Министерство образования и науки, молодежи и спорта
Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова
Физический факультет
Кафедра теплофизики

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Конспект лекций

Одесса 2013

УДК 532, 533.

Научное издание содержит конспект лекций для части спецкурса «Механика жидкости и газа и физика аэрозолей», который читается на кафедре теплофизике Одесского национального университета имени И.И. Мечникова.

Составители:

В.В. Калинчак, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теплофизики;

А.С. Черненко, доцент кафедры теплофизики.

Утверждено на заседании Ученого совета
физического факультета ОНУ им. И.И. Мечникова
Протокол № 6 от 18 марта 2013 г.

Содержание

1. Основные понятия 5
1.1 Модель сплошной среды 5
1.2 Физические свойства жидкостей и газов 5
1.3 Векторы и операции над ними 9
1.4 Вязкость жидкости 11
1.5 Классификация сил. 12
1.6 Уравнение движения идеальной жидкости 4(уравнение Эйлера) . 14

2. Статика жидкости 16
2.1 Уравнение равновесия жидкости. Закон Паскаля. 16
2.2 Эпюры давления. Сила Архимеда. Барометрическая формула. 18

3. Кинематика движущегося газа или жидкости. 21
3.1 Уравнение неразрывности 21
3.2 Линии тока и траектории частиц жидкости или газа. 22
3.3 Ускорение жидкой частицы. 24
3.4 Анализ движения жидкой частицы. Первая теорема Гельмгольца. 25
3.5 Кинематика вихревого движения. Интенсивность вихря. Циркуляция скорости. 27
3.6 Кинематика потенциального движения жидкости. Потенциал скорости. Функция тока. 30
3.7 Методы расчета потенциальных полей. 32

4. Динамика идеальной жидкости 38
4.1 Уравнение движения идеальной жидкости. Преобразование Громеки-Лэмба. Уравнение Бернулли. 38
4.2 Примеры применения уравнения Бернулли. 40
4.3 Изменение давления жидкости при искривлении трубки тока. 43
4.4 Сила реакции текущей воды (газа). 44
4.5 Истечение газов в ракетных двигателях. Сопло Лаваля. 46

5. Динамика вязкой жидкости. 53
5.1 Течение вязкой жидкости в трубе. 53
5.2 Уравнение движения вязкой жидкости (уравнение Навье-Стокса). 55
5.3 Вывод уравнения Навье-Стокса (на основе закона сохранения импульса) 56
5.4 Уравнение Бернулли для вязкой жидкости 59
5.5 Классификация течений жидкости. Устойчивость движения. 63
5.6 Закономерности ламинарного режима течения жидкости в трубах. 64
5.7 Закономерности турбулентного режима течения жидкости в трубах. 67

6. Действие потока жидкости или газа на тело. 74
6.1 Лобовое сопротивление тел в потоке. 74
6.2 Гидродинамический пограничный слой. Условия прилипания. 76
6.3 Подъемная сила в потоке жидкости или газа. 79
6.4. Эффект Магнуса. 81

7. Ударные волны 83
7.1 Распространение возмущений давления в сжимаемой жидкости или газе. 83
7.2 Теория распространения ударных волн. 86

8. Конвективный теплообмен. 90
8.1 Система уравнений конвективного переноса. 90
8.2 Уравнение теплопроводности для движущейся жидкости или газа. 90
8.3 Основные понятия теории подобия. 92
8.4 Условия подобия конвективного теплообмена при вынужденном движении теплоносителя 93
8.5 Условия подобия процессов теплообмена при свободной конвекции 94
8.6 Условия подобия процессов конвективного теплообмена при совместном свободно-вынужденном движении теплоносителя 95

9. Движение газа и явления в атмосфере 97
9.1 Атмосферное давление. Ветры. 97
9.2 Воздушные массы. Циклоны и антициклоны. Атмосферные фронты. 100

Литература 104

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1.1 Модель сплошной среды.

Механика жидкости и газа (МЖГ) – это наука, изучающая закономерности покоя и движения жидкостей и газов. Изучаемые закономерности и физические законы применяются при рассмотрении задач экологии, геофизики, металлургии, энергетики, метеорологии, машиностроении и др.

Она может излагаться как на базе векторного, так и координатного методов.

Одной из важнейших особенностей механики жидкости является то, что в основу ее положена так называемая модель сплошной среды. Как известно, для описания среды, состоящей из большого числа молекул в сравнительно малом объеме (жидкости и газы) в физике широко используются два пути: феноменологический и статистический (иногда их называют корпускулярной и континуальной моделями). Феноменологический путь изучения основывается на простейших допущениях. Оставляя в стороне вопрос о строении вещества, он наделяет его такими свойствами, которые наилучшим образом устанавливают соответствие между наблюдаемыми явлениями и их описанием.

При таком подходе жидкости (газы) рассматриваются как непрерывная среда, способная делиться до бесконечности. Другими словами, жидкость (газ) представляется состоящими из достаточно малых частиц непрерывным образом заполняющих пространство. Эта среда обладает свойством инерции и наделена различными физическими свойствами. В соответствии с такой моделью все параметры жидкости (плотность, вязкость и др.) изменяются непрерывно от точки к точке, что позволяет при анализе движения среды применять математический аппарат дифференциального и интегрального исчислений, хорошо разработанный для непрерывных функций.

Понятие о частицах жидкости, которым широко оперирует гидрогазодинамика, неразрывно связано с понятием о физически бесконечно малом объеме. Это объем, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с характерными размерами объекта, но он содержит в себе настолько много молекул, что его средние характеристики (например, плотность) становятся устойчивыми по отношению к изменению объема. Поэтому, например, фраза «объем стягивается в точку» означает, что он стремится не к нулю, а к физически бесконечно малому объему. Следует твердо усвоить, что все законы механики жидкости справедливы до тех пор, пока справедлива модель сплошной среды. Количественно это можно оценить по величине числа Кнудсена, представляющего отношение длины свободного пробега молекул l к характерному размеру течения L, т.е $Kn = \frac{l}{L}$.

Принято считать, что законы механики жидкости справедливы, если $Kn < 0.01$.

Движение жидкости (газа) различно при скоростях меньших и больших за скорость звука в ней (нем). Поэтому характеристикой движения является число Маха, являющийся отношением скорости движения жидкости (газа) v к скорости звука c, т.е. $M = v/c$. При малых числах Маха жидкость является практически несжимаемой.

§ 1.2 Физические свойства жидкостей и газов.

Жидкость – одно из агрегатных состояний вещества. Основным свойством жидкости, отличающим её от других агрегатных состояний, является способность неограниченно менять форму под действием касательных механических напряжений, даже сколь угодно малых, практически сохраняя при этом объём.

Газ (газообразное состояние) – агрегатное состояние вещества, характеризующееся очень слабыми связями между составляющими его частицами (молекулами, атомами или ионами), а также их большой подвижностью. Частицы газа почти свободно и хаотически движутся в промежутках между столкновениями, во время которых происходит резкое изменение характера их движения. Газообразное состояние вещества в условиях, когда возможно

существование устойчивой жидкой или твёрдой фазы этого же вещества, обычно называется **паром**.

Текучесть. Основным свойством жидкостей является текучесть. Если к участку жидкости, находящейся в равновесии, приложить внешнюю силу (сколь угодно малую), то возникает поток частиц жидкости в том направлении, в котором эта сила приложена: жидкость течёт. Таким образом, под действием неуравновешенных внешних сил жидкость не сохраняет форму и относительное расположение частей, и поэтому принимает форму сосуда, в котором находится. В отличие от пластичных твёрдых тел, жидкость не имеет предела текучести. Подобно жидкостям, газы обладают текучестью и сопротивляются деформации. В отличие от жидкостей, газы не имеют фиксированного объёма и не образуют свободной поверхности, а стремятся заполнить весь доступный объём (например, сосуда).

Плотность и сжимаемость. Одним из характерных свойств жидкости является то, что она имеет определённый объём (при неизменных внешних условиях). Жидкость чрезвычайно трудно сжать механически, поскольку, в отличие от газа, между молекулами очень мало свободного пространства. Давление, производимое на жидкость, заключенную в сосуд, передаётся без изменения в каждую точку объёма этой жидкости (закон Паскаля, справедлив также и для газов). Эта особенность, наряду с очень малой сжимаемостью, используется в гидравлических машинах. Жидкости обычно увеличивают объём (расширяются) при нагревании и уменьшают объём (сжимаются) при охлаждении. Впрочем, встречаются и исключения, например, вода сжимается при нагревании, при нормальном давлении и температуре от 0 °C до приблизительно 4 °C. Однако, плотность воды зависит от температуры незначительно.

Под средней плотностью, либо, что то же, плотностью физически бесконечно малого объема, понимают частное от деления его массы на объем или ρ – это масса единицы объёма жидкости ($кг/м^3$) $\rho = m/V$.

Сжатие жидкости весьма незначительно даже при очень больших силах давления. Поэтому вводят представление о **несжимаемой** жидкости – жидкость, сохраняющая неизменным объем, а ее форма может меняться как угодно (текучесть жидкости). Таким образом, можно считать, что плотность несжимаемой жидкости также не зависит от давления.

В большинстве гидравлических расчётов свойствами сжимаемости и температурного расширения жидкостей пренебрегают, например, для воды считают плотность постоянной и равной 1000 $кг/м^3$.

Плотность газов пропорциональна давлению в большом диапазоне его изменения. С ростом температуры плотность газов убывает. Поэтому газы можно представить как **сжимаемые жидкости**, плотность которых не является постоянной, а зависит от времени. **Сжимаемость газа** – это отношение удельного объёма газа к удельному объёму идеального газа с такой же молярной массой. Как правило, это число чуть меньше единицы, при этом наиболее значительно отклоняется от неё вблизи линии насыщения и для достаточно сложных органических газов, например, для метана при стандартных условиях .

Удельный вес. Удельный вес γ – это вес единицы объёма жидкости ($Н/м^3$). $\gamma = G/V$, где G – вес (сила тяжести), $Н$; V – объём, $м^3$. Связаны удельный вес и плотность через ускорение свободного падения так: $\gamma = \rho g$.

Вязкость. Кроме того, жидкости (как и газы) характеризуются вязкостью. Она определяется, как способность оказывать сопротивление перемещению одной из частей относительно другой – то есть как внутреннее трение.

Когда соседние слои жидкости движутся относительно друг друга, неизбежно происходит столкновение молекул дополнительно к тому, которое обусловлено тепловым движением. Возникают силы, затормаживающие упорядоченное движение. При этом кинетическая энергия упорядоченного движения переходит в тепловую – энергию хаотического движения молекул.

Жидкость в сосуде, приведённая в движение и предоставленная самой себе, постепенно остановится, но её температура повысится.

В гидродинамике жидкости делятся на **ньютоновские** и **неньютоновские**. Течение **ньютоновской** жидкости подчиняется закону вязкости Ньютона, то есть касательное напряжение и градиент скорости линейно зависимы. Коэффициент пропорциональности между этими величинами известен как вязкость.

У **неньютоновской** жидкости вязкость зависит от градиента скорости или изменяется со временем. Обычно такие жидкости сильно неоднородны и состоят из крупных молекул, образующих сложные пространственные структуры

Образование свободной поверхности и поверхностное натяжение.

Сферическая форма капли жидкости, как пример минимизации площади поверхности, что обусловлено поверхностным натяжением в жидкостях. Из-за сохранения объёма жидкость способна образовывать свободную поверхность. Такая поверхность является поверхностью раздела фаз данного вещества: по одну сторону находится жидкая фаза, по другую – газообразная (пар), и, возможно, другие газы, например, воздух.. Если жидкая и газообразная фазы одного и того же вещества соприкасаются, возникают силы, которые стремятся уменьшить площадь поверхности раздела – силы поверхностного натяжения. Поверхность раздела ведёт себя как упругая мембрана, которая стремится стянуться.

Поверхностное натяжение может быть объяснено притяжением между молекулами жидкости. Каждая молекула притягивает другие молекулы, стремится «окружить» себя ими, а значит, уйти с поверхности. Соответственно, поверхность стремится уменьшиться.

Поэтому мыльные пузыри и пузыри при кипении стремятся принять сферическую форму: при данном объёме минимальной поверхностью обладает шар. Если на жидкость действуют только силы поверхностного натяжения, она обязательно примет сферическую форму – например, капли воды в невесомости.

Маленькие объекты с плотностью, большей плотности жидкости, способны «плавать» на поверхности жидкости, так как сила тяготения меньше силы, препятствующей увеличению площади поверхности.

Испарение и конденсация. Кипение. Водяной пар, содержащийся в воздухе, конденсируется в жидкость после соприкосновения с холодной поверхностью бутылки.

Испарение – постепенный переход вещества из жидкости в газообразную фазу (пар).

