МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова
Інститут інноваційної та післядипломної освіти

Єфимова Г.О., Рудик О.Г.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи по дисципліні

« ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»

(розділ « Динамічне програмування»)

для студентів напрямів підготовки 6.040301 «Прикладна математика» і 6.030502 «Економічна кібернетика»

Одеса
ОНУ
2015

УДК 519.853
ББК 22.18

Методичні вказівки для самостійної роботи по дисципліні
«ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ» (розділ « Динамічне програмування»)
для студентів напрямів підготовки 6.040301 «Прикладна математика» і
6.030502 «Економічна кібернетика»

Укладачі: **Єфимова Г.О.**, кандидат фізико - математичних наук,
доцент кафедри оптимального керування і економічної
кібернетики IMEM;
Рудик О.Г., кандидат фізико - математичних наук,
доцент кафедри економічної кібернетики і інформаційних
технологій ІІПО.

Рецензенти: **Любота В.М.,** кандидат фізико - математичних наук,
доцент кафедри економічної кібернетики і інформаційних
технологій ІІПО
Кічмаренко О.Д., кандидат фізико - математичних наук,
зав. кафедрой оптимального керування і економічної
кібернетики IMEM;

Рекомендовано до друку Вченою радою ІІПО ОНУ ім. І.І. Мечникова
Протокол №7 від 17 березня 2015р.

Зміст

ВСТУП

Багато економічних задач можна розглядати як задачі з багатокроковою структурою. Це всі процеси перспективного і поточного планування і управління, що розвиваються в часі. Кроком в них може бути п'ятирічка, рік, квартал, місяць і т. і. Їх розв‘язують або шляхом укладання комплексу взаємопов'язаних статичних моделей для кожного періоду, або шляхом укладання єдиної динамічної задачі оптимального програмування з застосуванням багатокрокової процедури прийняття рішень (задачі ДП).

Задача. Підприємець складає план регулювання чисельності робітників на кожен з 5 наступних тижнів. Він володіє інформацією про мінімальну кількість робітників, що потрібні для проведення робіт на кожному тижні. Найом або звільнення, а також простій робітників пов'язані з накладними витратами, величини яких в розрахунку на одного робітника відомі. Необхідно визначити, скільки робітників слід наймати або звільняти щотижня, щоб забезпечити мінімум сумарних витрат.

Визначимо спочатку в чому полягає крок в даній задачі. Так як рішення повинні прийматися на кожному тижні, то кожному періоду часу (тижню) поставимо в відповідність деякий крок (етап). Тому задачу можна уявити як 5-ти крокову.

Для визначення стану в даному випадку потрібне відповісти на питання: які відомо́сті, отримані на попередніх кроках, необхідні для прийняття рішення на даному кроці без перевірки прийнятих раніше рішень? Виявляється, що інформація про кількість робітників, наявних до кінця кроку, що передує, визначає стан системи на початок даного кроку. Відомо́сті про кількість найнятих або звільнених на кожному з розглянутих раніше кроків (тобто, попередні рішення) не впливають на прийняття рішення на даному кроці. Важливо лише володіти даними про кількість робітників в кінці попереднього кроку. Таким чином, незважаючи на відмінності в конкретних формулюваннях, стан системи завжди містить всю інформацію, необхідну для прийняття рішення на даному кроці.

§1. Основні поняття динамічного програмування. Принцип оптимальності. Рівняння Беллмана.

Для реалізації МДП (метода динамічного програмування) необхідно з'ясувати всі ситуації, в яких приймається рішення. Умови, при яких приймається рішення, називаються **<u>станом системи</u>**. При цьому не потрібно з'ясовувати, як виник той або інший стан або які були рішення, що передують. Це дозволяє послідовно вибирати всього по одному розв‘язку в кожний момент часу. Подальша поведінка системи залежить тільки від поточного стану і керування, що вибирається і не залежить від того, в якому стані знаходилась система до поточного моменту (тобто процес повинен бути процесом без післядії).

Визначення стану звичайно пов'язане з відповідями на два питання:

1. В чому виявляється зв'язок між кроками?

2.Яка інформація необхідна для прийняття рішення на поточному кроці?

Однієї з особливостей МДП є те, що прийняття рішення розглядається як комплекс взаємопов’язаних рішень. Послідовність таких рішень називають **стратегією.** Мета оптимального планування - вибрати стратегію, що забезпечує отримання найкращого результату з точки зору заздалегідь вибраного критерію. Таку стратегію називають **оптимальною.** Якщо, наприклад, розглядається робота фірми з точки зору її рентабельності, то критерієм оптимальності буде прибуток, отриманий за календарний період, а оптимальною буде стратегія, що складатися із всіх тих рішень, що призведуть до отримання максимального прибутку.

Суть МДП складається в тому, що замість пошуку оптимальної стратегії відразу для всієї складної задачі, знаходять оптимальні стратегії для декількох більш простих задач аналогічного змісту, на які розбивається початкова задача.

Іншою важливою особливістю, як відзначалося вище, є незалежність оптимальної стратегії, що приймається на черговому кроці, від передісторії, тобто від того, яким чином оптимізуємий процес досяг поточного стану. Так, при виборі найкоротшого шляху, що веде з деякого проміжного пункту в кінцевий, водій автомобіля приймає рішення незалежно від того, як, коли і якою дорогою він прибув в даний пункт, а керується лише розташуванням цього пункту в загальній схемі шляхів.

МДП характеризується також тим, що вибір оптимальної стратегії на кожному кроці повинен вибиратися з урахуванням його наслідків в майбутньому. Таким чином, динамічне програмування (ДП) - це далекосяжне планування, планування з урахуванням **перспективи**.

Принцип оптимальності

З вищесказаного сказаного слідує, що поетапне планування багатокрокового процесу повинно проводитися так, щоб при плануванні кожного кроку враховувалася не ефективність процесу, що одержується тільки на даному кроці, а загальна ефективність, одержувана по закінченню

всього процесу, і саме відносно загальної ефективності проводиться оптимальне планування. Цей принцип і називається **принципом оптимальності**.

Сформулюємо його наступним чином: *оптимальна стратегія задовольняє властивості, що, які б не були початковий стан і рішення, прийняте в початковий момент, наступні рішення повинні складати оптимальну стратегію відносно стану, що є результатом початкового рішення.*

Отже, при розв‘язуванні оптимізаційної задачі МДП необхідно враховувати на кожному кроці наслідки, до яких приведе в майбутньому те рішення, що приймається в даний момент. Винятком є останній крок, на якому процес завершується. Тут процес можна планувати таким чином, щоб останній крок самий по собі приносив максимальний ефект. Спланувавши оптимальним чином останній крок, можна до нього «прибудовувати» передостанній так, щоб результат цих двох кроків був оптимальним і т. д. Таким чином процедуру прийняття рішень можна розгорнути від кінця до початку. Але щоб прийняти оптимальне рішення на останньому кроці, треба знати, яким чином міг закінчитися передостанній крок. Отже, треба зробити різні припущення про те, яким чином міг закінчитися передостанній крок і для кожного з припущень знайти рішення, при якому ефект на останньому кроці був би найбільшим. Таке оптимальне рішення, знайдене за умови, що передостанній крок закінчився певним чином, називають **умовно-оптимальним.**

Аналогічно оптимізується рішення на передостанньому кроці, тобто робляться всі можливі припущення про те, як міг би завершитися крок, що передує передостанньому, і для кожного з можливих результатів вибирається таке рішення на передостанньому кроці, щоб ефект за останні два кроки (з яких останній вже оптимізований) був би найбільшим і т. д.

Таким чином, на кожному кроці, в відповідності з принципом оптимальності, шукається рішення, що забезпечує оптимальне продовження процесу відносно стану, досягнутого в даний момент. Якщо при русі від кінця до початку процесу, що оптимізується, визначені умовно-оптимальні рішення для кожного кроку і обчислено відповідний ефект, то, розглядаючи процес в напрямку від початку до кінця, відновлюється оптимальна стратегія з урахуванням заданого початкового стану системи.

Зауваження. В принципі процес можна розглядати від початку до кінця (тобто, від першого кроку до останнього), а після цього від кінця до початку, відновлюючи оптимальну стратегію.

Приклад1. *(Про збільшення виробничих потужностей за рахунок відрахувань від прибутку)*. На початку 3х-річного періоду роботи підприємством виділена сума в ***C*** грош. од. для придбання нового обладнання. Вартість одного комплекту обладнання складає 10 тис. грош. од. Придбане обладнання відразу же вступає до ладу і може брати участь в виробничому процесі. Використання одного комплекту обладнання забезпечує підприємству за один рік прибуток в розмірі 6 тис. грош. од. В кінці кожного року підприємство може виділити деяку частку α, $\alpha \in [0,1]$, прибутку на розширення виробничих потужностей, тобто на придбання деякої кількості комплектів нового обладнання, що буде використовуватися в наступні роки. Потрібно так спланувати розширення виробництва, щоб прибуток за три роки був максимальним.

Розв'язання. Будемо вважати кожний рік розглядуваного періоду кроком процесу, рішенням на кожному кроці - вибране найкращим чином значення параметру α - частку прибутку, яка відраховується на придбання додаткового обладнання.

Нехай α_i, $i = \overline{1,3}$, - частка відрахувань в і-му році;

m_i - кількість комплектів обладнання, що використовуються в виробництві в і-му році;

φ_i- фактичний прибуток підприємства в і-му році.

Виробничий процес буде описаний, якщо до початку кожного періоду буде вказана кількість комплектів діючого обладнання і сумарний прибуток, накопичений до цього моменту.

В перший рік на виробництві буде зайнято

$$m_1 = \frac{C}{10000}$$

комплектів обладнання. Якщо б відрахувань від прибутку не було, то прибуток склав би $6000m_1$ грош. од. Але за умовою задачі деяка частка прибутку α_1, (тобто $(6000m_1)\cdot\alpha_1$ грош.од.) направляється на розширення виробництва, тому фактичний прибуток за перший рік складе

$$\varphi_1 = 6000m_1(1-\alpha_1), \quad \alpha_1 \in [0,1].$$

На відраховані кошти буде куплено

$$\frac{(6000m_1)\alpha_1}{10000} = 0,6m_1\alpha_1$$

комплектів обладнання.

В другому році на виробництві буде зайнято

$$m_2 = m_1 + 0,6m_1\alpha_1 = m_1(1+0,6\alpha_1)$$

комплектів, а фактичний прибуток складе

$$\varphi_2 = 6000m_2 - (6000m_2)\,\alpha_2 = 6000(1-\alpha_2)m_2, \qquad \alpha_2 \in [0,1].$$

Аналогічно, $\qquad m_3=(1+0{,}6\,\alpha_2)m_2,$

$$\varphi_3=6000(1-\alpha_3)\,m_3, \qquad \alpha_3 \in [0,1].$$

Сумарний фактичний прибуток за 3 роки позначимо через $f(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3)$. Метою задачі є знаходження таких $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$, при яких f досягає найбільшого значення.

У відповідності з принципом оптимальності можна, рахуючи від останнього року до попереднього, побудувати оптимальну стратегію відрахувань. Для цього позначимо через f_1, $f_{1\text{-}2}$, f сумарний прибуток відповідно за перший рік, за перший і другий роки, за перший, другий і третій роки.

