Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»
«Побудова та дослідження математичних моделей у різноманітних галузях економіки»

«Building and research of mathematical models of distribution in different sectors of the economy»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»

Качур Владислав Миколайович

Керівник _Канд.,фіз.мат.наук, доц.Шарай Н.В
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)
Рецензент канд. фіз.мат наук, доц. Білозерова М.О.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від _______________ р.

Завідувач кафедри

_________ ______________________
(підпис) (прізвище, ім'я)

Захищено на засіданні ЕК №_______
протокол № ____ від ____________ р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)
Голова ЕК

___________ _______________________
(підпис) (прізвище, ім'я)

Одеса – 2024

Зміст

Вступ

Дана кваліфікаційна робота присвячена побудові та дослідженню моделей економічної динаміки. Розвиток та вивчення динамічних моделей є найважливішим напрямом сучасної економічної науки, який досліджує детерміновану поведінку економічних систем у часі. Динамічні моделі економіки відіграють ключову роль у розумінні процесів економічного зростання та розвитку. З кібернетичної точки зору економічні системи є складними динамічними системами. У сучасному світі складність та динамізм економічних систем зумовлені збільшенням обсягів виробництва, матеріального і нематеріального, також зростанням темпу науково-технічного прогресу, процесами світової інтеграції та інші умови, причому важливість динамічного моделювання зростає. Дослідження динаміки поведінки економічної системи визначає перспективи розвитку, забезпечує ефективне функціонування економічних об'єктів методами економічної сучасної статистики, отримує оптимальний стан економічної системи. Економічна динаміка досліджує процеси, тобто послідовність станів і перехід від одного стану до іншого, визначаючи можливу і оптимальну траєкторію розвитку системи.

Перші спроби формалізувати економічне зростання за допомогою математичних моделей з’являються в роботах економістів-класиків, таких як Адам Сміт, Девід Рікардо і Томас Мальтус. Вони отримували економічні процеси в більш статичному ракурсі, але вже було ясно, що економіка не є незмінною і на неї впливають різні фактори динамічної структури. У цій дипломній роботі розглянуті дві моделі: модель Леонтьєва та модель трисектороної економіки, оскільки ці моделі внесли важливий вплив на розвиток теорії динамічних процесів, який відбувся в середині XX століття.

Вся історія динамічних економічних моделей відображає розвиток економічної науки, яка пройшла довгий шлях від простої концепції капіталовкладень до складної моделі з технічним прогресом, капіталом та інноваціями.

Дана робота складається із вступу, двух розділів, висновку та списку використаної літератури.

У першому розділі розглядається динамічна модель Леонтьєва. Модель Леонтьєва є деталізованою моделлю росту валового суспільного продукту і національного доходу. Базою для динамічної моделі В. Леонтьєва є статична модель міжгалузевого балансу в грошовому вираженні, що відображає виробництво і розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення і розподіл національного доходу. Кожна галузь у балансі розглядається двічі - як споживач і як виробник. Це й визначає матричну структуру балансу. В основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між нагромадженням і приростом валового продукту. Кожна із ситуацій розглядається, для отриманих розв'язків дається економічний аналіз. Наприкінці розділу наведені приклади користування моделю.

В другому розділі вивчається наступна модель економічної динаміки. У трисекторній моделі економіки основне макроекономічне рівняння розпадається на три: баланс платоспроможного попиту та пропозиції споживчих товарів і два вартісні баланси секторів, що виробляють засоби виробництва.

Інфляція розглядається в умовах замкнутості та збалансованості трисекторної економіки, за малих змін макропараметрів, а також у припущенні, що розподіл інвестиційних товарів фіксований.

Результат дослідження двох моделей свідчить про те, що інфляція може мати як негативний, так і позитивний вплив на економіку держави, залежно від співвідношення параметрів економічного процесу.

РОЗДІЛ 1. Модель динамічної рівноваги економіки. Модель Леонтьєва.

1.1. Методи економічного аналізу «витрати-виробництво». Динамічна модель Леонтьєва.

Модель Леонтьєва є динамічною моделлю з деталізованою моделлю зросту національного продукту та валового суспільного продукту. Базисом для складання динамічної моделі є статична модель в грошовому вираженні міжгалузевого балансу, яка виражає розподіл валового продукту в розрізі галузі з урахуванням міжгалузевих зв’язків, перерозподіл національного доходу з використанням матеріальних і трудових ресурсів. Розглядається кожна галузь в балансі два рази-як споживачі як виробник, що визначає структуру балансу як матрицю. Припустимо, що існує зв'язок між приростом валового продукту та нагромадженням. Нехай справедливі наступні припущення:

1. Кожна галузь має єдину технологію виробництва.
2. Не допускається заміщення одних видів продукції іншими.
3. Для продукції, що випускається, норми виробничих витрат від обсягу продукції не залежать.

Серед моделей динаміки місцеположення міжгалузевих економічних моделей визначають за такими положеннями:

а) моделі є деталізованими аналогами моделей відтворення ВВП національного доходу;

б) моделі є результатом узагальнень статичних міжгалузевих моделей;

в) для моделей з матрицею міжгалузевого балансу такі моделі є основою для прикладних моделей конкретних задач.

Класичним прикладом використання теорії диференціальних рівнянь для дослідження проблем економічного зростання є динамічна модель В.Леонтьєва. Вона будується з двох різних підходів: як відтворення ВВП та національного доходу та як динамічний аналог деякої статичної моделі міжгалузевого балансу.

Побудуємо модель у вигляді міркувань першої ідеї.

Розглянемо модель відтворення валового внутрішнього продукту у вигляді:

$x(t) = ax(t) + b\frac{dx(t)}{dt}$+c(t),

де змінні $x(t)$ та $\frac{dx(t)}{dt}$ вважають ендогенними, а c(t) екзогенними.

Якщо ввести вектори X(t) , $\frac{dX(t)}{dt}$ та C(t), а параметри a і b замінити квадратними матрицями A i B, то отримана диференціальна система з сталими коефіцієнтами і є моделлю Леонтьєва:

$$X(t) = AX(t) + B\frac{dX(t)}{dt}+C(t), \tag{1.1}$$

де $X(t) = (x_j(t))$ -вектор-стовбець обсягів виробництва;

$\frac{dX(t)}{dt} = (\frac{dx_j(t)}{dt})$ - вектор-стовбець абсолютних приростів виробництва;

C$(t) -$ вектор-стовбець споживання (одночасно з невиробничим нагромадженням);

A(t)=(a$_{ij}$)- матриця, яка складається з коефіцієнтів матеріальних витрат.

Якщо порівнювати коефіцієнти міжгалузевого статистичного балансу, в a$_{ij}$ включають як витрати на капітальний ремонт основних фондів виробництва, так і на відшкодування відбиття.

$B(t)=(b_{ij})$-матриця, яка складається з коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва. Під цим коефіцієнтом будемо розуміти *витрати виробничого нагромадження* на одиницю зросту продукції, яка відповідає кожному типу.

Під статичною моделлю міжгалузевого балансу розуміємо векторно-матричне рівняння:

$X = AX + Y$, з якого отримуємо

$$X = (E - A)^{-1}Y,$$

де $(E - A)^{-1}$-це матриця, коефіцієнти якої є коефіцієнтами повних потреб у випуску продукції для отримання одиниці відповідних видів продуції.

Розглянемо відповідність між двома видами моделей: статистичної та динамічної моделями міжгалузевого балансу. Розглянемо матричне рівняння:

$$Y(t) = B\frac{dX(t)}{dt} + C(t).$$

Звідки

$$\frac{dX(t)}{dt} = (E - A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt}, \quad \text{отримуємо замість} \qquad (1.1)$$

диференціальну систему вигляду:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt} + C(t), \qquad (1.2)$$

де $B(E - A)^{-1}$- матриця, яка складається з коефіцієнтів повної приростної капіталомісткості. Під цими коефіцієнтами розуміємо повні витрати виробничого нагромадження на одиничні прирости елементів національного доходу.

Нехай матриця А є продуктивною, нерозкладною, а матриця В є невиродженою. Тоді

$$(E-A)^{-1} > E-A \text{ та}$$

$$B(E-A)^{-1} > B.$$

Розглянемо випадок, коли матриці B і $B(E-A)^{-1}$ містять не все виробниче нагромадження, тільки нагромадження основних виробничих фондів.

При аналізі умов вважається, що як правило. Дійсні матриці розкладні та матриці B мають нульові рядки для тих галузей, що виробляють тільки предмети споживання. Але коли диференціальна система зводиться до рівнянь фондоутворюючих галузей, припущення стають важливими і цілком правомірними.

Що до *економічного аналізу*, то економічне тлумачення мають тільки рішення $X(t) > 0$. Якщо розглянути модель без зовнішньої торгівлі, то умову додатності можливо накласти на вектор $Y(t)$. Також, економічним передумовам моделі (1.1) відповідають траєкторії $X(t)$, які задовольняють умові

$$\frac{dX(t)}{dt} \geq 0, \text{тобто неспадні траєкторії.}$$

Рішення системи (1.2) при $\frac{dY(t)}{dt} \geq 0$ через невід'ємність введених матриць $(E-A)^{-1}$ та $B(E-A)^{-1}$ забезпечує, що $Y(t) \geq 0$ та $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$. При цьому, умови виконуються тоді і тільки тоді, коли деякі компоненти вектора $\frac{dY(t)}{dt}$ від'ємні.

1.2.Динаміка замкненої виробничої системи.

Розглянемо диференціальну систему

$$Y(t) = B(E-A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt}, \qquad (1.3)$$

Проаналізуємо економічний сенс розв'язків такої системи. Економічний сенс рішень такої системи полягає в тому, що вони характеризують граничні технологічні межі розвитку виробництва при заданих зовні матрицях А та В, коли максимальна кількість ресурсів національного доходу направлене на розширення відтворення.

Дамо відповідь на питання: існують чи ні траєкторії диференціальної системи (1.3), які є аналогічними траєкторіям національного доходу з сталим технологічним темпом $\tilde{p}$?

Найбільш відомим є експоненційний закон зростання векторів національного доходу та валового продукту у вигляді:

$$Y(t) = Y(0)\mathrm{e}^{\mu t}, \quad X(t) = X(0)\mathrm{e}^{\mu t}. \tag{1.4}$$

За виразом (1.4) з сталим темпом зростають не тільки національний дохід і валовий продукт, також обсяги виробництва продукції та використання національного доходу для будь-якої з галузей. Галузева структура національного доходу та валового продукту залишається незмінною для (1.4). Для того, щоб відповісти на питання, необхідно дослідити систему (1.3) для різних матриць А та В.

Загальне рішення системи (1.3) запишемо у вигляді

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i \, K_i e^{\lambda_i t} \tag{1.5}$$

де λ_i – корені характеристичного рівняння n-ного порядку

$$\det\left(E - \lambda B(E-A)^{-1}\right) = 0,$$

K_i – власні вектори матриці $B(E-A)^{-1})$, які відповідають кореням λ_i характеристичного рівняння, які є розв'язками відповідних систем рівнянь

$$(E - \lambda B(E-A)^{-1})K_i = 0.$$

З теорії алгебри відомо, деякі власні корені характеристичного рівняння λ_i можуть бути комплексними, причому при дійсних коефіцієнтах вони з'являються спряженими парами. Тому парі векторів $\lambda_i = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ відповідають в (1.5) пара розв'язків $Ce^{\alpha t}\mathrm{C}os\beta t + De^{\alpha t}Sin\beta t$, де C і D – сталі вектори розміру n, які породжують коливання з частотою β та амплітудою $e^{\alpha t}$.

Величини d_i у (1.5) визначаються однозначно з початкової умови. Якщо розглянути загальний випадок, то не можна розраховувати на те. Що відмінною від нуля буде єдина компонента d_i . В більш типовій ситуації єдина траєкторія системи (1.3) з початковими умовами $Y(0)$, є лінійною комбінацією експонент, які зростають з різними темпами. Розвиток за законом (1.4) є точно неможливим. І це є істотною різницею міжгалузевої моделі від макроекономічного прототипу. Хоча схожість відповідних моделей зберігається.

З урахуванням припущень, матриця $B(E-A)^{-1})$ є додатною, причому вона має додатне власний корень $\tilde{s}$, що за абсолютною величиною є більшим, ніж усі власні корені даної матриці, і відповідаючи строго додатній власний вектор $\widetilde{\mathrm{K}}$. Власні вектори, які відповідають іншим власним кореням, з необхідністю мають компоненти різних знаків.

З теорії лініної алгебри для невід'ємних матриць відомо, що значення $\tilde{s}$ знаходиться між максимальною і мінімальною сумами елементів стовпців даної матриці $B(E-A)^{-1}$.

Позначимо як $\widetilde{B}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}$ суму елементів j–го стовпця матриці $B(E-A)^{-1}$. Економічно це повна капіталомісткість продукції $j-i$ галузі. Тоді маємо оцінку для значення ŝ

$\min\limits_{j} \widetilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}} \leq \hat{\mathrm{s}} \leq \max\limits_{\mathrm{j}} \widetilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}$. Якщо розглянути параметр $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{s}}$, який є елементом розв'язку (1.5) як показник експоненти, тоді справедлива оцінка $\hat{\lambda}$ на проміжку:

$$\min_{j} \frac{1}{\widetilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}} \leq \hat{\lambda} \leq \max_{\mathrm{j}} \frac{1}{\widetilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}}$$

Таким чином, тримали, що показник експоненційної функції є оберненою величиною до деякої середньої з повних галузевих капіталомісткостей. Якщо виконуються умови : $B_{\mathrm{j}} = B_0, j = 1, \ldots, n$, то $\hat{\lambda}$ співпадає з $\hat{p} = \frac{1}{B_0}$. Тоді виходячи з економічного сенсу $\hat{\lambda}$ вважатиме технологічним темпом приросту в міжгалузевий динамічний моделі (1.1).

Траєкторія $Y_i(t)$ виходячи з співвідношення (1.5) є сумою експоненційних доданків. Очевидно, що при $t \rightarrow \infty$ головну роль починає грати доданок, у якого максимальна дійсна частина дорівнює λ_i. Таким чином, можливі дві ситуації, які виключають одна одну:

1) домінуючою є експонента $e^{\hat{\lambda} t}$;
2) домінує інший доданок з темпом λ_i, який відмінний від $\hat{\lambda}$.

Якщо підключити економічний аналіз, то маємо, що у випадку 1 темпи приросту продукції кожної галузі при $t \rightarrow \infty$ прямують до технологічного темпу зростання $\hat{\lambda}$, причому гранична галузева структуранаціонального доходу визначається пропорціями між компонентами власного вектора $\widetilde{\mathrm{K}}$.

Якщо розлянути другий випадок, то динаміка $Yi(t)$ фактично визначається власним вектором Ki, що відповідає власному значенню

$\frac{1}{\lambda_i} \neq \hat{s}$ матриці $B(E-A)^{-1}$. Власний вектор, який було зазначено вище, має має компоненти різних знаків обов'язково. При досить великих t рішення *Yi(t)* має від'ємні компоненти, таким чином втрачається економічний зміст розв'язку. Рішення (1.5), у якому домінує доданок з темпом, відмінним від $\hat{\lambda}$, є економічно неприємним.

Зазначені особливості рішень диференціального рівняння (1.3) є дуже важливими рисами міжгалузевої моделі (1.1), який при порівнянні з їїмакроекономічним аналогом, у якого рішення втрачає допустимість тільки в результаті дуже важких вимог до зростання споживання.

1.3.Міжгалузева динамічна модель і аналіз пропорцій розширеного відтворення

Розглянемо порівняння міжгалузевої динамічної моделі і макромоделі розширеного відтворення за допомогою класифікації продукції, яка ними виготовляється, та агрегування галузей за функціональним призначенням такої продукції. Виділимо галузі, що виконують особливі функції в процесі відтворення.

Для дослідження за допомогою міжгалузевої динамічної моделі, поділимо все виробництво на три галузі: *виробництво знарядь праці* (галузь 1), *виробництво предметів праці* (галузь 2), *виробництво предметів споживання* (галузь 3). В результаті отримаємо тригалузеву систему.

Економічний аналіз тригалузевої системи показує. що лише галузь 1 здійснює капітальні вкладення, галузь 2 забезпечує тільки проміжне споживання, а весь *фонд споживання* забезпечує галузь 3.

Запишемо систему рівнянь, спираючись на функціональне призначення продукції трьох галузей:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + b_{11}\frac{dx_1}{dt} + b_{12}\frac{dx_2}{dt} + b_{13}\frac{dx_3}{dt} \\ x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t), \\ x_3(t) = c(t). \end{cases},$$

Якщо підставити $x_2(t)$ і $x_3(t)$ з другого і третього рівняння у перше рівняння, то маємо звичайне диференціальне рівняння такого вигляду:

$$x_1\,(t) = \tilde{a}x_1(t) + \tilde{b}\frac{d\tilde{x}_1}{dt} + \tilde{g}_1c(t) + \tilde{g}_2\frac{dc}{dt},$$

де $\tilde{a} = a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1-a_{22}}$, $\tilde{b} = b_{11} + \frac{b_{12}a_{21}}{1-a_{22}}$, $\tilde{g}_1 = a_{13} + \frac{a_{12}a_{23}}{1-a_{22}}$, $\tilde{g}_2 = b_{13} + \frac{b_{12}a_{23}}{1-a_{22}}$.

Корисуючись тим, що матриця A є продуктивною, то величина $\tilde{a}<1$.

Технологічний темп приросту, який досягається при c(t) = 0, дорівнює $\hat{\lambda}=\frac{1-\tilde{a}}{\tilde{b}}$.

Якщо $c(t) = c_0e^{rt}$, то траєкторія $x_1(t)$ має вигляд:

$$x_1(t) = \left(x_1(0) - \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}}\right)e^{\lambda t} + \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}}e^{rt}$$

Якщо підставити початкові умови (при сталому рівні споживання) (r=0), маємо:

$$x_1(t) = \left(x_1(0) - \frac{\tilde{g}_1c_0}{1 - \tilde{a}}e^{\lambda t}\right) + \frac{\tilde{g}_1c_0}{1 - \tilde{a}}.$$

Таким чином, темп приросту виробництва *знарядь праці*(галузь 1) дуже швидко прямує до величини $\hat{\lambda}$.

Пропорційне зростання всіх галузей виробництва $x_i(t) = x_i(0)e^{r_0 t}$ (i= 1, 2, 3) існує при $r_0 = \frac{(1-\tilde{a})x_i(0)-\tilde{g}_i c_0}{\tilde{b}x_i(0)+\tilde{g}_2 c_0}$ та при цьому виконується умова $0 \leq r_0 < \hat{\lambda}$.