При тепловом движении некоторые молекулы покидают жидкость через её поверхность и переходят в пар. Вместе с тем, часть молекул переходит обратно из пара в жидкость. Если из жидкости уходит больше молекул, чем приходит, то имеет место испарение.

Конденсация – обратный процесс, переход вещества из газообразного состояния в жидкое. При этом в жидкость переходит из пара больше молекул, чем в пар из жидкости.

Испарение и конденсация – неравновесные процессы, они происходят до тех пор, пока не установится локальное равновесие (если установится), причём жидкость может полностью испариться, или же прийти в равновесие со своим паром, когда из жидкости выходит столько же молекул, сколько возвращается.

Кипение – процесс парообразования внутри жидкости. При достаточно высокой температуре давление пара становится выше давления внутри жидкости, и там начинают образовываться пузырьки пара, которые (в условиях земного притяжения) всплывают наверх.

Смачивание – поверхностное явление, возникающее при контакте жидкости с твёрдой поверхностью в присутствии пара, то есть на границах раздела трёх фаз.

Смачивание характеризует «прилипание» жидкости к поверхности и растекание по ней (или, наоборот, отталкивание и нерастекание). Различают три случая: несмачивание, ограниченное смачивание и полное смачивание.

Смешиваемость – способность жидкостей и газов растворяться друг в друге. Пример смешиваемых жидкостей: вода и этиловый спирт, пример несмешиваемых: вода и жидкое масло.

Диффузия. При нахождении в сосуде двух смешиваемых жидкостей или газов молекулы в результате теплового движения начинают постепенно проходить через поверхность

раздела, и таким образом жидкости постепенно смешиваются. Это явление называется диффузией (происходит также и в веществах, находящихся в других агрегатных состояниях).

Теплопроводность. Теплопроводность, один из видов переноса теплоты (энергии теплового движения микрочастиц) от более нагретых частей тела к менее нагретым, приводящий к выравниванию температуры. При теплопроводности перенос энергии в теле осуществляется в результате непосредственной передачи энергии от частиц (молекул, атомов, электронов), обладающих большей энергией, частицам с меньшей энергией.

Перегрев и переохлаждение. Жидкость можно нагреть выше точки кипения таким образом, что кипения не происходит. Для этого необходим равномерный нагрев, без значительных перепадов температуры в пределах объёма и без механических воздействий, таких, как вибрация. Если в перегретую жидкость бросить что-либо, она мгновенно вскипает. Перегретую воду легко получить в микроволновой печи.

Переохлаждение — охлаждение жидкости ниже точки замерзания без превращения в твёрдое агрегатное состояние. Как и для перегрева, для переохлаждения необходимо отсутствие вибрации и значительных перепадов температуры.

Волны плотности. Хотя жидкость чрезвычайно трудно сжать, тем не менее, при изменении давления её объем и плотность всё же меняются. Это происходит не мгновенно; так, если сжимается один участок, то на другие участки такое сжатие передаётся с запаздыванием. Это означает, что внутри жидкости способны распространяться упругие волны, более конкретно, волны плотности. Вместе с плотностью меняются и другие физические величины, например, температура.

Если при распространении волны́ плотность меняется достаточно слабо, такая волна называется звуковой волной, или звуком.

Если плотность меняется достаточно сильно, то такая волна называется ударной волной. Ударная волна описывается другими уравнениями.

Волны плотности в жидкости являются продольными, то есть плотность меняется вдоль направления распространения волны. Поперечные упругие волны в жидкости отсутствуют из-за несохранения формы.

Упругие волны в жидкости со временем затухают, их энергия постепенно переходит в тепловую энергию. Причины затухания – вязкость, «классическое поглощение», молекулярная релаксация и другие. При этом работает так называемая вторая, или объёмная вязкость – внутреннее трение при изменении плотности. Ударная волна в результате затухания через какое-то время переходит в звуковую. Упругие волны в жидкости подвержены также рассеянию на неоднородностях, возникающих в результате хаотического теплового движения молекул.

Волны на поверхности. Если сместить участок поверхность жидкости от положения равновесия, то под действием возвращающих сил поверхность начинает двигаться обратно к равновесному положению. Это движение, однако, не останавливается, а превращается в колебательное движение около равновесного положения и распространяется на другие участки. Так возникают волны на поверхности жидкости.

Если возвращающая сила – это преимущественно силы тяжести, то такие волны называются гравитационными волнами (не путать с волнами гравитации). Гравитационные волны на воде можно видеть повсеместно.

Если возвращающая сила – это преимущественно сила поверхностного натяжения, то такие волны называются капиллярными.

Если эти силы сопоставимы, такие волны называются капиллярно-гравитационными.

Волны на поверхности жидкости затухают под действием вязкости и других факторов.

Сосуществование с другими фазами. Формально говоря, для равновесного сосуществования жидкой фазы с другими фазами того же вещества – газообразной или кристаллической – нужны строго определённые условия. Так, при данном давлении нужна строго определённая температура. Тем не менее, в природе и в технике повсеместно жидкость сосуществует с паром, или также и с твёрдым агрегатным состоянием – например, вода с водяным па-

ром и часто со льдом (если считать пар отдельной фазой, присутствующей наряду с воздухом). Это объясняется следующими причинами:

1) **неравновесное состояние.** Для испарения жидкости нужно время, пока жидкость не испарилась полностью, она сосуществует с паром. В природе постоянно происходит испарение воды, также как и обратный процесс – конденсация.

2) **замкнутый объём.** Жидкость в закрытом сосуде начинает испаряться, но поскольку объём ограничен, давление пара повышается, он становится насыщенным ещё до полного испарения жидкости, если её количество было достаточно велико. При достижении состояния насыщения количество испаряемой жидкости равно количеству конденсируемой жидкости, система приходит в равновесие. Таким образом, в ограниченном объёме могут установиться условия, необходимые для равновесного сосуществования жидкости и пара.

3) **присутствие атмосферы в условиях земной гравитации.** На жидкость действует атмосферное давление (воздух и пар), тогда как для пара должно учитываться практически только его парциальное давление. Поэтому жидкости и пару над её поверхностью соответствуют разные точки на фазовой диаграмме, в области существования жидкой фазы и в области существования газообразной соответственно. Это не отменяет испарения, но на испарение нужно время, в течение которого обе фазы сосуществуют. Без этого условия жидкости вскипали бы и испарялись очень быстро.

§ 1.3 Векторы и операции над ними.

Полем какой-либо величины называется пространство, в каждой точке которого эта величина вполне определена. Если эта величина скаляр, т.е. характеризуется одним числом, то поле называют скалярным (поле плотности, поле температуры).

Векторным называется поле, которое характеризуется в каждой точке пространства величиной и направлением. К этому следует лишь добавить, что непременным условием, связанным с векторными величинами, является то, что они должны складываться по правилу параллелограмма. Поэтому, например, поток автомашин, движущихся по улице и характеризующийся как величиной, так и направлением не является вектором.

Единичные векторы (орты) в декартовой системе координат будем обозначать $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Тогда вектор $\vec{u}$ может быть представлен как

$$\vec{u} = \vec{e}_x u_x + \vec{e}_y u_y + \vec{e}_z u_z .$$

где u_x, u_y, u_z – проекции (компоненты) вектора на соответствующие оси координат.

Скалярное произведение двух векторов дает скалярную величину

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |u||v| \cos \alpha$$

где α – угол между векторами.

Ясно, что скалярное произведение обращается в нуль, если векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ взаимно перпендикулярны.

Векторное произведение двух векторов.

В противоположность скалярному произведению, здесь первое слово указывает на то, что результат действия есть вектор. Векторное произведение может быть записано в виде определителя третьего порядка

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} .$$

Раскрывая определитель по общим правилам, получаем:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{e}_x \left(u_y v_z - u_z v_y \right) - \vec{e}_y \left(u_x v_z - u_z v_x \right) + \vec{e}_z \left(u_x v_y - u_y v_x \right)$$

Операции над векторами (дифференциальные характеристики поля).

Градиент какой-то скалярной функции $\varphi(x,y,z)$ есть вектор, образующийся в результате выполнения следующих действий: $\operatorname{grad}\varphi = \vec{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Физически градиент есть вектор, в направлении которого функция в данной точке поля изменяется с максимальной скоростью.

Дивергенцией вектора $\vec{u}$ называется выражение вида $\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Следовательно, любое векторное поле дает некоторое скалярное поле, а именно поле своей дивергенции (расходимости). Если $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, то поле называют соленоидальным.

Вихрь поля (ротор) – это вектор, образующийся при выполнении операции $\operatorname{rot}\vec{u} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$.

Если $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$, то поле называют безвихревым.

Операции $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\vec{u}$, $\operatorname{rot}\vec{u}$, переводящие скаляр в вектор, вектор в скаляр и вектор в вектор порождают пять операций второго порядка:

– превращение скалярной величины в векторную $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{u})$

– превращение векторной величины в скалярную $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$; $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{u})$;

– превращение одной векторной величины в другую $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)$; $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{u})$.

В теории поля показывается, что $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{u}) \equiv 0$ и $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) \equiv 0$. Операция $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$ носит название оператора Лапласа для скалярного поля и имеет вид $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$.

Интегральные соотношения теории поля.

Поток векторного поля.

Пусть *dS* – элемент поверхности, а $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный по внешней нормали. Потоком векторного поля (например, $\vec{u}$) называют поверхностный интеграл вида $\iint\limits_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$.

Циркуляция вектора поля.

Пусть рассматривается векторное поле какой-то величины $\vec{u}$. Циркуляцией вектора $\vec{u}$ вдоль контура *L* называют криволинейный интеграл вида $\Gamma = \int\limits_L \vec{u}\cdot d\vec{l}$.

Иногда этот интеграл интерпретируется как «работа» векторного поля вдоль контура *L*. Если циркуляция векторного поля вдоль замкнутого пути (контура) равна нулю, то поле называют потенциальным.

Формула Стокса.

Эта формула позволяет преобразовать криволинейный интеграл вдоль замкнутой пространственной кривой в поверхностный интеграл по поверхности, натянутой на эту кривую, т.е. $\oint\limits_L \vec{u}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{u})\cdot\vec{n}\,dS$,

т.е. циркуляция вектора поля вдоль контура равна потоку вихря через поверхность, ограниченную этим контуром.

Формула Остроградского-Гаусса.

Это соотношение, часто называемое преобразованием Гаусса-Остроградского, связывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности с тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью $\iint\limits_S \vec{u}\cdot\vec{n}dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{u}dV$.

Формула показывает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

В механике жидкости широко используется формула, являющаяся следствием формулы Гаусса-Остроградского для скалярного поля $\iint\limits_S \varphi \vec{n} dS = \iiint\limits_V \operatorname{grad} \varphi dV$,

где φ – какая-то скалярная функция.

§ 1.4 Вязкость жидкости.

Вязкость – это свойство жидкости проявлять внутреннее трение при её движении, обусловленное сопротивлением взаимному сдвигу её частиц. Физической причиной вязкости является молекулярное взаимодействие. Вследствие различия в молекулярной структуре капельных жидкостей и газов различна и природа их вязкостей. В жидкостях вязкость есть проявление сил сцепления между молекулами, в газах она – результат взаимодействия, обусловленный хаотическим движением молекул. Поэтому при повышении температуры в газах вязкость увеличивается за счет более интенсивного движения молекул. Наоборот, в капельных жидкостях повышение температуры приводит к снижению вязкости, т.к. происходит увеличение среднего расстояния между молекулами.

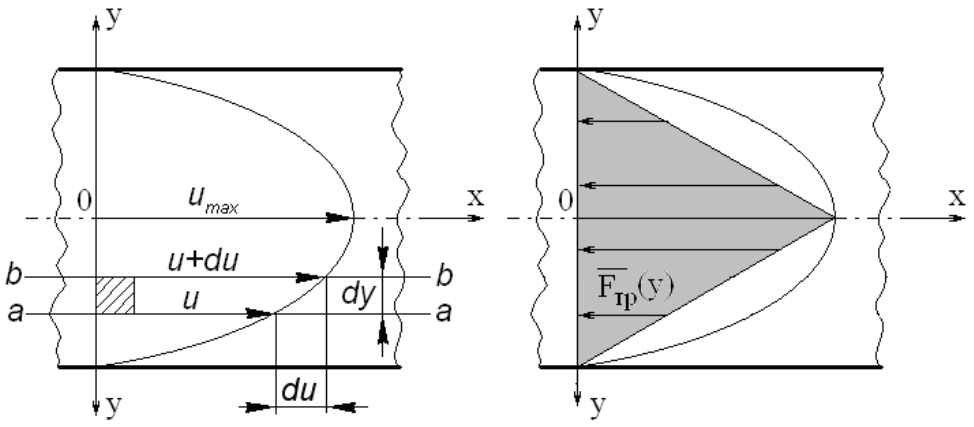
Равновесное состояние вещества характеризуется распределением его параметров в пространстве. Если за счет какого-либо воздействия окажется, что в каком-то месте пространства возникла неравновесность, то в веществе начинает происходить механический или тепловой обмен, который стремится сгладить неравномерность. В общем случае этот обмен называют процессом переноса. В различных явлениях можно наблюдать процессы переноса энергии, массы (вещества) и количества движения. Вязкость же обусловлена процессом переноса количества движения.