Розглянемо останній, третій рік. До його початку стан виробничого процесу характеризується величинами m_3 і $f_{1\text{-}2}$. Прибуток за 3 роки можна виразити у такий спосіб:

$$f=f_{1\text{-}2}+\varphi_3=f_{1\text{-}2}+6000(1-\alpha_3)m_3, \qquad \alpha_3 \in [0,1].$$

Так як $f_{1\text{-}2}$ не залежить від α_3, а $m_3>0$, то f досягає максимуму по α_3 коли $\alpha_3=0$. Це і є оптимальне рішення на останньому кроці. Отже, $\alpha_3^*=0$. Тому

$$f=f_{1\text{-}2}+6000m_3 \qquad (1)$$

Оптимізуємо тепер передостанній крок, тобто переходимо до початку другого року. Стан характеризується величиною m_2 та f_1 Прибуток за 2 роки $f_{1\text{-}2}$ рівний:

$$f_{1\text{-}2}=f_1+\varphi_2=f_1+6000(1-\alpha_2)m_2 \qquad (2)$$

А з урахуванням того, що $m_3=(1+0{,}6\,\alpha_2)\,m_2$ и (1),(2):

$$f=f_1+6000(1-\alpha_2)m_2+6000(1+0{,}6\,\alpha_2)\,m_2=f_1+12000m_2+\alpha_2(3600-6000)m_2 =$$

$$=f_1+12000m_2-2400\alpha_2 m_2, \qquad \alpha_2 \in [0,1].$$

Отже, $f= f_1+12000m_2-2400\,\alpha_2 m_2.$

В наслідок того, що $m_2>0$, максимум функції f досягається при $\alpha_2=0$. Тому $\alpha_2^*=0$,

$$f= f_1+12000\,m_2 \qquad (3)$$

Перейдемо тепер до першого року планового періоду:

$$f_1=\varphi_1=6000(1-\alpha_1)m_1, \qquad m_2=(1+0{,}6\,\alpha_1)m_1, \qquad \alpha_1 \in [0,1].$$

Тому з (3) випливає:

$$f=6000(1-\alpha_1)m_1+12000\,(1+0{,}6\,\alpha_1)m_1=18000m_1+\alpha_1\,(7200-6000)\,m_1$$

$$=18000m_1+1200\,\alpha_1 m_1, \qquad \alpha_1 \in [0,1]. \quad (4)$$

Так як $m_1>0$, то оптимальним рішенням на першому році буде α_1=l, бо при цьому f досягає max:

$$f^*=18000\,m_1+1200\,m_1=19200\,m_1.$$

Враховуючи, що $m_1=\frac{C}{10000}$, одержуємо:

$$f^*=1{,}92C$$

$$\alpha_1^* = 1,\ \alpha_2^* = 0,\ \alpha_3^* = 0 .$$

Таким чином прибуток підприємства за 3 роки буде максимальним, якщо в перший рік весь прибуток, що отримали, відраховувати на розширення виробництва, а в наступні 2 роки відрахувань не робити.

Зауваження. Якщо покласти $\alpha_1=0$, тобто і в перший плановий рік не робити відрахувань від прибутку, з (4) отримаємо:

$$f=18000m_1=1,8c.$$

Тобто якщо не передбачати розширення виробництва, то прибуток підприємства був би на 6,35% менш прибутку f^*, який воно отримає, застосовуючи оптимальну стратегію відрахувань.

У підсумку маємо

$$m_3=m_2=1,6m_1.$$

Звідси робимо висновок, що застосування оптимальної стратегії відрахувань призводить до того, що в кінці 3-ого року виробнича потужність підприємства по даному виду обладнання на 160% більше початкової. Такі додаткові підсумки рішення задачі.

Можна помітити, що використовувались такі рівняння, рішення яких послідовно зв'язані між собою: отриманий результат для одного року вводиться в рівняння для наступного і т. д. Такий підхід не випадковий, він є математичною реалізацією принципу оптимальності і складає основу головного методу розв'язку ЗДП - методу функціональних рівнянь.

§ 2. Формалізація постановки динамічної економічної задачі.

Розглянемо деякий керований процес, що розвивається з часом, тобто такий, на розвиток якого можна впливати рішеннями, що приймаються (в економічних процесах управління полягає в перерозподілі коштів, зміні складу обладнання, зміні обсягів постачань сировини і т. і.). Припускається, що процес розпадається (природно або штучно) на N кроків (етапів).

Нехай стан процесу на кінець k-го кроку описується m-вектором $x_k = (x_{k1};...;x_{km})$, $k = 1,2,...,N$. Цей вектор називається вектором **стану процесу** або вектором **фазових координат**. Множину всіх станів, в яких може знаходитися процес на кінець k-го кроку, позначимо через X_k. Початковий стан процесу x_o може бути заданий або вказана множина X_0 початкових станів.

Розвиток процесу полягає в послідовному переході з одного стану в інший. Якщо процес знаходиться в стані x_{k-1}, то його стан x_k на наступному кроці визначається не тільки вектором u_{K-1} але і рішенням (управлінням) u_k прийнятому на k-ому кроці:

$$x_k = \varphi_k(x_{k-1},u_k).$$

Тут u_k -вектор, $u_k=(u_{k1}, u_{k2},\ldots, u_{kr})$.

В будь-якій економічній задачі розв'язок на кожному кроці не може бути цілком довільним, його вибирають з деякої множини U можливих рішень (варіантів рішень).

Розвиток процесу в продовж всього періоду, що розглядається, можна однозначно описати послідовністю станів $x_o, x_1,\ldots,x_N$, де $x_k \in X_k$, $k = \overline{0,N}$.

<u>Зауваження1</u>. Як відзначалося вище, будь-яку послідовність $u_1,\ldots,u_N$, допустимих розв'язків $(u_k \in U,\ k = 1,2,\ldots,N)$ називаємо ***стратегією.***

Для опису N- крокового процесу кожній стратегії ставиться в відповідність деяка оцінка – значення оціночної функції. Варіюючи стратегію, отримаємо різні стани процесу після N кроків, що оцінюються, використовуючи деякий критерій ефективності процесу (прибуток, фондовіддачу, продуктивність або витрати, собівартість, втрати і т. і.) цільову функцію Z:

$$Z = F(x_o,u), \qquad u=\{u_1,u_2,\ldots,u_N\} \tag{5}$$

Ефективність k-го кроку процесу прийняття рішень залежить від стану x_{k-1} (тобто стан процесу на початку k-го кроку є станом процесу в кінці (k-l)-го кроку) і управління u_k, вибраного на цьому кроці. Цю ефективність будемо оцінювати функцією

$$f_k(x_{k-1},u_k).$$

В задачі покрокової оптимізації цільова функція (5) повинна бути адитивною, тобто

$$Z=\sum_{k=1}^{N} f_k(x_{k-1},u_k). \tag{6}$$

<u>Зауваження2.</u> Якщо за змістом задачі Z – мультиплікативна функція

$$Z=\prod_{k=1}^{N} f_k(x_{k-1},u_k),$$

то можна розглянути функцію $\bar{Z}=\log_a Z$, що є адитивною.

Отже, багатокроковий процес повністю описаний, якщо задані: припустимі множини станів X_k, $k = \overline{1,N}$, допустима множина варіантів рішень U, правила переходу з одного стану в інший під впливом вибраного розв'язку, цільова функція Z.

Задача полягає в тому щоб знайти стратегію $u^*=\{u_1^*,u_2^*,\ldots,u_N^*\}$, що доставляє екстремум функції

$$Z=F(x_0,u)=\sum_{k=1}^{N} f_k(x_{k-1},u_k)$$

за умов:

x_0 – вектор початкового стану процесу, $x_k = \varphi_k(x_{k-1},u_k)$, $x_k \in X_k$, $u_k \in U$, $k=1,2,\ldots,N$.

Знаходження оптимальної стратегії u^* розбивається на ряд кроків, на кожному з яких вибирається деякий допустимий розв'язок.

Математичний запис принципу оптимальності

Хай $Z_k = \sum_{i=k}^{N} f_1(x_{i-1}, u_i)$ є показником, що характеризує сумарну ефективність від даного, k-ого кроку, до останнього N-ого кроку, а $U_k = \{u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$, k=1,2,…,N.

Припустимо, що на першому кроці було прийняте деяке рішення u_1, під дією якого процес перейшов із стану x_0 в стан x_1. Отриманий при цьому ефект характеризується значенням оціночної функції $f_1(x_0,u_1)$. Припустимо, що після першого кроку для управління процесом застосовувалася оптимальна стратегія, що забезпечує на тих, що залишилися, (N-1) кроках екстремальне значення цільовий функції $Z_2(x_1) = F(x_1,U_2)$.

Це екстремальне значення має вид: $Z_2^*(x_1) = \underset{U_2}{extr}\, F(x_1,U_2)$

Тоді загальна оцінка якості управління за N кроків

$$Z = Z_1(x_0) = \left[f_1(x_0,u_1) + Z_2^*(x_1) \right].$$

Екстремальне значення $Z^* = Z_1^*(x_0)$ буде дорівнювати екстремуму Z, що залежить від управління на першому кроці u_1, тобто

$$Z^* = Z_1^*(x_0) = \underset{u_1 \in U}{extr}\left[f_1(x_0,u_1) + Z_2^*(x_1) \right], \quad \text{де} \quad x_1 = \varphi_1(x_0,u_1).$$

Назвемо величину $Z_k^*(x_{k-1}), k = \overline{1,N}$, - ***умовним екстремумом***.

Розглянемо k-ий крок. Якщо виберемо деяке управління u_k, то система з стану x_{k-1} перейде в стан x_k. Згідно з принципом оптимальності, яке б u_k не було вибране, на наступних кроках управління ($u_{k+1}, .., u_N$) повинні вибиратися так, щоб показник ефективності Z_{k+1} досягав екстремального значення $Z_{k+1}^*(x_k)$.

Управління u_k необхідно вибирати так, щоб воно в сукупності з оптимальним управлінням на наступних кроках, починаючи з *(k+1)*-го, призводило б до екстремуму показника ефективності на *N-k+1* кроках, починаючи з *k*-го до *N*.

Це твердження можна записати в вигляді наступного співвідношення:

$$Z_k^*(x_{k-1}) = \underset{u_k \in U}{extr}\left(f_k(x_{k-1},u_k) + Z_{k+1}^*(x_k) \right), \quad \text{де} \ x_k = \varphi_k(x_{k-1},u_k) \qquad (7)$$

яке називається ***основним функціональним рівнянням*** ДП або ***рівнянням Беллмана***.

Воно дозволяє розгорнути процедуру прийняття покрокових рішень і поступово сформувати оптимальну стратегію для всього N-крокового процесу. З (7) видно, що при обчисленні чергового значення Z_k^* використовується значення Z_{k+1}^*. Співвідношення, що мають таку властивість, називаються ***рекурентними***.

Для кожної конкретної задачі функціональне рівняння має свій специфічний вигляд, але в ньому неодмінно повинен зберігатися рекурентний характер.

Розв'язуючи рівняння (7) для визначення умовного екстремуму показника ефективності за (N-k+1) кроків, починаючи з k-го, визначаємо відповідне оптимальне управління u_k^*, при якому цей екстремум досягається. Це управління залежить від x_{k-1} . Управління $u_k^*(x_{k-1})$ називається умовним ***оптимальним управлінням на k-ому кроці***.