Якщо величина r знаходться на інтервалі $0 < \mathrm{r} < \mathrm{r}_0$, темпи приросту виробництва галузі 1 та галузі 2 *збільшуються* до границі $\hat{\lambda}$. Саме виробництво у галузі 1 та галузі 2 зростає випереджуючими темпами, їхня частка у валовому продукті неперервно зростає. Відповідно зростає частка виробничого нагромадження і знижується частка споживання. Таку властивість ми бачимо і у макромоделях.

Якщо припустити, що $r > r_0$, то темпи приросту виробництва галузі 1 та галузі 2 необмежено *зменшуються*; відповідні траєкторії виходять за межі допустимої області. При цьому одночасно збільшується частка галузі 3 у валовому продукті та фонді споживання у національному доході.

Залежності темпів приросту виробництва знарядь *праці* і *предметів праці* від *темпу споживання r* зображено на рис. 1.

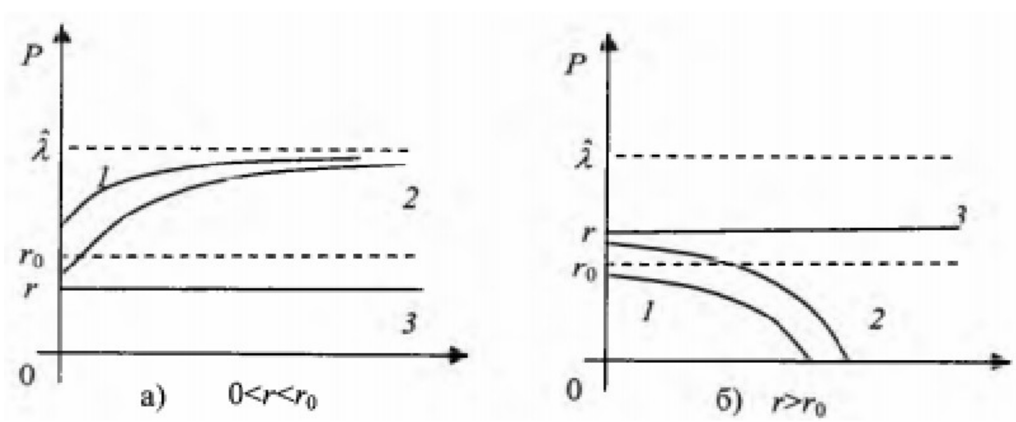


Рис. 1. *Залежність динаміки темпів приросту виробництва галузей відтемпу приросту споживання:*

1- виробництво знарядь праці; 2- виробництво предметів праці; 3- виробництво предметів споживання.

Залежність зміни галузевої структури валового внутрішнього продукту зміні темпу споживання показано на рис. 2.

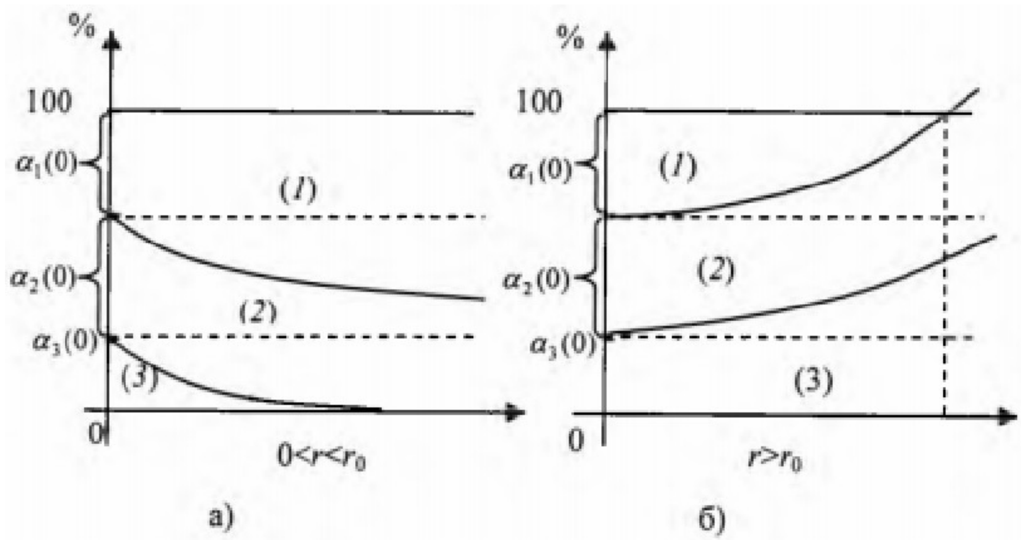


Рис. 2. *Залежність динаміки галузевої структури валового внутрішнього продукту від темпу приросту споживання:*

α_1-частка виробництва знарядь праці; α_2-частка виробництва предметів праці; α_3-частка виробництва предметів споживання.

Якщо $0 < r < r_0$ (**рис. 2 а**) , то частка виробництва *знарядь праці* зростає, а частка *предметів споживання* зменшується.

Якщо $r > r_0$ (**рис. 2 б**) , то ми бачимо, що структурні зміни протилежні. Деяка частка виробництва *предметів праці* є стійкою щодо темпу споживання. Ми можемо пояснити тим, що виробництво *предметів праці* є однаково необхідним при будь-якому співвідношенні між виробництвом *зна- рядь праці і предметів споживання,* а також між нагромадженням основних виробничих фондів і використанням продукції на невиробничі потреби.

1.4. Деякі узагальнення динамічної моделі Леонтьєва

Коли ми аналізували динамічну модель В. Леонтьєва, ми зробили низку припущень, які реально спростили пошук розв'язоку диференціальної системи та дозволили полегшити відповідний якісний аналіз. Таким чином, припущення звужують можливості коректного перевантаження результатів аналізу моделі на економічну реальність. Для того, щоб реально перенести цю модель на реальну ситуацію, поряд з критичною оцінкою припущень розглянутої моделі, необхідно проаналізувати шляхи її удосконалення.

1.)Включення умов "необоротності" капітальних вкладень і перехід до системи нерівностей.

В умовах задачі (1.1) вектор виробничого нагромадження (чистих капітальних вкладень) виражається через вектор з приростами виробництва співвідношенням $U(t) = B\frac{dX}{dt}$. Таким чином, співвідношення передбачає тільки невід'ємні похідні

$$\frac{dx_j(t)}{dt} \geq 0.\ \text{Якщо}\ \frac{dx_j(t)}{dt} < 0,\ \text{то}\ u_{ij} = b_{ij}\frac{dx_j(t)}{dt} < 0.$$

Формально це означає повернення ресурсів у баланси продукції за повними нормами капіталомісткості (повне деінвестування), що реально не відповідає дійсності. Таким чином, рішеннями систем (1.1) та (1.2) можливо користуватись тоді і тільки тоді, коли вони задовольняють додаткової умові: $\frac{dX}{dt} > 0$.

Умова може виконутись не для будь-якої інтегральної кривої (1.1), зокрема, вона порушується:

а) якщо буде домінувати в розв'язку диференціальної системи складова, яка буде зростатиз темпом, який буде відрізнятись від технологічного;

б) якщо споживання зростає з темпом $r > r_0$;

в) на початковому відрізку інших траєкторій.

Взагалі говорячи, дана додаткова умова не є необхідною. Дуже є важливим не забороняти від'ємні прирости, а якось виключати феномен "оборотності" капітальних вкладень. Таким чином, більш обґрунтованим є безпосереднє включення в модель умов *"необоротності"* капіталовкладень:

$$u_{ij} = b_{ij}\left(\frac{dx_j(t)}{dt}\right)_+, \quad \text{де } \left(\frac{dx_j(t)}{dt}\right)_+ = \begin{cases} \dfrac{dx_j(t)}{dt}, \text{якщо } \dfrac{dx_j(t)}{dt} \geq 0; \\ 0, \text{якщо } \dfrac{dx_j(t)}{dt} < 0 . \end{cases}$$

Помітимо, що припущення абсолютної необоротності капіталовкладень є дуже жорстким. Матеріальні елементи основних виробничих фондів, що вивільняються, можуть мати частковий перерозподіл. Спробуємо якось це врахувати.

Нехай $\frac{dx_j(t)}{dt} < 0,$ то в баланс продукції надходить $\overline{u}_{ij} = \overline{b}_{ij}\frac{dx_j(t)}{dt}$, де $0 \leq \overline{b}_{ij} < b_{ij}$. Фактично тоді теоретичне дослідження моделі за такими умовами помітно *ускладнюється*.

Якщо врахувати умови «необоротності» капіталовкладень , тоді наша динамічна міжгалузева модель приймає вигляд:

$$X(t) = AX(t) + B\left(\frac{dX(t)}{dt}\right)_+ + C(t). \qquad (1.6)$$

Тоді диференціальна система (1.6) може не мати допустимих траєкторій, які проходять через задану початкову точку $X(0) \geq 0$. Таким чином, з урахуванням цих умов має сенс замінити систему рівнянь (1.6) наступною системою нерівностей:

$$X \geq AX(t) + B\left(\frac{dX(t)}{dt}\right)_+ + C(t), \qquad (1.7)$$

в якій завдяки умовам вдається уникнути багатьох проблем, що виникали при попередньому аналізі.

Отже, модель замкненої виробничої системи

$$X(t) \geq AX(t) + B\left(\frac{dX(t)}{dx}\right)_+$$

при порівнянні з рівнянням (1.3), вже має розв'язок при будь-якому початковому значені X(0)≥ 0 : $X(0)e^{\lambda t}$.

Таким чином, якщо розглянути модель замкненої виробничої системи, то максимально можливий постійний темп приросту виробництва всіх галузей, який існує при будь-якому початковому стані.

2.)Урахування резервів виробничих потужностей.

У моделі Леонтьєва, яку ми розглянули раніше, припускали, що приріст виробництва може бути здійснений тільки за рахунок виробничого нагромадження: з $u_{ij(t)} = 0$ маємо $\frac{dx_j(t)}{dt} = 0$.

Реально розширення виробництва може бути в результаті більш повного використання наявних виробничих потужностей (*основних виробничих фондів*).

Нехай $M_j(t)$-це максимально можливий обсяг виробництва продукції j–ї галузі на діючих основних фондах у році t . Введемо наступні умови:

$$x_j(t) \leq M_j(t),$$

які роблять припустимими умови: $u_{ij}(t) = 0$ при $\frac{dx_j(t)}{dt} > 0$.

Таким чином, вводимо додаткові умови $x_j \leq M_j(t)$, які можуть ссутєво уточнити розв'язок системи (1.1).

3.) Побудова міжгалузевих моделей з інвестиційними лагами.

При розгляданні моделі В. Леонтьєва, аналогічно макромоделі відтворення, припускається миттєвість перетворення виробничого нагромадження (*капітальних вкладень*) у *прирости виробництва*. Ця умова є спрощенною і неодноразово відзначалася багатьма дослідниками.

Тому природне вдосконалення моделі є включення інвестиційних лагів (зосередження чи розподілених) в дану модель. Будемо вважати інвестиційні лаги у кожній j–й галузі як зосереджені та рівні $\tilde{\tau}_j$, тоді система рівнянь виробництва та розподілу продукції (*національного доходу*) приймає вигляд:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\frac{dx_j}{dt}\left(t + \tilde{\tau}_{ij}\right) + c_i(t), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Дані інвестиційні лаги можливо диференціювати не тільки за галузями-"споживачами" капітальних вкладень, але і за матеріально-речовими елементами капітальних вкладень (продукція машинобудування, будівництва і т. ін.) Нехай τ_{ij} -лаг капіталовкладень, що надходять з i–*ї* галузі та забезпечують приріст виробництва у j–*й* галузі. Тоді маємо диференціальну систему рівнянь:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\frac{dx_j}{dt}\left(t + \tau_{ij}\right) + c_i(t), \qquad i = 1, \dots, n.$$

В цю динамічну міжгалузеву модель можливо включити також і розподілені лаги, при цьому серьозно змінюється сенс матриці B.

Методи розв'язування систем диференціальних рівнянь з лагами (системи с запізнюючими аргументами) нині є гарно вивченими, але якісний аналіз розв'язків істотно ускладнюється.

4.)Врахування динаміки коефіцієнтів матеріаломісткості і капіталомісткості виробництва.

Якщо проаналізувати вихідну модель, то найбільш сильним припущенням є сталість у часі матриць *матеріальних* і *капітальних* витрат A і B. Тоді, користуючись теорією алгебри матриць та теорією диференціальних рівнянь з сталими матрицями, можливо зробити низку висновків про властивості розв'язків системи (тобто, довести існування технологічного темпу приросту і відповідної траєкторії зростання). Можливо побачити, що поза моделлю залишається найважливіша складова економічної динаміки – розвиток науково-технічного прогресу.

Якщо припустити в моделі (1.1), що матриці $A(t)$ і $B(t)$ залежать від часу, то треба користуватись іншою теорією диференціальних рінянь, але підвищує її прикладне значення. Теоретичний аналіз такої моделі є доступним при деяких припущеннях, наприклад, при рівномірній зміні всіх коефіцієнтів матриць або коефіцієнтів окремих рядків матриць. В тому є сучасний розвиток моделі.

1.5. Приклади

Приклад 1. *У таблиці наведено дані про виконання балансу за певний звітний період*

N п/п	**Галузь**	**Споживання**		**Кінцевий продукт**	**Валовий випуск**
		Енергетика	**Машинобуд.**		
1	Енергетика	7	21	72	100
2	Машинобудування	12	15	63	100

Обчислити необхідний обсяг валового випуску в кожній галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі збільшиться вдвічі, а *машинобудування залишиться на попередньому рівні.*

Розвязання. Нехай $x_1 = 100$, $x_2 = 100$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$, $y_1 = 72$, $y_2 = 63$. За формулою знаходимо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11}=\frac{7}{100} = 0{,}07, a_{12} = \frac{21}{100} = 0{,}21, a_{21} = \frac{12}{100} = 0{,}12, a_{22} = \frac{15}{100} = 0{,}15.$$

Матриця прямих витрат $\begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}15 \end{pmatrix}$ має невід'ємні елементи і задовольняє критерію продуктивності, оскільки

$max\{0,07 + 0,12; 0,21 + 0,15\} = max\{0,19; 0,36\} = 0,36 < 1$.

Таким чином, для довільної матриці-стовпчика кінцевого продукту Y можна знайти необхідний обсяг X валового випуску за формулою

$X = (E - A)^{-1}Y$.

Оскільки згідно з умовою $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix}$, то треба знайти $(E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}21 \\ -0{,}12 & 0{,}85 \end{pmatrix};$$

$$\det(E - A) = 0{,}93 \cdot 0{,}85 - 0{,}12 \cdot 0{,}21 = 0{,}7653 \neq 0$$

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор кінцевого продукту:

$$X = \frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix} 0{,}85 \cdot 144 + 0{,}21 \cdot 63 \\ 0{,}12 \cdot 144 + 0{,}93 \cdot 63 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 177{,}2 \\ 99{,}1 \end{pmatrix}$$

Таким чином, валовий випуск в енергетичній галузі треба збільшити до 177,2 ум.од., а машинобудуванні- до 99,1 ум. од.

Приклад 2. *Визначити міжгалузевий баланс виробництва й споживання продукції трьох галузей, коли відома матриця прямих витрат*

$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ *і кінцевий продукт кожної галузі* $\begin{pmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{pmatrix}$.

Розвязання. За формулою $X = (E - A)^{-1}Y$, де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, рахуємо:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & 0,0 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,0 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

$$\det(E - A) = 0,421;$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,49644 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49644 & 0,33254 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} 1.49644 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49644 & 0,33254 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 223280 \\ 562946 \\ 247030 \end{pmatrix}$$

Отримали обсяг виробництва першої галузі $x_1 = 223280$, другої $x_2 = 562946$ і третьої $x_3 = 247030$.

Якщо знати ці обсяги та коефіцієнти прямих витрат, можливо обчислити потоки продукції від i–ої до j–ої галузі.

Якщо, наприклад, на одиницю продукції другої галузі йде 0,1 одиниць продукції першої галузі, то на 562946 одиниць всієї продукції другої галузі витрачається

$0,1 \cdot 562946 = 56294,6$ одиниць продукції першої галузі.

Рештапродукції першої галузі споживається у ній самій:

$0,3 \cdot 223280 = 66984,0$, боу третій галузі її продукція не споживається, оскільки $a_{13} = 0$.

Отже, продукція першої галузі розподіляється так:

$x_{11} = 66984,0$; $x_{12} = 56294,6$; $x_{13} = 0$; $y_1 = 100000$,

що разом складає $x \approx 223279$.

Таким чином, моливо знайти балансовий розподіл продукції галузі 2 та галузі 3.

РОЗДІЛ 2. Моделювання інфляціоних процесів в трисекторної моделі економіки

2.1. Трисекторна модель економіки

В рамках моделі економіка складається з трьох секторів: нульовий – матеріальний сектор X_0 виробляє предмети праці; перший – фондоскладаючий X_1 – засоби праці; другий - споживчий X_2 – предмети споживання. Припускаємо, що за кожним сектором закріплено основні виробничі фонди, а праця та інвестиції можуть вільно рухатись між секторами. Виробничі зможливості кожного сектора задані в формі лінійних однорідних виробничих функцій

$$X_j = F_j\ (K_j, L_j) \qquad (2.1)$$

$$j=0,1,2$$

де X_j , K_j , L_j – відповідно випуск, основні виробничі фонди та кількість зайнятих в j-м секторі.

Користуючись основними припущеннями моделі Солоу,одержимо наступну трьосекторну модель (індекс t припускається по умовчанням, ресурси корисиуючись повністю):

кількість зайнятих:

$$L=L(0)e^{vt} \qquad (2.2)$$

де v- темп приросту кількість зайнятих;

розподіл зайнятих за секторами:

$$L_0+ L_1+ L_2= L \qquad (2.3)$$

динаміка фондов за секторами:

$$\frac{dK_j}{dt} = -\mu_j K_j + I_j \qquad (2.4)$$

$$K_j(0) = K_{j0}, j=0,1,2$$

де μ_j - коефіцієнти вибуття основних виробничих фондів за секторами;
I_j - інвестиції в j -й сектор;
випуск продукції за секторами:

$$X_j = F_j\ (K_j, L_j),\ \ j=0,1,2$$

розподіл продукції фондоздаючого сектора:

$$I=I_0+I_1+I_2 \qquad (2.5)$$

розподіл продукції матеріального сектору:

$$X_0=a_0X_0+ a_1X_1+ a_2X_2 \qquad (2.6)$$

де a_j – коефіцієнти прямих матеріальних витрат за секторами.