Для уяснения того, как проявляются силы вязкости, рассмотрим течение жидкости в круглой трубе. Будем считать, что векторы скоростей частиц параллельны оси *x*, т.е. течение ламинарное.

Графическое изображение распределения скоростей в поперечном сечении называют эпюрой скоростей (либо полем скоростей). Очевидно, что скорости частиц, находящихся на стенках трубы, равны нулю и возрастают по мере приближения к оси (на оси $u = u_{\max}$) как это показано на рис.

Рассмотрим два слоя жидкости (*a-a* и *b-b*), расположенные на расстоянии *dy*. Пусть слой *a-a* движется со скоростью *u*, тогда, как следует из эпюры, слой *b-b* имеет скорость *u+du*. Таким образом, на верхней и нижней гранях прямоугольной жидкой частицы, расположенной между слоями, скорости различны, что в соответствии с законами механики должно привести к ее деформации. Заметим, что такое движение в гидромеханике называют простым сдвигом, либо течением чистого сдвига.

Взаимодействие молекул через этот элемент приводит к появлению касательной составляющей напряжения. При этом **знак** этой составляющей, т.е. ее направление, таково, что оно



соответствует уменьшению разности скоростей по обе стороны рассматриваемого элемента. Величина силы трения, возникающая между слоями движущейся жидкости, определяется по формуле, предложенной Ньютоном:

$$F_{mp} = -\mu \frac{du}{dy} S , \qquad (1.1)$$

где S – площадь поверхности соприкасающихся слоев; μ (Па·с) – динамическая вязкость, зависящая от физической природы жидкости, ее агрегатного состояния и температуры, и практически не зависящая от давления.

Данный закон (1.1) описывает (по аналогии с законами Фурье и Фика для описания теплопроводности и диффузии) процесс переноса количества движения (импульса) *K*. Умножив обе части (1.1) на время *dt* и используя равенство изменения импульса тела *dK* и импульса силы, закон Ньютона представим виде:

$$dK = -\mu \frac{du}{dy} S dt .$$

Часто используется не динамическая, а кинематическая вязкость, представляющая собой отношение $\nu = \mu/\rho$. Кинематическая вязкость измеряется в м^2/с.

В отличие от жидкостей, кинематическая вязкость газов с ростом температуры растёт, хотя для динамической вязкости зависимость менее выражена. Также вязкость газов обратно пропорциональна давлению.

Величина du/dy характеризует изменение скорости в направлении нормали к ней, либо, если говорить об эпюре – темп изменения скорости. Иногда эту величину называют поперечным градиентом скорости.

Разделим правую и левую части формулы Ньютона (1.1) на *S*. Отношение F_{mp}/S есть не что иное, как касательное напряжение τ, т.е.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} .$$

Таким образом, можно сказать, что **вязкость жидкости – это способность ее оказывать сопротивление касательным напряжениям.**

Из выражения для силы Ньютона можно сделать еще один важный вывод. Если жидкость находится в состоянии покоя, то $u = 0$ и, следовательно, $\tau = 0$, т.е. в покоящейся жидкости силы вязкости не проявляются. Это согласуется и с обычными житейскими представлениями. Действительно, для того, чтобы ответить на вопрос о том, является ли вязкой среда, налитая в сосуд необходимо либо попытаться перелить ее в другой сосуд, либо, обмакнув в нее какой-то предмет, посмотреть как она стекает с него. Смысл этих действий в том, что мы интуитивно чувствуем, что требуется наблюдать движение этой среды.

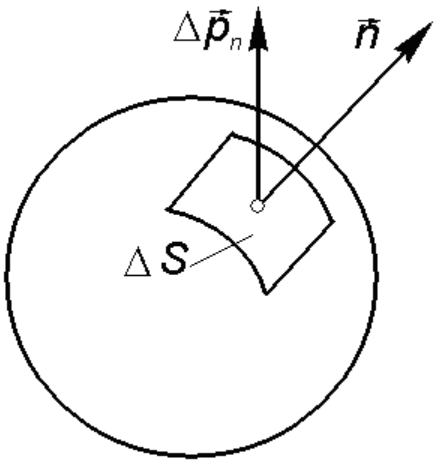
§ 1.5 Классификация сил.

Массовые силы. Массовыми называют силы, величина которых пропорциональна массе рассматриваемого элемента объема. Важнейшей особенностью является то, что они действуют на все частицы жидкости. В общем случае это силы, подчиняющиеся второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{f}$. В проекциях на декартовы оси координат можно записать: $F_x = mf_x$; $F_y = mf_y$; $F_z = mf_z$.

Таким образом, f_x, f_y и f_z есть проекции единичных массовых сил на соответствующие координатные оси, иногда их называют напряжениями массовых сил. Если в жидкости выделить элементарный объем *dV*, то его масса $dm = \rho dV$. В общем случае массовая сила, действующая на этот объем $\rho \vec{f}\, dV$, а главный вектор массовых сил, действующих на весь объем, представляется как $\iiint_V \rho \vec{f}\, dV$. Сила тяжести является массовой силой $F_x = g_x dm = g_x \rho dV$.

Поверхностные силы. В отличие от массовых, поверхностные силы действуют лишь на частицы, находящиеся на поверхности жидкого объема. Выделим на поверхности жидкого объема элементарную площадку ΔS, ориентация этой площадки в пространстве задается внешней нормалью $\vec{n}$. Обозначим через $\Delta\vec{p}_n$ поверхностную силу, приложенную к площадке ΔS. Предел отношения $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta\vec{p}_n}{\Delta S}=\vec{p}_n$ называют напряжением поверхностной силы.

Таким образом, во-первых, под действием внешних сил в жидкости возникают напряжения. И во-вторых, в общем случае $\vec{p}_n$ не является обычным вектором. Его величина зависит от ориентации площадки в пространстве. Это означает, что если через данную точку пространства провести одинаковые по величине, но различно ориентированные площадки, то действующие на них напряжения поверхностных сил будут различны.



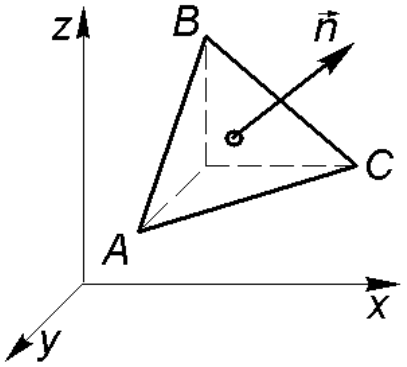
Физическая величина, характеризуемая в данной точке вектором $\vec{p}_n$, принимающим бесконечное множество значений в зависимости от ориентации площадки, называется тензором напряжений.

Таким образом, на площадку *dS* действует поверхностная сила $\vec{p}_n dS$, а на всю поверхность, ограничивающую объем *V*, сила $\iint\limits_S \vec{p}_n dS$.

Проекция $\vec{p}_n$ на направление нормали называется нормальным напряжением, а проекция на площадку действия – касательным напряжением.

Тензор напряжения.

В движущейся среде мысленно выделим частицу в форме жидкого тетраэдра. Пусть $\vec{n}$ – внешняя нормаль к четвертой (наклонной) грани тетраэдра, а площадь этой грани *dS*.

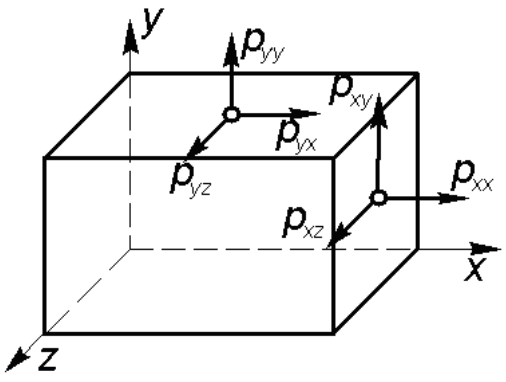


Площади других граней – соответственно dS_x, dS_y, dS_z, т.к. их можно рассматривать как проекции грани *ABC* на координатные оси. Следовательно, $dS_x = dS\cos(\vec{n},\vec{x}) = n_x dS$, где n_x обозначает направляющий косинус. Аналогично, $dS_y = n_y dS$, $dS_z = n_z dS$.

Напряжение $\vec{p}_n$ при произвольной ориентации нормали $\vec{n}$ может быть определено, если известны напряжения в той же точке для площадок, внешние нормали которых параллельны осям *Ox*, *Oy* и *Oz*: $\vec{p}_n = n_x\vec{p}_x + n_y\vec{p}_y + n_z\vec{p}_z$.

Проекции векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$ и $\vec{p}_z$ на координатные оси *x*, *y*, *z* обозначаются:

$$\begin{matrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{matrix}.$$



Первый подстрочный индекс указывает ось, перпендикулярную ориентации площадки, второй - ось, на которую спроектировано напряжение. Из рис. видно, что напряжения с одинаковыми индексами являются нормальными, а с разными – касательными. В проекциях на декартовые оси

координат можно расписать $\vec{p}_n$ как

$$p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}, \quad p_{ny} = n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy}, \quad p_{nz} = n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}.$$

Совокупность этих девяти составляющих компонентов напряжения образует **тензор напряжения**. В матричной форме он записывается в следующем виде:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{Vmatrix}.$$

В тензорном анализе доказывается, что тензор напряжений является симметричным. Это означает, что величины, расположенные симметрично главной диагонали, равны ($p_{yx} = p_{xy}$; $p_{xz} = p_{zx}$; $p_{zy} = p_{yz}$). Следовательно, для определения тензора напряжений достаточно знать не девять, а шесть скалярных величин.

Векторы напряжений $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$, не имеют объективного физического смысла, т.к. зависят от выбора системы координат. Поэтому такие величины причисляются к так называемым «квазивекторам», хотя к ним и можно применять все операции, применимые к физическим векторам.

Вязкость жидкости не проявляется, если жидкость находится в состоянии равновесия. В этом случае касательные компоненты тензора равны нулю и действуют лишь нормальные p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, ориентированные по внешним нормалям (они являются растягивающими напряжениями). Можно показать, что при отсутствии касательных напряжений $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$, из чего следует, что нормальные напряжения в данной точке не зависят от ориентации площадки. Величины, численно равные нормальным напряжениям, но взятые с противоположным знаком, в гидромеханике называют давлениями, либо более полно - гидростатическими давлениями. Гидростатическое давление обозначают буквой p, т.е.

$$p = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}.$$

Гидростатическое давление, являясь скалярной величиной (как компонента тензора) не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.

§ 1.6 Уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера).

В этой модели жидкость рассматривается как абсолютно несжимаемая среда, неспособная сопротивляться разрывающим усилиям и обладающая абсолютной подвижностью, т.е. лишенная вязкости. Последнее исключает возникновение в ней касательных напряжений.

Для вывода уравнения проанализируем движение жидкой частицы, масса которой ρdV и внешняя поверхность dS. В соответствии со 2 законом Ньютона уравнение движения должно иметь вид:

Масса ·ускорение = (результирующая массовых сил) + (результирующая поверхностных сил).

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \rho \vec{f}\, dV + \vec{p}_n dS.$$

Для всего движущегося объема (V), поверхность которого S, имеем

$$\iiint\limits_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \iiint\limits_V \rho \vec{f} dV + \iint\limits_S \vec{p}_n dS.$$

Используя формулу Остроградского-Гаусса $\iint\limits_S \vec{p}_n dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV$.

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получаем:

$$\iiint_V \left[\rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \rho \vec{f} - \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] dV = 0$$

Но так как объем V выбран произвольно и $dV \neq 0$, то

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right). \qquad (1.2)$$

Это и есть уравнение движения в напряжениях или уравнение Эйлера для движения идеальной жидкости.

В проекциях на декартовы оси координат можем записать:

$$\frac{du_x}{dt} = f_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{du_y}{dt} = f_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{du_z}{dt} = f_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right)$$

Эта система включает в качестве неизвестных девять величин: три проекции скорости и шесть проекций напряжений. Проекции единичных массовых сил, как правило, известны из постановки задачи.

При рассмотрении идеальной жидкости проекции напряжений $\tau_{ij}\big|_{i \neq j} = 0$, а $p = -p_{ii}$. Поэтому уравнение (1.2) в этом случае упрощается к виду

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} gradp .$$

Например, основной закон динамики для частицы идеальной жидкости в случае действия только силы тяжести имеет вид:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -gradp + \rho \vec{g} \quad \text{или} \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot grad\vec{u} \right) \right) = -gradp + \rho \vec{g} . \qquad (1.3)$$

В нестационарном потоке все величины ρ, u, p зависят от координаты r и времени t. В стационарном – только от координаты r.

