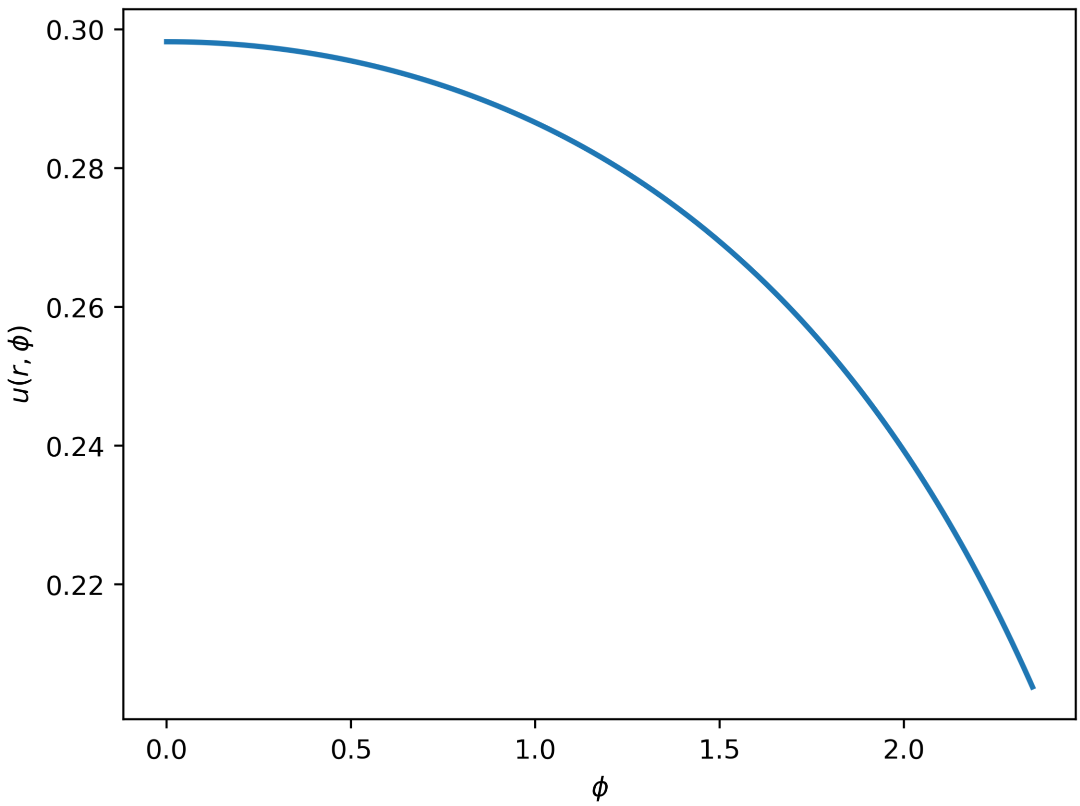
0.30
0.28
0.26
0.24
0.22
$u(r, \phi)$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
ϕ