Позначимо: $\theta_j = \frac{L_j}{L}$ - частка кількості зайнятих в j -м секторі в загальної кількості зайнятих; $S_j = \frac{I_j}{I}$ – частка інвестицій в і-й сектор в загальному об'ємі інвестицій; $f_j(K_j)=F_j\ (\frac{K_j}{L_j}; 1)$- продуктивність труда в j-м секторі.

$$f_j(K_j)=\frac{X_j}{L_j}.$$

Приведём уравнение (2.6) к виду

$$X_0=a_0X_0+ a_1X_1+ a_2X_2$$

$$(1- a_0)\ X_0= a_1X_1+ a_2X_2 \qquad (2.7)$$

$$(1- a_0)\ \frac{X_0L_0}{LL_0} = a_1 \frac{X_1L_1}{LL_1}+ a_2 \frac{X_2L_2}{LL_2}$$

Позначимо

$$f_j = \frac{K_j}{L_j},\ j = 0, 1, 2$$

Тоді у відносних показниках модель примет форму:

$$\begin{cases} \theta_0+\theta_1 + \theta_2 = 1, \theta_j > 0, j = 0,1,2 \\ s_0 + s_1 + s_2 = 1, s_j > 0, j = 0,1,2 \\ \frac{dK_j}{dt} = \frac{\theta_1 s_j}{\theta_j} f_1(K_1) - \lambda_j K_j, K_j(0) = K_{j0}, \lambda_j = v + \mu_j, j = 0,1,2 \\ (1 - a_0)\theta_0 f_0(K_0) = a_1\theta_1 f_1(K_1) + a_2\theta_2 f_2(K_2) \end{cases} \qquad (2.8)$$

Останнє рівняння моделі (2.8) можливо записати в наступній формі:

$$(1- a_0)\ x_0= a_1x_1+ a_2x_2 \qquad (2.9)$$

де $x_j = \frac{X_j}{L}$ - народногосподарська продуктивність j -ого сектору, тобто випуск продукції j-го виду на одного зайнятого в народному господарстві, при цьому

$$x_j = \theta_j f_j\left(K_j\right)$$

В моделі (2.8) параметри a_0 , a_1 , a_2 , μ_0 , μ_1 , μ_2 , v є екзогенними та вважаються сталими. Параметри $(\theta, s) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2)$ – керуючі.

Рівняння для фондоозброєнності мають наступну стаціонарну точку:

$$f_1(K_1^0)= \lambda_1 K_1^0,\ K_j^0= \frac{\theta_1 s_j}{\theta_j \lambda_j} f_1(K_1^0),\ j=0,2 \qquad (2.10)$$

З (8): при $K_j < K_j^0$ одержимо : $\frac{dK_j}{dt} > 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} K_j(t) = K_j^0$

при $K_j > K_j^0$ одержимо: $\frac{dK_j}{dt} < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} K_j(t) = K_j^0$

Розглянемо, якими показниками буде характеризуватись стан економіки в стаціонарному стані.

З економічної точки зору стаціонарний стан – це стан «усіченого» розширеного вітворення, коли інвестиції витрачаються на заміну засобів праці, що вибили, та частково на таке розширення основних виробничих фондів, яке забезпечує збереження фондоозброєнь на сталому рівні, незважаючи на зростання зайнятих з сталим темпом.

Повномасштабне розширення виробництва мало б місце, якби вибулі фонди замінялися новими, з вищим технологічним рівнем. Однак дана модель не застосовна до такої ситуації.

Якщо виробничі функції секторів є функціями Кобба-Дугласа, то в стаціонарному стані при заданому розподілі праці та інвестицій між секторами економіка характеризується показниками, наведеними в наступній таблиці:

Найменування сектору	Фондоозброєнність	Народногосподарська продуктивність праці
Матеріальний	$K_0 = \frac{s_0\theta_1}{\lambda_0\theta_0} A_1 K_1^{\alpha_1}$	$x_0 = \theta_0 A_0 K_0^{\alpha_0}$
Фондоутворюючий	$K_1 = (\frac{s_1 A_1}{\lambda_1})^{1/1-\alpha_1}$	$x_1 = \theta_1 A_1 K_1^{\alpha_1}$
Споживацький	$K_2 = \frac{s_2\theta_1}{\lambda_2\theta_2} A_1 K_1^{\alpha_1}$	$x_2 = \theta_2 A_2 K_2^{\alpha_2}$

Якщо в вираження для вилучення випусків X_0 підставити значення стаціонарної фондоозброєності з цієї ж таблиці, то питомі випуски набудуть вигляду функцій від параметрів розподілу праці $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ та інвестиційних товарів (s_0, s_1, s_2):

$$x_0 = \theta_0 A_0 (\frac{s_0\theta_1}{\lambda_0\theta_0} A_1 K_1^{\alpha_1})^{\alpha_0} = \theta_0 A_0 (\frac{s_0\theta_1}{\lambda_0\theta_0} A_1 \left[\frac{s_1 A_1}{\lambda_1}\right]^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}})^{\alpha_0} =$$

$$= \theta_0^{1-\alpha_0} A_0 s_0^{\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0} A_1^{\alpha_0 + \frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}} \lambda_0^{-\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}} \lambda_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{\alpha_1-1}} =$$

$$= A_0 A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} \lambda_0^{-\alpha_0} \lambda_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{\alpha_1-1}} \theta_0^{1-\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0} s_0^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}} =$$

$$= B_0 \theta_0^{1-\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0} s_0^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}};$$

$$x_1 = \theta_1 A_1 K_1^{\alpha_1} = \theta_1 A_1([\frac{s_1 A_1}{\lambda_1}]^{1/1-\alpha_1})^{\alpha_1} = \theta_1 A_1^{1+\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} \lambda_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}} =$$

$$= A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \lambda_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}} \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} = B_1 \theta_1 \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}};$$

$$x_2 = \theta_2 A_2 K_2^{\alpha_2} = \theta_2 A_2 \left[\frac{s_2\theta_1}{\lambda_2\theta_2} A_1 K_1^{\alpha_1}\right]^{\alpha_2} = \theta_2 A_2 \left[\frac{s_2\theta_1}{\lambda_2\theta_2} A_1 (\frac{s_1 A_1}{\lambda_1})^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}\right]^{\alpha_2} =$$

$$= \theta_2^{1-\alpha_2} A_2 s_2^{\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2} \lambda_2^{-\alpha_2} A_1^{\alpha_2 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}} \lambda_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-1}} =$$

$$= A_2 A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \lambda_2^{-\alpha_2} \lambda_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-1}} \theta_2^{1-\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2} s_2^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}} = B_2 \theta_2^{1-\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2} s_2^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}.$$

Таким чином, маємо:

$$x_0 = B_0 \theta_0^{1-\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0} s_0^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}$$

$$x_1 = B_1 \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} \qquad (2.11)$$

$$x_2 = B_2 \theta_2^{1-\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2} s_2^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}.$$

де: $B_0 = A_0 A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} \lambda_0^{-\alpha_0} \lambda_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{\alpha_1-1}}$

$B_1 = A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \lambda_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}}$

$B_2 = A_2 A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \lambda_2^{-\alpha_2} \lambda_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-1}}$ - сталі коефіцієнти.

2.2 Ціни та податки в трисекторній економіці

Незалежно від того, лінійна чи нелінійна трисекторна модель, умови збалансованості доходів і витрат кожного сектора без урахування податків у момент t записуються наступним чином:

$$p_0(1-a_0)X_0 = p_1 s_0 X_1 + w_0 L_0$$

$$p_1(1-s_1)X_1 = p_1 s_1 X_1 + w_1 L_1 \qquad (2.12)$$

$$p_2 X_2 = p_0 a_2 X_2 + p_1 s_2 X_1 + w_2 L_2$$

де p_j - ціна продукції (рівень цін),

w_j - ставка заробітної плати в j-му секторі.

Розділимо обидві частини рівнянь (2.12) на L, тоді, враховуючи (2.6), отримаємо:

$$(1-a_0)p_0 x_0 - s_0 x_1 p_1 = w_0 \theta_0$$

$$a_1 x_1 p_0 + (1 - s_1)x_1 p_1 = w_1\theta_1 \qquad (2.13)$$

$$-a_2 x_2 p_0 + s_2 x_1 p_1 + x_2 p_2 = w_2\theta_2$$

Якщо скласти всі рівняння (2.12), отримаємо::

$$p_0X_0 - p_0a_0X_0 + p_1X_1 - p_1s_1X_1 + p_2X_2 =$$

$$= p_1s_0X_1 + w_0L_0 + p_0s_1X_1 + w_1L_1 + p_0a_2X_2 + p_1s_2X_1 + w_2L_2 =$$

$$= p_0(X_0(1 - a_0) - s_1X_1 - a_2X_2) + p_1\big(X_1(1 - s_0 - s_1 - s_2)\big) + p_2X_2 =$$

$$= w_0L_0 + w_1L_1 + w_2L_2$$

Використовуючи (2.8) та (2.5), отримаємо вартісний баланс виробництва та витрат предметів споживання.:

$$p_2X_2 = w_0L_0 + w_1L_1 + w_2L_2 \qquad (2.14)$$

Або в відносній формі.:

$$x_2p_2 = w_0\theta_0 + w_1\theta_1 + w_2\theta_2 \qquad (2.15)$$

Таким чином, маємо три рівняння з шістьма змінними p_0, p_1, p_2, w_0, w_1, w_2. Приймемо вільними ставки заробітної плати w_0, w_1, w_2 , тоді ціни можна виразити через них наступним чином:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{w_0\theta_0 + s_0x_1p_1}{(1-a_0)x_0} \\ p_1 = \frac{w_1\theta_1 + a_1x_1p_0}{(1-s_1)x_1} \\ p_2 = \frac{w_0\theta_0 + w_1\theta_1 + w_2\theta_2}{x_2} \end{cases} \qquad (2.16)$$

Підставимо друге рівняння (2.16) в перше:

$$(1 - a_0)x_0p_0 - s_0x_1\frac{w_1\theta_1 + a_1x_1p_0}{(1-s_1)x_1} = w_0\theta_0$$

$$p_0\left[(1 - a_0)x_0 - \frac{s_0a_1x_1}{1 - s_1}\right] = w_0\theta_0 + \frac{s_0w_1\theta_1}{1 - s_1}$$

$$p_0 = \frac{w_0\theta_0(1-s_1) + s_0w_1\theta_1}{(1-s_1)}\frac{(1-s_1)}{(1-a_0)(1-s_1)x_0 - s_0a_1x_1} =$$

$$= \frac{w_0\theta_0 + w_1\theta_1\frac{s_0}{1-s_1}}{(1-a_0)x_0 - \frac{s_0}{1-s_1}a_1x_1} = \frac{w_0\theta_0 + w_1\theta_1\frac{s_0X_1}{(1-s_1)X_1}}{(1-a_0)x_0(1 - \frac{s_0}{1-s_1}\frac{a_1X_1}{(1-a_0)X_0})} =$$

$$= \frac{w_0\theta_0 + w_1\theta_1h_0}{(1-a_0)x_0(1-h_0\delta_1)},$$

де $h_0 = \frac{s_0X_1}{(1-s_{1})X_1}$ - частка матеріального сектора в витратах товарної продукції фондосоздаючого сектора.

$\delta_1 = \frac{a_1 X_1}{(1-a_0)X_0}$ – частка фондосоздаючого сектора у витратах товарної продукції матеріального сектора.

Підставимо перше рівняння (2.16) у друге.:

$$p_1 = \frac{w_1\theta_1 + a_1 x_1 p_0}{(1-s_1)x_1} = \frac{w_1\theta_1 + \dfrac{w_0\theta_0 + p_1 x_1 s_0}{(1-a_0)x_0} a_1 x_1}{(1-s_1)x_1} = \square$$

$$= \frac{w_1\theta_1(1-a_0)x_0 + (w_0\theta_0 + p_1 x_1 s_0)a_1 x_1}{(1-s_1)x_1(1-a_0)x_0}$$

$$p_1[(1-s_1)x_1(1-a_0)x_0] = w_1\theta_1(1-a_0)x_0 + (w_0\theta_0 + p_1 x_1 s_0)a_1 x_1$$

$$p_1[(1-s_1)x_1(1-a_0)x_0 - s_0 x_1^2 a_1] = w_1\theta_1(1-a_0)x_0 + w_0\theta_0 a_1 x_1$$

$$p_1 = \frac{w_1\theta_1(1-a_0)x_0 + w_0\theta_0 a_1 x_1}{(1-s_1)x_1\left[(1-a_0)x_0 - \dfrac{s_0}{1-s_1}a_1 x_1\right]} =$$

$$= \frac{w_1\theta_1 + w_0\theta_0 \dfrac{a_1 x_1}{(1-a_0)x_0}}{(1-s_1)x_1[1 - \dfrac{s_0}{(1-s_1)}\dfrac{a_1 x_1}{(1-a_0)x_0}]} = \frac{w_1\theta_1 + w_0\theta_0\delta_1}{(1-s_1)x_1(1-h_0)\delta_1}$$

З (2.16): $\quad p_2 = \frac{w_0\theta_0 + w_1\theta_1 + w_2\theta_2}{x_2}$

Отже, отримали для цін::

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{w_0\theta_0 + w_1\theta_1 h_0}{(1-a_0)x_0(1-h_0\delta_1)} \\ p_1 &= \frac{w_1\theta_1 + w_0\theta_0\delta_1}{(1-s_1)x_1(1-h_0)\delta_1} \\ p_2 &= \frac{w_0\theta_0 + w_1\theta_1 + w_2\theta_2}{x_2} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Тобто, ціна продукції дорівнює відношенню вартості повних витрат праці на всю продукцію до чистої товарної продукції сектора.

Введемо тепер явно податки. Основним будемо вважати принцип стягнення податків пропорційно обсягу виробництва, тобто прибутку.

Якщо позначити ставку податку з одиниці продукції j-го сектора через t_j, то рівняння для цін (2.12) набудуть вигляду:

$$\begin{cases} (1-a_0)X_0 p_0 - p_1 s_0 X_1 = w_0 L_0 + t_0 X_0 \\ -a_1 X_1 p_0 + (1-s_1)p_1 X_1 = w_1 L_1 + t_1 X_1 \\ -a_2 X_2 p_0 - p_1 s_2 X_1 + \ p_2 X_2 = w_2 L_2 + t_2 X_2 \end{cases} \tag{2.18}$$

Якщо скласти рівняння (2.18), то отримаємо баланс платоспроможного попиту і пропозиції:

$$(1-a_0)X_0p_0 - p_1s_0X_1 - a_1X_1p_0 + (1-s_1)p_1X_1 - a_2X_2p_0 - p_1s_2X_1 + \ p_2X_2$$
$$= \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i$$

$$p_0[X_0(1-a_0) - a_1X_1 - a_2X_2] - p_1X_1(s_0+s_1+s_2-1) + \ p_2X_2 = \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i$$

Враховуючи (2.7) и (2.8), отримаємо:

$$p_2X_2 = \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i \qquad (2.19)$$

Тут перше слагаеме в правій частині — сукупний дохід працівників матеріальної сфери, друге — сукупний дохід «бюджетників» (пенсії, допомоги, зарплата осіб, зайнятих у невиробній сфері).

Знайдемо розв'язки системи (2.18):

$$\begin{cases} p_0 = \frac{w_0L_0 + t_0X_0 + p_1s_0X_1}{(1-a_0)X_0} \\ p_1 = \frac{w_1L_1 + t_1X_1 + a_1X_1p_0}{(1-s_1)X_1} \\ p_2 = \frac{\sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i}{X_2} \end{cases} \qquad (2.20)$$

Останнє рівняння отримано з рівняння (2.19). Підставимо друге рівняння системи (2.20) в перше:

$$p_0 = \frac{w_0L_0 + t_0X_0 + s_0X_1\frac{w_1L_1 + t_1X_1 + a_1X_1p_0}{(1-s_1)X_1}}{(1-a_0)X_0}$$

$$p_0\left[(1-a_0)X_0 - \frac{s_0X_1a_1X_1}{(1-s_1)X_1}\right] = w_0L_0 + t_0X_0 + s_0X_1\frac{w_1L_1 + t_1X_1}{(1-s_1)X_1}$$

$$p_0 = \frac{w_0L_0 + t_0X_0 + s_0\frac{w_1L_1 + t_1X_1}{(1-s_1)}}{(1-a_0)X_0(1 - \frac{a_1X_1}{(1-a_0)X_0}\frac{s_0}{1-s_1}} = \frac{t_0X_0 + w_0\theta_0 + h_0(t_1X_1 + w_1\theta_1)}{(1-a_0)X_0(1-h_0\delta_1)}$$

Підставимо перше рівняння системи (2.20) у друге:

$$p_1 = \frac{w_1L_1 + t_1X_1 + a_1X_1\frac{w_0L_0 + t_0X_0 + p_1s_0X_1}{(1-a_0)X_0}}{(1-s_1)X_1}$$

$$p_1\left[(1-s_1)X_1 - \frac{a_1X_1s_0X_1}{(1-a_0)X_0}\right] = w_1L_1 + t_1X_1 + a_1X_1\frac{w_0L_0 + t_0X_0}{(1-a_0)X_0}$$

$$p_1 = \frac{w_1 L_1 + t_1 X_1 + a_1 X_1 \frac{w_0 L_0 + t_0 X_0}{(1-a_0) X_0}}{(1-s_1) X_1 - \frac{a_1 X_1 s_0 X_1}{(1-a_0) X_0}} = \frac{w_1 L_1 + t_1 X_1 + \delta_1 (w_0 L_0 + t_0 X_0)}{(1-s_1) X_1 (1 - h_0 \delta_1)} =$$

$$= \frac{w_1 \theta_1 + t_1 X_1 + \delta_1 (w_0 \theta_0 + t_0 X_0)}{(1-s_1) X_1 (1 - h_0 \delta_1)}$$

$$\begin{cases} p_0 = \frac{t_0 X_0 + w_0 \theta_0 + h_0 (t_1 X_1 + w_1 \theta_1)}{(1-a_0) X_0 (1 - h_0 \delta_1)} \\ p_1 = \frac{w_1 \theta_1 + t_1 X_1 + \delta_1 (w_0 \theta_0 + t_0 X_0)}{(1-s_1) X_1 (1 - h_0 \delta_1)} \\ p_2 = \frac{\sum_{i=0}^{2} w_i \theta_i + \sum_{i=0}^{2} t_i X_i}{X_2} \end{cases} \qquad (2.21)$$

2.3 Дослідження збалансованих стаціонарних станів

Збаланований стан трисекторної економіки визначається трьома натуральними балансами

$$\begin{cases} \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \theta_j > 0, j = 0{,}1{,}2 \text{ (труд)} \\ s_0 + s_1 + s_2 = 1, s_j > 0, j = 0{,}1{,}2 \text{ (инвестиции)} \\ (1 - a_0)\, x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 \text{(материалы)} \end{cases} \qquad (2.22)$$

и трьома вартісними балансами (2.18)

$$\begin{cases} (1-a_0) X_0 p_0 - p_1 s_0 X_1 = w_0 L_0 + t_0 X_0 \\ -a_1 X_1 p_0 + (1-s_1) p_1 X_1 = w_1 L_1 + t_1 X_1 \\ -a_2 X_2 p_0 - p_1 s_2 X_1 + p_2 X_2 = w_2 L_2 + t_2 X_2 \end{cases}$$

Останні, після ділення на L, приймуть вигляд:

Баланс доходів та витрат матеріального сектору

$$p_0 (1 - a_0)\, x_0 = s_0 x_1 p_1 + w_0 \theta_0 + t_0 x_0 \qquad (2.23)$$

Баланс доходів та витрат фондозберігаючого сектору

$$p_1\, (1 - s_1) x_1 = a_1\, x_1 p_0 + w_1 \theta_1 + t_1 x_1$$

Баланс пропозиції предметів споживання та платежіздатного попиту

$$p_2 X_2 = \sum_{i=0}^{2} w_i L_i + \sum_{i=0}^{2} t_i X_i$$

Шість рівнянь натурально-вартісних балансів пов'язують між собою параметри розподілу праці $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$, розподілу інвестицій (s_0, s_1, s_2), ціни (p_0, p_1, p_2), ставки заробітної плати (w_0, w_1, w_2) і ставки податків (t_0, t_1, t_2).