Постоянные во времени (статические) напряжения и усилия, возникающие в жидкости (или газе), принципиально отличаются от напряжений в твердом теле тем, что напряжения в жидкостях и газах не имеют касательной составляющей. Статические внутренние усилия и напряжения в жидкости и газе всегда нормальны к .поверхности любого выделенного объема. Жидкости и газы в состоянии равновесия «не могут передавать» от одной части к другой касательных усилий. Трение покоя для жидкостей и газов равно нулю. Доказывается это положение целым рядом опытов. Простейший опыт — тело, плавающее в жидкости; тогда любая сила приложенная в горизонтальном направлении, вызовет движение тела. Из простых опытов следует, что в жидких и газообразных телах в состоянии равновесия могут возникать только нормальные напряжения, причем эти напряжения почти всегда (для газов всегда) сжимают выделенный объем. Поэтому напряжения в жидкостях и газах называются давлением. Следовательно, давление – это сила, которая действует на единицу площади поверхности выделенного объема и направлена нормально к поверхности.

2. СТАТИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА.

§ 2.1 Уравнение равновесия жидкости. Закон Паскаля.

Гидростатика (аэростатика) занимается изучением жидкости (газа), находящейся в состоянии относительного покоя. Под относительным покоем понимают состояние, при котором отсутствуют перемещения частиц относительно друг друга.

В основу статики жидкости и газа положены два условия:
– равенство нулю суммы всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу жидкости;
– равенство нулю суммы моментов этих сил относительно какой-то оси.

Уравнение равновесия жидкости. Может быть получено из уравнений движения идеальной жидкости (1.2), если положить в них $u_x = u_y = u_z = 0$. Кроме того, как было показано, в покоящейся жидкости касательные напряжения не проявляются, т.е. все производные по времени *t* равны нулю. И, наконец, нормальные напряжения заменяем давлением, что дает

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,\ f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \qquad (2.1)$$

В векторной форме эта система может быть записана в форме $\vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = 0$.

Основное уравнение гидростатики в дифференциальной форме.

Умножим каждое из уравнений, входящих в (2.1) на *dx*, *dy* и *dz,* соответственно, и просуммируем их,

$$\left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = 0.$$

Выражение, стоящее в скобках во втором члене уравнения, есть полный дифференциал давления – *dp*, поэтому можем записать

$$dp = \rho\left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right). \qquad (2.2)$$

Это уравнение называют **основным уравнением гидростатики в дифференциальной форме**. В левой части его полный дифференциал, поэтому и правая часть также должна быть полным дифференциалом. Следовательно, силы и плотность должны быть такими функциями *x*, *y* и *z*, чтобы они обращали правую часть (2.2) в полный дифференциал. Если этого не происходит, то равновесие жидкости невозможно. Другими словами, если жидкость находится в состоянии равновесия, то правая часть (2.2) является полным дифференциалом какой-то функции Ф. Считая плотность постоянной ($\rho = \text{const}$), можем записать

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = d\Phi$$

Из механики известно, что скалярное произведение силы на элементарное перемещение частицы называют элементарной работой. Силы, работа которых не зависит от пути движения, а только от начального и конечного положений, называют потенциальными. При этом для того, чтобы работа силы не зависела от пути движения, необходимо и достаточно, чтобы выражение для элементарной работы, было полным дифференциалом некоторой скалярной функции, называемой силовой. Взятая с противоположным знаком, она называется потенциалом. Таким образом, рассмотренную выше функцию можно назвать силовой функцией, а (2.2) представить как $dp = \rho d\Phi$.

Из чего следует, что несжимаемая жидкость может находиться в равновесии только под действием сил, имеющих потенциал.

Эквипотенциальные поверхности и поверхности равного давления.

Поверхности, в каждой точке которых $\Phi = \text{const}$, называют эквипотенциальными. Частным случаем эквипотенциальной поверхности является поверхность равного давления, т.е. поверхность, в каждой точке которой $p = \text{const}$. В этом случае $dp = 0$.

Если из массовых сил на жидкость действует только сила тяжести, то $f_x = f_y = 0$; $f_z = -g$ (знак минус, т.к. сила тяжести ориентирована в сторону, противоположную оси z); $-gdz = 0$ и $z = \text{const}$, т.е. в покоящейся жидкости любая горизонтальная плоскость есть поверхность равного давления.

Давление в жидкости и газе. Закон Паскаля.

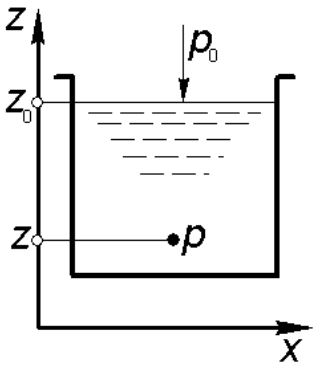
Давление при равновесии жидких и газообразных тел подчиняется **закону Паскаля**, который формулируется так: давление в любом месте покоящейся жидкости (или газа) одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью (или газом). При формулировке закона Паскаля не учитывается вес жидкости (или газа). Очевидно, что давление по горизонтали всегда будет одинаково, иначе не было бы равновесия. Отсюда следует, что свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Влияние веса жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости, определяется высотой (глубиной): $p = \rho_g gh$. Возрастание давления в жидкости с глубиной определяет выталкивающие силы (сила Архимеда), действующие на погруженные и плавающие на поверхности жидкости тела. То есть, если сила тяжести создает в покоящейся жидкости определенное давление (различное в различных точках), то приложенные поверхностные силы увеличивают давление в каждой точке на одну и ту же величину.

Распределением давления в жидкости объясняется «гидростатический парадокс» силой давления на дно сосуда. Сила давления на дно сосуда не равна весу жидкости в сосуде, она может быть больше веса жидкости, находящейся в сосуде, и меньше вследствие того, что давление на дно зависит только от высоты уровня и плотности жидкости.

Проинтегрируем основное уравнение гидростатики (2.2) в предположении, что $\rho = \text{const}$ (жидкость несжимаема) и считая, что из массовых сил действует только сила тяжести. В этом случае $dp = -\rho g dz$, и после интегрирования

$$p = -\rho g z + C,$$

где C – произвольная постоянная. После использования следующего граничного условия (см. рис.): при $z = z_0$ $p = p_0$ получим



$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z). \qquad (2.3)$$

Разность ($h = z_0 - z$) – глубина погружения рассматриваемой частицы жидкости, т.е. $p = p_0 + \rho g h$.

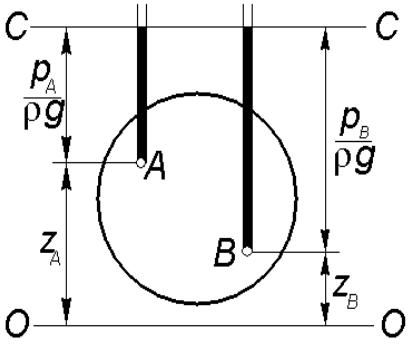
Полученное уравнение выражает известный из курса физики **закон Паскаля**: давление, приложенное к свободной поверхности, передается во все точки внутри жидкости без изменения.

Величину $\rho g h$ называют избыточным давлением. Она может быть как положительной , так и отрицательной. Основное уравнение гидростатики в интегральной форме гласит, что полное (абсолютное) давление в жидкости p равно сумме внешнего давления на жидкость (барометрического или атмосферного)и давления веса столба жидкости (избыточного), т.е.

$$p_{абс.} = p_{бар.} \pm p_{изб.}.$$

Отрицательное избыточное давление называют вакуумом.

Из уравнения (2.3) следует, что $p + \rho g z = p_0 + \rho g z_0$.



Представим герметично закрытый сосуд, заполненный жидкостью, находящейся под давлением. Выберем в этом сосуде две произвольно расположенные точки A и B и произвольно горизонтальную плоскость отсчета. Координаты частиц, расположенных в точках A и B будут z_A и z_B. Введем теперь через крышку сосуда в точки A и B сообщенные с атмосферой стеклянные трубки. Эти трубки называют **пьезомет-**

рами. Поскольку по условию жидкость находится под давлением, то она начнет подниматься по пьезометрам. Очевидно, что прекратится подъем тогда, когда высота столба жидкости уравновесит давление в рассматриваемой точке.

Так как $p + \rho g z = \text{const}$, т.е. для любых точек жидкости гидростатический напор одинаков. Следовательно, уровни в пьезометрах установятся на одной и той же высоте (плоскость *C-C*). Уравнение $p + \rho g z = \text{const}$ выражает гидростатический закон распределения давления.

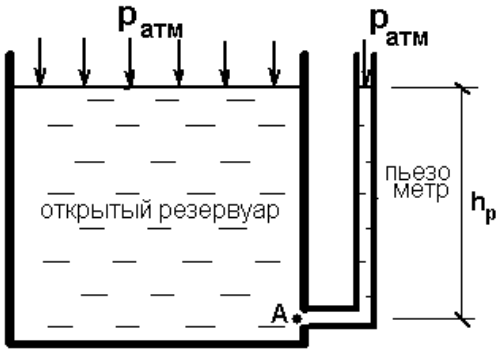
Два свойства гидростатического давления:

1. Давление в покоящейся жидкости на контакте с твёрдым телом вызывает напряжения, направленные перпендикулярно к поверхности раздела.

2. Давление в любой точке жидкости действует одинаково по всем направлениям. Это свойство отражает скалярность давления.

Приборы для измерения давления.

Давление в жидкости измеряется приборами: **пьезометрами**, **манометрами** и **вакуумметрами**. Пьезометры и манометры измеряют избыточное (манометрическое) давление, то есть они работают, если полное давление в жидкости превышает величину, равную одной атмосфере (p = 0.1 МПа). Эти приборы показывают долю давления сверх атмосферного. Для измерения в жидкости полного давления p необходимо к манометрическому давлению $p_{ман}$ прибавить атмосферное давление $p_{атм}$, снятое с барометра.



Пьезометр обычно представляет собой вертикальную стеклянную трубку, нижняя часть которой сообщается с исследуемой точкой в жидкости, где нужно измерить давление (например, точка А), а верхняя её часть открыта в атмосферу. Высота столба жидкости в пьезометре h_p является показанием этого прибора и позволяет измерять избыточное (манометрическое) давление в точке по соотношению $p_{изб} = \rho g h_p$, где h_p — пьезометрический напор (высота).

Упомянутые пьезометры применяются главным образом для лабораторных исследований. Их верхний предел измерения ограничен высотой до 5 м, однако их преимущество перед манометрами состоит в непосредственном измерении давления с помощью пьезометрической высоты столба жидкости без промежуточных передаточных механизмов.

Манометры чаще всего применяются механические, реже – жидкостные. Все манометры измеряют не полное давление, а избыточное $p_{ман} = p_{изб} = p - p_{атм}$.

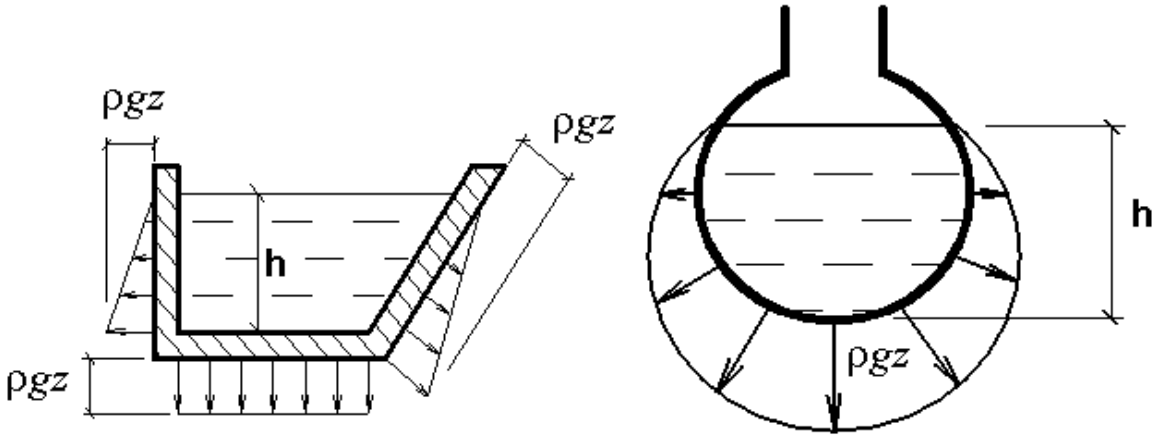
Преимуществами их перед пьезометрами являются более широкие пределы измерения, однако есть и недостаток: они требуют контроля их показаний. Нулевое показание любого манометра соответствует полному давлению, равному одной атмосфере.