Рис. 5

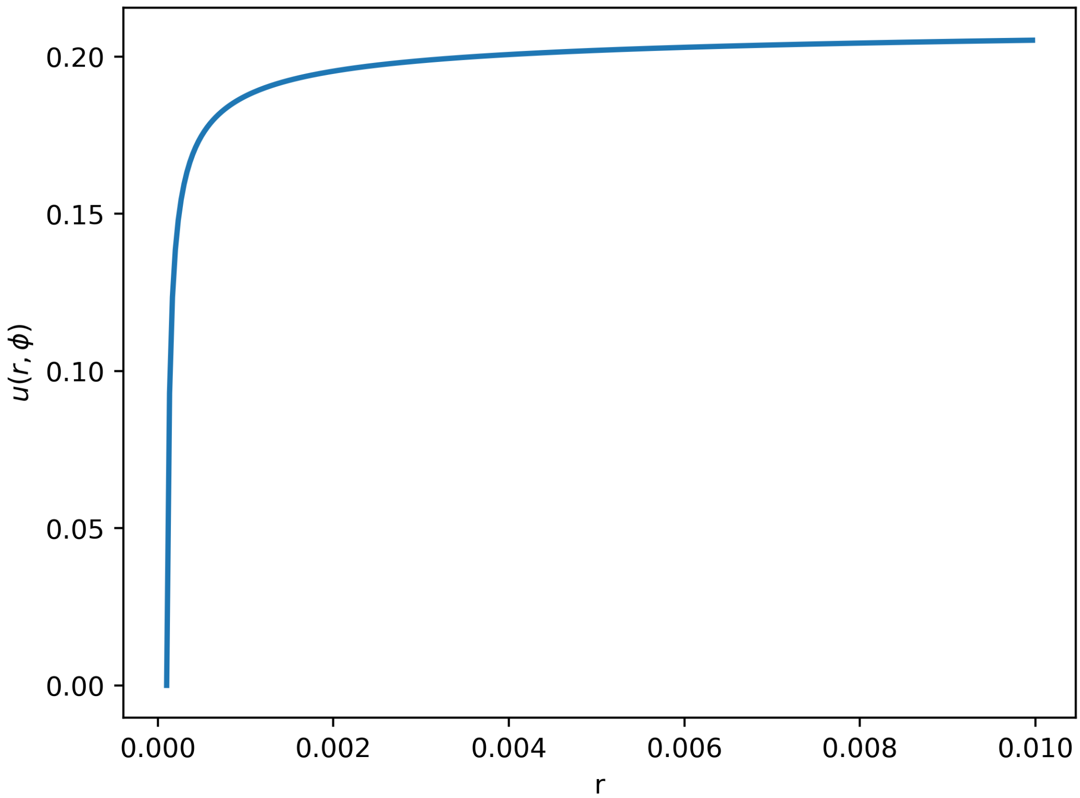
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
$u(r, \phi)$
0.000
0.002
0.004
0.006
0.008
0.010
r