Однак є крок, за яким немає наступних. Таким є N-ий крок. Для нього рівність (7) приймає вигляд:

$$Z_N^*(x_{N-1}) = \underset{u_N \in U}{extr}\, f_N(x_{N-1}, u_N). \qquad (8)$$

Основне значення співвідношення (7), в якому реалізована ідея ДП, полягає в тому, що розв'язок початкової задачі визначення екстремуму функції Z від N змінних $u_1, u_2, \ldots, u_N$ зводиться до розв‘язування послідовності N задач виду (7), кожна з яких є задачею знаходження екстремуму функції однієї змінної u_k. Ці задачі взаємопов'язані, так як в (7) при визначенні $Z_k^*(x_{k-1})$ враховується знайдена при розв‘язуванні попередньої задачі функція $Z_{k+1}^*(x_k)$.

Схема зворотної прогонки

Обчислювальна схема МДП передбачає аналіз кроків двічі. Перший раз – від кінця до початку. На кожному кроці такого руху “справа – наліво” шукається умовно-оптимальне управління і екстремальне значення оціночної функції. Другий раз – від початку до кінця, в результаті чого знаходиться оптимальне управління для кожного кроку з точки зору всього процесу.

Таким чином, побудова моделі ДП зводиться до наступних основних моментів:

1. Вибирають спосіб ділення процесу на кроки: k=1,2,...,N;
2. Визначають параметри стану $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km})$ і змінні управління $u_k = (u_{k1}, u_{k2}, \ldots, u_{kr})$ на кожному k-му кроці процесу;
3. Записують рівняння стану $x_k = \varphi_k(x_{k-1}, u_k)$;
4. Вводять показник ефективності на k-ому кроці $f_k(x_{k-1}, u_k)$ і оціночну функцію процесу
$$Z = F(x_0, u) = \sum_{k=1}^{N} f_k(x_{k-1}, u_k);$$
5. Вводять до розгляду умовні екстремуми $Z_k^*(x_{k-1})$ оціночної функції від k-ого кроку включно до кінця процесу і умовні оптимальні управління $u_k^*(x_{k-1}), \quad k = \overline{1, N}$;
6. Із обмежень задачі для кожного конкретного k-ого кроку визначають множину U допустимих управлінь на цьому кроці;

7. Записують функціональне рівняння Беллмана

$$Z_k^*\left(x_{k-1}\right)=\underset{u_k \in U}{extr}\left\{f_k\left(x_{k-1},u_k\right)+Z_{k+1}^*\left(x_k\right)\right\},$$

і

$$Z_N^*\left(x_{N-1}\right)=\underset{u_N \in U}{extr}\left\{f_N\left(x_{N-1},u_N\right)\right\}.$$

Розв'язок функціональних рівнянь проводять послідовно, починаючи з $Z_N^*(x_{N-1})$. Цей етап отримав назву **умовної оптимізації**.

В результаті послідовного розв'язування N частинних задач на умовний екстремум визначають дві послідовності функцій: $\left\{Z_k^*(x_{k-1})\right\}$ і $\left\{u_k^*(x_{k-1})\right\}$.

Після цього приступають до другого етапу: **безумовної оптимізації.** Якщо початковий стан x_0 заданий, то безпосередньо визначають екстремум оціночної функції

$$Z^*=Z_1^*(x_0^*), \quad x_0^*=x_0,$$

а потім **– шукане безумовне оптимальне управління** по ланцюжку

$$x_0^* \to u_1^* \to x_1^* \to u_2^* \to x_2^* \to \ldots \to u_N^* \to x_N^*.$$

<u>Зауваження 3.</u> Якщо задана множина X_0 початкових станів, то додатково вирішують ще одну задачу

$$Z_{extr}=\underset{x_0 \in X_0}{extr}\left\{Z_1^*(x_0)\right\},$$

звідки знаходять x_0^*, а після цього по ланцюжку – безумовне оптимальне управління.

Схема прямої прогонки

Інколи на етапі умовної оптимізації обчислення зручно проводити в напрямку від першого кроку до N-ого. Цей спосіб отримав назву **прямого ходу** обчислень. В цьому випадку рівняння станів мають вигляд

$$x_{k-1}=\psi_k(x_k,u_k), \; k=\overline{1,N}.$$

Вони можуть бути отримані розв'язуванням рівняння

$$x_k=\varphi_k(x_{k-1},u_k)$$

відносно x_{k-1}.

Введемо до розгляду умовні екстремуми показника ефективності за k кроків, від першого до k-ого включно, величини $Z_k^*(x_k)$. Повторивши міркування, наведені вище, отримаємо наступну форму рівнянь Беллмана

$$Z_k^*(x_k)=\underset{u_k \in U}{extr}\left\{f_k\left(x_k,u_k\right)+Z_{k-1}^*\left(x_{k-1}\right)\right\}, \; k=1,2,\ldots,N, \tag{9}$$

$$Z_1^*(x_1)=\underset{u_1 \in U}{extr}\left\{f_1\left(x_1,u_1\right)\right\}. \tag{10}$$

В результаті розв'язування цих рівнянь отримаємо послідовності

$$Z_1^*(x_1), Z_2^*(x_2), ..., Z_N^*(x_N);$$
$$u_1^*(x_1), u_2^*(x_2), ..., u_N^*(x_N).$$

Етап безумовної оптимізації не відрізняється принципово від аналогічного етапу в схемі зворотної прогонки:

$Z_{extr} = Z_N^*(x_N^*),$ якщо $x_N^* = x_N$ - задане, або

$Z_{extr} = \underset{x_N \in X_N}{extr} \{Z_N^*(X_N^*)\}$, якщо задана множина X_N можливих кінцевих станів.

Далі безумовне оптимальне управління визначаємо по ланцюжку:

$$x_N^* \to u_N^* \to ... \to x_1^* \to u_1^* \to x_0^*.$$

З точки зору обсягу обчислень обидві схеми рівноцінні, але при деяких додаткових дослідженнях більш прийнята та або інша. Наприклад, додавання нових кроків зручно проводити при використанні прямого ходу обчислень, для дослідження чутливості до варіацій x_0 більш зручний зворотний хід і т. і.

Зауваження 4. До достоїнства МДП відносять можливість його застосування при будь-якому способі задання оціночної функції (аналітичному або табличному) і будь-яких допустимих множинах значень x і u (неперервному або дискретному).

Зауваження 5. Хоча в дискретному випадку виникає необхідність табулювати функції $Z_k^*(x)$ і $u_k^*(x)$ для всіх можливих значень x, але обсяг обчислень тут менш, ніж при прямому переборі варіантів, так як на етапі умовної оптимізації зберігаються лише умовно оптимальні варіанти розв'язків на кожному кроці.

Зауваження 6. Достоїнством МДП є можливість аналізу на чутливість оптимального розв'язку до зміни вхідних даних x_0 і N.

Зауваження 7. Основним недоліком МДП є "прокляття вимірності", так як трудомісткість розв'язку істотно залежить від розмірностей m-вектору станів і r-вектору керувань в силу необхідності оперування великим числом даних, отриманих в результаті табулювання x і u.

Розглянемо ряд прикладів економічних задач, що розв'язуються МДП.

§ 3. Приклади опису моделей динамічного програмування і побудова їх рішення

Приклад2. (*задача про капіталовкладення.)* Рада директорів фірми вивчає пропозиції з нарощування виробничих потужностей на трьох підприємствах, що належать фірмі. Для розширення цих підприємств фірма виділяє кошти в обсязі 5 млн. грош. од. Кожне підприємство представляє на розгляд ради директорів проекти, що характеризуються сумарними витратами і прибутками, пов'язаними з реалізацією кожного з проектів. Розгляд проектів з нульовими витратами дасть можливість відмови від розширення виробництва деякого підприємства. Мета фірми полягає в отриманні максимального прибутку від інвестицій в обсязі 5 млн. грош. од.

Задача розподілу капіталовкладень являє собою типовий приклад задачі розподілу, в якій ресурс (або ресурси) спрямовується на ефективне задоволення деякої кількості потреб. В усіх таких задачах немає принципових відмінностей між визначенням стану системи: стан звичайно визначається як кількість ресурсу, розподіленого на деякій послідовності кроків.

Нехай величини сумарних витрат (C, млн. грош. од.) і прибутків (f, млн. грош. од.) представлені в таблиці

Таблиця 1

Проект	***Підприємство 1***		***Підприємство 2***		***Підприємство 3***	
	c_1	f_1	c_2	f_2	c_3	f_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

В цій задачі кожному підприємству можна поставити в відповідність крок (етап), на якому приймається рішення. Кроки зв'язані між собою, бо кожне підприємство змагається з іншими за частку в обмеженому обсязі капіталовкладень.

Кількість кроків в цьому прикладі співпадає з кількістю підприємств.

Розглянемо два способи розв'язку даного прикладу: схемами прямої і зворотної прогонки.

<u>Пряма прогонка</u>

Введемо наступні змінні:

x_1 – обсяг капіталовкладень в <u>перше</u> підприємство (відповідає першому етапу);

x_2 – обсяг капіталовкладень в <u>перше</u> і <u>друге</u> підприємства (відповідає другому етапу);

x_3 – обсяг капіталовкладень у всі <u>три</u> підприємства (відповідає третьому етапу).

Із змісту змінних x_1, x_2 витікає, що $x_1 \le x_2$, та їхні значення належать [0;5]. Так як витрати на реалізацію кожного з проектів виражаються цілими числами, то значеннях x_1, x_2 можуть бути рівні 0,1,2,3,4 і 5.

Із змісту x_3 слідує, що $x_3 = 5$.

Крім того позначимо

u_k – номер проекту, вибраного на k-ому кроці, $k = 1,2,3$;

$z_k\,(x_k)$ – прибуток, отриманий фірмою від виділення першому, другому,..., k-ому підприємствам інвестицій в обсязі x_k млн. грош. один.;

$f_k(x_k,u_k)$ – прибуток, отриманий від вибору для *k*-ого підприємства проекту з номером u_k.

Очевидно, що в цьому випадку $U = \{1,2,3,4\}$.

Розглянемо зв'язок між x_k і x_{k-1}. Різниця між ними повинна бути рівна величині витрат c_k на реалізацію проекту u_k на етапі *k*, тобто

$$c_k(u_k) = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1,2,3.$$

Тому

$$x_{k-1} = x_k - c_k(u_k), \quad x_{k-1} \geq 0.$$

В силу цього множина *U* допустимих проектів на кожному кроці визначається наступним чином:

$$U = \{u_k : c_k(u_k) \leq x_k\}.$$

В ДП як правило використовується таблична форма запису числових результатів.

Крок 1.

Із (10) маємо

$$Z_1^*(x_1) = \max_{\substack{c_1(u_1) \leq x_1 \\ u_1 = 1,2,3}} \{f_1(x_1,u_1)\}.$$

Таблиця 2

x_1	$f_1(x_1,u_1)$			$Z_1^*(x_1)$	u_1^*
	$u_1 = 1$	$u_1 = 2$	$u_1 = 3$		
0	0	-	-	0	1
1	0	5	-	5	2
2	0	5	6	6	3
3	0	5	6	6	3
4	0	5	6	6	3
5	0	5	6	6	3

Зауваження. Знак "-" в таблиці означає неприпустимість відповідного проекту. Наприклад, для проекту $u_1 = 2$ необхідні витрати $c_1 = 1$ (див. Таблицю 1), а $x_1 = 0$ означає, що першому підприємству взагалі не виділяються кошти. Якщо $x_1 = 2$ (тобто першому підприємству виділяється 2 млн. грош. од.), а підприємство вибирає другий проект ($u_1 = 2$), то прибуток все рівно складе 5 млн. грош. од., так як 1 млн. грош. од. капіталовкладень залишиться незадіяним.

Крок 2.