Всього параметрів – 15, Усього параметрів (усі вони за своїм економічним змістом невід'ємні), а рівнянь — 6, тому мається 9 ступенів свободи.

Змінюючи один або кілька з цих параметрів, можна простежити, як змінюються інші, якщо в іншому стані виконуються натурально-вартісні баланси. Таким чином, з'являється інструмент для дослідження умов виникнення та характерних особливостей протікання важливих економічних процесів. Якщо зміни незначні (будемо вважати, що економіка вільна від потрясінь і всі процеси відбуваються поступово, тобто відсутнє стрибкоподібне змінення змінних), то перехідними процесами можна знехтувати. Саме при цих припущеннях надалі досліджується інфляція.

Слід зазначити, що більшість рівнянь натурально-вартісних балансів нелінійні щодо параметрів розподілу праці та інвестицій. (θ, s). Однак ці ж рівняння в диференціалах лінійні щодо диференціалів цих параметрів. $d\theta_0, d\theta_1, d\theta_2$, ds_0, ds_1, ds_2.

Використовуючи лише натуральні баланси, можна виявити технологічно можливі збалансовані стани трисекторної економіки в усьому діапазоні зміни параметрів розподілу праці та інвестицій. Додаючи до натуральних вартісні баланси, можна з'ясувати економічні можливості досягнення найбільш переважних з технологічно збалансованих станів.

Далі детально досліджуються стани, які задовольняють усім трьом натуральним балансам. При цьому баланс інвестиційних товарів вважається фіксованим, тобто цей баланс виконаний, і визначальні його параметри s_0, s_1, s_2 вважаються фіксованими.

Позначимо $s = (s_0, s_1, s_2)$.

Розглянемо множину стаціонарних збалансованих станів, з шести параметрів яких $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2)$ останні три фіксовані, але пов'язані рівнянням балансу інвестиційних товарів

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, s_j > 0 \qquad (2.24)$$

А перші три параметри можуть змінюватися таким чином, щоб виконувалися трудовий та матеріальний баланси.

$$\begin{cases} \theta_0+\theta_1+\theta_2=1, \theta_j>0 \\ (1-a_0)\,x_0 = a_1x_1 + a_2x_2 \end{cases} \qquad (2.25)$$

Тому з трьох параметрів розподілу праці $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ свільно може змінюватися тільки один. Далі приймемо за вільну змінну θ_2.

Якщо виробничі функції секторів є функціями Кобба-Дугласа, то, враховуючи (2.11), питомі випуски секторів набудуть вигляду:

$$x_0 = B_0(s)\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}$$

$$x_1 = B_1(s)\theta_1 \qquad (2.26)$$

$$x_2 = B_2(s)\theta_2^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}.$$

де: $B_0(s) = A_0A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}}\lambda_0^{-\alpha_0}\lambda_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{\alpha_1-1}}s_0^{\alpha_0}s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}$

$$B_1(s) = A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}}s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}$$

$$B_2(s) = A_2A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}\lambda_2^{-\alpha_2}\lambda_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-1}}\, s_2^{\alpha_2}s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}$$

З відношення (2.26) знаходимо диференціали питомих випусків:

$$dx_0 = B_0(s)(\,(1-\alpha_0)\theta_0^{-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}d\theta_0 + \alpha_0\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0-1}d\theta_1) =$$

$$= B_0(s)\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}\left((1-\alpha_0)\theta_0^{-1} + \alpha_0 d\theta_1\theta_1^{-1}\right) =$$

$$= x_0\left((1-\alpha_0)\theta_0^{-1} + \alpha_0 d\theta_1\theta_1^{-1}\right)$$

$$dx_1 = B_1(s)d\theta_1 = x_1 d\theta_1\theta_1^{-1} \qquad (2.27)$$

$$dx_2 = B_2(s)\,(1-\alpha_2)\theta_2^{-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}d\theta_2 + \alpha_2\theta_2^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2-1}d\theta_1) =$$

$$= x_2\left((1-\alpha_2)d\theta_2\theta_2^{-1} + \alpha_2 d\theta_1\theta_1^{-1}\right)$$

Рівняння (2.25) в диференціалах набудуть вигляду:

$$\begin{cases} d\theta_0+d\theta_1+d\theta_2=0 \\ (1-a_0)\,dx_0 = a_1dx_1 + a_2dx_2 \end{cases} \qquad (2.28)$$

Підставляючи (2.27) у друге рівняння системи (2.28), отримаємо::

$$(1-a_0)x_0\left[(1-\alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0} + \alpha_0\frac{d\theta_1}{\theta_1}\right] = a_1x_1\frac{d\theta_1}{\theta_1} + a_2x_2[(1-\alpha_2)\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \alpha_2\frac{d\theta_1}{\theta_1}]$$

Перетворимо отримане рівняння: поділимо обидві частини на $(1-a_0)x_0$ приведемо подібні.

$$(1-\alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0} + \alpha_0\frac{d\theta_1}{\theta_1} = \frac{a_1x_1}{(1-a_0)x_0}\frac{d\theta_1}{\theta_1} + \frac{a_2x_2}{(1-a_0)x_0}[(1-\alpha_2)\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \alpha_2\frac{d\theta_1}{\theta_1}]$$

$$(1-\ \alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0}+\frac{d\theta_1}{\theta_1}\left(\alpha_0-\frac{a_1x_1}{(1-\ a_0)x_0}-\alpha_2\frac{a_2x_2}{(1-\ a_0)x_0}\right)=$$

$$=(1-\ \alpha_2)\frac{a_2x_2}{(1-\ a_0)x_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$

В результаті перетворили до вигляду:

$$(1-\ \alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0}+\frac{d\theta_1}{\theta_1}(\alpha_0-\delta_1-\alpha_2\delta_2)=(1-\ \alpha_2)\delta_2\frac{d\theta_2}{\theta_2} \qquad (2.29)$$

де $\delta_i=\frac{a_ix_i}{(1-\ a_0)x_0}, i=1{,}2$ - частка $i-$го сектора у виробничому споживанні товарної продукції матеріального сектора, при цьому

$$\delta_1+\delta_2=1$$

Дійсно, з (2.9): $\frac{a_1x_1+a_2x_2}{(1-\ a_0)x_0}=\frac{(1-\ a_0)x_0}{(1-\ a_0)x_0}=1$

Поділимо обидві частини (2.29) на $(1-\ a_0)$:

$$\frac{d\theta_0}{\theta_0}+\frac{\alpha_0-\delta_1-\alpha_2\delta_2}{(1-\ \alpha_0)}\frac{d\theta_1}{\theta_1}=\frac{1-\ \alpha_2}{1-\ \alpha_0}\delta_2\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$

Позначимо $\Delta=\frac{1-\ \alpha_2}{1-\ \alpha_0}\delta_2$ $-$скоригована частка споживчого сектора в використанні товарної продукції матеріального сектора.

Розглянемо коефіцієнт при $\frac{d\theta_1}{\theta_1}$:

$$\frac{\alpha_0-\delta_1-\alpha_2\delta_2}{(1-\ \alpha_0)}=\frac{\alpha_0-(1-\delta_2)-\alpha_2\delta_2}{1-\ \alpha_0}=\frac{\alpha_0+\delta_2-1-\alpha_2\delta_2}{1-\ \alpha_0}=$$

$$=\frac{1-\ \alpha_2}{1-\ \alpha_0}\delta_2-\frac{1-\ \alpha_0}{1-\ \alpha_0}=\Delta-1$$

Тоді (2.29) набуде вигляду:

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1}=\frac{\Delta}{\Delta-1}\frac{d\theta_2}{\theta_2}+\frac{d\theta_0}{\theta_0}\frac{1}{1-\Delta}=\Delta-1$$

Система (2.28) набуває наступної форми:

$$\begin{cases}\theta_0\frac{d\theta_0}{\theta_0}+\theta_1\frac{d\theta_1}{\theta_1}=-\theta_2\frac{d\theta_2}{\theta_2}\\ \frac{d\theta_0}{\theta_0}-(1-\Delta)\frac{d\theta_1}{\theta_1}=\Delta\frac{d\theta_2}{\theta_2}\end{cases} \qquad (2.30)$$

$$\begin{cases}\frac{d\theta_0}{\theta_0}=-\frac{\theta_2}{\theta_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2}-\frac{\theta_1}{\theta_0}\frac{d\theta_1}{\theta_1}\\ \frac{d\theta_1}{\theta_1}=\frac{\Delta}{\Delta-1}\frac{d\theta_2}{\theta_2}+\frac{d\theta_0}{\theta_0}\frac{1}{1-\Delta}\end{cases} \qquad (2.31)$$

Розв'яжемо систему (2.31) щодо $\frac{d\theta_0}{\theta_0}, \frac{d\theta_1}{\theta_1}$.

Підставимо друге рівняння системи (2.31) в перше.

$$\frac{d\theta_0}{\theta_0} = -\frac{\theta_2}{\theta_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2} - \frac{\theta_1\Delta}{\theta_0(\Delta-1)}\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \frac{\theta_1}{\theta_0(\Delta-1)}\frac{d\theta_0}{\theta_0}$$

$$\frac{d\theta_0}{\theta_0}\left(1 - \frac{\theta_1}{\theta_0(\Delta-1)}\right) = -\frac{d\theta_2}{\theta_2}\left(\frac{\theta_2}{\theta_0} + \frac{\theta_1\Delta}{\theta_0(\Delta-1)}\right)$$

$$\frac{d\theta_0}{\theta_0} = -\frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{(\theta_2\Delta - \theta_2 + \theta_1\Delta)\theta_0(\Delta-1)}{\theta_0(\Delta-1)(\theta_0\Delta - \theta_0 - \theta_1)} = \frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{\theta_2 - \theta_2\Delta - \theta_1\Delta}{\theta_0\Delta - \theta_0 - \theta_1} =$$

$$= \frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{\theta_2 - \Delta(1-\theta_0)}{\theta_0\Delta - 1 + \theta_2} = \frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{\Delta - \theta_2 - \theta_0\Delta}{1 - \theta_0\Delta - \theta_2}$$

Підставимо перше рівняння системи (2.31) у друге:

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1} = \frac{\Delta}{\Delta-1}\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \frac{1}{\Delta-1}\left(\frac{\theta_2}{\theta_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \frac{\theta_1}{\theta_0}\frac{d\theta_1}{\theta_1}\right)$$

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1} = \frac{d\theta_1}{\theta_1}\left(1 - \frac{\theta_1}{\theta_0(\Delta-1)}\right) = \frac{d\theta_2}{\theta_2}\left(\frac{\Delta}{\Delta-1} + \frac{\theta_2}{\theta_0(\Delta-1)}\right)$$

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1} = \frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{(\Delta\theta_0 + \theta_2)(\Delta-1)\theta_0}{(\Delta-1)\theta_0(\theta_0 - \Delta\theta_0 + \theta_1)} = \frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{(\Delta\theta_0 + \theta_2)}{(\theta_0 - \Delta\theta_0 + \theta_1)} = \frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{\Delta\theta_0 + \theta_2}{1 - \theta_2 - \Delta\theta_0}$$

Отже, система (2.30) набула наступного вигляду:

$$\frac{d\theta_0}{\theta_0} = \frac{g_0}{g_2}\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\theta_2} \qquad (2.32)$$

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1} = -\frac{g_1}{g_2}\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$

де

$$g_0 = \Delta - \theta_2 - \Delta\theta_0$$

$$g_1 = \theta_2 + \Delta\theta_0$$

$$g_2 = 1 - \theta_2 - \Delta\theta_0.$$

2.4 Дослідження виразів, що визначають поведінку трисекторної економіки

Нагадаємо основні рівняння, що визначають стан трисекторної економіки. З шести параметрів $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2)$ останні три фіксовані, але пов'язані рівнянням балансу інвестиційних товарів.

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, s_j > 0,$$

А перші три параметри можуть змінюватися таким чином, щоб виконувалися трудовий та матеріальний баланси:

$$\begin{cases} \theta_0+\theta_1+\theta_2=1, \theta_j>0 \\ (1-a_0)\,x_0 = a_1x_1+a_2x_2 \end{cases}$$

в яких питомі випуски секторів визначаються виразами (2.26) (технологічні можливості секторів представлені функціями Кобба-Дугласа):

$$x_0 = B_0(s)\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}$$

$$x_1 = B_1(s)\theta_1$$

$$x_2 = B_2(s)\theta_2^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}.$$

де: $B_0(s)=A_0A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}}\lambda_0^{-\alpha_0}\lambda_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{\alpha_1-1}}s_0^{\alpha_0}s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}$

$B_1(s)=A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}}s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}$

$B_2(s)=A_2A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}\lambda_2^{-\alpha_2}\lambda_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-1}}s_2^{\alpha_2}s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}$

Вільна змінна θ_2 може змінюватися від

$\theta_2 = 0$ (виробництво предметів споживання відсутнє) до $\theta_2 = \bar{\theta}_2$.

Рівняння (2.25) в диференціалах мають вигляд (система (2.28)):

$$\begin{cases} d\theta_0+d\theta_1+d\theta_2=0 \\ (1-a_0)\,dx_0 = a_1dx_1+a_2dx_2 \end{cases}$$

де диференціали питомих випусків визначаються за формулою (2.26).

Останні рівняння в попередньому параграфі приведені до вигляду (система (2.32)):

$$\frac{d\theta_0}{\theta_0} = \frac{g_0}{g_1}\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1} = -\frac{g_1}{g_2}\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$

где $g_0 = \Delta - \theta_2 - \Delta\theta_0$, $\Delta = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\delta_2$

$g_1 = \theta_2 + \Delta\theta_0$, $\delta_i = \frac{a_ix_i}{(1-a_0)x_0}, i = 1,2$

$g_2 = 1 - \theta_2 - \Delta\theta_0$

З (2.26) отримали наступні вирази для диференціалів: dx_0, dx_1, dx_2 (система (2.27)):

$$dx_0 = x_0\left((1-\alpha_0)\theta_0^{-1} + \alpha_0 d\theta_1\theta_1^{-1}\right)$$

$$dx_1 = x_1 d\theta_1 \theta_1^{-1}$$

$$dx_2 = x_2\big((1 - \alpha_2) d\theta_2 \theta_2^{-1} + \alpha_2 d\theta_1 \theta_1^{-1}\big)$$

Підставивши в (2.27) вирази (2.32), отримаємо остаточні вирази для диференціалів питомих випусків секторів:

$$dx_0 = \frac{u_0 x_0}{\theta_2 g_2}\, d\theta_2$$

$$dx_1 = -\frac{g_1 x_1}{\theta_2 g_2}\, d\theta_2$$

$$dx_2 = \frac{u_2 x_2}{\theta_2 g_2}\, d\theta_2$$

де

$$u_0 = (1 - \alpha_0)\Delta - \theta_2 - \Delta\theta_0$$

$$u_2 = (1 - \alpha_2) - \theta_2 - \Delta\theta_0$$

Останнє вираження, а також вираження (2.32) повністю визначають поведінку трисекторної економіки в частині змін у розподілі праці та в питомих випусках секторів. Оскільки ці зміни безпосередньо залежать від знаків функцій $g_0(\theta_2)$, $g_1(\theta_2), g_2(\theta_2), u_0(\theta_2), u_2(\theta_2),$ то необхідно вивчити поведінку цих функцій в усьому діапазоні зміни вільної змінної.$\theta_2 \in (0, \bar{\theta}_2)$.

В цьому дослідженні використовуємо позначення $\theta_0^0 = \theta_0(0), \theta_1^0 = \theta_1(0)$, а також вважатимемо відповідно до раніше зробленої пропозиції, що $\alpha_0 < \alpha_2$ (рівень технологічного розвитку споживчого сектора не нижчий, ніж матеріального).

Зазначимо, що всі вищеперелічені функції мають у своєму складі величину $\Delta -$ скориговану частку споживчого сектора у витратах товарної продукції матеріального сектора:

$$\Delta = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_0}\delta_2 = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_0}\frac{a_2 x_2}{(1 - a_0)x_0}$$

Позначимо $h = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0} \le 1$. Тоді $\Delta = h\delta_2$.

Тому спочатку дослідимо, як змінюється Δ. Поведінка Δ визначається поведінкою відношення $\frac{x_2}{x_0}$, при цьому $\Delta(0) = 0$.

$\Delta \le \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0} \le 1$ оскільки з (2.9) $\delta_2 = \frac{a_2 x_2}{(1-a_0)x_0} < 1$.