Вакуумметр по своему внешнему виду напоминает манометр, а показывает он ту долю давления, которая дополняет полное давление в жидкости до величины одной атмосферы. Вакуум в жидкости – это не пустота, а такое состояние жидкости, когда полное давление в ней меньше атмосферного на величину $p_в$, которая измеряется вакуумметром. Вакуумметрическое давление $p_в$, показываемое прибором, связано с полным и атмосферным так $p_в = p_{атм} - p$.

Величина вакуума $p_в$ не может быть больше 1 *ат*, то есть предельное значение $p_в \approx 10^5$ *Па*, так как полное давление не может быть меньше абсолютного нуля.

§ 2.2 Эпюры давления жидкости. Сила Архимеда. Барометрическая формула.

Эпюры давления жидкости. Эпюра давления жидкости – это графическое изображение распределения давления жидкости по твёрдой поверхности, соприкасающейся с ней. Примеры эпюр для плоских и криволинейных поверхностей приведены на рис. Стрелками на эпюре показывают направление действия давления (вернее, направление нормальных напря-



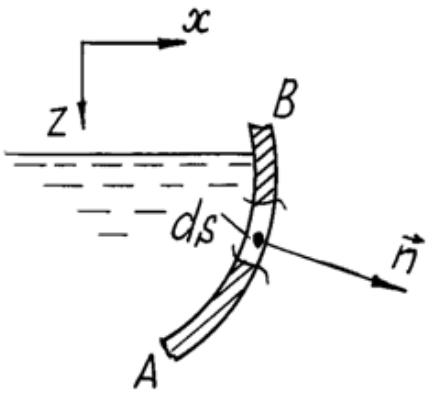
жений, возникающих от действия давления). Величина стрелки (ордината) откладывается в масштабе и количественно показывает величину давления.

Эпюры давления служат исходными данными для проведения расчётов на прочность и устойчивость конструкций, взаимодействующих с жидкостями. Расчёты ведутся методами сопротивления материалов и строительной механики.

В большинстве случаев строят эпюры избыточного давления вместо полного, а атмосферное не учитывают из-за его взаимного погашения с той и другой стороны ограждающей конструкции. При построении таких эпюр для плоских и криволинейных поверхностей используют линейную зависимость давления от глубины и 1-е свойство гидростатического давления.

Определение силы давления жидкости на поверхность тела. Сила Архимеда.

Рассмотрим криволинейную поверхность AB произвольной формы, площадь которой S. Выделим на ней элементарную площадку dS, пусть $\vec{n}$ – орт внешней нормали. Сила, действующая на эту площадку $d\vec{F} = p\,\vec{n}\,dS$, где p – гидростатическое давление в центре площадки. Обычно в технических приложениях интерес представляет лишь сила, возникающая от избыточного давления. Имея в виду, что $p = \rho g h$, получаем $d\vec{F} = \rho\, g\, h\, \vec{n}\, dS$.



На всю площадь действует сила $\vec{F} = \iint\limits_S \rho\, g\, h\, \vec{n}\, dS$.

Горизонтальная составляющая этой силы равна (можно показать) произведению вертикальной проекции стенки на гидростатическое давление в центре тяжести этой проекции S_x:

$$F_x = \rho\, g\, h_{цт.} S_X,$$

где $h_{цт.}$ – координата центра тяжести вертикальной проекции.

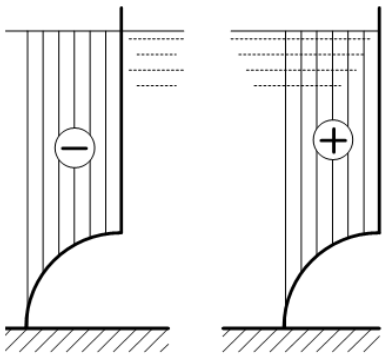
Вертикальную составляющую силы получим, используя формулу Гаусса-Остроградского

$$\iint\limits_S p\vec{n}\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{grad} p\, dV.$$

$$\vec{F} = \iint\limits_S \rho\, g\, h\, \vec{n}\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{grad}\left(\rho g h\right) dV$$

Из уравнения равновесия (1*) имеем $\rho\vec{a} = \operatorname{grad} p$, и т.к. $a = g$ (знак плюс, т.к. в данном случае ось z ориентирована вниз), то

$$F_z = \iiint\limits_V \rho g dV = \rho g \iiint\limits_V dV = \rho g V ,$$



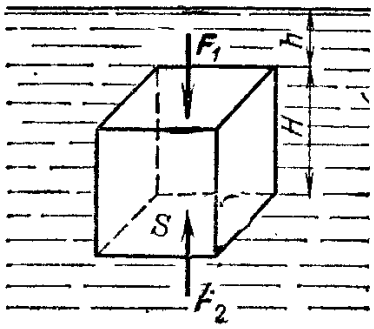
где V – объем тела давления. Таким образом, вертикальная составляющая равна весу жидкости, заключенному в объеме тела давления. Для нахождения этого объема следует использовать формальное правило: тело давления – это объем, образованный криволинейной стенкой, ее проекцией на свободную поверхность (либо на продолжение свободной поверхности) и вертикальными проектирующими плоскостями. На рис. показаны примеры определения тел давлений для двух случаев.

Как следует из рисунка, тело давления может быть как положительным, так и отрицательным (фиктивным).

В случае плоской поверхности ориентация нормали для всех ее точек остается одинаковой, и, следовательно, $\vec{F} = \rho g \vec{n} h_{цт.} S$.

Сила $\vec{F}$ направлена по нормали к стенке, поэтому можно записать $F = \rho g h_{цт.} S$.

Следовательно, сила давления на плоскую поверхность равна произведению ее площади на гидростатическое давление в центре тяжести этой поверхности.



Закон Архимеда. Равнодействующая сил давления жидкости составляется из сил давления на боковую поверхность параллелепипеда (для простоты) и на его основания. Силы, действующие на боковые грани взаимно уничтожаются, т.к. для противолежащих граней силы давления равны по модулю и противоположны по направлению. Давление на верхнее основание равно $\rho g h$, на нижнее основание – $\rho g(h + H)$. Таким образом, равнодействующая всех сил давления на поверхность параллелепипеда (**выталкивающая сила, сила Архимеда**) равна

$$F_A = \rho g \left(h + H\right) - \rho g h = \rho g H S = \rho g V_m ,$$

где V_m – объём жидкости, вытесненной телом. Направлена выталкивающая сила вверх.

Закон Архимеда: ***Тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость.***

Распределение давления в газе.

Давление в покоящемся газе будет возрастать книзу вследствие тяжести вышележащих верхних слоев. Очевидно, что давление одинаково в любой горизонтальной плоскости. Но при определении изменения давления по вертикали необходимо учесть изменение плотности (или удельного веса) в зависимости от давления:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right) \text{ или } p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right).$$

Это так называемая **барометрическая формула**, показывающая, что давление падает с высотой по показательному закону. Вывод основан на одновременном рассмотрении условия равновесия жидкости и уравнения состояния идеального газа, т.е.:

$$\frac{dp}{dz} = \rho g , \qquad p = \frac{\rho}{M} RT .$$

Искомый результат получается после интегрирования с учетом $p(z = 0) = p_0$ и $p_0 = \frac{\rho_0}{M} RT$.

3. КИНЕМАТИКА ДВИЖУЩЕГОСЯ ГАЗА ИЛИ ЖИДКОСТИ

§ 3.1 Уравнение неразрывности.

Кинематика занимается изучением движения жидкости, не интересуясь причинами, которые его вызвали. Принципиально можно пойти двумя путями.

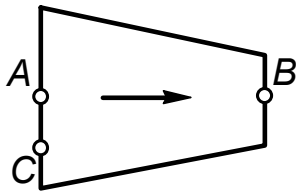
Метод Лагранжа. Изучается движение каждой отдельной жидкой частицы. Чтобы выделить ее, в начальный момент времени t_o отмечаются ее координаты x_o, y_o и z_o. Движение считается определенным, если в каждый момент времени для каждой частицы известны уравнения, описывающие ее путь во времени, т.е. известны параметрические уравнения траекторий всех частиц.

Метод Эйлера. Изучается изменение скорости и других параметров в точках пространства *x, y, z*.

Установившимся (стационарным) называют движение, при котором основные параметры потока (скорость, давление, плотность) в данной точке пространства не изменяются с течением времени, т.е. $\vec{u} = f(x,y,z);\ p = f(x,y,z),\ \rho = f(x,y,z)$.

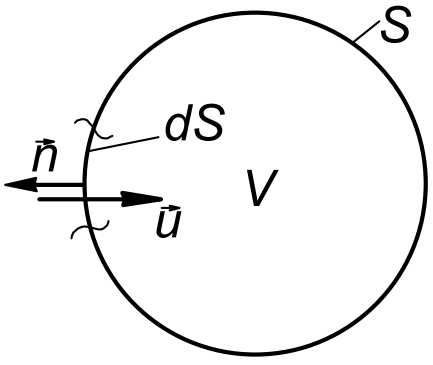
Если это условие не соблюдается и параметры в точке меняются с течением времени $\vec{u} = f(x,y,z,t),\ p = f(x,y,z,t), \rho = f(x,y,z,t)$ движение называют **неустановившимся (нестационарным).**

В этих формулировках следует обратить внимание на то, что речь идет о параметрах в точке. Чтобы уяснить это, рассмотрим канал, площадь сечения которого уменьшается по ходу потока (**конфузорами)**. Скорость течения по ходу канала будет возрастать. Установившемся движение в таком канале означает, что параметры течения в точках *A* и *B* не будут изменяться с течением времени.



Т.е вообще говоря, во всех точках пространства, занятого движущейся жидкостью, скорости частиц различны по величине и по направлению. Давление, под которым находятся движущиеся частицы, также различно, хотя оно закономерно связано с движением частиц. В движущемся газе меняется от места к месту его плотность, поскольку изменяется давление и изменяется температура и т. д.

Уравнение неразрывности либо сплошности выражает один из фундаментальных законов природы – закон сохранения массы применительно к жидкой среде.



Вывод. Рассмотрим объем *V*, ограниченный поверхностью *S*. Выделим элемент поверхности *dS*. Пусть $\vec{n}$ – орт внешней нормали, а $\vec{u}$ – вектор скорости. Через выделенный элемент *dS* в единицу времени внутрь объема проникает масса жидкости: $-\rho\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$. Знак «–», т.к. направления $\vec{u}$ и $\vec{n}$ противоположны). Секундная масса, проникающая в объем через всю поверхность $-\iint\limits_S \rho\vec{u}\cdot\vec{n}dS$.

С другой стороны, приток жидкости в объем приводит к изменению ее массы. При этом, поскольку выделенный объем является постоянным, изменение массы может происходить только за счет изменения ее плотности. Скорость изменения массы можно представить как $\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho dV$., или, если $V = \text{const}$, то $\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$.

Очевидно, что изменение массы внутри объема должно быть равно массе, поступившей в него извне, т.е. $\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\iint\limits_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS$.

Применяя преобразование Гаусса-Остроградского, получим: $\iiint\limits_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{u}\right) \right] dV = 0$.

Равенство нулю интеграла возможно лишь при условии $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{u}\right) = 0$.

Это и есть **уравнение неразрывности**. Поскольку при выводе его не делалось никаких ограничений, то оно справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося движений сжимаемой и несжимаемой жидкости.

Частные случаи. При установившемся движении все производные по времени равны нулю, что следует из самого определения этого понятия, поэтому $\operatorname{div}\left(\rho \vec{u}\right) = 0$.

Если движение установившееся и жидкость несжимаема, т.е. $\rho = \text{const}$, то $\operatorname{div} \vec{u} = 0$.

Либо в проекциях на декартовы оси координат $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$.

Установим физический смысл этого соотношения. Частные производные характеризуют скорость относительного удлинения (укорочения) жидкой частицы. Если этот процесс происходит одновременно вдоль всех координатных осей, то он приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Ясно, что если частица удлиняется вдоль осей *x* и *y*, то она должна укорачиваться относительно оси *z*. Другими словами, хотя бы одна из производных должна быть отрицательна, т.к. в противном случае соотношение не может быть равным нулю.

§3.2 Линии тока и траектории частиц жидкости или газа.

Анализ картины стационарного ламинарного течения значительно упростится, если мы разобьем текущую жидкость на достаточно тонкие трубки тока. Жидкость непрерывна, следовательно, и стенку трубки можно мыслить как сплошную, непроницаемую. Скорость частиц на стенках трубки касательная к поверхности трубки. Можно все пространство текущей жидкости разбить на такие трубки тока.

Частица жидкости, находящаяся в какой-то трубке, так и будет в ней оставаться в течение всего времени движения. Так как сечение трубки мы можем взять сколь угодно малым, то всегда можно считать, что скорость частиц жидкости одинакова в поперечном сечении трубки и направлена перпендикулярно к нормальному сечению трубки.