Із (9) маємо

$$Z_2^*(x_2) = \max_{\substack{c_2(u_2) \leq x_2 \\ u_2 = 1,2,3,4}} \{f_2(x_2,u_2) + Z_1^*(x_2 - c_2(u_2))\},$$

$$Z_2(x_2) = f_2(x_2,u_2) + Z_1^*(x_2 - c_2(u_2)).$$

Таблиця 3

x_2	$Z_2(x_2)$				$Z_2^*(x_2)$	u_1^*
	$u_2 = 1$	$u_2 = 2$	$u_2 = 3$	$u_2 = 4$		
0	0+0=0	-	-	-	0	1
1	0+5=5	-	-	-	5	1
2	0+6=6	8+0=8	-	-	8	2
3	0+6=6	8+5=13	9+0=9	-	13	2
4	0+6=6	8+6=14	9+5=14	12+0=12	14	2 або 3
5	0+6=6	8+6=14	9+6=15	12+5=17	17	4

Крок 3.

$$Z_3^*(x_3) = \max_{\substack{c_3(u_3)\le x_3 \\ u_3=1,2}} \left\{ f_3(x_3,u_3) + Z_2^*(x_3 - c_3(u_3)) \right\},$$

$$Z_3(x_3) = f_3(x_3,u_3) + Z_2^*(x_3 - c_3(u_3)).$$

Таблиця 4

x_3	$Z_3(x_3)$		$Z_3^*(x_3)$	u_3^*
	$u_3 = 1$	$u_3 = 2$		
5	0+17=17	3+14=17	17	1 або 2

Отже, умовний екстремум на кожному кроці знайдено.

Безумовне оптимальне управління визначимо зворотним ходом. Спочатку розглядається таблиця 4. При x_3^* = 5 оптимальними є або u_3^* = 1, або u_3^* = 2.

Нехай спочатку u_3^* = 1, що відповідає тому, що третьому підприємству не виділяються кошти. Тоді $C_3(1) = 0, x_2^* = x_3^* - C_3(1) = 5 - 0 = 5,$ тобто першому і другому підприємствам виділяються всі 5 млн. грош. од. В таблиці 3 рядку x_2^* = 5 відповідає u_2^* = 4, тобто другому підприємству необхідно виділити 4 млн. грош.од., звідки x_1^* = 5-4 = 1. З таблиці 2 для x_1 = 1 одержуємо u_1^* = 2.

Таким чином u_1^* = 2, u_2^* = 4, u_3^* = 1 - оптимальний набір проектів, тобто на першому підприємстві необхідно впроваджувати другий проект, на другому – четвертий проект, на третьому – перший. При цьому прибуток складе 17 млн. грош.од. (Z_3^*).

Аналогічно розглядається випадок u_3^* = 2, причому для другого етапу одержуємо x_2^* = 4, тому u_2^* = 2 або 3, внаслідок чого маємо ще два оптимальних рішення:

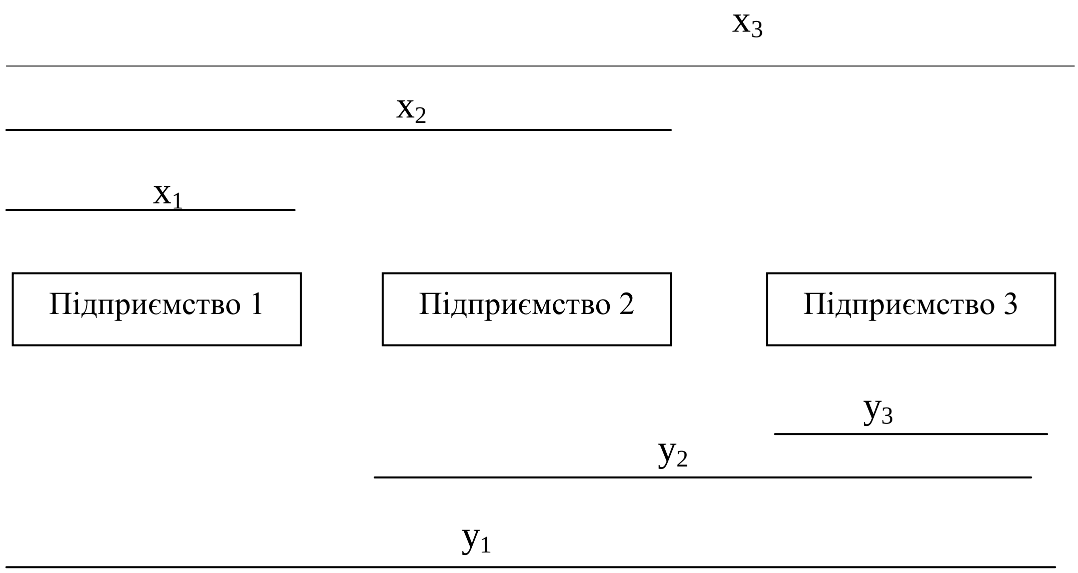
$$u_1^* = 2,\ u_2^* = 3,\ u_3^* = 2 \ \ і$$

$$u_1^* = 3,\ u_2^* = 2,\ u_3^* = 2,$$

Причому в усіх випадках Z_3* = 17 млн. грош.од.

Зворотна прогонка

Визначимо стани y_j наступним чином:
y_1 – обсяг капіталовкладень в усі 3 підприємства,
y_2 – обсяг капіталовкладень в 2 і 3 підприємства,
y_3 – обсяг капіталовкладень в третє підприємство.
Порівняємо змінні x_k і y_k:



Помітимо, що $y_k = 5\text{-}x_{k-1}$, k = 1,2,3 при $x_0 = 0$.
Покладемо:
$Z_3^*(y_3)$ - максимальний прибуток на кроці 3 при заданому y_3,
$Z_2^*(y_2)$ - максимальний прибуток на кроках 2 і 3 при заданому y_2,
$Z_1^*(y_1)$ - максимальний прибуток на всіх трьох кроках при заданому y_1 = 5 млн. грош.од.
Порядок покрокових обчислень тут визначається послідовністю $Z_3 \to Z_2 \to Z_1$. Використаємо формули (7), (8).

Крок 3.

$$Z^*{}_3(y_3) = \max_{\substack{u_3 \\ c_3(u_3) \le y_3, \\ u_3 = 1,2}} \{ f_3(y_3, u_3) \}.$$

$$Z_3(y_3) = f_3(y_3, u_3).$$

Значення $y_3 \in [0,5]$.

Таблиця 5

y_3	$f_3(y_3,u_3)$		$Z_3^*(y_3)$	u_3^*
	$u_3 = 1$	$u_3 = 2$		
0	0	-	0	1
1	0	3	3	2
2	0	3	3	2
3	0	3	3	2
4	0	3	3	2
5	0	3	3	2

Крок 2

$$Z_2^*(y_2) = \max_{\substack{c_2(u_2)\le y_2,\\ u_2=1,2,3,4}} \left\{ f_2\left(y_2,u_2\right) + Z_3^*\left(y_3\right)\right\},$$

$$y_3 = y_2 - c_2(u_2)$$

$$Z_2(y_2) = f_2\left(y_2,u_2\right) + Z_3^*\left(y_2 - c_2\left(u_2\right)\right)$$

Таблиця 6

y_2	$Z_2(y_2)$				$Z_2^*(y_2)$	u_2^*
	$u_2 = 1$	$u_2 = 2$	$u_2 = 3$	$u_2 = 4$		
0	0+0=0	-	-	-	0	1
1	0+3=3	-	-	-	3	1
2	0+3=3	8+0=8	-	-	8	2
3	0+3=3	8+3=11	9+0=9	-	11	2
4	0+3=3	8+3=11	9+3=12	12+0=12	12	3 або 4
5	0+3=3	8+3=11	9+3=12	12+3=15	15	4

Крок 1.

$$Z_1^*(y_1) = \max_{\substack{c_1(u_1)\le y_1,\\ u_1=1,2,3}} \left\{ f_1\left(y_1,u_1\right) + Z_2^*\left(y_2\right)\right\},$$

$$y_2 = y_1 - c_1(u_1),$$

$$Z_1(y_1) = f_1\left(y_1,u_1\right) + Z_2^*\left(y_1 - c_1\left(u_1\right)\right)$$

$y_1 = 5$.

Таблиця 7

y_1	$Z_1(y_1)$			$Z_1^*(y_1)$	u_1^*
	$u_1 = 1$	$u_1 = 2$	$u_1 = 3$		
5	0+15=15	5+12=17	6+11=17	17	2 або 3

Оптимальне рішення можна визначити, починаючи з y_1, далі y_2, далі y_3. Отримаємо такі ж оптимальні управління, що і в схемі прямої прогонки.

<u>Приклад 3.</u> Задача про завантаження (про ранець, про рюкзак).

Літак завантажується предметами N різноманітних типів. Кожний предмет типу k має вагу V_k і вартість C_k, $k = \overline{1,N}$. Максимальна вантажопідйомність літака рівна V. Вимагається визначити максимальну вартість вантажу, вага якого не повинна перевищувати V.

Для ілюстрації ідеї застосування МДП припустимо, що N = 3, V = 5 од. ваги. Значення V_k і C_k наведені в таблиці:

K	V_k (од. ваги)	C_k (грош. од.)
1	2	65
2	3	80
3	1	30

Будемо розв‘язувати цю задачу, застосовуючи схему зворотної прогонки.

Розіб'ємо рішення на кроки, де кожний крок відповідає певному типу предметів. Отримаємо трьохкрокову задачу.

Нехай y_k виражає сумарну вагу предметів на k-му етапі, рішення про завантаження яких приймались на кроках k, k + l,…,N. При цьому $y_1 = V$, $y_k = 0,1,2,...,V$, k = 2,3,...,N, тобто $y_1 = 5$, а y_2 і y_3 можуть приймати значення з допустимої множини {0,1,2,3,4,5}.

Нехай $Z_k^*(y_k)$ – максимальна сумарна вартість предметів, рішення про завантаження яких прийняті на кроках k,k + 1,...,N при заданому стані y_k. Варіанти рішення u_k на кроці k мають зміст кількості предметів типу k, що завантажуються. Значення u_k вибирається з значень 0,1,…,[V/V_k], де [V/V_k] – ціла частина числа $\dfrac{V}{V_k}$.

Більш того, допустиме значення u_k обмежене величиною $\left[\dfrac{y_k}{V_k}\right]$.