З (2.32) означає:

$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = \frac{x_0 dx_2 - x_2 dx_0}{x_0^2} =$$

$$= x_0 x_2 \left[(1 - \alpha_2)\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \alpha_2 \frac{d\theta_1}{\theta_1}\right] - x_2 x_0 \left[(1 - \alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0} + \alpha_0 \frac{d\theta_1}{\theta_1}\right]$$

$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = \frac{x_2}{x_0}\left[(1 - \alpha_2)\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \alpha_2 \frac{d\theta_1}{\theta_1} - (1 - \alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0} + \alpha_0 \frac{d\theta_1}{\theta_1}\right]$$

$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right)=\frac{x_2}{x_0}\left[(1-\alpha_2)\frac{d\theta_2}{\theta_2}+(\alpha_2-\alpha_0)\frac{d\theta_1}{\theta_1}-(1-\alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0}\right]$$
$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right)=\frac{x_2}{x_0}\left[(1-\alpha_2)\frac{d\theta_2}{\theta_2}-(\alpha_2-\alpha_0)\frac{g_1}{g_2}\frac{d\theta_2}{\theta_2}-(1-\alpha_0)\frac{g_0}{g_2}\frac{d\theta_2}{\theta_2}\right]$$
$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right)=\frac{x_2}{x_0}\left[(1-\alpha_2)-(\alpha_2-\alpha_0)\frac{\theta_2+\Delta\theta_0}{1-\theta_2-\Delta\theta_0}-(1-\alpha_0)\frac{\Delta-\theta_2-\Delta\theta_0}{1-\theta_2-\Delta\theta_0}\right]\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$
$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right)=\frac{x_2}{x_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2}\left[\frac{1-\theta_2-\Delta\theta_0-\alpha_2+\alpha_2\theta_2+\alpha_2\Delta\theta_0+\alpha_0\theta_2}{1-\theta_2-\Delta\theta_0}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_0\Delta\theta_0-\Delta+\theta_2+\Delta\theta_0+\alpha_0\Delta-\alpha_0\theta_2-\alpha_0\theta_0\Delta}{1-\theta_2-\Delta\theta_0}\right]$$
$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right)=\frac{x_2}{x_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{1-\alpha_2-\Delta(1-\alpha_0)}{1-\theta_2-\Delta\theta_0}$$
$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right)=\frac{x_2}{x_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{1-\alpha_2-\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\delta_2(1-\alpha_0)}{1-\theta_2-\Delta\theta_0}$$
$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right)=\frac{x_2}{x_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{1-\alpha_2-\delta_2(1-\alpha_2)}{1-\theta_2-\Delta\theta_0}$$
$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right)=\frac{x_2}{x_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{(1-\alpha_2)(1-\delta_2)}{1-\theta_2-\Delta\theta_0}$$
$$d\left(\frac{x_2}{x_0}\right)=\frac{x_2}{x_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{(1-\alpha_2)\delta_1}{1-\theta_2-\Delta\theta_0} \qquad (2.33)$$

Нагадаємо, що δ_1 - доля фондоутворювального сектора у витратах товарної продукції матеріального сектора, тому $\delta_1 > 0$ при $\theta_1 > 0$.

Так як $\Delta = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\frac{a_2x_2}{(1-a_0)x_0}$, то

$$d\Delta = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\frac{x_2}{x_0}\frac{d\theta_2}{\theta_2}\frac{(1-\alpha_2)\delta_1}{g_2} \qquad (2.34)$$
$$d\Delta = d\theta_2\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\delta_2\frac{(1-\alpha_2)\delta_1}{\theta_2 g_2}$$
$$d\Delta = d\theta_2\Delta\frac{(1-\alpha_2)\delta_1}{\theta_2 g_2} \Rightarrow \Delta' = \frac{d\Delta}{d\theta_2} = \frac{(1-\alpha_2)\delta_1\Delta}{\theta_2 g_2}$$

$1-\alpha_2 > 0, \delta_1 > 0,\ \Delta > 0$, при цьому $\Delta' > 0$ при $\theta_2 > 0, g_2 > 0$.

Розглянемо $g_2(\theta_2) = 1-\theta_2-\Delta\theta_0 \geq 1-\theta_2-\theta_0$, т.к. $0 < \Delta < 1$, $\theta_0 > 0$, $1-\theta_2-\theta_0 = \theta_1$ из (2.28), тому

$$g_2(\theta_2) \geq \ \theta > 0$$
$$g_2(\theta_2) > 0$$

Маємо , що

$$\Delta' > 0 \text{ при } \theta_2 \in (0, \overline{\theta}_2).$$

Знайдемо

$$\lim_{\theta_2\to 0}\Delta'(\theta_2) = \lim_{\theta_2\to 0}\frac{(1-\alpha_0)\delta_1\Delta}{\theta_2 g_2}$$

Так як

$$\lim_{\theta_2\to 0}\delta_1(\theta_2)=1 \text{ и } \lim_{\theta_2\to 0}g_2 = \lim_{\theta_2\to 0}(1-\theta_2-\Delta\theta_0) = 1,$$

Останнє виконується в силу того, що

$$\Delta(0) = 0$$

З рахунком(2.32) та (2.26) маємо:

$$\frac{\Delta}{\theta_2} = \frac{1-\alpha_2}{\theta_2(1-\alpha_0)}\delta_2 = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\frac{a_2x_2}{\theta_2(1-a_0)x_0} =$$

$$= \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\frac{a_2B_2(s)\theta_2^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}}{\theta_2(1-a_0)B_0(s)\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}}$$

Визначемо $C=\frac{a_2B_2(s)\theta_1^{\alpha_2}}{(1-a_0)B_0(s)\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}}$

Тоді $\lim_{\theta_2\to 0}\frac{\Delta}{\theta_2} = \lim_{\theta_2\to 0}C\theta_2^{-\alpha_2} = \lim_{\theta_2\to 0}\frac{a_2B_2(s)\theta_1^{\alpha_2}}{(1-a_0)B_0(s)\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}}\theta_2^{-\alpha_2} = +\infty$

Тому, принаймні, для малих θ_2 виповняється $\Delta''(\theta_2) < 0$.

Розглянемо детальніше функцію

$$g_1(\theta_2) = \theta_2 + \theta_0\Delta = \theta_2 + \frac{g_2}{g_0}\frac{\theta_2}{d\theta_2}d\theta_0$$

$$g_1(0) = 0$$

$$g_1(\bar{\theta}_2) = h + \bar{\theta}_2(1-h) > 0$$

Оскільки $g_2 = 1 - g_1, g_0 = \Delta - g_1$, то з урахуванням (2.32) похідна функції g_1 наступним чином виражається через ці функції:

$$g_1' = 1 + \theta_0'\Delta + \theta_0\Delta' = 1 + \frac{\theta_0 g_0}{\theta_2 g_2}\Delta + \frac{\theta_0(1-\alpha_0)\delta_1}{\theta_2 g_2}\Delta =$$

$$= \frac{\theta_2 g_2 + \theta_0 g_0\Delta + \theta_0((1-\alpha_0)\delta_1}{\theta_2 g_2} = \frac{(1-g_1)\theta_2 + (\Delta - g_1)\theta_0\Delta + \theta_0(1-\alpha_0)\delta_1}{\theta_2 g_2} =$$

$$= \frac{\theta_2 - g_1\theta_2 + \theta_0\Delta^2 - g_1\theta_0\Delta + \theta_0(1-\alpha_0)\delta_1}{\theta_2 g_2} = \frac{\theta_2 - g_1(\theta_2 + \theta_0\Delta) + \theta_2 + \theta_0\Delta^2 + \theta_0(1-\alpha_0)\delta_1}{\theta_2 g_2}$$

$$= \frac{\theta_2 - g_1^2 + \theta_0\Delta^2 + \theta_0(1-\alpha_0)\delta_1}{\theta_2 g_2}$$

При $g_0 > 0$ $g_1' > 0$, але на деякому підмножині інтервалу $(0,\bar{\theta}_2)$, як буде показано далі, функція g_0 приймає значення < 0, тому необхідне більш ретельне дослідження.

Так як $g_1(0) = 0$ і з (2.32) $\theta_0 = \frac{g_2}{g_0}\frac{\theta_2}{d\theta_2}d\theta_0$ і $\theta_0(\theta_2) = \theta_0^0$

при малих $\theta_2 > 0$

$$\lim_{\theta_2\to 0} g_1' = 1 + \theta_0\Delta^2$$

І поведінка $g_1'(\theta_2)$ цілком визначається членом $\Delta' = \frac{\theta_0(1-\alpha_0)\delta_1\Delta}{\theta_2 g_2}$.

$$\lim_{\theta_2\to 0} \frac{\theta_0(1-\alpha_0)\delta_1\Delta}{\theta_2 g_2} = \lim_{\theta_2\to 0} \theta_0^0 \frac{(1-\alpha_0)\delta_1}{g_2}\frac{\Delta}{g_2} = \lim_{\theta_2\to 0} \frac{(1-\alpha_0)\delta_1}{g_2}\left[\theta_0^0 C\theta_2^{-\alpha_2}\right] = +\infty.$$

Так, $g_1'(0) = +\infty$ і отже, принаймні для малих θ_2 виконується $g_1''(\theta_2) < 0$.

Напроти, поблизу $\bar{\theta}_2(\theta_2 < \bar{\theta}_2)$ знак $g_1'(\theta_2)$ визначається членом $\frac{\theta_2 - g_1\theta_2 + \theta_0\Delta^2}{\theta_2 g_2}$. Но $\bar{\theta}_2 + \theta_0(\bar{\theta}_2)\Delta^2(\bar{\theta}_2) - g_1^2(\bar{\theta}_2) = \bar{\theta}_2 + (1-\bar{\theta}_2)h^2 - (\bar{\theta}_2 + (1-\bar{\theta}_2)h)^2 =$

$= (1-h)^2\bar{\theta}_2(1-\bar{\theta}_2) > 0$ при $h < 1$.

Тому отримуємо, що $g_1(\theta_2) > 0, g_1'(\theta_2) > 0$ при $\theta_2 \in (0,\bar{\theta}_2)$.

В той же час функція $g_2(\theta_2)$ все час спадає на інтервалі $(0,\bar{\theta}_2)$, оскільки $g_2(\theta_2) = 1 - g_1(\theta_2)$, при цьому $g_2(0) = 1$, $g_2(\bar{\theta}_2)(1-h)(1-\bar{\theta}_2) > 0$ при $h < 1$.

При малих θ_2 $\lim_{\theta_2\to 0} g_0'(\theta_2) = \lim_{\theta_2\to 0} C(1-\theta_0^0)\,\theta_2^{-\alpha_2} = +\infty$, $g_0(0)=0$, $g_0(\bar{\theta}_2) = -\bar{\theta}_2(1-h)$ при $h < 1$.

Згідно з теоремою Вейерштрасса, існує така проміжна точка $\hat{\theta}_2$, $0 < \hat{\theta}_2 < \bar{\theta}_2$, в якій функція $g_0(\theta_2)$ обертається (стає рівною нулю) в 0:

$$g_0(\hat{\theta}_2) = 0$$

При $\theta_2 \in (0,\hat{\theta}_2)$ $g_0(\theta_2) > 0$, а при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2,\bar{\theta}_2)$ $g_0(\theta_2) < 0$.

З змістовної точки зору $\hat{\theta}_2$ - точка максимального насичення трудовими ресурсами матеріального сектора.

При малих θ_2 існує два варіанти поведінки функцій: $g_0(\theta_2)$ и $g_1(\theta_2)$.

$$g_0(0) = g_1(0) = 0,$$

$\lim_{\theta_2\to 0} g_0'(0) = \lim_{\theta_2\to 0} g_1'(0) = +\infty$, тому з цих функцій більше значення має та, у якої в малому околі точки $\theta_2 = 0$ похідна більша. Але в цьому окілку

$$\lim_{\theta_2\to 0} g_0'(\theta_2) = \lim_{\theta_2\to 0} C(1-\theta_0^0)\,\theta_2^{-\alpha_2}$$

$$\lim_{\theta_2\to 0} g_1'(\theta_2) = \lim_{\theta_2\to 0} C\theta_0^0\,\theta_2^{-\alpha_2}$$

де *C*- константа, при цьому

$$g_0'(\theta_2) > g_1'(\theta_2) \text{ при } \theta_0^0 < 1-\theta_0^0, \text{т. е. } \theta_0^0 < \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$g_0'(\theta_2) < g_1'(\theta_2) \text{ при } \theta_0^0 > 1-\theta_0^0, \text{т. е. } \theta_0^0 > \frac{1}{2}$$

В свою чергу, значення $\theta_0^0 = \theta_0(0), \theta_1^0 = \theta_1(0)$ визначаються з рівняння (2.25) при $\theta_2 = 0$, т. е. $\theta_1^0 = \theta_1(0)$ і

$$(1-a_0)B_0(s)(\theta_0^0)^{1-\alpha_0} = a_1B_1(s)(1-\theta_0^0)$$

З цього

$$\left(\frac{\theta_0^0}{1-\theta_0^0}\right)^{1-\alpha_0} = \frac{a_1B_1(s)}{(1-a_0)B_0(s)}. \qquad (2.35)$$

Таким чином, $\theta_0^0 < \frac{1}{2}$, якщо $\beta_1(s) < 1$ чи $a_1B_1(s) < (1-a_0)B_0(\mathrm{s})$

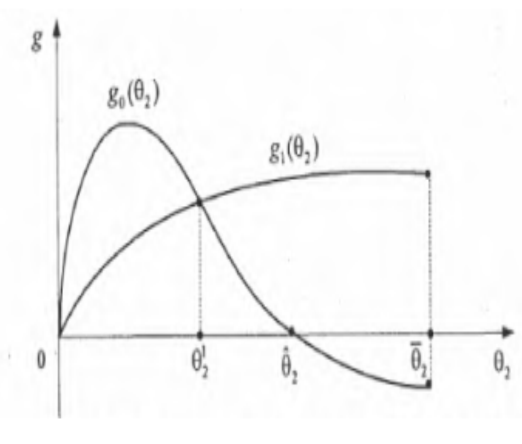
и $\theta_0^0 > \frac{1}{2}$ якщо $\beta_1(s) > 1$ чи $a_1B_1(s) > (1-a_0)B_0(\mathrm{s})$.

На Рис.2.1 та Рис.2.2 показано два варіанти спільної зміни функцій. $g_0(\theta_2)$ и $g_1(\theta_2)$, тому існує тільки одна нетривіальна точка перетину цих функцій: $g_0(\theta_2^e) = g_1(\theta_2^e), \overline{\overline{\theta_2}} < \theta_2^e < \hat{\theta}_2$,
де $\overline{\overline{\theta_2}} -$ точка максимума функції $g_0(\theta_2)$.

При малих θ_2 у дргуому випадку $g_0(\theta_2) < \ g_1(\theta_2)$, тому, взагалі кажучи, існують дві точки перетину цих функцій:

$$g_0(\tilde{\theta}_2^e) = g_1(\tilde{\theta}_2^e)$$
$$g_0(\theta_2^e) = g_1(\theta_2^e)$$
$$\tilde{\theta}_2^e < \overline{\overline{\theta_2}} < \theta_2^e < \hat{\theta}_2,$$

$$\theta_0^0 < \frac{1}{2} \qquad\qquad \theta_0^0 > \frac{1}{2}$$



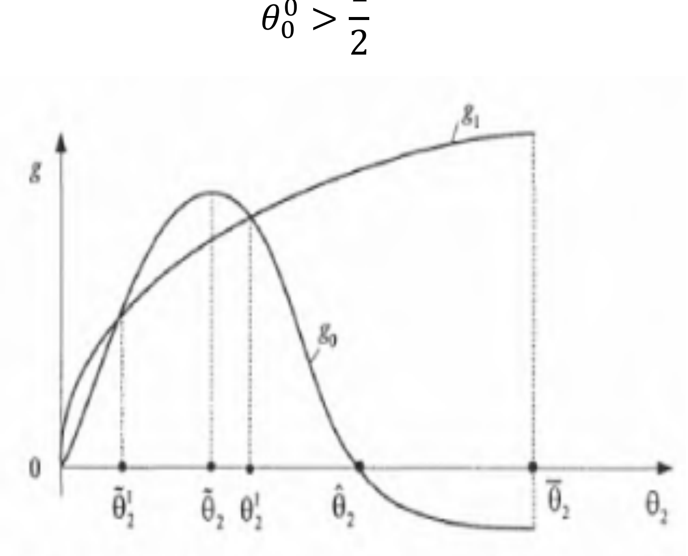


Рис.2.1 **Рис.2.2**

Функція $u_0(\theta_2) = g_0(\theta_2) - \alpha_0\Delta(\theta_2) = \big(1 - \alpha_0 - \theta_0(\theta_2)\big)\Delta(\theta_2) - \theta_2$ поводиться більш складно, ніж $g_0(\theta_2)$. Вона може приймати як позитивні, так і негативні значення:

$u_0(0)$=0

$u_0(\bar{\theta}_2)$=$-(1-h)\bar{\theta}_2 - \alpha_0 h < 0$

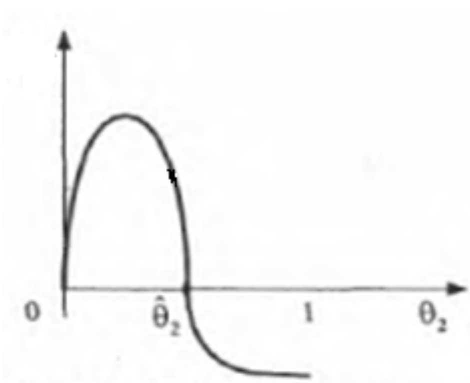
Існує два варіанти поведінки цієї функції:

1) $1 - \alpha_0 - \theta_0^0 > 0$, тоді $u_0'(0) = +\infty$
2) При $1 - \alpha_0 - \theta_0^0 < 0$, $u_0'(0) = -\infty$

Графіки функцій в обох випадках показані на **Рис.2.3** та **Рис.2.4**

$1 - \alpha_0 - \theta_0^0 > 0$ $1 - \alpha_0 - \theta_0^0 < 0$

u_0



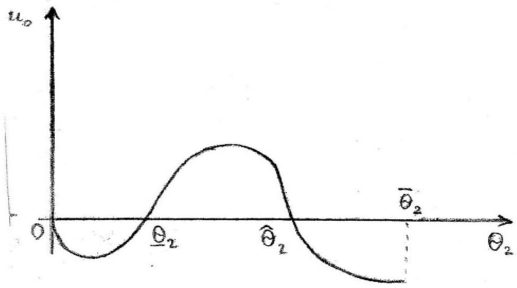


Рис. 2.3 **Рис.2.4**

Початкова частка матеріального сектора в розподілі праці θ_0^0 визначається з рівняння (2.35):

$$\theta_0^0 = \frac{1}{1 + \left[\frac{(1-\alpha_0)B_0(\mathrm{s})}{a_1 B_1(s)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_0}}}$$

Тому перший випадок має місце, коли

$$\frac{a_1 B_1(s)}{(1-\alpha_0)B_0(s)} < \left(\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)^{1-\alpha_0}$$

а другий, коли $\frac{a_1 B_1(s)}{(1-\alpha_0)B_0(\mathrm{s})} > \left(\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)^{1-\alpha_0}$.

З економічних міркувань можна вважати, що завжди $\theta_2 > \underline{\theta_2}$ (в першому випадку $\underline{\theta_2} = 0$), тим самим $u_0(\theta_2) > 0$ при $\theta_2 \in (\underline{\theta_2}, \tilde{\theta}_2)$ та

$u_0(\theta_2) < 0$ при $\theta_2 \in (\tilde{\theta}_2, \bar{\theta}_2)$.

Абсциса критичної точки $\tilde{\theta}_2$ меньше абсциси критичної точки $\hat{\theta}_2$, оскільки $u_0(\theta_2) = g_0(\theta_2) - \alpha_0\Delta(\theta_2) < g_0(\theta_2)$ при $\theta_2 \in (\underline{\theta_2}, \bar{\theta}_2)$.

При цьому $\underline{\theta_2} < \tilde{\theta}_2$, окрім того, $\underline{\theta_2} < \tilde{\theta}_2^{е}$, $\theta_2^{е} < \tilde{\theta}_2^{е}$.

З змістовної точки зору $\tilde{\theta}_2$ - точка максимального віддалення випуску матеріального сектору.