Рис. 6

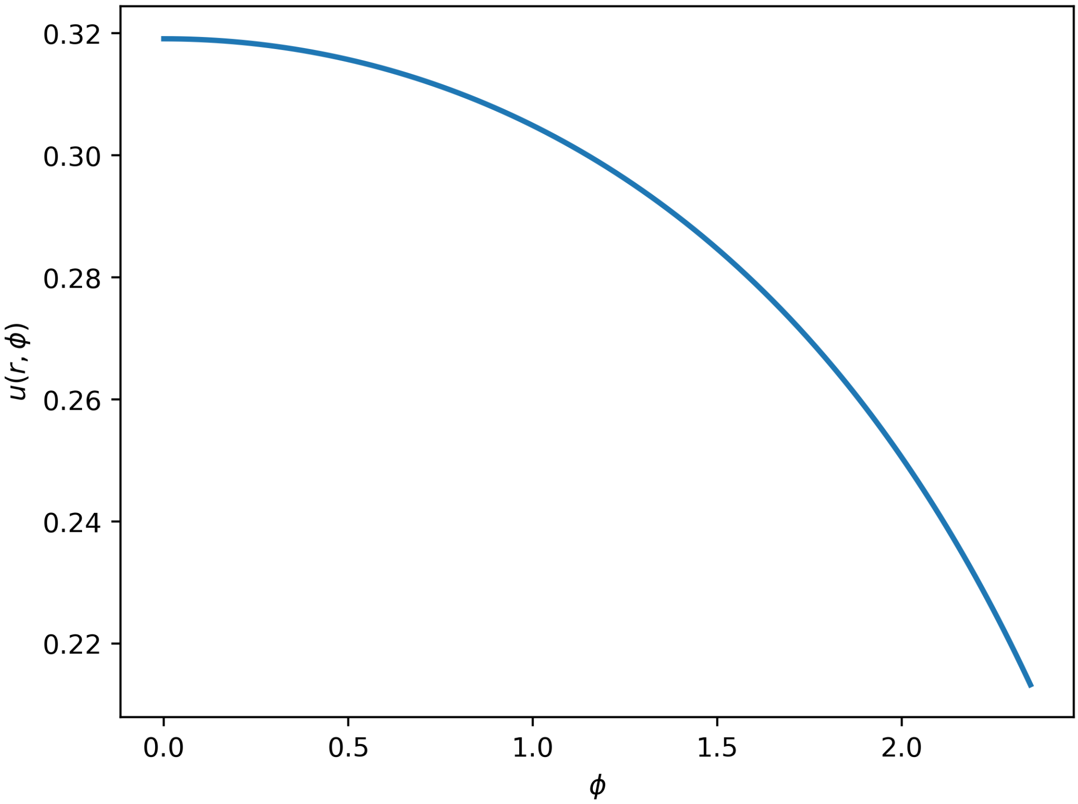

Рис. 7

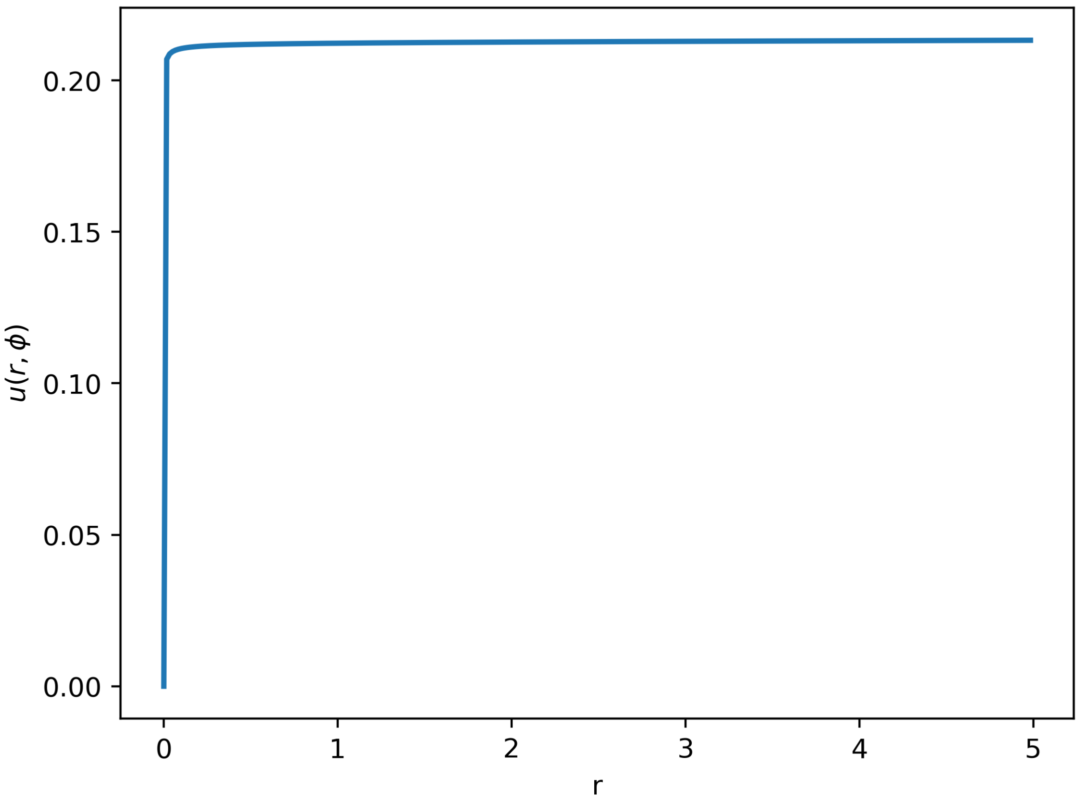

Рис. 8; $r = 5, \ \ \phi = \frac{3\pi}{4}, \ \omega = \pi.$

З графіків можна зробити висновки, що кількість температури за вуглом поступово зменшується від нуля до ϕ, а за радіусом - майже ніяких змін не відбувається.

РОЗДІЛ 2

ТЕОРІЯ

2.1 Основна теорема про лишки

Нехай задана функція $f(z)$, що є аналітичною в однозв'язній області D окрім деякого скінченного числа ізольованих особливих точок, що лежать всередині області, а l є замкнута крива, що належить до D та не проходить через особливі точки $f(z)$.

Тоді

$$\oint_l f(z)z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k}(fz), \tag{2.1}$$

де $z_1, z_2, \cdots, z_k$ - критичні точки функції $f(z)$, що належать до l.