<u>Крок 3</u>. $Z_3^*(y_3) = \max\limits_{u_3}\{30u_3\}$, $u_3 \in \left\{0,1,2,3,...,\left[\dfrac{5}{1}\right]\right\}$ = {0,1,2,…,5},

$$Z_3(y_3) = 30u_3.$$

Таблиця 9

y_3	$Z_3(y_3)$						$Z_3^*(y_3)$	u_3^*
	$u_3 = 0$	$u_3 = 1$	$u_3 = 2$	$u_3 = 3$	$u_3 = 4$	$u_3 = 5$		
	$c_3u_3 = 0$	30	60	90	120	150		
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	0	30	-	-	-	-	30	1
2	0	30	60	-	-	-	60	2
3	0	30	60	90	-	-	90	3
4	0	30	60	90	120	-	120	4
5	0	30	60	90	120	150	150	5

Крок 2. $Z_2^*(y_2) = \max\limits_{u_2}\{80u_2 + Z_3^*(y_2 - 3u_2)\}$ $u_2 \in \left\{0,\dots,\left[\frac{5}{3}\right]\right\} = \{0,1\}$

$$Z_2(y_2) = \{80u_2 + Z_3^*(y_2 - 3u_2)\}.$$

Таблиця 10

y_2	$Z_2(y_2)$		$Z_2^*(y_2)$	u_2^*
	$u_2 = 0$	$u_2 = 1$		
	$c_2u_2 = 0$	80		
0	0+0=0	-	0	0
1	0+30=30	-	30	0
2	0+60=60	-	60	0
3	0+90=90	80+0=80	90	0
4	0+120=120	80+30=110	120	0
5	0+150=150	80+60=140	150	0

Крок 1. $Z_1^*(y_1) = \max\limits_{u_1}\{65u_1 + Z_2^*(y_1 - 2u_1)\}$ $u_1 \in \left\{0,\dots,\left[\frac{5}{2}\right]\right\} = \{0,1,2\}$

$$Z_1(y_1) = \{65u_1 + Z_2^*(y_1 - 2u_1)\}.$$

Таблиця 11

y_1	$Z_1(y_1)$			$Z_1^*(y_1)$	u_1^*
	$u_1 = 0$	$u_1 = 1$	$u_1 = 2$		
	$c_1u_1 = 0$	65	130		
0	0+0=0	-	-	0	0
1	0+30=30	-	-	30	0
2	0+60=60	65+0=65	-	65	1
3	0+90=90	65+30=95	-	95	1
4	0+120=120	65+60=125	130+0=130	130	2
5	0+150=150	65+90=155	130+30=160	160	2

При заданому $y_1 = V = 5$ од. ваги оптимальним рішенням є $u_1^* = 2$, $u_2^* = 0$, $u_3^* = 1$, а сумарна вартість вантажу рівна 160 грош. од.

Зауваження. На кроці 1 достатньо розглянути тільки рядок $y_1 = 5$. Повна інформація про можливі значення $y_1 = 0,1,2,3,4,5$ корисна для аналізу чутливість рішення.

Приклад 4. ***Задача календарного планування трудових ресурсів.***

Підприємець складає план регулювання чисельності робітників на кожен з 5 наступних тижнів. Він володіє інформацією про мінімальну кількість робітників, що вимагається для проведення робіт на кожному тижні: 5,7,8,4 і 6 чоловік відповідно. Найм або звільнення, а також простій робітників пов'язані з накладними витратами, величини яких в розрахунку на одного робітника відомі. Необхідно визначити, скільки робітників слід наймати або звільняти щотижня, щоб забезпечити мінімум сумарних витрат.

Визначимо спочатку в чому полягає крок в даній задачі. Так як рішення повинні прийматися на кожному тижні, то кожному періоду часу (тижню) поставимо в відповідність деякий крок (етап). Тому задачу можна представити як 5-ти крокову.

Дана задача характеризується відсутністю єдиного обмеження, що зв'язує кроки рішення задачі. Для визначення стану в даному випадку потрібне відповісти на питання: яка інформація, що отримана на попередніх кроках, необхідна для прийняття рішення на даному кроці без перевірки прийнятих раніше рішень? Виявляється, що інформація про кількість робітників, наявних до кінця кроку, що передує, визначає стан системи на початок даного кроку. Відомості про кількість найнятих або звільнених на кожному з розглянутих раніше кроків (тобто, попередні рішення) не впливають на прийняття рішення на даному кроці. Важливо лише володіти даними про кількість робітників в кінці попереднього кроку. Введене вище означення стану системи дозволяє враховувати ці дані. Таким чином, незважаючи на відмінності в конкретних формулюваннях, стан системи завжди містить всю інформацію, необхідну для прийняття рішення на даному кроці.

Нехай y_k – кількість робітників, що наявні на k-ий тиждень, а b_k- мінімальна потреба в робочій силі на k-ий тиждень. Визначимо $C_1(y_k - b_k)$ як величину витрат, що пов'язані з тим, що y_k перевищує b_k, а $C_2(y_k - y_{k-1})$ – як величину накладних витрат по найму нових робітників.

Функції C_1 і C_2 задаємо наступним чином:

$$C_1(y_k - b_k) = 3(y_k - b_k),\ k = \overline{1,5}$$

$$C_2(y_k - y_{k-1}) = \begin{cases} 4 + 2(y_k - y_{k-1}), & \text{якщо } y_k > y_{k-1} \\ 0, & \text{якщо } y_k \le y_{k-1}. \end{cases}$$

З означення C_2 випливає, що розглядається випадок, коли звільнення ($y_k< y_{k-1}$) не вимагає накладних витрат.

Необхідно скласти оптимальний план регулювання чисельності робітників для 5-тижневого періоду планування за умови, що кількість y_0 робітників, яка є в наявності на початку першого тижня, складає 5 чоловік. ($y_0 = 5$)

В даному прикладі кроки відповідають тижням.

Стан y_{k-1} визначимо як кількість робітників, наявних на кінець кроку k-1. Інформації про кількість робітників, наявних до кінці поточного тижня, достатньо для прийняття допустимих рішень в продовж тижнів, що залишилися.

Варіанти рішення y_k описуються кількістю робітників, наявних на k-му кроці.

Позначимо Z_k^* (y_{k-1}) – мінімальну величину витрат на протязі тижнів k, k+1,...,5 при заданому y_{k-1}.

Тоді рекурентні співвідношення (7), (8) будуть мати вигляд:

$$Z_5^*(\mathrm{y}_4) = \min_{y_5 = b_5}\{C_1(\mathrm{y}_5 - \mathrm{b}_5) + \mathrm{C}_2(y_5 - y_4)\},$$

$$Z_k^*(\mathrm{y}_{\mathrm{k-1}}) = \min_{y_k \ge b_k}\{C_1(\mathrm{y}_\mathrm{k} - \mathrm{b}_\mathrm{k}) + \mathrm{C}_2(y_\mathrm{k} - y_{\mathrm{k-1}}) + Z_{k+1}^*(\mathrm{y}_\mathrm{k})\}, \quad \mathrm{k} = 1,2,3,4$$

Визначимо границі можливих значень змінних y_1, y_2, y_3, y_4 і y_5. Значення y_5 повинно дорівнювати мінімальній потребі в робочій силі, так як воно відповідає останньому періоду часу, а звільнення не вимагає накладних витрат. З іншого боку, так як $b_4 < b_5$ $(4<6)$, підприємець може розглянути ситуації $y_4 = 4,5,6$ в пошуках варіанту з мінімальними витратами.

Аналогічні міркування призводять до висновку, що y_3 = 8, y_2 =7 або 8, y_1 = 5,6, 7 або 8. За умовою задачі y_0 =5.

<u>Крок 5.</u> $b_5 = 6$

Таблиця 12

y_4	$z_5(y_4)$ $y_5 = 6$	$z_5^*(y_4)$	y_5^*
4	3(6-6) + 4 + 2(6-4) = 8	8	6
5	3(6-6) + 4 + 2(6-5) = 6	6	6
6	3(6-6) + 0 = 0	0	6

Крок 4. $b_4 = 4$

Таблиця 13

y_3	$Z_4(y_3)$			$Z_4^*(y_3)$	y_4^*
	$y_4 = 4$	$y_4 = 5$	$y_4 = 6$		
8	3(4-4) + 0 + 8 = 8	3(5-1) + 0 + 6 = 9	3(6-4) + 0 + 0 = 6	6	6

Крок 3. $b_3 = 8$

Таблиця 14

y_2	$Z_3(y_2)$	$Z_3^*(y_2)$	y_3^*
	$y_3 = 8$		
7	3(8-8) + 4 + 2(8-7) + 6 = 12	12	8
8	3(8-8) + 0 + 6 = 6	6	8

Крок 2. $b_2 = 7$

Таблиця 15

y_1	$Z_2(y_1)$		$Z_2^*(y_1)$	y_2^*
	$y_2 = 7$	$y_2 = 8$		
5	3(7-7) + 4 + 2(7-5) +12 =20	3(8-7) + 4 + 2(8-5) +6 =19	19	8
6	3(7-7) + 4 + 2(7-6) +12 =18	3(8-7) + 4 + 2(8-6) +6 =17	17	8
7	3(7-7) + 0 + 12 =12	3(8-7) + 4 + 2(8-7) +6 =15	12	7
8	3(7-7) + 0 + 12 =12	3(8-7) + 0 + 6 =9	9	8

Крок 1. $b_1 = 5$

Таблиця 16

y_0	$Z_1(y_0)$				$Z_1^*(y_0)$	y_1^*
	$y_1 = 5$	$y_1 = 6$	$y_1 = 7$	$y_1 = 8$		
5	3(5-5) +0 + + 19 = 19	3(6-5)+4+2(6--5)+17 =26	3(7-5)+4+2(7--5)+12 =26	3(8-5)+4+2(8--5) +9 =28	19	5

Оптимальне рішення задачі знаходиться послідовно в зворотному направленні: $y_0 = 5 \rightarrow y_1^* = 5 \rightarrow y_2^* = 8 \rightarrow y_3^* = 8 \rightarrow y_4^* = 6 \rightarrow y_5^* = 6$, тобто на першому тижні потрібно нікого не наймати і не звільняти, на другому тижні потрібно найняти трьох робітників, на третьому – нікого не наймати і не звільняти, на четвертому – звільнити двох робітників, на п'ятому тижні нікого не наймати і не звільняти.

При цьому величина мінімальних витрат складе 19 грош. од.

§4. Задача оптимального розподілу ресурсів

Задача про капіталовкладення, що розглянута вище, є прикладом задачі оптимального розподілу ресурсів. В загальному вигляді ці задачі можуть бути описані наступним чином. Є деяка кількість ресурсів (грошових коштів, матеріальних ресурсів – сировини, напівфабрикатів, трудових ресурсів, обладнання різних видів і таке інше). Ці ресурси необхідно розподілити між різними об'єктами їх використання в окремі проміжки планового періоду так, щоб отримати максимальну сумарну ефективність від вибраного способу розподілу. Показником ефективності можуть бути, наприклад, прибуток, фондовіддача (задача максимізації) або сумарні витрати, собівартість, час виконання даного обсягу робіт(задача мінімізації). і т. і.

Розглянемо двохвимірну модель розподілу ресурсів.

Приклад 5. Планується діяльність двох підприємств на протязі чотирьох років. Початкові кошти складають x_0 = 10 тис. грошових одиниць. Кошти x, вкладені в підприємство 1, приносять до кінця року прибуток $f_1(x) = 0{,}4x$ і вертаються в розмірі $\varphi_1(x) = 0{,}5x$; аналогічно, кошти x, вкладені в підприємство 2, дадуть прибуток $f_2(x) = 0{,}3x$ і вертаються в розмірі $\varphi_2(x) = 0{,}8x$. По закінченні року всі кошти, що залишалися ще раз перерозподіляються між підприємствами 1 і 2, нових коштів не надходить і прибуток в виробництво не вкладається. Вимагається знайти оптимальний спосіб розподілу наявних коштів.

Рішення. Хай номер кроку відповідає номеру року. Тоді процес можна розглядати як 4-кроковий. За стан системи приймемо x_{k-1}, $k = \overline{1,4}$ - кількість коштів, що слідує перерозподілити на початку k-го року. Тому на кожному кроці буде дві змінних управління, це кількість коштів, що виділяються підприємствам 1 та 2 відповідно.

Так як кошти щорічно перерозподіляються повністю, то, якщо позначити через u_k – кількість коштів, виділених підприємству 1, кількість коштів для підприємства 2 буде знаходитися як $x_{k-1} - u_k$, тобто модель стає одновимірною.