Функції $u_2(\theta_2)$ має один варіант зміни, приймає як додатні, так і від'ємні значення:

$$u_2(0) = 1 - \alpha_2,$$

$$u_2'(0) = -\infty$$

$$u_2(\bar{\theta}_2) = -\alpha_0(1 - \alpha_2) - \bar{\theta}_2(1 - h) < 0$$

Тому в деякій проміжній точці $u_2(\theta_2^*) = 0$.

З змістовної точки зору θ_2^* - точка максимального удельного випуску споживчого сектора.

На Рис.5 показано графік функції $u_2(\theta_2)$.

Рис.2.5

оскільки $u_2 - u_0 = \delta_1 + \alpha_2\delta_2 > 0$, то $u_0 < u_2$, при цьому $\tilde{\theta}_2 < \theta_2^*$.

Так само $\tilde{\theta}_2 < \hat{\theta}_2$, оскільки $u_0 = g_0 - \alpha_0\Delta < g_0$.

Між критичними точками θ_2^* и $\hat{\theta}_2$ може бути наступні співвідношення ($u_2 - g_0 = 1 - \alpha_2 - \Delta$):

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2^*, \text{если } \Delta(\hat{\theta}_2) = 1 - \alpha_2;$$

$$\hat{\theta}_2 < \theta_2^*, \text{если } \Delta(\hat{\theta}_2) < 1 - \alpha_2;$$

$$\hat{\theta}_2 > \theta_2^*, \text{если } \Delta(\hat{\theta}_2) > 1 - \alpha_2.$$

На **Рис.2.6 та Рис.2.7** показано два основних варіанти спільної зміни функцій $g_0(\theta_2)$ и $u_2(\theta_2)$.

$\Delta(\hat{\theta}_2) > 1 - \alpha_2$ $\qquad\qquad$ $\Delta(\hat{\theta}_2) < 1 - \alpha_2$

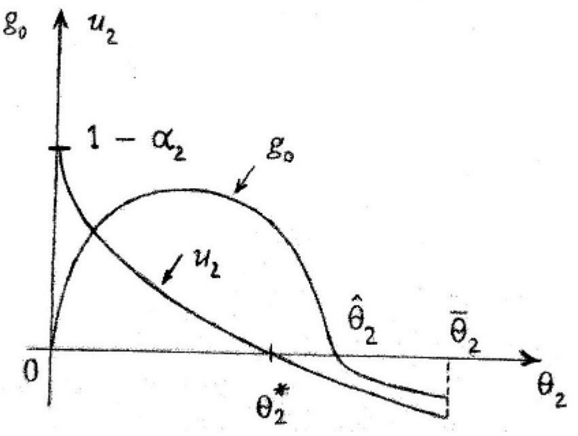


Рис.2.7

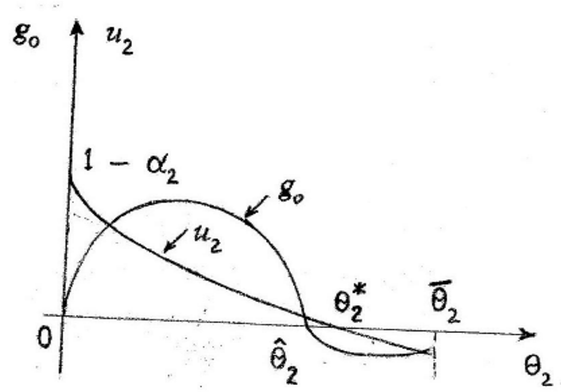


Рис.2.8

2.5 Моделювання інфляції

Розглянемо один із підходів до моделювання інфляції. Згідно з цим підходом умови виникнення та самопідтримки інфляції вивчаються в будь-якому з можливих стаціонарних збалансованих станів трьохсекторної економіки. Згадаємо, що стаціонарний стан економіки визначається шістьма параметрами: три параметри $\theta_0\theta_1\theta_2$ характеризують розподіл праці, інші три $s_0s_1s_2$ - розподіл інвестицій. Ці шість параметрів, а також ціни, ставки заробітної плати та податки пов'язані шістьма натурально-стоімісними балансами (2.22) та (2.18).

У цьому дослідженні інфляції розподіл інвестицій вважається постійним, податки явно не розглядаються, вони включені в заробітну плату, тобто розподіл доходів між виробничою та непроизводною сферами не моделюється.

При зроблених припущеннях дев'ять параметрів (параметри розподілу праці $\theta_0\theta_1\theta_2$, ціни $p_0p_1p_2$ та ставки заработньої плати $w_0w_1w_2$) пов'язані наступними п'ятьма балансами в відносних показниках (баланс розподілу інвестицій відповідно до припущення опущено), $x_i, i = 0,1,2$ – удільні випуски секторів):

$(1 - a_0)\, x_0 = a_1x_1 + a_2x_2$(матеріали)

$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \theta_j > 0, j = 0,1,2$ (праця) $\qquad$ *(2.36)*

$p_0(1-a_0)\ x_0\ =\ s_0x_1p_1+w_0\theta_0+t_0x_0$ (Баланс доходів і витрат матеріального сектора),

$p_1\ (1-s_1)x_1\ =\ a_1\ x_1p_0+w_1\theta_1+t_1x_1$(Баланс доходів і витрат фондосозидаючого сектора),

$p_2x_2=w_0\theta_0+w_1\theta_1+w_2\theta_2$ (баланс попиту і пропозиції).

Нагадаємо, що в рівняннях (2.36) удельні випуски секторів для виробничих функцій Кобба-Дугласа задаються наступними виразами:

$$x_0=B_0(s)\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0},\quad x_1=B_1(s)\theta_1,\qquad x_2=B_2(s)\theta_2^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}$$

де: $B_0(s)=A_0A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}}\lambda_0^{-\alpha_0}\lambda_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{\alpha_1-1}}s_0^{\alpha_0}s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}$

$B_1(s)=A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}}s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}$

$B_2(s)=A_2A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}\lambda_2^{-\alpha_2}\lambda_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-1}}\ s_2^{\alpha_2}s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}$

Рівняння (2.36) в диференціалах набудуть наступного вигляду:

$$d\theta_0+d\theta_1+d\theta_2=0$$

$$(1-\ a_0)\ dx_0=\ a_1dx_1+\ a_2dx_2$$

$$(1-\ a_0)x_0dp_0+p_0(1-\ a_0)dx_0=s_0x_1dp_1+p_1s_0dx_1+d(w_0\theta_0)$$

$$(1-s_1)x_1dp_1+p_1(1-s_1)\ dx_1=a_1x_1dp_0+p_0a_1dx_1+\ d(w_1\theta_1)$$

$$x_2dp_2+p_2dx_2=d(w_0\theta_0+w_1\theta_1+w_2\theta_2)$$

Перепишемо у вигляді:

$$d\theta_0+d\theta_1+d\theta_2=0$$

$$(1-\ a_0)\ dx_0=\ a_1dx_1+\ a_2dx_2$$

$$(1-\ a_0)x_0dp_0-s_0x_1dp_1=-p_0(1-\ a_0)dx_0+p_1s_0dx_1+d(w_0\theta_0)\qquad (2.37)$$

$$-a_1x_1dp_0+(1-s_1)x_1dp_1=[p_0a_1-p_1(1-s_1)]dx_1++d(w_1\theta_1)$$

$$x_2dp_2=-p_2dx_2+d(w_0\theta_0+w_1\theta_1+w_2\theta_2)$$

Перші два рівняння раніше приведені до вигляду (система (2.32)):

$$\frac{d\theta_0}{\theta_0}=\frac{g_0}{g_1}\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\theta_2},$$

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1}=-\frac{g_1}{g_2}\frac{d\theta_2}{\theta_2},$$

де $g_0=\Delta-\theta_2-\Delta\theta_0$,$g_1=\theta_2+\Delta\theta_0$, $\quad g_2=1-\theta_2-\Delta\theta_0$.

Підставляючи в останні три рівняння (2.37) диференціали питомих випусків секторів (2.32), отримуємо систему:

$$\begin{cases}(1-\ a_0)x_0dp_0 - s_0x_1dp_1 = \frac{\Delta}{g_2}[w_0\theta_0 - (1-\ a_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0dw_0 \\ -a_1x_1dp_0 + (1-s_1)x_1dp_1 = \theta_1dw_1 \\ x_2dp_2 = \frac{1}{g_2}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0dw_0 + \theta_1dw_1 + \theta_2dw_2\end{cases} \quad (2.38)$$

Основу подальшого дослідження складають рівняння (2.38) та вирази (2.32), які пов'язують $d\theta_0, d\theta_1, d\theta_2$.

Розглянемо один виток інфляції – підвищення ставки заробітної плати в споживчому секторі призводить до зростання ціни на предмети споживання і тим самим до падіння реальної заробітної плати в матеріальному та фондосоздаючому секторах. Для збереження реальної заробітної плати в цих секторах потрібно підвищувати ставки заробітної плати, що призводить до підвищення ціни на продукцію споживчого сектору і падіння реальної заробітної плати в ньому (номінальна – постійна). Для збереження реальної заробітної плати в споживчому секторі необхідно знову підняти ставку заробітної плати, що означає початок нового витка інфляції. При дослідженні одного витка інфляції виділяють два етапи:

1. підвищення ставки заробітної плати в споживчому секторі та реакція на це секторів (перший піввіток інфляції);
2. підвищення ставок заробітної плати в матеріальному та фондосоздаючому секторах з метою збереження реальної заробітної плати та відображення цієї акції на ціні продукції споживчого сектору (другий піввіток інфляції). Тобто, інфляція не обов'язково може початися в споживчому секторі. Ініціатором її можуть бути і матеріальний, і фондосоздаючий сектори.

Перший півперіод інфляції

Припустимо, що ставка заробітної плати в споживчому секторі зросла від значення w_2 до значення $w_2 + dw_2$, где $dw_2 > 0$. При цьому матеріальний і фондотворчий сектори ще не встигли зреагувати на це збільшення, тобто $dw_0 = 0$, $dw_1 = 0$. Збільшення оплати праці в споживчому секторі призводить до переливу праці в цей сектор, тобто $d\theta_2 > 0$.

Рівняння (2.38) набудуть вигляду:

$$\begin{cases}(1-\ a_0)x_0dp_0 - s_0x_1dp_1 = \frac{\Delta}{g_2}[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_2}{\theta_2} \\ -a_1x_1dp_0 + (1-s_1)x_1dp_1 = 0 \\ x_2dp_2 = \frac{1}{g_2}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_2dw_2\end{cases} \qquad (2.39)$$

Із другого рівняння системи (2.39):

$$dp_1 = \frac{a_1x_1}{(1-s_1)x_1}dp_0$$

$$dp_1 = \frac{a_1}{(1-s_1)}dp_0 \qquad (2.40)$$

З першого рівняння системи (2.39), враховуючи (2.40) і (2.32), отримаємо:

$$(1-\ a_0)x_0dp_0 - s_0x_1\frac{a_1}{(1-s_1)}dp_0 = \frac{\Delta}{g_2}[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$

$$dp_0\left[(1-\ a_0)x_0 - s_0x_1\frac{a_1}{(1-s_1)}\right] = \frac{\Delta\big[[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\big]}{1-\theta_2-\theta_0\Delta}\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$

Із третього рівняння системи (2.39), враховуючи (2.32) для g_2, отримаємо:

$$x_2dp_2 = \frac{1}{g_2}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_2dw_2$$

Таким чином, розв'язок системи рівнянь (2.38) у цьому випадку набуде вигляду:

$$\begin{cases}dp_1 = \frac{a_1}{(1-s_1)}dp_0 \\ bdp_0 = \frac{\Delta\big[[w_0\theta_0-(1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\big]}{1-\theta_2-\theta_0\Delta}\frac{d\theta_2}{\theta_2} \\ x_2dp_2 = \frac{d\theta_2}{\theta_2(1-\theta_2-\theta_0\Delta)}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2] + \theta_2dw_2\end{cases} \qquad (2.41)$$

де

$$b = (1-\ a_0)x_0 - \frac{s_0}{(1-s_1)}x_1a_1 = (1-\ a_0)x_0\left[1 - \frac{s_0}{(1-s_1)(1-\ a_0)x_0}x_1a_1\right] =$$

$$= (1-\ a_0)x_0\left[1 - \frac{s_0}{(1-s_1)}\delta_1\right] = (1-\ a_0)x_0\left[1 - \frac{1-s_1-s_2}{(1-s_1)}\delta_1\right]$$

Из (2.5) $(1-\ a_0)x_0 > 0$, и т. к. $\delta_1 + \delta_2 = 1$,

То $\delta_1 \le 1, \delta_1, \delta_2 > 0, \frac{1-s_1-s_2}{(1-s_1)} < 1$

Таким чином, $b > 0$.

Розглянемо знак виразу $g_2 = 1-\theta_2-\theta_0\Delta = 1-\theta_2-\theta_0\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\frac{a_2x_2}{(1-a_0)x_0}$.

Из (2.8) $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1$, из (2.9) $\delta_2 = \frac{a_2x_2}{(1-a_0)x_0} < 1$

$\Delta = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0} < 1,$ оскільки ми припускаємо, що $\alpha_2 \geq \alpha_1$.

Т.о. $1 - \theta_2 - \theta_0\Delta > 0, 0 < \Delta < 1 \Rightarrow dp_0 > 0$ и $dp_1 > 0$

$$\text{при } [w_0\theta_0 - (1 - \alpha_0)p_0(1 - a_0)x_0] > 0 \qquad (2.42)$$

Оскільки $dw_2 > 0, d\theta_2 > 0$ за умовою, $x_2 > 0$ за змістом $\left(x_i = \frac{X_i}{L}, X_i > 0\right), 1 - \theta_2 - \theta_0\Delta > 0,$ для того, щоб виконувалася умова:

$$\frac{d\theta_2}{\theta_2(1 - \theta_2 - \theta_0\Delta)}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2] > -\theta_2\, dw$$

$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 > -\gamma_2 \qquad (2.43)$$

де $\gamma_2 = \theta_2^2 g_2 \frac{d\theta_2}{\theta_2}$

Таким чином, при зростанні ставки заробітної плати в споживчому секторі ($d\theta_2 > 0$) ціна на його продукцію при виконанні умови (2.43) зростає, а за сталості номінальної заробітної плати в матеріальному і фондоутворюючому секторах реальна заробітна плата в цих секторах падає зі значень $\frac{w_0}{p_2}, \frac{w_1}{p_2}$ до значення $\frac{w_0}{p_2 + dp_2}, \frac{w_1}{p_2 + dp_2}$.

Другий пiввиток інфляції

Для збереження реальної заробітної плати в матеріальному та фондотворчому секторах треба підняти ставки заробітної плати на dw_0и dw_1 відповідно.

Проаналізуємо окремо випадки $dw_0 > 0$ и $dw_1 > 0$.

1. Вона початку розглянемо випадок $dw_0 > 0, dw_1 = dw_2 = 0,$ при цьому $d\theta_0 > 0$ (перелив праці в матеріальний сектор).

Рівняння (2.38) тоді набудуть вигляду:

$$\begin{cases} (1-a_0)x_0dp_0 - s_0x_1dp_1 = \frac{\Delta}{g_2}[w_0\theta_0 - (1 - \alpha_0)p_0(1 - a_0)x_0]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0 dw_0 \\ -a_1x_1dp_0 + (1-s_1)x_1dp_1 = 0 \\ x_2dp_2 = \frac{1}{g_2}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0 dw_0 \end{cases} \qquad (2.4$$

Із другого рівняння системи (2.44):

$$dp_1 = \frac{a_1x_1}{(1-s_1)x_1}\, dp_0 = \frac{a_1}{(1-s_1)}\, dp_0 \qquad (2.45)$$

З першого рівняння системи (2.44), враховуючи (2.45) і (2.32), отримаємо:

$$(1-\ a_0)x_0dp_0 - s_0x_1\frac{a_1}{(1-s_1)}\ dp_0 = \frac{\Delta}{g_2}[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0 dw_0$$

$$dp_0\left[(1-\ a_0)x_0 - s_0x_1\frac{a_1}{(1-s_1)}\right] = \frac{\Delta[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]}{1-\theta_2-\theta_0\Delta}\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0 dw_0$$

Використовуючи з (2.32): $\frac{d\theta_2}{\theta_2} = \frac{d\theta_0}{\theta_0}\frac{g_2}{g_0}$, отримаємо:

$$dp_0\left[(1-\ a_0)x_0 - s_0x_1\frac{a_1}{(1-s_1)}\right] = \frac{\Delta[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]}{\Delta(1-\theta_0)-\theta_2}\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0 dw_0$$

Із третього рівняння системи (2.44), враховуючи (2.32), отримаємо:

$$x_2dp_2 = \frac{1}{g_2}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0 dw_0 =$$

$$= \frac{1}{g_2}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2]\frac{d\theta_0}{\theta_0}\frac{g_2}{g_0} + \theta_0 dw_0 =$$

$$= \frac{1}{\theta_0(1-\theta_2-\theta_0\Delta)}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2] + \theta_0 dw_0$$

Таким чином, розв'язок системи рівнянь (2.44) набуде вигляду:

$$dp_1 = \frac{a_1}{(1-s_1)}\ dp_0$$

$$bdp_0 = \frac{\Delta\left[[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\right]}{\Delta(1-\theta_0)-\theta_2}\frac{d\theta_0}{\theta_0} + \theta_0 dw_0 \qquad (2.46)$$

$$x_2dp_2 = \frac{d\theta_0}{\theta_2(\Delta-\theta_0\Delta-\theta_2)}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2] + \theta_0 dw_0$$

Аналогічно до попереднього випадку, оскільки $b > 0, dw_0 > 0, d\theta_0 > 0$, $\Delta > 0$, то ціни на продукцію матеріального і фондоутворювального секторів зростуть за виконання умов:

Для p_0 :

$$\frac{\Delta\left[[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\right]}{\Delta(1-\theta_0)-\theta_2}\frac{d\theta_0}{\theta_0} + \theta_0 dw_0 > 0$$

$$w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0 > -\frac{\theta_0^2}{\Delta}\frac{dw_0}{d\theta_0}g_0 \text{ при } g_0 > 0$$

$$w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0 < -\frac{\theta_0^2}{\Delta}\frac{dw_0}{d\theta_0}g_0 \text{ при } g_0 < 0$$

Визначемо: $\beta_0^+ = \frac{\theta_0^2}{\Delta}\frac{g_0\,dw_0}{d\theta_0}$,

$\beta_0^- = -\frac{\theta_0^2}{\Delta}\frac{g_0\,dw_0}{d\theta_0}$.