Так як у роботі маємо прості полюса та $f(z) = \frac{\xi(z)}{\psi(z)}$, то лишки будемо обчислювати за формулою: $f(z_0) = \frac{\xi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Посилання на джерело теореми: Теорія функції комплексної змінної. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей / Г.В.Журавська — К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017 — 92 с.

2.2 Формула Сімпсона

Формула Сімпсона використовується для апроксимації підінтегральної функції на відрізку $[a, b]$ квадратичним інтерполяційним поліномом. Сама формула є інтеграл від цього многочлена:

$$\int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{2.2}$$

Посилання на джерело формули: "Simpson's rule"

ВИСНОВКИ

У цій роботі розглядався клин у тілі в полярних координатах. Було потрібно знайти оригінал функції розповсюдження температури у тілі.

Для знаходження цієї функції я скористався інтегральним перетворенням Мелліна заради зведення рівняння до крайової задачі з однорідним диференціальним рівнянням.

Потім, скориставшись формулами перетворення, знайшов трансформанту та, відповідно, оригінал функції.

Далі я обчислив чисельні розв'язки інтегралу у визначених точках тіла, побудував графіки оригіналу функції за кожною з двох змінних, зробив висновки на основі отриманних розв'язків та графіків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки та техніки» для студентів 3 курсу спеціальности 6.04030101 «Прикладна математика» (укладачі Процеров Ю.С., Мойсеенок О.П.). Одеса, 2015, 61 с. (Розміщена на сайті Наукової бібліотеки Одеського національного університету ім. І.І. Мечнікова).
2. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень». Одеса: Астропринт, 2005, 184 с.
3. Божедарник В.В., Сулім Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994, 560 с.
4. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. К: Вища школа, 2002, 312 с.
5. Теорія функції комплексної змінної. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей / Г.В.Журавська — К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017 — 92 с.
6. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. — К.: Либідь, 2001. — 334 с.
7. Самойленко В.Г. Комплексний аналіз. Приклади і задачі: навчальний посібник / В.Г.Самойленко, В.А.Бородін, Г.В.Верьовкіна, А.В.Ловейкін, І.Б.Романенко — К. : ВПЦ "Київський університет 2010. — 224с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Формула для знаходження суми ряду

Формула (1) з книги "Интегралы и ряды, Том 1, Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., 2002":

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mp 1)^k e^{-(2k+1)a}\cos(2k+1)x = \frac{\cos x}{\cosh 2a \mp \cos 2x}\left\{\begin{matrix}\sinh a\\ \cosh a\end{matrix}\right\} \qquad (1).$$

Додаток Б

Листінг коду мови програмування python для знаходження значень інтегралу та побудови графіків

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams.update(plt.rcParamsDefault)

def func(r, phi, x, w):
    w = np.pi/w
    res = (((np.sinh((w/2)*abs(np.log(r/x)))))
    /(np.cosh(w*abs(np.log(r/x))) + np.cos(w * phi)))/x
    return np.cos((phi / 2) * w)*res

def Simpson(r, phi, a, w, h):
    res = 0
    spaces = np.linspace(a, 20, h, endpoint=False)
    for i in range(np.shape(spaces)[0] - 1):
        a = spaces[i]
        b = spaces[i+1]
        res += ((b - a) / 6 ) * (func(r, phi, a, w) +
        4*func(r, phi, (a + b) / 2, w) + func(r, phi, b, w))
    return res

def count_plot_arr(h, r_ar, phi_ar, r, phi):
    r_values = np.linspace(0.00001, r, h, endpoint = False)
    phi_values = np.linspace(0.00001, phi, h)
    for i in range(h):
        r_ar[i] = Simpson(r_values[i], phi,
        0.00001, w, 10000)
    for i in range(h):
        phi_ar[i] = Simpson(r, phi_values[i],
        0.00001, w, 10000)
    print(3)
```

```
    return r_ar, phi_ar

def func_plot_original(Y, c, end, h):
    if(c == "r"):
        X = np.linspace(0.00001, end, h, endpoint=False)
    else:
        X = np.linspace(0.00001, end, h)

    fig, ax = plt.subplots(dpi = 400)

    ax.set_xlabel(c)
    ax.set_ylabel("$u(r,␣\phi)$")
    ax.plot(X, Y, linewidth=2.0)

    plt.show();
```