Линией тока называется кривая, обладающая тем свойством, что в данный момент времени векторы скоростей в любой ее точке совпадают по направлению с касательными. В векторной форме это условие может быть записано как $\left[\vec{u} \times d\vec{S} \right] = 0$.

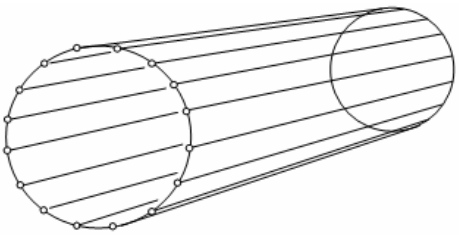
Или в виде определителя $\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$. Раскрывая определитель, получаем дифференциальное уравнение линии тока в виде $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$.

Под **траекторией** понимается след, оставленный движущейся частицей в пространстве.

Дифференциальное уравнение траектории $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt$.

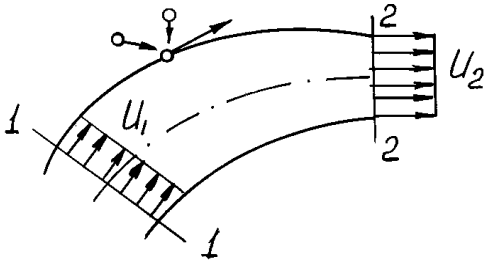
Из сопоставления следует, что в общем случае, т.е. при неустановившемся движении, линии тока и траектории не совпадают.

В движущейся жидкости наметим бесконечно малый замкнутый контур, и через все точки его периметра проведем линии тока. Образованная таким образом поверхность носит название **трубки либо поверхности тока**. Ясно также, что поскольку контур намечался в пространстве, занятом движущейся жидкостью, то какая-то часть ее должна находиться и внутри поверхности тока.



Струйная модель потока.

Струйная модель потока введена в рассмотрение Л.Эйлером. Основу этой модели составляет понятие о струйке (либо элементарной струйке), под которой понимают жидкость, протекающую внутри трубки тока. Если вспомнить, что границами боковой поверхности трубки тока являются линии тока, т.е. линии, к которым касателен вектор скорости частиц, которые в данный момент времени находятся в ней, то ясно, что ни одна частица не может проникнуть извне в струйку, либо, наоборот, выйти из нее через боковую поверхность.



Поперечное сечение струйки мало, поэтому можно допустить, что в пределах сечения все частицы движутся с одинаковыми скоростями либо, что то же, эпюра скоростей в сечении представляет собой цилиндр для трехмерной струйки либо прямоугольник - для плоской (двумерной). На рис. показаны эпюры для двух произвольно выбранных сечений плоской струйки. Заметим лишь, что равномерность распределения скоростей в сечении, т.е. движение всех частиц, находящихся в нем, с одной и той же скоростью, вовсе не означает, что в другом сечении эти скорости должны быть такими же, т.е., не обязательно, чтобы $u_1 = u_2$.

Уравнение неразрывности для струйки.

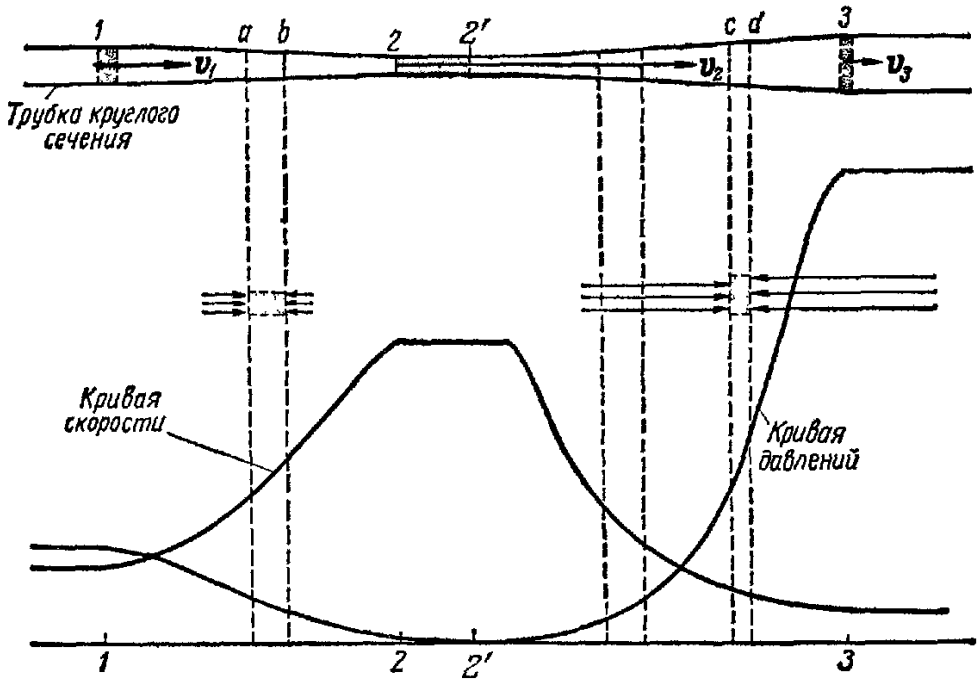
Первое свойство струйки, говорящее о том, что боковая поверхность непроницаема для частиц, по существу выражает закон сохранения массы в единицу времени. Действительно, если через сечение *1-1* в единицу времени вошла масса dm_1, то за то же время через сечение *2-2* должна выйти масса dm_2, равная dm_1. Массу жидкости, протекающую через поперечное сечение струйки в единицу времени называют элементарным массовым расходом и обозначают dQ_m. Заметим, что $dQ_m = \rho u dS$, где dS – площадь поперечного сечения струйки. Из сказанного выше следует уравнение неразрывности для струйки

$$\rho_1 u_1 dS_1 = \rho_2 u_2 dS_2 .$$

Если жидкость несжимаема, т.е. $\rho = \text{const}$, то $\rho_1 = \rho_2$ и $u_1 dS_1 = u_2 dS_2$. При этом произведение udS выражает элементарный объемный расход.

Если жидкость несжимаема, какой является, например, при обычных опытах вода, то плотность жидкости р остается постоянной, и поэтому на основании закона постоянства потока массы $\dot{m} = \rho v S = const$ скорость в любом сечении трубки обратно пропорциональна площади поперечного сечения. Таким образом, форма трубки определяет и скорость течения: скорость возрастает там, где трубки тока сужаются, и, наоборот, падает там, где они расширяются.

Совершенно очевидно, что если поперечное сечение трубки тока на данном участке постоянно, то и скорость частицы несжимаемой жидкости остается постоянной. Следовательно, частица на этом участке не имеет ускорения. Если трубка сужается вдоль потока (участок 1 – 2), то частица жидкости здесь ускоряется, скорость ее возрастает. Если же трубка расширяется (участок 2' – 3), то частица жидкости замедляется, скорость ее падает на этом участке. Какие силы сообщают частице ускорение, если трубка горизонтальна? Только силы давления со стороны соседних частиц; следовательно, в сужающейся трубке тока (участок 1 – 2)



давление должно падать в направлении течения, т. е давление сзади частицы (ab) должно быть больше, чем спереди, чтобы сообщить частице ускорение и обеспечить нарастание скорости. В расширяющейся трубке (участок 2' – 3), где скорость частицы уменьшается по течению, давление возрастает, частица (cd) имеет отрицательное ускорение, поэтому давление впереди каждой частицы должно быть больше, чем сзади. Таким образом, зная изменение сечения трубки тока несжимаемой жидкости, можно качественно определить, как будет меняться давление вдоль трубки.

§ 3.3 Ускорение частицы жидкости.

Запишем выражение для проекции ускорения жидкой частицы на какую-либо координатную ось, например, *x*. Имеем $a_x = \dfrac{du_x}{dt}$.

Проекция скорости u_x (как и две другие проекции) является функцией координат *x, y, z*, которые, в свою очередь, в общем случае зависят от времени *t*. Тогда

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}dt + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz$$

Имея в виду, что $\dfrac{dx}{dt} = u_x$, $\dfrac{dy}{dt} = u_y$ и $\dfrac{dz}{dt} = u_z$, получим

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Аналогичные соотношения можно записать и для двух других компонент.

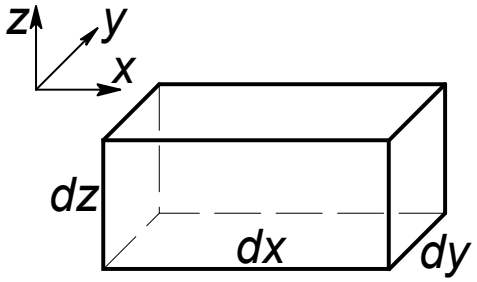
Выражение для ускорения носит название полной либо субстанциональной производной. Производная $\dfrac{\partial u_x}{\partial t}$ – проекция локального ускорения, которое характеризует изменение скорости во времени в данной точке пространства. Локальное ускорение обусловлено нестационарностью процесса. Если движение стационарное (установившееся), то локальное ускорение отсутствует, т.е. $\dfrac{\partial u_x}{\partial t} = 0$. Три остальных члена – проекции конвективного ускорения, ко-

торое возникает при переходе частицы от одной точки пространства к другой, оно обусловлено неравномерностью скоростного поля, т.е. неравномерным распределением скоростей.

§ 3.4 Анализ движения жидкой частицы. Первая теормема Гельмгольца.

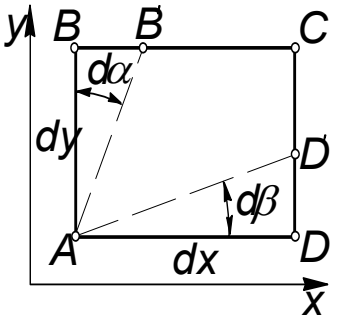
Движение жидкой частицы является более сложным, чем движение твердого тела, которое, как известно из механики, может быть поступательным и вращательным. Особенностью жидкости и ее частиц, как уже неоднократно отмечалось, является легкая деформируемость. Поэтому помимо поступательного и вращательного, жидкая частица может участвовать и в деформационном движении. Это положение и составляет суть так называемой **первой теоремы Гельмгольца**.

Рассмотрим жидкую частицу в форме прямоугольного параллелепипеда. Длина его ребер *dx, dy, dz*. Деформация такой жидкой частицы может быть как линейной (ребра удлиняются и укорачиваются), так и угловой (грани скашиваются). Удобней рассмотреть каждый из этих видов раздельно. Начнем с угловых деформаций.



Угловые деформации.

Из рис. следует, что угловая деформация (скашивание) может возникнуть из-за разности скоростей, перпендикулярных ребрам. Для упрощения целесообразно ограничиться лишь одной гранью.



Пусть компоненты скорости в точке A равны u_x, u_y, u_z. Найдем скорости в точке B, считая, что движение установившееся и, следовательно, все производные по t равны нулю. Приращение компоненты скорости при переходе из одной точки пространства в другую можно представить как $u+du$. Так для проекции u_x можем записать $u_x + du_x$, где

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz .$$

Аналогичные выражения можно записать и для других проекций.

Рассмотрим приращение u_x при переходе от т. A к т. B. В этом случае $dx = dz = 0$, т.е.

$$u_{x_{(B)}} = u_{x_{(A)}} + du_x = u_{x_{(A)}} + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy .$$

Предположим, что за время dt за счет разности скоростей в точках A и B ребро займет положение AB'.

Аналогично рассуждая относительно скорости u_y в точках A и D получим:

Точка A: u_y (по условию) Точка D: $u_{y_{(D)}} = u_{y_{(A)}} + \frac{\partial u_y}{\partial x}dx .$

За счет разности этих скоростей точка D займет позицию D'.

Путь, проходимый точкой B за время dt в положение B', определяет величину скашивания, которую можно найти как $BB' = \frac{\partial u_x}{\partial y}dydt$.

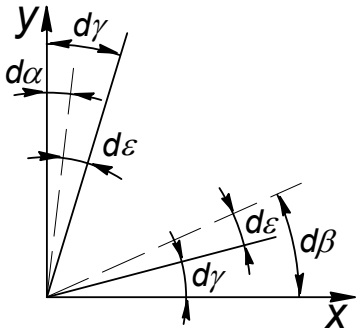
Угловая деформация характеризуется тангенсом угла $d\alpha$. При этом

$$\mathrm{tg}(d\alpha) = \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial y}dt \approx d\alpha$$ (имея в виду, что $AB = dy$ и малость угла $d\alpha$).

Аналогично, $\mathrm{tg}(d\beta) = \frac{DD'}{AD} = \frac{\partial u_y}{\partial x}dt \approx d\beta$.