Для p_0 отримали, що необхідне виконання умов:

$$w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0 > -\beta_0^+ \text{ при } g_0\ > 0 \qquad (2.47)$$
$$w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0 < \beta_0^- \text{ при } g_0\ < 0$$

Для того, щоб $dp_2 > 0$, необхідне виконання умови:

$\frac{1}{g_0}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2] > -\theta_0^2\frac{dw_0}{d\theta_0}$ при $g_0 > 0$,

$\frac{1}{g_0}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2] < -\theta_0^2\frac{dw_0}{d\theta_0}$ при $g_0 < 0$,

Визначемо: $\gamma_0^+ = \theta_0^2 g_0\frac{dw_0}{d\theta_0}$

$$\gamma_0^- = -\theta_0^2 g_0\frac{dw_0}{d\theta_0}$$

Тоді отримуємо:

$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 > -\gamma_0^+ \text{ при } g_0 > 0, \qquad (2.48)$$
$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \gamma_0^- \text{ при } g_0 < 0,$$

2. Тепер розглянемо випадок $dw_1 > 0, dw_0 = dw_2 = 0,$ при цьому $d\theta_1 > 0$ (перелив праці у фондотворчий сектор).

Рівняння (2.38) тоді набудуть вигляду:

$$\begin{cases} (1-\ a_0)x_0dp_0 - s_0x_1dp_1 = \frac{\Delta}{g_2}[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_2}{\theta_2} \\ -a_1x_1dp_0 + (1-s_1)x_1dp_1 = \theta_1 dw_1 \\ x_2dp_2 = \frac{1}{g_2}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_1 dw_1 \end{cases} \qquad (2.49)$$

Із другого рівняння системи (2.49):

$$dp_1 = \frac{\theta_1dw_1 + a_1x_1dp_0}{(1-s_1)x_1} \qquad (2.50)$$

З першого рівняння системи (2.49), враховуючи (2.50) отримаємо:

$$(1-\ a_0)x_0dp_0 - s_0x_1\frac{\theta_1dw_1 + a_1x_1dp_0}{(1-s_1)x_1x_0}dp_0 == \frac{\Delta}{g_2}[w_0\theta_0 - (1-\ a_0)p_0(1-$$
$$-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_2}{\theta_2}\ \Big|\ (1-s_1)$$

$$dp_0\left[(1-\ a_0)x_0 - \frac{s_0}{(1-s_1)}a_1x_1\right] =$$
$$= \frac{\Delta}{g_2}[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \frac{s_0}{(1-s_1)}\theta_1dw_1$$

$$dp_0[(1-\ a_0)(1-s_1)x_0 - s_0a_1x_1] =$$
$$= -\frac{\Delta(1-s_1)}{g_2}\frac{g_2}{g_1}\frac{d\theta_0}{\theta_1}[w_0\theta_0 - (1-\ a_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + s_0\theta_1dw_1$$

Із другого рівняння системи (2.49)

$$dp_0 = \frac{(1-s_1)x_1 dp_1 - \theta_1 dw_1}{a_1 x_1} \qquad (2.51)$$

Підставимо (2.51) у перше рівняння системи (2.49):

$$(1-\ a_0)x_0 \frac{(1-s_1)x_1 dp_1 - \theta_1 dw_1}{a_1 x_1} - s_0 x_1 dp_1 =$$

$$= \frac{\Delta}{g_1}[w_0\theta_0 - (1-\ a_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_1}{\theta_1}$$

$$dp_1\left[\frac{(1-\ a_0)x_0(1-s_1)x_1}{a_1 x_1} - s_0 x_1\right] = -\frac{\Delta}{g_1}\left[\frac{(1-\ a_0)x_0(1-s_1)x_1}{a_1 x_1} - s_0 x_1\right]\frac{d\theta_1}{\theta_1} +$$

$$+ \frac{(1-\ a_0)x_0\theta_1 dw_1}{a_1 x_1} \Big| a_1 x_1$$

$$dp_1[(1-\ a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1 x_1 s_0 x_1]$$

$$= -\frac{\Delta a_1 x_1}{g_1}[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_1}{\theta_1}$$

$$+ (1-\ a_0)x_0\theta_1 dw_1$$

Із третього рівняння системи (2.49) отримаємо:

$$x_2 dp_2 = \frac{1}{g_2}[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2 x_2]\frac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_1 dw_1$$

Зростання цін на засоби виробництва забезпечує умову:

$$-\frac{\Delta(1-s_1)x_1}{g_1}[w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0]\frac{d\theta_1}{\theta_1} + s_0 x_1\theta_1 dw_1 > 0 \qquad (2.52)$$

$$w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0 < \frac{s_0 x_1\theta_1 dw_1 g_1\theta_1}{\Delta(1-s_1)x_1 d\theta_1} = \frac{g_1 s_1\theta_1^2}{\Delta(1-s_1)}\frac{dw_1}{d\theta_1}$$

Визначемо:

$$\beta_1 = \frac{g_1 s_1\theta_1^2}{\Delta(1-s_1)}\frac{dw_1}{d\theta_1}$$

Умова (2.52) набуде вигляду

$$w_0\theta_0 - (1-\ \alpha_0)p_0(1-\ a_0)x_0 < \beta_1$$

Оскільки:

$$\frac{s_0}{(1-s_1)} = \frac{s_0}{(1-s_1)} < \frac{(1-\ a_0)x_0}{a_1 x_1} = \frac{1}{\delta_1} > 1, \text{т. к.}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\delta_1} > 1$$

Тогда $(1- a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1x_1s_0x_1 > 0$

Зростання цін на предмети споживання забезпечує умову:

$$-[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2]\frac{d\theta_1}{g_1\theta_1} + \theta_1 dw_1 > 0, g_0 < 0$$

$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \frac{\theta_1 dw_1 g_1\theta_1}{d\theta_1} = g_1\theta_1^2\frac{dw_1}{d\theta_1}$$

Визначемо: $\gamma_1 = g_1\theta_1^2\frac{dw_1}{d\theta_1}$

Тоді умова набуде вигляду:

$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \gamma_1 \quad (2.53)$$

З огляду на (2.47), (2.47) і (2.52) та (2.53), отримаємо умову зростання цін на другому піввитку:

$$-\beta_0^+ < w_0\theta_0 - (1- a_0)p_0x_0 < \beta_1, g_0 > 0$$
$$w_0\theta_0 - (1- a_0)p_0x_0 < \min(\beta_1, \beta_0^-)\,, g_0 < 0 \quad (2.54)$$
$$-\gamma_0^+ < w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \gamma_1, g_0 > 0$$
$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \min\,(\gamma_0^-, \gamma_1) \quad (2.55)$$

2.6. Умови виникнення та самопідтримання інфляції

Множачи обидві частини нерівностей умови зростання цін на першому піввихвітку (2.42) і (2.43) та на другому піввихвітку (2.54) і (2.55) на L, отримаємо такі умови виникнення та самопідтримання інфляції в абсолютних показниках:

$$w_0\theta_0 - (1- \alpha_0)p_0(1- a_0)x_0 > 0$$
$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 > \gamma_2$$
$$-\beta_0^+ < w_0\theta_0 - (1- a_0)p_0x_0 < \beta_1, g_0 > 0$$
$$w_0\theta_0 - (1- a_0)p_0x_0 < \min(\beta_1, \beta_0^-)\,, g_0 < 0$$
$$-\gamma_0^+ < w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \gamma_1, g_0 > 0$$
$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \min\,(\gamma_0^-, \gamma_1)$$

Враховуючи, що $\theta_0 = \frac{L_j}{L}$, $x_j = \frac{X_j}{L}$,

$$w_j\theta_j L = w_j L_j = W_j, j = 0,2$$

$W_j -$ обсяг заробітної плати (доходів) зайнятих у матеріальному та споживчому секторах.

Тоді з (2.42) і (2.54):

$$0 < W_0 - (1 - \alpha_0)p_0X_0 < \beta L \qquad (2.56)$$

І (2.43) та (2.55):

$$-\gamma L < W_2 + W_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2X_2 < \bar{\gamma}L \qquad (2.57)$$

$$\beta = \beta_1, \underline{\gamma} = min(\gamma_0^+, \gamma_2)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma_1 \quad \text{при } g_0 > 0$$

$$\beta = min(\beta_0^-, \beta_1)\,,\ \ \gamma = \gamma_2,$$

$$\bar{\gamma} = \min\left((\gamma_0^-, \gamma_1\right) \text{ при } g_0 < 0$$

Ліві межі здебільшого визначаються підвищенням ставки заробітної плати в споживчому секторі (перший напіввихор інфляції), праві - підвищенням ставок заробітної плати в матеріальному і фондоутворюючому секторах (другий напіввихор інфляції).

Порушення деяких із цих умов призводить до розмивання інфляції. Наприклад, у разі невиконання умови (2.56) інфляція проявлятиметься тільки в зростанні цін на споживчі товари.

Умови (2.56) і (2.57) означають, що доходи зайнятих у матеріальному і споживчому секторах перебувають у деяких «коридорах», розміри яких пропорційні до загальної кількості зайнятих навколо значень

$$W_0 = (1- \alpha_0)\, p_0\, (1- a_0)X_0$$

$$W_2=(1-\alpha_2)p_2x_2 - W_0\Delta \qquad (2.58)$$

Зі змістовного погляду умови виникнення і самопідтримки інфляції (2.56) і (2.57) можна інтерпретувати так: наявний притаманний інфляції розподіл доходів (2.58), у разі наближення до нього реального розподілу доходів інфляція посилюється, у разі віддалення - послаблюється.

Інфляційний розподіл доходів має характерні риси:

1. доходи матеріального і споживчого секторів формуються за пріоритетним принципом, а фондотворчого - за залишковим;

2. доходи матеріального і споживчого секторів пропорційні товарній продукції цих секторів з коефіцієнтами пропорційності, що дорівнюють еластичності за працею;

3. споживчий сектор «розплачується» за матеріали доходом W0 Δ, пропорційним доходу матеріального сектору з коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює скоригованій частці споживчого сектору у витратах товарної продукції матеріального сектору.

2.7 Вплив інфляції на виробництво

Існує думка, що інфляція чинить згубний вплив на виробництво, веде до його скорочення. Ця думка цілком виправдана за галопуючої інфляції. Однак помірна, регульована інфляція, як показав Кейнс, може бути джерелом зростання виробництва.

Дослідження, проведене на трисекторній моделі, показує, що в одних випадках інфляція може чинити позитивний вплив на виробництво, в інших - негативний. У рамках досліджуваної моделі інфляцію вивчали в умовах замкнутості та збалансованості трисекторної економіки, за малих змін макропараметрів, а також за припущення, що розподіл інвестиційних параметрів фіксований. Таким чином, ідеться про помірну інфляцію, як і в Кейнса, але розглядається більш структурована економіка.

Виявляється, що вплив інфляції на виробництво суттєво залежить від співвідношення критичних точок ($\tilde{\theta}_2, \theta_2^*, \hat{\theta}_2$ и др.) і особливо від того, на який із критичних інтервалів (тобто інтервалів, кінцями яких є критичні точки) потрапила точка θ_2, що визначає конкретний розподіл трудових ресурсів. Щоб чітко уявити сенс критичних точок, нагадаємо співвідношення, які визначають критичні точки:

$$dx_0 = \frac{u_0 x_0}{g_2}\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$

$$dx_1 = -\frac{g_1 x_1}{g_2}\frac{d\theta_2}{\theta_2} \qquad (2.59)$$

$$dx_2 = \frac{u_2 x_2}{g_2}\frac{d\theta_2}{\theta_2}$$

де $u_0 = (1-\alpha_0)\Delta - \theta_2 - \theta_0\Delta$, $u_2 = 1-\alpha_2 - \theta_2 - \theta_0\Delta$,

$g_0 = \Delta - \theta_2 - \theta_0\Delta$, $g_1 = \theta_2 + \theta_0\Delta$, $g_2 = 1-\theta_2 - \theta_0\Delta$ $\Delta = \dfrac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}$, $\delta_2 = \dfrac{a_2 x_2}{(1-\alpha_0)x_0}$

Критичні точки визначаються як корені наступних із наведених вище функцій (зліва від критичних точок значення цих функцій позитивні):

$$g_0(\hat{\theta}_2) = 0$$

$$u_0(\tilde{\theta}_2) = 0$$

$$u_2(\theta_2^*) = 0$$

З результатів цього дослідження і наведених вище виразів випливає:

$\tilde{\theta}_2$ - точка локального максимуму питомого випуску матеріалів;

θ_2^* - точка локального максимуму питомого випуску предметів споживання;

$\hat{\theta}_2$- точка зміни характеру переливу трудових ресурсів (при зростанні θ_2 и $\theta_2 < \hat{\theta}_2$ відбувається перелив трудових ресурсів із фондоутворювального сектору в матеріальний і споживчий, а в разі $\theta_2 > \hat{\theta}_2$ матеріальний сектор поряд із фондотворчим стає донором споживчого).

Оскільки $g_0 - u_0 = \alpha_0 \Delta > 0$ и $u_2 - u_0 = (1-\alpha_2)\delta_1 > 0$ то $g_0 > u_0$ и $u_2 > u_0$, при цьому завджи $\hat{\theta}_2 > \tilde{\theta}_2$ и $\theta_2^* > \tilde{\theta}_2$

Точки же $\hat{\theta}_2$ и θ_2^* можуть перебувати в різних співвідношеннях між собою.

Оскільки диференціали питомих випусків секторів згідно з (2.59) пропорційні $d\theta_2$, то для інфляції на виробництво треба виразити $d\theta_2$ через dw_2, тоді зміна виробництва у вигляді диференціалів dx_0, dx_1, dx_2 буде безпосередньо пов'язано з початковим приростом ставки заробітної плати в споживчому секторі ($dw_2 > 0$).

Позначимо через $\varepsilon_i = \dfrac{w_i}{\theta_i}\dfrac{d\theta_i}{dw_i}$, $k_i = \dfrac{w_i}{w}$, $i = 0,1,2.$ еластичність часток трудових ресурсів за заробітною платою і для тарифних коефіцієнтів секторів відповідно (за базу взято середню заробітну плату $w = \sum_{0}^{2} w_i \theta_i$)

На першому піввитку частка споживчого сектору в розподілі трудових ресурсів і ціна на його продукцію згідно з (2.38) змінилася таким чином:

$$d\theta_2 = \frac{d\theta_2}{dw_2} dw_2 = \varepsilon_2 \theta_2 \frac{dw_2}{w_2} \ ,$$

$$x_2 dp_2 = \frac{\widetilde{w} d\theta_2}{\theta_2 g_2} + \theta_2 dw_2 = (\theta_2 + \frac{\widetilde{w}}{\theta_2 g_2} \frac{d\theta_2}{dw_2}) dw_2 \ ,$$

ãäå $\widetilde{w} = w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)w$

На другому піввитку в матеріальному секторі необхідно підняти номінальну заробітну плату на dw_0 , щоб забезпечити збереження реальної заробітної плати. При цьому необхідне виконання такої умови для збереження сталості відношення номінальної заробітної плати до рівня цін, тобто реальної заробітної плати:

$$\frac{w_0}{p_2} = \frac{w_0 + dw_0}{p_2 + dp_2} \ ,$$

звідки (використовуючи вираз для dp_2 из (2.38), а так само те, що $w=p_2x_2$, отримуємо:

$$dw_0 = \frac{w_0}{p_2 dp_2} = \frac{w_0}{p_2 x_2} (\theta_2 + \frac{\widetilde{w}}{\theta_2 g_2} \frac{d\theta_2}{dw_2}) dw_2 = w_0 (\theta_2 + \frac{\widetilde{w}}{\theta_2 g_2} \frac{d\theta_2}{dw_2}) \frac{dw_2}{w}$$

оскільки

$$d\theta_0 = \frac{d\theta_0}{dw_0} dw_0 = \varepsilon_0 \theta_0 \frac{dw_0}{w_0} \ ,$$

отже,

$$d\theta_2 = \frac{\theta_2 g_2}{\theta_0 g_0} d\theta_0 = \frac{\theta_2 g_2}{\theta_0 g_0} \varepsilon_0 \theta_0 \frac{dw_0}{w_0} = \frac{\theta_2 g_2}{\theta_0 g_0} \varepsilon_0 \theta_0 (\theta_2 + \frac{\widetilde{w}}{\theta_2 g_2} \frac{d\theta_2}{dw_2}) \frac{dw_2}{w} = \frac{\varepsilon_0}{g_0} (\theta_2^2 g_2 + \varepsilon_2 \theta_2 \frac{\widetilde{w}}{w_2}) \frac{dw_2}{w}$$

Аналогічно, для збереження реальної заробітної плати у фондотворчому секторі необхідно підвищити номінальну заробітну плату на $dw_1 > 0$, де dw_1 связан с dw_2 таким співвідношенням:

$$dw_1 = w_1 (\theta_2 + \frac{\widetilde{w}}{\theta_2 g_2} \frac{d\theta_2}{dw_2}) \frac{dw_2}{w}$$

що призведе до переливу трудових ресурсів у фондостворювальний сектор у розмірі $d\theta_1 = \frac{d\theta_1}{dw_1} dw_1 = \varepsilon_1 \theta_1 \frac{dw_1}{w_1}$.

У споживчому секторі відбудеться скорочення трудових ресурсів:

$$d\theta_2 = \frac{\theta_2 g_2}{\theta_1 g_1} d\theta_1 = -\frac{\varepsilon_1}{g_1} (\theta_2^2 g_2 + \varepsilon_2 \theta_2 \frac{\widetilde{w}}{w_2}) \frac{dw_2}{w} .$$

Таким чином, на другому піввитку частка споживчого сектора в розподілі праці зміниться на величину

$$d\theta_2 = (\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1})(\theta_2 g_2 + \varepsilon_2 \frac{\widetilde{w}}{w_2})\frac{\theta_2}{w} dw_2 \ ,$$

А загалом за весь виток - на величину

$$d\theta_2 = \varepsilon_2 \theta_2 \frac{dw_2}{w_2} + (\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1})(\theta_2 g_2 + \varepsilon_2 \frac{\widetilde{w}}{w_2})\frac{\theta_2}{w} dw_2 = \theta_2 \left[\varepsilon_2 + (\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1})(k_2 \theta_2 g_2 + \varepsilon_0 \frac{\widetilde{w}}{w}) \right] \frac{dw_2}{w_2} .$$

Характер розподілу трудових ресурсів за повний виток інфляції визначається знаком виразу:

$\varepsilon_2 + (\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1})(k_2 \theta_2 g_2 + \varepsilon_0 \frac{\widetilde{w}}{w}) \equiv I$ - індикатор перерозподілу праці *(2.60)*

Якщо $I > 0$, то відбувається перелив трудових ресурсів у споживчий сектор, у протилежному випадку - відтік трудових ресурсів із цього сектора.

Знак індикатора I залежить від співвідношення еластичності $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, тарифних коефіцієнтів k_0, k_1, k_2, і від розподілу праці $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, особливо від того, на якому з критичних інтервалів перебуває θ_2.