Показником ефективності буде прибуток, отриманий від обох підприємств за 4 роки. Прибуток від k-го року рівний

$$Z_k(x_{k-1}) = f_1(u_k) + f_2(x_{k-1} - u_k) = 0{,}4u_k + 0{,}3(x_{k-1} - u_k) = 0{,}1u_k + 0{,}3x_{k-1}.$$

Рівняння стану буде виражати залишок коштів x_k після k-го кроку:

$$x_k = \varphi_1(u_k) + \varphi_2(x_{k-1} - u_k) = 0{,}5u_k + 0{,}8(x_{k-1} - u_k) = 0{,}8x_{k-1} – 0{,}3u_k.$$

Використовуючи схему зворотної прогонки, позначимо $Z_k^*(x_{k-1})$ – умовний оптимальний прибуток, отриманий від розподілу x_{k-1} коштів між двома підприємствами за $n – k + 1$ років, починаючи з k-го року до кінця періоду, що розглядається. Тоді основні функціональні рівняння (7), (8) будуть мати вигляд:

$$Z_4^*(x_3) = \max_{0 \le u_4 \le x_3} \left\{0{,}1u_4 + 0{,}3x_3\right\}$$

$$Z_k^*(x_{k-1}) = \max_{0\le u_k \le x_{k-1}} \left\{0,1u_k + 0,3x_{k-1} + Z_{k+1}^*\left(0,8x_{k-1} - 0,3u_k\right)\right\}, k = 1,2,3.$$

Проведемо умовну оптимізацію.

Крок 4. Вираз $0,1u_4 + 0,3x_3$ лінійний відносно u_4, тому максимум досягається при $u_4 = x_3$:

$$u_4^*(x_3) = x_3$$
$$z_4^*(x_3) = 0,4x_3.$$

Крок 3.

$$Z_3^*(x_2) = \max_{0\le u_3\le x_2}\{0,1u_3 + 0,3x_2 + 0,4(0,8x_2 - 0,3u_3)\} = \max_{0\le u_3\le x_2}\{-0,02u_3 + 0,62x_2\}.$$

Звідси, так як коефіцієнт при u_3 від'ємний, то

$$u_3^*(x_2) = 0$$
$$Z_3^*(x_2) = 0,62x_2.$$

Крок 2.

$$Z_2^*(x_1) = \max_{0\le u_2\le x_1}\{0,1u_2 + 0,3x_1 + 0,62(0,8x_1 - 0,3u_2)\} = \max_{0\le u_2\le x_1}\{-0,086u_2 + 0,796x_1\}.$$

Звідки $u_2^*(x_1) = 0,\ \ z_2^*(x_1) = 0,796x_1.$

Крок 1.

$$Z_1^*(x_0) = \max_{0\le u_1\le x_0}\{0,1u_1 + 0,3x_0 + 0,796(0,8x_0 - 0,3u_1)\} = \max_{0\le u_1\le x_0}\{-0,1388u_1 + 0,9368x_0\}.$$

Тому $u_1^*(x_0) = 0,\ \ Z_1^*(x_0) = 0,9368x_0.$

Перейдемо тепер до безумовної оптимізації. Відомо, що x_0=10000 грош. один.

Тоді послідовно маємо:

$u_1^*(10000) = 0,\quad Z_{max} = Z_1^* = 9368,$

$x_1^* = 0,8*10^4 - 0,3*0 = 8000,\ u_2^*(8000) = 0,$

$x_2^* = 0,8x_1^* - 0,3u_2^* = 0,8*8000 = 6400,\ u_3^*(6400) = 0,$

$x_3^* = 0,8x_2^* - 0,3u_3^* = 0,8*6400 = 5120,\ u_4^*(5120) = 5120.$

Отже, кошти по рокам потрібно розподіляти так:

Підприємство	Рік			
	1	2	3	4
1	0	0	0	5120
2	10000	8000	6400	0

При такому розподілі 10 тис. грош. одиниць за чотири роки буде отримано прибуток, рівний Z_{max}= 9368.

Вправи

В задачах **1-2** знайти оптимальний розподіл коштів *C* грош.од. між *n* підприємствами за умови, що прибуток *f(x)*, отриманий від кожного підприємства, є функцією від вкладених в нього коштів *x*. Вкладення кратні Δx, а функції $f(x)$ задані таблицею.

Задача 1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	5	9	12	14	15	18	20	24	27
$f_2(x)$	7	9	11	13	16	19	21	22	25
$f_3(x)$	6	10	13	15	16	18	21	22	25

$C = 9$, n = 3, $\Delta x = 1$

Задача 2.

x	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,2	0,9	1,0	1,2	2,0
$f_2(x)$	1,0	1,1	1,3	1,4	1,8
$f_3(x)$	2,1	2,5	2,9	3,9	4,9
$f_4(x)$	0	2,0	2,5	3,0	4,0

$C = 5$, n = 4, $\Delta x = 1$

Задача 3. В умовах задачі **1** знайти оптимальний розподіл коштів при $C = 8$.

Задача 4. В умовах задачі **1** знайти оптимальний розподіл коштів $C = 9$ між чотирма підприємствами, якщо функція прибутку для четвертого підприємства задана наступною таблицею:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_4(x)$	3	5	7	11	13	15	20	22	24

Задача 5. В умовах задачі **1** знайти оптимальний розподіл коштів $C = 6$.

Задача 6. В умовах задачі **2** знайти оптимальний розподіл коштів між 2 , 3 і 4-м підприємствами (1-е підприємство виключити).

В задачах **7-10** знайти оптимальний розподіл ресурсів с між двома галузями виробництва I і II на протязі *n* років, якщо дані функції прибутків $f_1(x)$ і $f_2(x)$ для кожної галузі, функції повернення $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$. По закінченні року тільки всі повернені кошти перерозподіляються, прибуток в виробництво не вкладається.

Задача 7. $C = 40000$ од.; n = 4; $f_1(x) = 0{,}4x$; $f_2(x) = 0{,}3x$; $\varphi_1(x) = 0{,}5x$; $\varphi_2(x) = 0{,}8x$.

Задача 8. $C = 10000$ од.; n = 4; $f_1(x) = 0{,}1x$; $f_2(x) = 0{,}5x$; $\varphi_1(x) = 0{,}75x$; $\varphi_2(x) = 0{,}3x$.

Задача 9. $C = 20000$ од.; n = 4; $f_1(x) = 0{,}2x$; $f_2(x) = 0{,}4x$; $\varphi_1(x) = 0{,}6x$; $\varphi_2(x) = 0{,}4x$.

Задача 10. $C= 30000$ од.; n = 4; $f_1(x) = 0{,}1x$; $f_2(x) = 0{,}3x$; $\varphi_1(x) = 0{,}75x$; $\varphi_2(x) = 0{,}5x$.

Задача 11. Вирішити задачу **7** за умови, що в початку кожного року додатково надходять кошти в розмірах Δ s = 10000.
Задача 12. Вирішити задачу 8 за умови, що на початку кожного року додатково надходять кошти в розмірах Δ s = 8000.

§5. Динамічна модель задачі складування

Розглянемо постановки задач оптимального управління запасами, що називаються задачами складування.

Особливістю цих задач є наявність двох змінних управлінь (двовимірна модель). Однак розв'язок цих задач значно спрощується завдяки лінійності цільової функції.

Задача. Ємкість складу по зберіганню запасів обмежена деякою величиною c. В кожному з n проміжків часу запаси можуть поповнюватися з витратами α_k на одиницю продукції і витрачатись з отриманням прибутку β_k за одиницю продукції, причому рішення про поповнення або витрачання запасів приймається одноразово в кожному проміжку часу. Визначити оптимальну стратегію в управлінні запасами з умови максимізації сумарного прибутку при заданому початковому рівні запасів.

Уточнимо постановку задачі. Можливі три варіанти в черговості поповнення і витрачання запасів в кожному з проміжків часу: 1 варіант – поповнення передує витратам; 2 варіант – витрати передують поповненню і 3 варіант – черговість будь-яка.

В 3 варіанті вибір оптимальної стратегії означає не тільки визначення розміру поповнення і витрат, але і вибір оптимальної черговості в кожному з проміжків часу.

Означені варіанти умов будуть впливати на форму обмежень моделі задачі.

Складемо динамічну модель задачі. Розглянемо n – кроковий процес, приймаючи під k-тим кроком проміжок часу, в якому приймається рішення про поповнення або витрачання запасів (k = 1, 2,..., n).

За параметр стану ξ_{k-1} приймемо запас товарів на початку k-го кроку. Змінними управліннями служать розміри поповнення (x_k) і витрат (y_k) запасів на k-му кроці. Тоді рівняння стану, що виражає матеріальний баланс запасів, запишеться в вигляді

$$\xi_k = \xi_{k-1} + x_k - y_k. \tag{19}$$

Будемо розв'язувати задачу з допомогою зворотної обчислювальної схеми, тобто використовуючи рекурентні співвідношення в вигляді

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{x_n, y_n}\{\beta_n y_n - \alpha_n x_n\}, \tag{20}$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{x_k, y_k}\{\beta_k y_k - \alpha_k x_k + Z_{k+1}^*(\xi_k)\}. \tag{21}$$

Змінні в задачі повинні задовольняти умовам невід’ємності:

$$x_k \ge 0, \ \ y_k \ge 0 \tag{22}$$

і додатковим обмеженням для всіх k, що залежать від варіанту постановки задачі:

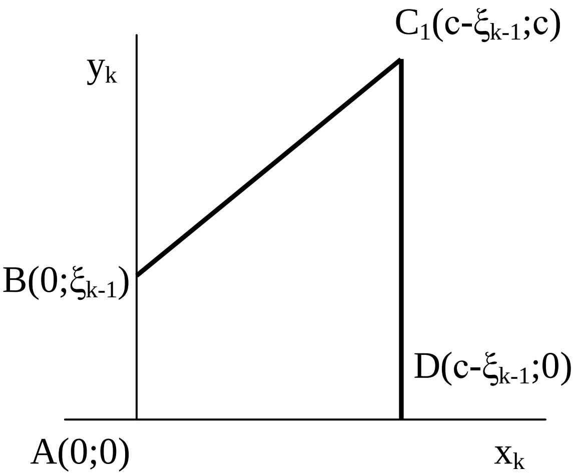
1 варіант: $\xi_{k-1} + x_k \le c, \quad y_k \le \xi_{k-1} + x_k$ (23)

2 варіант: $\xi_{k-1} - y_k + x_k \le c, \quad y_k \le \xi_{k-1}$ (24)

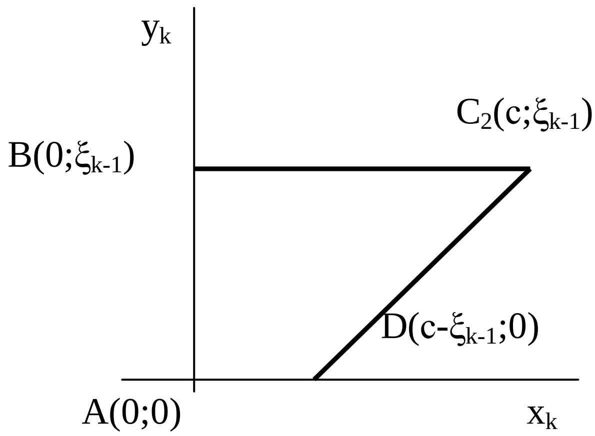
3 варіант: або (23), або (24).