Полное скашивание первоначально прямого угла A определяется как сумма

$$d\alpha + d\beta = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dt .$$



Здесь следует обратить внимание на одно весьма существенное обстоятельство: рассматриваемое перемещение ребер вызвано не только деформацией, но и вращением частицы. Действительно, если бы грань только деформировалась без вращения, то ребра повернулись бы на одинаковый угол навстречу друг другу. Наоборот, если бы происходило только вращение, то ребра поворачивались бы на одинаковый угол в направлении вращения. Следовательно, в общем случае движение элемента можно рассматривать как сумму деформационного и вращательного движений, и таким образом определить $d\alpha$ и $d\beta$. Рассмотрим деформацию прямого угла A, считая, что вращение происходит против часовой стрелки. Чисто деформационное движение будем характеризовать углами $d\gamma$, а чисто вращательное – $d\varepsilon$.

Из рис. следует, что $d\alpha = d\gamma - d\varepsilon$ и $d\beta = d\gamma + d\varepsilon$.

либо $d\gamma = \frac{1}{2}(d\alpha + d\beta)$ и $d\varepsilon = \frac{1}{2}(d\beta - d\alpha)$.

Таким образом, деформация характеризуется полусуммой углов, а вращение – полуразностью. Таким образом, можем записать:

$$d\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dt$$

Скорость угловой деформации, происходящей вокруг оси z

$$\gamma_z = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

И по аналогии вокруг осей y и z: $\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$ и $\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$.

Выражение $\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega$ есть угловая скорость вращения жидкой частицы. Проекции угловых скоростей $\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$, $\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$, $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$.

Эти соотношения играют исключительно важную роль в механике жидкости. Они устанавливают связь между угловой и поступательной скоростями жидкой частицы. Вопрос о знаках чисто условный. В механике жидкости и газов поворот против часовой стрелки считается положительным, по часовой – отрицательным.

В векторной форме выражение для угловой скорости может быть записано как

$$\vec{\omega} = \vec{e}_x \omega_x + \vec{e}_y \omega_y + \vec{e}_z \omega_z .$$

или после замены: $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\vec{e}_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]$.

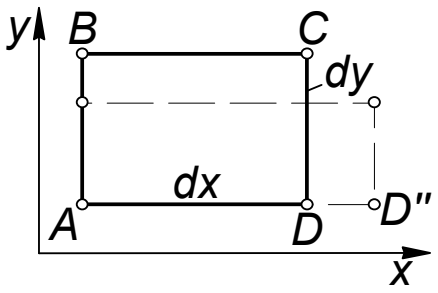
В векторной форме $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u}$ или $\operatorname{rot}\vec{u} = 2\vec{\omega}$.

Эта формула раскрывает гидромеханический смысл вихря (ротора) векторного поля. Если $\vec{u}$ характеризует поле мгновенных скоростей, то векторное поле $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ представляет собой поле удвоенных угловых скоростей частиц жидкости этого поля.

Движение, при котором $\mathrm{rot}\,\vec{u} \neq 0$ называют вихревым, при $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$ – безвихревым либо потенциальным. Из чего следует, что если течение вихревое, то движение жидких частиц происходит с вращением.

Линейные деформации.

Линейные деформации частицы могут возникнуть в результате различия в скоростях, совпадающих с направлением ребер. Компоненты скорости в точке $A-$ u_x, u_y, u_z.



Вдоль оси x: точка A: $u_{x_{(A)}}$.

Точка D: $u_{x_{(D)}} = u_{x_{(A)}} + \dfrac{\partial u_x}{\partial x} dx$.

Разность скоростей, вызывающая удлинение ребра AD: $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} dx$. Удлинение частицы DD' за время dt $DD' = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} dx dt$.

Относительное удлинение $\dfrac{DD'}{AD} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} dt = d\varepsilon_x$.

Скорость относительного удлинения $\dfrac{d\varepsilon_x}{dt} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x$.

Аналогично для других осей $\varepsilon_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial y}$; $\varepsilon_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$.

Если процесс происходит одновременно вдоль всех осей, то это приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Таким образом, объемная деформация сводится к изменению первоначального объема параллелепипеда $dV = dxdydz$ на величину $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$ за счет растяжения либо сжатия ребер. При этом $\delta V_x = DD'dydz$, или $\delta V_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} dVdt$. Аналогично $\delta V_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial y} dVdt$ и $\delta V_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} dVdt$. Таким образом

$$\delta V = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dVdt .$$

Скоростью относительной объемной деформации назовем отношение изменения объема к его первоначальному объему и скорости деформации, т.е.

$$\frac{\delta V}{dV\,dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \mathrm{div}\,\vec{u} .$$

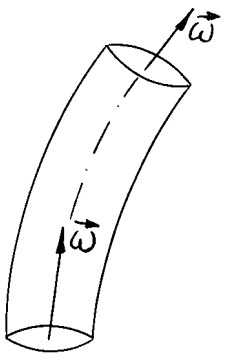
Если $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, то это означает, что $\delta V = 0$, т.е. деформация жидкой частицы происходит без изменения ее объема. В этом и заключается гидромеханический смысл равенства нулю дивергенции.

§ 3.5 Кинематика вихревого движения. Интенсивность вихря. Циркуляция скорости.

Вихревое движение широко распространено как в природе, так и в разного рода технических устройствах. Поэтому изучение его закономерностей представляет несомненный практический интерес. Вращательное движение жидких частиц характеризуется вихрем скорости

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u}\ .$$

Это означает, что в каждой точке пространства вращение жидких частиц может быть охарактеризовано этим вектором. Его модуль $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$.



Кинематические понятия для вихревого движения можно получить по аналогии с общими понятиями кинематики. В основу кинематики вихревого движения положено представление о вихревой линии, которое аналогично понятию линии тока. Вихревой называется линия, в каждой точке которой в данный момент времени вектор вихря скорости совпадает с касательной. Другими словами, вихревая линия - это мгновенная ось вращения частиц жидкости, которые в данный момент времени расположены на ней. По аналогии с дифференциальным уравнением линии тока можно записать $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$.

Вихревая трубка – аналог трубки (поверхности) тока. Это поверхность, образованная вихревыми линиями, проведенными через все точки бесконечно малого замкнутого контура. Вихревая нить – аналог струйки – это жидкость, заключенная в вихревой трубке. Если вихревая трубка имеет конечные размеры, то частицы, заполняющие ее и находящиеся во вращательном движении, образуют вихревой шнур.

Интенсивность вихря.

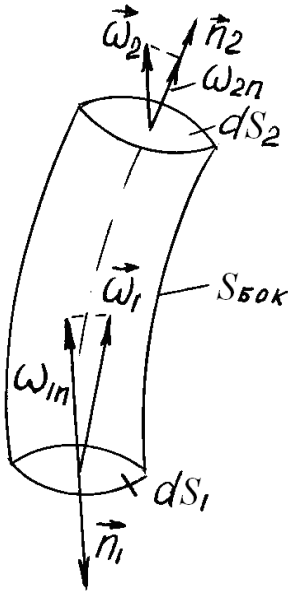
Понятие интенсивности вихря достаточно абстрактно и вводится чисто математически. Интенсивность вихря – это поток вектора вихря $i = \iint\limits_A \operatorname{rot}\vec{u}\cdot\vec{n}dA$.

Имея в виду, что $\operatorname{rot}\vec{u} = 2\vec{\omega}$, можем записать $i = 2\iint\limits_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}dS = 2\iint\limits_S \omega_n dS$, где $(\vec{\omega}\cdot\vec{n}) = \omega_n$.

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского и перейдем от интеграла по поверхности к интегралу по объему. Имеем:

$$i = 2\iint\limits_A \omega_n dA = 2\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{\omega}\,dV = 2\iiint\limits_V \left(\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right)dV$$

Так, как $\operatorname{rot}\vec{u} = 2\vec{\omega}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{u}) = 0$, то можно записать $i = \iint\limits_S \omega_n dS = 0$.



Применим это выражение к вихревому шнуру. На боковой поверхности $\omega_n \equiv 0$, так как $\vec{\omega}$ направлен по касательной к поверхности. Поэтому можем записать

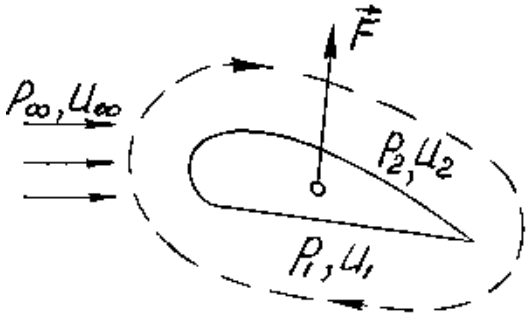
$$-\iint\limits_{S_1} \omega_{n1} dS_1 + \iint\limits_{S_2} \omega_{n2} dS_2 = 0\ .$$

Если допустить, что в пределах сечения $\omega_n = \text{const}$, то $\omega_{n1}S_1 = \omega_{n2}S_2 = const$. Т.е. это своеобразное «уравнение неразрывности». Полученный результат носит название **теоремы Гельмгольца о вихрях**, которую можно сформулировать следующим образом: **интенсивность вихревого шнура на всей его протяженности остается постоянной**. Так как произведение ωS остается неизменным, то уменьшение площади сечения шнура должно приводить к увеличению угловой скорости вращения частиц. При $S = 0$ $\omega = \infty$, что физически невозможно. Следовательно, вихрь не может зарождаться либо оканчиваться в толще жидкости. Окончательно развившись, он должен замкнуться либо на твердую поверхность, либо сам на себя, т.е. образовать вихревое кольцо.

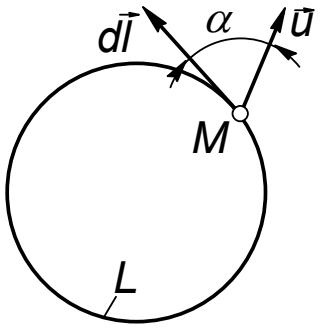
Понятие об интенсивности является весьма важным, но, к сожалению, непосредственное определение этой величины экспериментальным путем связано с непреодолимыми трудностями. Кроме того, если пытаться распространить это понятие на вихри конечных размеров, то по аналогии со средней скоростью пришлось бы вводить понятие о средней угловой скорости, что связано с определенными трудностями чисто математического характера. Поэтому гидромеханика избрала другой путь, заменив это понятие другим, более удобным для целей практики – циркуляцией скорости.

Циркуляция скорости.

Рассмотрим крыловой профиль, находящийся в потоке газа (воздуха). Как известно, на профиль в этом случае будет действовать подъемная сила. Физически наличие этой силы можно объяснить лишь тем, что давление под профилем (p_1) больше, а давление ад профилем (p_2) меньше, чем давление на каком-то удалении от него, которое мы обозначим p_∞. Это позволяет утверждать, что под крыловым профилем скорость $u_1 < u_\infty$, а над ним $u_2 > u_\infty$. В данном случае u_∞ – скорость невозмущенного потока. Под профилем $u_1 < u_\infty$, и он направлен против скорости u_∞, над профилем – наоборот. В результате появляется циркуляционный поток, направленный по часовой стрелке.



Для количественного описания этого потока вводят понятие циркуляции скорости по замкнутому контуру. Рассмотрим замкнутый контур *C*. Пусть в произвольной точке *M* скорость равна $\vec{u}$. Циркуляцией скорости называют контурный интеграл вида $\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$, где $d\vec{l}$ – направленный элемент дуги.



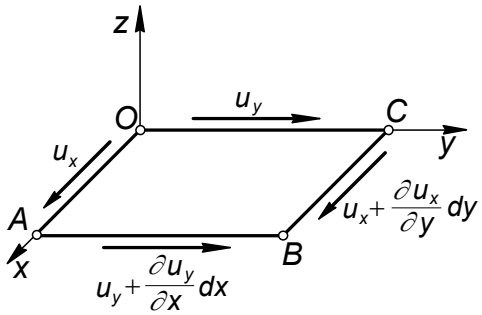
Имея в виду, что $\vec{u}\left(u_x, u_y, u_z\right)$ и $d\vec{l}\left(dx, dy, dz\right)$, по правилу скалярного произведения получим $\Gamma = \oint \left(u_x dx + u_y dy + u_z dz\right)$.

Для плоского течения: $\Gamma = \oint \left(u_x dx + u_y dy\right)$

Понятие циркуляции является более удобным, чем интенсивность вихря. Действительно, для определения циркуляции достаточно знать проекции скорости, нахождение которых не связано с существенными трудностями. Связь между циркуляцией и интенсивностью вихря определяет теорема Стокса.

Теорема Стокса.

В движущейся жидкости рассматриваем вихревое поле и выделяем в нем малый замкнутый контур со сторонами *dx* и *dy*. Пусть в начале координат скорости будут u_x и u_y. Запишем выражение для элементарной циркуляции по этому контуру, имея в виду, что поток двумерный: $d\Gamma = u_x dx + u_y dy$.