У виразі (2.60) величини $k_2\theta_2$ *è* $\widetilde{w}$ мають перебувати поблизу значень, що визначаються інфляційним розподілом доходів секторів. Інфляційний розподіл доходів згідно з (2.57) має такий вигляд ($W=W_0 + W_1 + W_2$):

$$\begin{cases} \frac{W_0}{W} = \frac{(1-\alpha_0)p_0(1-a_0)X_0}{W} \\ \frac{W_1}{W} = \alpha_2 - (1-\Delta)\frac{W_0}{W} \\ \frac{W_2}{W} = 1 - \alpha_2 - \frac{W_0}{W}\Delta \end{cases} \qquad (2.61)$$

(2.61) можна записати у вигляді:

$$W_2 + W_0 \Delta - (1-\alpha_2)W = 0 \qquad (2.62)$$

Так як $W_i = L_i w_i = L\theta_i W_i$, $i=0,1,2$, $W=wL$, то співвідношення (2.62) набуде вигляду:

$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)w=0 \ ,$$

тому для інфляційного розподілу доходів

$$\widetilde{w} = w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)w=0/$$

Тарифні коефіцієнти k_i пов'язані з розподілом трудових ресурсів і доходами таким чином:

$$k_i = \frac{w_i}{w} = \frac{w_i L\theta_i}{wL\theta_i} = \frac{w_i L_i}{wL\theta_i} = \frac{W_i}{W\theta_i}\ , i = 0,1,2,$$

З цього $$k_i\theta_i = \frac{W_i}{W}\ , i = 0,1,2 \qquad k_0\theta_0 + k_1\theta_1 + k_2\theta_2 = 1 \qquad (2.63)$$

Використовуючи (2.61), з останнього співвідношення отримуємо:

$$k_2\theta_2 = 1 - \alpha_2 - k_0 \qquad (2.64)$$

звіти $$0 < k_2\theta_2 < 1 - \alpha_2 \qquad (2.65)$$

Таким чином, для інфляційного розподілу доходів індикатор перерозподілу трудових ресурсів набуде вигляду:

$$\varepsilon_2 + (\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1})k_2\theta_2 g_2.$$

Розділимо цей вираз на $g_2 > 0$, отримаємо :

$$I = \frac{\varepsilon_2}{g_2} + (\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1})k_2\theta_2 \qquad (2.66)$$

У (2.66) перший доданок $\frac{\varepsilon_2}{g_2}$ овизначається першим напіввитком інфляції, а друге $(\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1})k_2\theta_2$ - другим.

Оскільки найліпші трудові ресурси в споживчому секторі, а переваги в трудових ресурсах у матеріальному та фондоутворюючому секторах приблизно однакові ($\varepsilon_2 \geq \varepsilon_0, \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1, \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon$), то індикатор набуде вигляду:

$$I = \frac{\varepsilon_2}{g_2} + \varepsilon(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{g_1})k_2\theta_2, \quad k_2\theta_2 < 1 - \alpha_0 < 1,\ \varepsilon_2 \geq \varepsilon \qquad (2.67)$$

Так як $g_1 > 0$, $g_1' > 0$, $g_2 > 0$, $g_2' > 0$, $g_0 > 0$ при $\theta_2 \in (0, \hat{\theta}_2)$ и $g_0 < 0$ при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \bar{\theta}_2)$, то знак I при $\theta_2 \in (0, \hat{\theta}_2)$ істотним чином залежить від співвідношення між g_0 и g_1, а при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \bar{\theta}_2)$ - від співвідношення між $\frac{\varepsilon_2}{g_2}$ і $\varepsilon(-\frac{1}{g_0} + \frac{1}{g_1})$.

Характер змін g_0 , g_1 при $\theta_2 \in (0, \hat{\theta}_2)$визначається їхнім співвідношенням за малих θ_2 , при цьому $g_0(0)= g_1(0)=0$, $g_0'(0) = +\infty$, $g_1'(0) = +\infty$.

Дійсно, так як $g_0(0)= g_1(0)=0$, то при малих θ_2 співвідношення між g_0 и g_1 визначається співвідношенням між g_0' (θ_2)и $g'_1(\theta_2)$. А саме при малих θ_2 : $g_0'(\theta_2) = (1-\alpha_2)[1-\theta_0(0)]\theta_2^{-\alpha_2}$, $g_1'(\theta_2) = (1-\alpha_2)\theta_0(0)\theta_2^{-\alpha_2}$,

тому $g_0 > g_1$, якщо $1-\theta_0(0) > \theta_0(0)$. При $\theta_2=0$, згідно з першими двома рівняннями системи (2.59): $(1-a_0)B_0\theta_0^{1-\alpha_0}(0) = a_1B_1[1-\theta_0(0)]^{1-\alpha_0}$,

з цього $1-\theta_0(0) > \theta_0(0)$ при $\dfrac{a_1B_1}{(1-a_0)B_0} < 1$, де $B_0=B_0(s)$, $B_1=B_1(s)$.

Випадок 1: Нехай $a_1B_1 < (1-a_0)B_0$, тоді $g_0 > g_1$ при малих θ_2 можно показати спільну зміну g_0 , g_1 (рис.2).

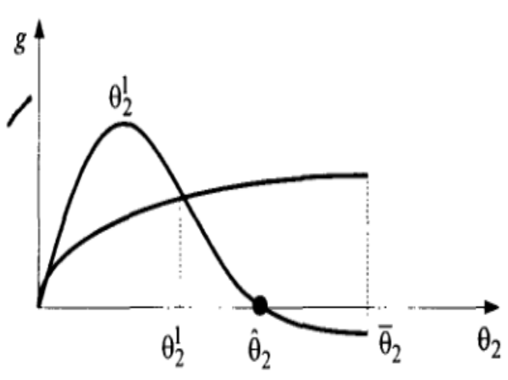
У деякій точці θ_2^1 $g_0(\theta_2^1) = g_1(\theta_2^1)$, *ïîˆòîó ïðè* $\theta_2 \in (\theta_2^1, \hat{\theta}_2)$ $\dfrac{1}{g_0} > \dfrac{1}{g_1}$, отже, $I > 0$.

Навпаки, при $\theta_2 \in (0, \hat{\theta}_2)$ $\dfrac{1}{g_0} < \dfrac{1}{g_1}$, тому вираз *(1-α₂)* в (2.62) стає від'ємним .

Таким чином, знайдеться єдина точка $\theta_2^0 < \theta_2^1$, у котрій $I(\theta_2^0) < 0$, так як $I(\theta_2) <$ 0 при $\theta_2 \in (0, \theta_2^0)$ і $I(\theta_2^0) > 0$ при $\theta_2 \in (\theta_2^0, \hat{\theta}_2)$.

Точно так само при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \overline{\theta_2})$ знайдеться така точка $\hat{\theta}_2^0$, для якої

$I(\hat{\theta}_2^0)=0$, тому $I(\theta_2) < 0$ при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \theta_2^0)$ и $I(\theta_2) > 0$ при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2{}^0, \overline{\theta_2})$.



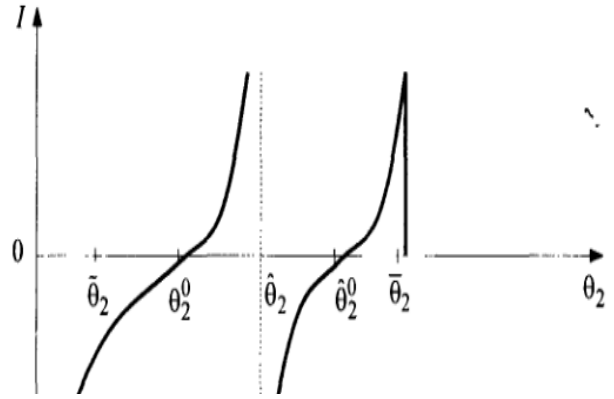


Рис. 2.9. Графіки функцій g_0 , g_1 при $a_1B_1 < (1\text{-}a_0)B_0$

Рис.2.10. Графік зміни індикатора *I* при $a_1B_1 < (1\text{-}a_0)B_0$

Економічна інтерпретація для випадку 1:

Для тих станів, за яких $\theta_2 \in (0, \theta_2^0)$, вплив інфляції позначається у відтоку трудових ресурсів з матеріального і споживчого секторів, що призводить до скорочення виробництва предметів споживання. Таким чином, інфляція в цій ситуації посилює гіпертрофований надлишок праці у фондотворчому секторі, тобто чинить негативний вплив на виробництво.

У разі станів с $\theta_2 \in (\theta_2^0, \hat{\theta}_2)$, $\hat{\theta}_2 < \theta_2^*$, наслідком інфляції буде перерозподіл надлишку трудових ресурсів із фондоутворювального в матеріальний і споживчий сектори, що призводить до збільшення виробництва предметів споживання. Таким чином, інфляція справляє позитивний вплив.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \theta_2^*)$ інфляція чинить негативний вплив на економіку, оскільки відсуває її від технологічного оптимуму (відбувається перелив трудових ресурсів зі споживчого сектору до матеріального і фондоутворюючого, виробництво предметів споживання скорочується).

При $\theta_2 \in (\theta_2^*, \hat{\theta}_2^0)$ *позитивний вплив інфляції на економіку полягає в тому, що вона скидає надлишок трудових ресурсів зі споживчого сектора в матеріальний і фондоутворювальний сектори, що призводить до зростання виробництва предметів споживання.*

У випадку $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2^0, \theta_2^*)$ $\hat{\theta}_2 > \theta_2^*$, наслідком інфляції буде перерозподіл зайвих трудових ресурсів із фондоутворювального сектору в матеріальний і споживчий, що призводить до зростання випуску предметів споживання, тобто вплив інфляції в цьому випадку позитивний.

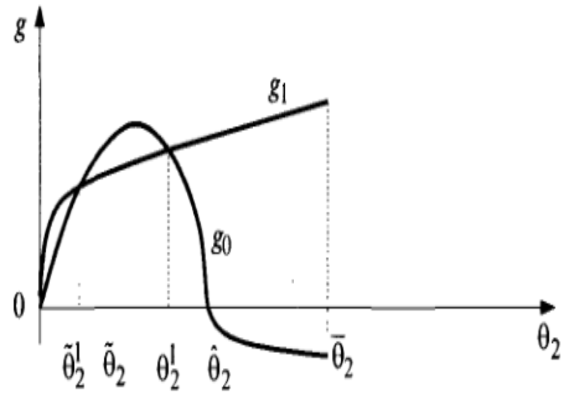
При $\theta_2 \in (\theta_2^*, \hat{\theta}_2)$, інфляція чинить негативний вплив на економіку, оскільки призводить до надлишку трудових ресурсів у споживчому секторі, що призводить до падіння випуску предметів споживання.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_2^0)$ вплив інфляції позитивний, оскільки відбувається перерозподіл зайвих трудових ресурсів зі споживчого сектору в матеріальний і фондостворювальний сектори, що призводить до зростання виробництва предметів споживання.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2^0, \overline{\theta_2})$ інфляція чинить негативний вплив, оскільки посилює переповнення трудовими ресурсами споживчого сектора, що призводить до подальшого скорочення виробництва предметів споживання.

Випадок 2: Нехай $a_1B_1 > (1\text{-}a_0)B_0$, при малих θ_2 $g_0 < g_1$ графіки спільної зміни g_0 , g_1 зображені на рис.2.10. У цьому разі дві точки перетину графіків g_0 и g_1 (може не виявитися жодної).

При $\theta_2 \in (\tilde{\theta}_2, \theta_2^1)$ вираження $(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{g_1})$в (2.67) негативно, тому, можливо, знайдуться дві точки $\tilde{\theta}_2^0 > \tilde{\theta}_2^1$, $\theta_2^0 > \theta_2^1$, для котрих $I(\tilde{\theta}_2^0)=I(\theta_2^0)=0$. Тоді $I > 0$ при $\theta_2 \in (\theta_2{}^0, \tilde{\theta}_2)$. На інтервалі, що залишився $(\hat{\theta}_2, \overline{\theta_2})$ характер зміни індикатора точно такий самий, як і в попередньому випадку.



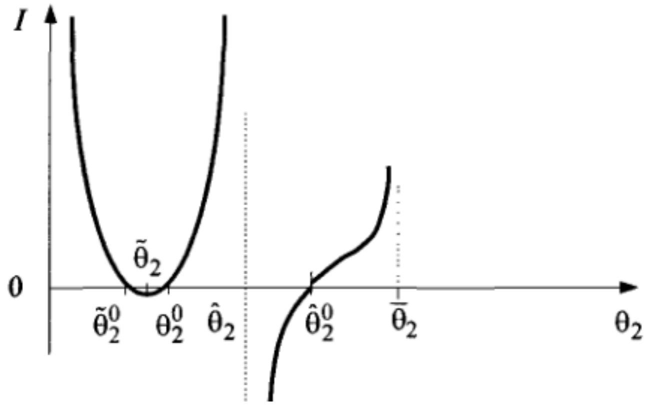


Рис.2.11 Графіки функцій g_0 , g_1 при $a_1B_1 > (1\text{-}a_0)B_0$

Рис.2.12 Графік зміни індикатора I при $a_1B_1 < (1\text{-}a_0)B_0$

Економічна інтерпретація для випадку2:

При $\theta_2 \in (0, \tilde{\theta}_2^0)$ інфляція позитивно впливає на виробництво, оскільки рухає економіку від стану «виробництво для виробництва» у бік технологічного оптимуму (відбувається перелив трудових ресурсів із фондоутворювального в матеріальний і споживчий сектори, зростає виробництво предметів споживання).

При $\theta_2 \in (\tilde{\theta}_2^0, \theta_2^0)$ *негативний вплив інфляції позначається у відтоку дефіцитних трудових ресурсів зі споживчого сектора, що призводить до скорочення виробництва предметів споживання.*

При $\theta_2 \in (\theta_2{}^0, \hat{\theta}_2), \hat{\theta}_2 < \theta_2^*$, вплив інфляції позитивний: відбувається перелив трудових ресурсів із фондоутворювального сектора в матеріальний і споживчий, випуск предметів споживання зростає.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \theta_2^*)$інфляція негативно позначається на виробництві: економіка відходить від технологічного оптимуму, виробництво предметів споживання падає за рахунок переливу трудових ресурсів зі споживчого сектора в матеріальний і фондоутворювальний сектори.

При $\theta_2 \in (\theta_2^*, \hat{\theta}_2^0,)$ вплив інфляції позитивний: відбувається скидання зайвих трудових ресурсів зі споживчого сектора в матеріальний і фондостворювальний сектори, виробництво предметів споживання зростає.

При $\theta_2 \in (\theta_2{}^0, \theta_2^*), \theta_2^* < \hat{\theta}_2$, інфляція чинить позитивний вплив на виробництво: виробництво предметів споживання зростає за рахунок переливу трудових ресурсів із фондоутворювального сектора в матеріальний і споживчий сектори.

При $\theta_2 \in (\theta_2^*, \hat{\theta}_2)$ вплив інфляції негативний: споживчий і матеріальний сектори отримують зайві трудові ресурси з фондоутворюючого сектора, виробництво предметів споживання падає.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_2^0)$ інфляція чинить позитивний вплив на економіку: відбувається скидання зайвих трудових ресурсів зі споживчого сектора в матеріальний і фондостворювальний сектори, виробництво в усіх секторах зростає.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2^0, \overline{\theta_2})$ вплив інфляції різко негативний: споживчий сектор отримує зайві трудові ресурси з матеріального і фондотворчого секторів, виробництво в усіх секторах падає.

3. ВИСНОВКИ

У першому розділі розглядається динамічна модель Леонтьєва. Модель Леонтьєва є деталізованою моделлю росту валового суспільного продукту і національного доходу. Базою для динамічної моделі В. Леонтьєва є статична модель міжгалузевого балансу в грошовому вираженні, що відображає виробництво і розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв’язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення і розподіл національного доходу. Кожна галузь у балансі розглядається двічі - як споживач і як виробник. Це й визначає матричну структуру балансу. В основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв’язок між нагромадженням і приростом валового продукту. Кожна із ситуацій розглядається, для отриманих розв’язків дається економічний аналіз. Наприкінці розділу наведені приклади користування моделлю.

В другому розділі вивчається наступна модель економічної динаміки. У трисекторній моделі економіки основне макроекономічне рівняння розпадається на три: баланс платоспроможного попиту та пропозиції споживчих товарів і два вартісні баланси секторів, що виробляють засоби виробництва.

Інфляція розглядається в умовах замкнутості та збалансованості трисекторної економіки, за малих змін макропараметрів, а також у припущенні, що розподіл інвестиційних товарів фіксований.

Результат дослідження двох моделей свідчить про те, що інфляція може мати як негативний, так і позитивний вплив на економіку держави, залежно від співвідношення параметрів економічного процесу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вітлінський В. В. Моделювання економіки – Київ, 2007. – 406 с.

2. Бутник О. М. Економіко-математичне моделювання перехідних процесів у соціально-економічних системах: Монографія. - Харків: Інжек; СПД ЛібуркінаЛ.М., 2004. - 304 с.

3. Павленко П.М. Основи математичного моделювання систем і процесів: навчальний посібник. - Київ, Книжкове видавництво НАУ, 2010. - 176с.

4. Альсевич В. В.. "Введения в математическую экономику" – Москва, 2009. - 179с.

5. Вовк В.М., Зомчак Л.М. Оптимізаційні моделі економіки: навчальний посібник. - Львів: ЛНУ імені Івана Франка.2014. - 320с.

6. Єфимова Г. О., Осадчий О. О. Методичні вказівки за спецкурсу «Математичні моделі макроекономіки» та «Моделі економічної динаміки» - Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2013. - 38с.

7. Касьяненко В. О., Старченко Л. В. Моделювання та прогнозування економічних процесів: навчальний посібник. - Суми: Університетська книга, 2015. - 185с.

8. *Гладка О. М., Карпови ч І. М., Сінчук А. М.* "МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ для фахівців з інформаційних технологій" - Рівне, 2019. - 43с.

9. Стрижиченко К. А., Гольтяєва Л. А., Дериховська В. І.. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни "Економетрикаі моделювання економічної динаміки" / Уклад. Х.: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, - Одеса,2015. - 44 с.

10. Здрок В. В.,Лягоцький Т.Я., Паславська І. М. Моделювання економічної динаміки: навчальний посібник. Львів: «Магнолія 2006», 2013.256с.

11. Козицький В.А.,Лавренюк С.П.,Оліскевич М.О. Основи математичної економіки. Теорія споживання. Частина 1: навчальний посібник/ Львівський національний університет імені Івана Франка. - Львів: Видавництво «Піраміда».2004. - 264с.

12. Козицький В.А.,Лавренюк С.П.,Оліскевич М.О. Основи математичної економіки. Теорія фірми. Частина 2: навчальний посібник / Львівський національний університет імені Івана Франка. - Львів. Видавництво

«Піраміда».2005. - 302с.
13. Мэнкью Н.Г. *Принципы экономикс*. -М.: Питер Ком, 1999. — 784 с.

12. www.inflationtargeting.ca