Перші нерівності в (23) і (24) диктуються обмеженою ємністю складу, другі – умовою, згідно з якою витрати не можуть перевищувати наявні запаси. Для 3-го варіанту альтернативні умови означають, що якщо буде прийняте рішення спочатку поповнити запаси, а потім їх витрачувати, то повинні виконуватися умови (23); якщо буде прийнятий протилежний порядок, то повинні виконуватися умови (24).

Розв'язування задач умовної максимізації по двом змінним згідно рекурентним співвідношенням (20) і (21) в загальному випадку являє собою складну задачу, однак лінійність функцій $Z_n(x_n, y_n) = \beta_n y_n - \alpha_n x_n$ і $Z_k(x_k, y_k) = \beta_k y_k - \alpha_k y_k + Z^*_{k+1}(\xi_{k-1} + x_k - y_k)$, максимуми яких визначаються на кожному кроці, і лінійність обмежень, що накладаються на змінні, дозволяють значно спростити рішення всіх цих часткових задач.



Мал. 1



Мал. 2

Розглянемо докладніше рішення задачі в I варіанті постановки. Обмеження (22) і (23) визначають при даному значенні параметра ξ_{k-1} область допустимих значень x_k, y_k в вигляді опуклого чотирикутника ABC_1D, зображеного на малюнку 1. Так як в цій області максимізується лінійна функція, то маємо задачу лінійного програмування, оптимальний розв'язок якої досягається, принаймні в одній з вершин області. На мал. 1 знаходимо координати всіх чотирьох вершин: $A(0;0)$, $B(0;\xi_{k-1})$, $C_1(c-\xi_{k-1};c)$, $D(c-\xi_{k-1};0)$. Тому замість знаходження максимуму по співвідношенням (20) і (21) при довільних змінах x_k і y_k достатньо обчислити значення виразів, що містяться в фігурних дужках, в усіх чотирьох вершинах і шляхом порівняння вибрати з них найбільше.

При цьому для останнього (n-го) кроку можна обмежитися вибором з двох альтернатив, бо значення $Z_n(x_n,y_n) = \beta_n y_n - \alpha_n x_n$ в вершинах A і D дасть явно менше число, ніж відповідно в вершинах B і C_1.

Отже, для n-го кроку одержуємо

$$Z_n^*\left(\xi_{n-1}\right) = \max \begin{cases} \beta_n \xi_{n-1}\ , & \text{(B)} \\ \left(\beta_n - \alpha_n\right)c + \alpha_n \xi_{n-1} & (C_1) \end{cases} \tag{25}$$

Для виконання оптимізації на наступних кроках заздалегідь знайдемо з рівняння (19) значення ξ_k для кожної вершини. Тоді отримаємо: $\xi_k = \xi_{k-1}$ в вершині A; $\xi_k = 0$ в вершині B; $\xi_k = 0$ в вершині C_1; $\xi_k = c$ в вершині D. Замість співвідношення (21) одержуємо

$$Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right) = \max \begin{cases} Z_{k+1}^*\left(\xi_{k-1}\right), & \text{(A)}, \\ \beta_k \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*\left(0\right), & \text{(B)}, \\ \left(\beta_k - \alpha_k\right)c + \alpha_k \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*\left(0\right), & (C_1), \\ \alpha_k \xi_{k-1} - \alpha_k c + Z_{k+1}^*\left(c\right), & \text{(D)}. \end{cases} \tag{26}$$

При виконанні практичних розрахунків виявляється достатнім не табулювати функції $Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right)$ для всіх значень ξ_{k-1}, а обмежитися обчисленням цих функцій лише для крайніх значень, тобто для $\xi_{k-1} = 0$, $\xi_{k-1} = c$.

В випадку 2 варіанту постановки задачі отримаємо область, зображену на мал. 2. В новій області зміняться лише координати вершини C_2; знаходимо $x_k = c$, $y_k = \xi_{k-1}$. Аналогічно попередньому отримаємо наступні формули для виконання умовної максимізації:

$$Z_n^*\left(\xi_{n-1}\right) = \beta_n \xi_{n-1} \qquad \text{(B)}, \tag{27}$$

$$Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right) = \max \begin{cases} Z_{k+1}^*\left(\xi_{k-1}\right), & \text{(A)}, \\ \beta_k \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*\left(0\right), & \text{(B)}, \\ \left(\beta_k\, \xi_{k-1} - \alpha_k c\right) + Z_{k+1}^*\left(c\right), & (C_2), \\ \alpha_k \xi_{k-1} - \alpha_k c + Z_{k+1}^*\left(c\right), & \text{(D)}. \end{cases} \tag{28}$$

Нарешті, при 3 варіанті постановки задачі на кожному кроці ми повинні вибрати найбільше число по формулам (25), (26) і порівняти його з найбільшим числом, знайденим по формулам (27), (28). Зіставивши отримані таким чином два значення $Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right)$ вибираємо з них найбільше. Це і є остаточний вираз для $Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right)$. Водночас, в залежності від того, до якого з варіантів відноситься знайдений максимум, встановлюється вигідна на даному кроці черговість поповнення і витрат запасів.

Оскільки вираз (27) міститься серед альтернатив вибору по формулі (25), для *k*-го кроку достатньо проводити вибір тільки по співвідношенню (25).

Аналогічно, оскільки серед чотирьох альтернатив в формулі (28) тільки третя альтернатива відрізняється від тих, що вибираються по формулі (26), то достатньо виконувати вибір по формулі (26), додавши п'яту альтернативу.

Розглянемо тепер числовий приклад.

Приклад 6. Визначити оптимальну стратегію в управлінні запасами, включаючи оптимальну черговість поповнення і витрачання запасів згідно умовам задачі 6 при наступних даних: n = 5, c = 50, α_k і β_k задані таблицею:

Таблиця 18

k	1	2	3	4	5
α_k	5	16	12	15	18
β_k	15	10	8	15	22

Розв'язок задачі виконуємо по викладеній схемі 3-го варіанту постановки задачі.

Як вже вказувалося, на кожному кроці достатньо обчислювати значення $Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right)$ тільки для двох значень параметру ξ_{k-1}.

Для **5-го кроку**, згідно співвідношенню (25), маємо

$$Z_5^*\left(\xi_4\right) = \max\begin{cases}\beta_5\xi_4 & (B),\\ (\beta_5-\alpha_5)c+\alpha_5\xi_4 & (C_1).\end{cases}$$

Отже, найбільше значення досягається в вершині C_1:

$$Z_5^*\left(\xi_4\right)=18\xi_4+200 \quad \text{при} \quad x_5^*\left(\xi_4\right)=50,\ y_5^*\left(\xi_4\right)=\xi_4.$$

Виконання оптимізації на 4-му і наступних кроках проводиться по формулі (26) з включенням п'ятої альтернативи.

Для **4-го кроку** маємо

$$Z_4^*(\xi_3) = \max\begin{cases} 18\xi_3 + 4c, & (A) \\ 15\xi_3 + 4c, & (B) \\ 15\xi_3 + 4c, & (C_1) \\ 15\xi_3 + 7c, & (D) \\ 15\xi_3 + 7c, & (C_2) \end{cases}$$

При k = 4 одержуємо значення $Z_4^*(\xi_3)=15\xi_3+350$, відповідне точкам D і C_2. Таким чином, на цьому кроці одержуємо альтернативне рішення:

$x_4^*(\xi_3)=50-\xi_3,\ y_4^*(\xi_3)=0$ при передуванні поповнення,

або

$x_4^*(\xi_3)=50,\ y_4^*(\xi_3)=\xi_3$ при передуванні витрат.

Аналогічно, при k = 3 маємо $Z_3^*(\xi_2)=12\xi_2+500$ відповідно при $x_3^*(\xi_2)=50-\xi_2,\ y_3^*(\xi_2)=0$.

Розрахунки по умовній оптимізації зручно розташувати в формі таблиці (дивись табл. 19), де показана оптимізація 3-го, 2-го та 1-го кроків. Як звичайно, найбільше число в рядку (тобто при даному ξ) підкреслено.

Таблиця 19

k	ξ	Обчислення					$Z_k^*(\xi_{k-1})$	$x_k^*(\xi_{k-1})$	$y_k^*(\xi_{k-1})$	Варіант
		A	B	C_1	D	C_2				
3	0	350	350	150	<u>500</u>	500	500	50	0	I,II
	50	1100	750	750	<u>1100</u>	900	1100	0	0	I
2	0	<u>500</u>	500	200	300	300	500	0	0	I
	50	<u>1100</u>	1000	1000	1100	800	1100	0	0	I
1	0	500	500	<u>1000</u>	850	850	1000	50	50	I

Тепер розпочнемо безумовну оптимізацію.

З 1-го кроку відразу одержуємо Z_{max} = 1000 при $x_1^*=50$ і $y_1^*=50$ для 1-го варіанту черговості. Тоді, $\xi_1^*=0$, звідки $x_2^*=y_2^*=0$. Відповідно отримаємо $\xi_2^*=0$, при якому $x_3^*=50, y_3^*=0$ для 1-го варіанту; тоді $\xi_3^*=50$. З результатів оптимізації 4-го кроку маємо $x_4^*=y_4^*=0$ для 1-го варіанту, або $x_4^*=y_4^*=50$ для 2-го варіанту. Нарешті, на 5-му кроці одержуємо $x_5^*=y_5^*=50$.

Вправи

Задача 13. Ємкість складу по зберіганню запасів обмежена деякою величиною c. В кожному з $n=4$ проміжків часу запаси можуть поповнюватися з витратами α_k на одиницю продукції і витрачатись з отриманням прибутку β_k за одиницю продукції, причому рішення про поповнення або витрачання запасів приймається одноразово в кожному проміжку часу. Визначити оптимальну стратегію в управлінні запасами з умови максимізації сумарного прибутку при заданому початковому рівні запасів.

Можливі три варіанти в черговості поповнення і витрачання запасів в кожному з проміжків часу:

1 варіант – поповнення передує витратам;

2 варіант – витрати передують поповненню;

3 варіант – черговість будь-яка.

Таблица затрат и прибутку

k-номер проміжка часу	1	2	3	4
α_k- трати на поповнення	10	15	10	6
β_k- отриманий доход	7	12	9	8

Варіанти завдань

N-варіанта завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ξ_0 –початковий запас на складі	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	11	11	11	10
c- ємність складу	14	16	18	16	12	17	13	11	17	13	18	14	17	14	16	18
V –вариант черговості поповнення та витрат	1,3	2,3	1,3	1,3	2,3	1,3	2,3	1,3	2,3	1,3	1,3	2,3	1,3	2,3	1,3	1,3

Задача 14.Розв‘язати задачу 13, при умові, що число проміжків часу $n=5$, *а* таблиця затрат та прибутку має вид:

Таблица затрат и прибутку

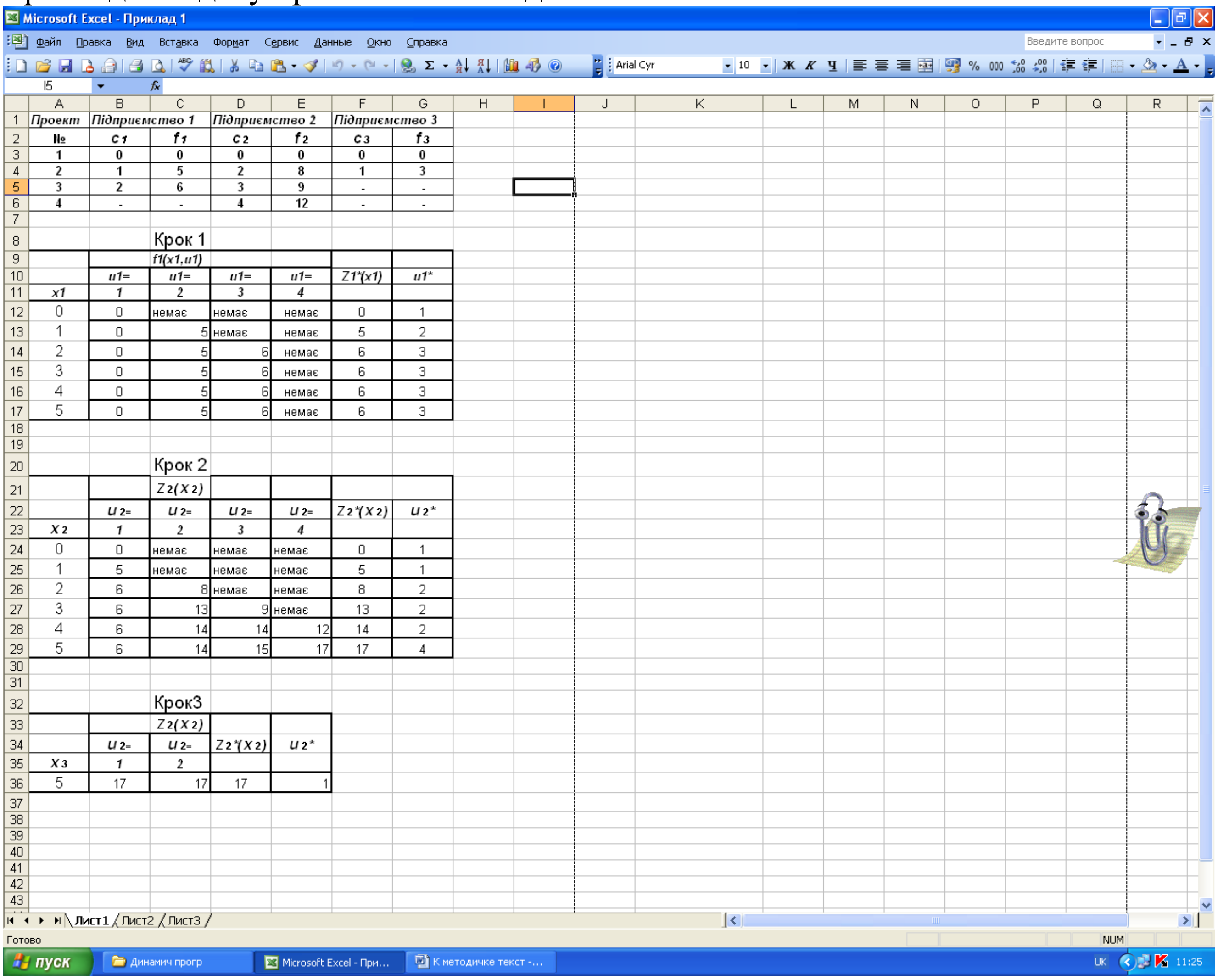
k-номер проміжка часу	1	2	3	4	5
α_k- трати на поповнення	10	18	8	11	12
β_k- отриманий доход	15	13	10	7	9

Задача 15. Розв‘язати задачу 13 при умові, що ємність складу змінюється залежно від кроку за формулою $c_k = c + N \cdot k$, $k = \overline{1,4}$; де *c*- ємність складу відповідного варіанту задачі 13, N- номер варіанту, *k*- номер кроку.
(Наприклад, для варіанту №6 маємо: $c_1 = 17 + 6*1 = 23$; $c_2 = 17 + 6*2 = 29$; $c_3 = 17 + 6*3 = 35$; $c_4 = 17 + 6*4 = 41$)

§6 Розв‘язування задач динамічного програмування за допомогою персонального комп’ютера.

Застосування середовища електронних таблиць Microsoft Excel

На сучасних комп‘ютерах в складі Microsoft Office завжди присутній Microsoft Office Excel. Тому корисним є застосовувати цього ресурсу для розв‘язування задач динамічного програмування. Як зразок , розглянемо Приклад 1: задачу про капіталовкладення.



Проект	Підприємство 1		Підприємство 2		Підприємство 3	
№	c_1	f_1	c_2	f_2	c_3	f_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Крок 1

	f1(x1,u1)					
	u1=	u1=	u1=	u1=	Z1*(x1)	u1*
x1	1	2	3	4		
0	0	немає	немає	немає	0	1
1	0	5	немає	немає	5	2
2	0	5	6	немає	6	3
3	0	5	6	немає	6	3
4	0	5	6	немає	6	3
5	0	5	6	немає	6	3

Крок 2

	Z2(X2)					
	U2=	U2=	U2=	U2=	Z2*(X2)	U2*
X2	1	2	3	4		
0	0	немає	немає	немає	0	1
1	5	немає	немає	немає	5	1
2	6	8	немає	немає	8	2
3	6	13	9	немає	13	2
4	6	14	14	12	14	2
5	6	14	15	17	17	4

Крок3

	Z2(X2)			
	U2=	U2=	Z2*(X2)	U2*
X3	1	2		
5	17	17	17	1

Мал. 3

На малюнку 3 наведені результати розрахунків.
Нижче представлено формули за якими виконувались кроки прямої прогонки. В тих позиціях Кроків 1 та 2 (дивись приклад) де відсутні значення функцій, проставлено текст «немає». Символ ⇓ означає «протягування».
Формули розрахунків в таблиці Крок1.

B12: =ЕСЛИ(A12<$B$3;"немає";$C$3) ⇓ до B17,
C12: =ЕСЛИ(A12<$B$4;"немає";$C$4) ⇓ до C17,
D12: =ЕСЛИ(A12<$B$5;"немає";$C$5) ⇓ до D17,
E12: =ЕСЛИ(A12<$B$6;"немає";$C$6) ⇓ до E17,
F12: =МАКС(B12:E12) ⇓ до E17,
G12: ЕСЛИ(B12=F12;B$11;ЕСЛИ(C12=F12;C$11;ЕСЛИ(D12=F12;D$11;E$11)))
⇓ до E17.

Формули розрахунків в таблиці Крок2.
B24: =$E$3+ВПР(A24-$D$3;A12:F17;6;ЛОЖЬ) ⇓ до B29,
C24: =ЕСЛИ(A24<$D$4;"немає";(ВПР(A24-$D$4;$A$12:$F$17;6;ЛОЖЬ))+$E$4)
⇓ до C29,
D24: =ЕСЛИ(A24<$D$5;"немає";(ВПР(A24-$D$5;$A$12:$F$17;6;ЛОЖЬ))+$E$5)
⇓ до D29,
E24: =ЕСЛИ(A24<$D$6;"немає";(ВПР(A24-$D$6;$A$12:$F$17;6;ЛОЖЬ))+$E$6)
⇓ до E29,
F24: =МАКС(B24:E24) ⇓ до F29,
G24: =ЕСЛИ(B24=F24;B$23;ЕСЛИ(C24=F24;C$23;ЕСЛИ(D24=F24;D$23;E$23)))
⇓ до G29.

Формули розрахунків в таблиці Крок3.
B36: =G3+ВПР(A36-F3;A24:F29;6;ЛОЖЬ),
C36: =G4+ВПР(A36-F4;A24:F29;6;ЛОЖЬ),
D36: =МАКС(B36:C36),
E36: =ЕСЛИ(B36=D36;B35;C36).
Наведений підхід можна застосовувати і для більш складних задач.

Розв‘язування задач за допомогою пакета WinQSB

Пакет WinQSB широко застосовується для розв‘язування задач з дослідження операцій.

Запуск програми. Необхідно запустити WinQSB та виділити в ній Dynamic Programming. Щоб ввести нову задачу, вибирають команду File, а потім New Problem. Якщо , наприклад, розв‘язується задача про завантаження (задача про рюкзак або ранець) потрібно в вікні, що з‘явиться, відмітити Knapsack Problem, а в полі Problem Title вказати ім‘я задачі, яка розв‘язується. В полі Number of Nodes вказують кількість різних типів предметів, що загружаються в літак. Натиснути клавішу ОК. З‘являється таблиця. В стовпці Item Indentification необхідно перерахувати назви предметів, які загружаються. В стовпці Units Availabele вказують максимальну кількість елементів кожного виду. В останньому рядку даного стовпця, що відповідає Capacity= , вказати максимально можливу загрузку рюкзака (максимальну ємність рюкзака). В стовпці Unit Capacity Reguired вказати вагу (об‘єм) кожної одиниці,що загружається. В останньому стовпці Return Function вказується вартість предметів кожного типу.

Повернемося до прикладу2, розв‘яжемо його за допомогою WinQSB. Припустимо, що кожного із предметів нараховується по 5 одиниць. Введемо позначення: предмети першого типу -x, другого типу -y, третього типу-z. Занесемо це до стовпця Item Indentification. Обмеження, що до наявності предметів кожного занесемо це до стовпця Units Availabele . В останній клітинці цього стовпця вкажемо вагу, яку не потрібно перевищувати -5. В наступний стовбець Unit Capacity Reguired вкажемо кількість одиниць ваги кожного із предметів, що загружається в літак: відповідно 2,3,1. В стовбець Return Function вкажемо вартість для кожного типу предметів: 65*x, 80*y, 30*z.

В меню вибираємо Solve and Analis потім Solve the Problem. Отримаємо таблицю:

01-01-2015 Stage	Item Name	Decision Quntity	Return Function	Total Item Return Value	Capacity Left
1	x	2	65*x	130	1
2	y	0	80*y	0	1
3	z	1	30*z	30	0
	Total	Return	Value=	160	CPU=0

Проаналізуємо отриманий результат. В першому стовпчику указані порядкові номери предметів. В другому стовпчику назви предметів, які грузяться на літак. В третьому стовпчику - відповідь:скільки і яких предметів потрібно загрузити. В четвертому стовпчику – функція, що визначає вартість відправленого грузу для кожного типу. В п‘ятому стовпчику – підрахована вартість погружених предметів, а в останньому рядку цього стовпчика – сумарна вартість. Відповіді, що отримані різними способами співпадають. В останньому стовпчику вказується вільний простір в літаку, після чергової погрузки. Так, після погрузки 2-х одиниць типу x, залишається тільки одна одиниця вільного простору, після погрузки 0 одиниць типу y величина вільного простору в літаку не змінилася. А після погрузки 1 одиниці предметів типу z, вільного простору в літаку не залишилося.

Якщо після цього в меню вибрати Solve and Analis, а потім Solve and Display Steps, то можна отримати зведену таблицю всіх розрахунків.

Рекомендована література

1. Беллман Р. Динамическое программирование. -М.: ИЛ, 1960.-400с.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 2-М.: Мир, 1973-488с.
3. Дослідження операцій в економіці: Підручник/ За ред. І.К. Федоренко, О.І. Черняка.-К.: Знання,2007.-558с.
4. Карагодова О.О., Кігель В.Р. ,Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посібник.-К.: Центр учбової літератури, 2007-256с.
5. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов/ Н.Ш. Кремер и др.-М.: ЮНИТИ,2005.-407с.
6. Леснікова І.Ю., Халіпова Н.В.,Терещенко М.В., та інш. Дослідження операцій в середовищі електронних таблиць Excel: Навч. Посібник.-К.: Центр учбової літератури, 207-186с.
7. Сакович В.А. Исследование операций: Справочное пособие. -Мн.: Выш.шк.,1984.-256с.
8. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.:Пер. с англ.- М.: Издательский дом « Вильямс»,205.-912с.