Рассмотрим контур *OABC*. Если вдоль *OA* скорость u_x, то вдоль *CB* ее приращение составит $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy$, и аналогично вдоль *AB* – $\frac{\partial u_y}{\partial x} dx$. Это следует из выражения для полного дифференциала скорости, например, $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$.

Запишем теперь выражение для элементарной циркуляции вдоль контура *OABCO*. Имеем: $d\Gamma = u_x dx + \left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) dx - u_y dy$.

Раскрывая скобки и выполнив сокращения, получаем $d\Gamma = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dxdy = 2\omega_z dS$.

Из чего следует, что циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру равна интенсивности вихря, пронизывающего этот контур.

Этот вывод легко обобщить и на случай произвольной кривой конечных размеров. Таким образом, можем записать $\Gamma = 2\iint\limits_S \omega_n dS = i$.

Это и есть формула Стокса, показывающая, что циркуляция по произвольному контуру равна сумме интенсивностей (напряжений) вихрей, пронизывающих поверхность, натянутую на контур.

§ 3.6 Кинематика потенциального движения жидкости. Потенциал скорости. Функция тока.

Условием потенциальности движения является равенство нулю вихря скорости $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$. Физически это означает, что движение жидкости происходит без вращения частиц.

Потенциал скорости.

Сущность теоремы Стокса, по существу, сводится к утверждению о равенстве числовых значений интенсивности вихря и циркуляции, т.е. $i = \Gamma$, либо $i = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \Gamma$.

С другой стороны, для потенциального потока по его определению $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$, т.е. в потенциальном поле циркуляция по замкнутому контуру равна нулю.

Отсюда следует, что для безвихревого (потенциального) движения $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Следовательно, в этом случае (из определения ω) $\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}$, $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$.

Эти соотношения позволяют существенным образом упростить вычисления компонент скорости u_x, u_y и u_z.

Рассмотрим выражение $u_x dx + u_y dy + u_z dz$ (а). Это выражение является ***полным дифференциалом*** (известно из математического анализа), если обеспечивается ***равенство накрест взятых производных***. Таким образом, при потенциальном движении выражение (а) является полным дифференциалом какой-то функции φ, и $d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz$

С другой стороны, по общему правилу полный дифференциал может быть представлен как

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz .$$

Сопоставляя имеющие выражения, получаем $u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Или в векторной форме $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$. Это означает, что вектор скорости можно рассматривать как градиент какой-то скалярной функции φ. По предложению Гельмгольца функцию φ называют потенциалом скорости.

Таким образом, всякому движению жидкости, происходящему без вращения частиц, соответствует свой потенциал скорости. Справедливо и обратное утверждение: если существует потенциал скорости, то движение происходит без вращения частиц.

Какая цель введения понятия о потенциале скорости? Следует иметь в виду, что к числу центральных задач гидромеханики относится определение сил, действующих на тела, обте-

каемые потоками жидкости либо газа. Решение этих задач непосредственно связано с необходимостью расчета поля скоростей, т.е. определением проекций скоростей (u_x, u_y, u_z) в каждой его точке. Все три компоненты скорости могут быть определены, если известна лишь одна величина – потенциал скорости. Таким образом, знание потенциала скорости существенно упрощает расчет поля.

Уравнение Лапласа.

Операция дивергенции над градиентом скалярной функции приводит к оператору Лапласа. Если в качестве скалярной функции использовать потенциал скорости, то можно записать

$$\text{div grad}\,\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Для несжимаемой жидкости $\text{div}\,\vec{u} = 0$, а $\text{grad}\,\varphi = \vec{u}$. Таким образом, получаем уравнение Лапласа $\text{div grad}\,\varphi = 0$.

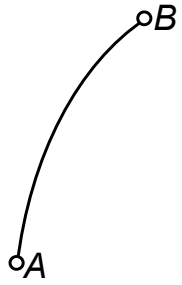
Таким образом, для нахождения потенциала скорости необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа. Любая функция, удовлетворяющая этому уравнению, носит название гармонической. Следовательно, потенциал скорости является гармонической функцией. Как любое дифференциальное уравнение, уравнение Лапласа имеет бесчисленное множество решений, поэтому для того, чтобы однозначно определить потенциал скорости, необходимо задать граничные условия. Для задач, связанных с обтеканием тел, так называемых внешних задач гидромеханики, такими условиями являются $u_n = 0$ и $u = u_\infty$.

Первое условие характеризует безотрывность течения (равенство нулю нормальной компоненты скорости). Второе – показывает, что вдали от тела распределение скоростей известно.

Поверхности (либо линии для двумерных потоков), в каждой точке которых $\varphi = \text{const}$, называются эквипотенциальными.

Циркуляция скорости в потенциальном поле.

Рассмотрим плоский (двумерный) поток. Выделим в нем произвольную кривую и запишем выражение для циркуляции вдоль этой кривой



$$\Gamma = \int_A^B u_x dx + u_y dy = \int_A^B \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = \int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B,$$

т.е. циркуляция вдоль кривой не зависит от ее формы, а определяется лишь разностью потенциалов в ее конечных точках. Если кривая замкнута, то очевидно, что $\varphi_B = \varphi_A$ и $\Gamma = 0$, т.е. циркуляция по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю.

Функция тока плоского течения.

Рассмотрим двумерный поток и ограничимся несжимаемой жидкостью. Дифференциальное уравнение линии тока имеет вид $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$, или $u_x dy - u_y dx = 0$.

Чтобы это выражение являлось полным дифференциалом какой-то скалярной функции

$$d\psi = u_x dy - u_y dx,$$

необходимо и достаточно равенство взятых накрест производных: $\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y}$.

Это есть не что иное, как уравнение неразрывности для этого случая $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$.

Функция ψ носит название функции тока. Т.к. $d\psi$ является полным дифференциалом, то можно записать: $u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$; $u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$.

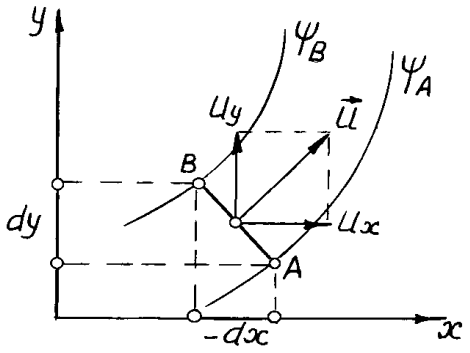
Если функция тока течения известна, то можно определить компоненты скорости в любой точке пространства. Если частица движется вдоль линии тока, то функция тока остается постоянной.

Для плоского потенциального течения $\omega_z = 0$, но $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0$, откуда $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$. И, следовательно, $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$ или $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$.

Таким образом, функция тока, как и потенциал скорости, является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет ли она уравнению Лапласа. И еще одно важное обстоятельство. Если потенциал скорости существует только в потенциальном потоке, то функция тока этим условием не ограничена. Это объясняется тем, что уравнение неразрывности, которое используется для получения этого понятия, справедливо как для вихревого, так и для безвихревого движений.

Гидромеханический смысл функции тока.

Установим гидромеханический смысл функции тока, для чего проведем две достаточно близко расположенные линии тока. Вычислим объемный расход жидкости, протекающий между ними, для чего разложим вектор скорости частицы $\vec{u}$ на две составляющие u_x и u_y, что позволит представить расход как сумму $dQ = dQ_x + dQ_y$, при этом $dQ_x = u_x dy$ и $dQ_y = -u_y dx$. Тоесть $dQ = u_x dy - u_y dx$.



$$Q = \int_A^B \left(u_x dy - u_y dx\right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$$

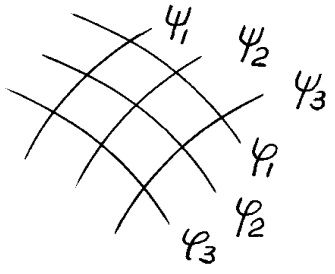
т.е. разность значений функций тока на двух смежных линиях тока равна объемному расходу между ними.

Связь потенциала скорости и функции тока.

Связь между этими параметрами может быть легко установлена, если записать полученные выше выражения для проекций скоростей через потенциал скорости и функцию тока и сравнить их: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Эти соотношения играют чрезвычайно важную роль в механике жидкости и носят название ***соотношений Коши-Римана***. Перемножим их, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$



Из математики известно, что выражения такого типа свидетельствуют о взаимной ортогональности кривых. Следовательно, линии тока и эквипотенциальные линии образуют сетку взаимно ортогональных кривых, которая носит название гидродинамической сетки движения. Примерный ее вид показан на рис.

§ 3.7 Методы расчета потенциальных потоков.

Как уже отмечалось, для нахождения потенциала скорости необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа при заданных граничных условиях. Задача эта достаточно сложна. Поэтому в теории потенциальных течений особый интерес представляют случаи, которые дают точные значения функций тока и потенциала скорости без интегрирования уравнения Лапласа. Общая идея такого подхода сводится к следующему: задаются какой-то функцией, кото-

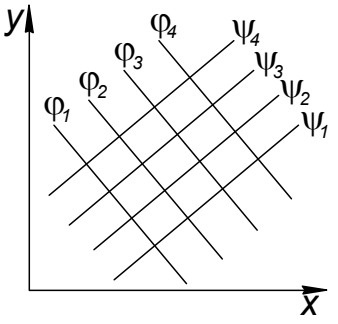
рая заведомо удовлетворяет уравнению Лапласа и выясняют, что представляет собой гидродинамическая сетка движения. Эту методику рассмотрим на ряде простейших примеров.

Пример 1. Пусть выражение для потенциала скорости имеет вид $\varphi = a + by$, где a и b – действительные числа. Найдем компоненты скорости. Имеем

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \quad \text{и} \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b .$$

Вторые производные равны нулю, т.е. уравнение Лапласа удовлетворяется. Так как $u_x = a$ и $u_y = b$, то из этого следует, что поток движется с постоянной скоростью

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{a^2 + b^2} .$$



Выясним, что представляют собой линии тока. Дифференциальное уравнение линий тока

$$d\psi = u_x dy - u_y dx = a dy - b dx .$$

И после интегрирования $\psi = ay - bx$ (а).

Приравнивая (а) какой-то постоянной, получаем семейство линий тока – параллельных прямых, наклоненных к оси под углом $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Действительно, для линии тока можем записать:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{b}{a} .$$

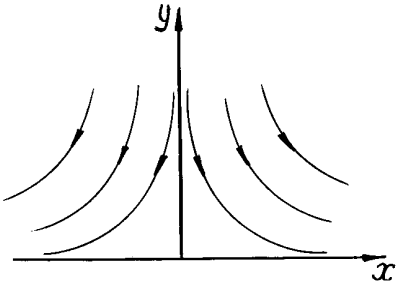
Пример 2. Потенциал скорости задан выражением $\varphi = a\left(x^2 - y^2\right)$, где a – действительное число. Необходимо найти линии тока этого течения.

Функция φ уравнению Лапласа, т.к. $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a$; $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2a$.

Выясним, какое же движение описывается этой функцией, для чего установим вид функции тока

$$d\psi = u_x dy - u_y dx = 2axdy + 2aydx = 2a\left(xdy + ydx\right) = 2ad\left(xy\right)$$

.

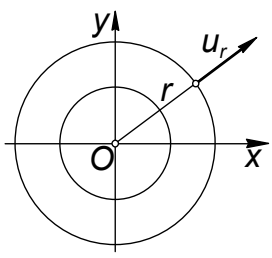


Следовательно, $\psi = \int 2ad\left(xy\right) = 2axy$ (произвольная постоянная в данном случае нас не интересует).

Для нахождения линии тока приравняем ψ какой-то постоянной величине $2axy = \text{const}$ либо $xy = \text{const}$. Следовательно, линии тока – гиперболы, для которых оси x и y – асимптоты. Если считать, что оси координат являются твердыми стенками, то получим картину обтекания потоком прямого угла.

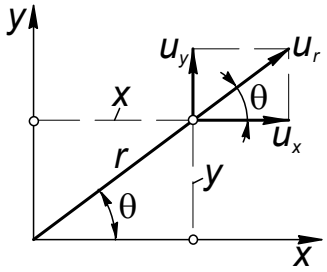
Существует ряд простейших течений, для которых потенциалы скорости могут быть получены аналитическим путем. Эти течения играют заметную роль в гидромеханике, и поэтому их рассмотрение представляет несомненный интерес.

Пример 3. Источник (сток) на плоскости. Ограничимся плоской задачей. Под источником (стоком) на плоскости понимают точку, из которой происходит истечение (либо втекание) жидкости. Пусть точка O представляет плоский источник, из которого, как из центра, проведем несколько концентрических окружностей. Запишем уравнение неразрывности для цилиндрической поверхности единичной высоты: $Q = 2\pi r u_r$, откуда $u_r = \frac{Q}{2\pi r}$.



В декартовой системе координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

В рассматриваемом случае удобней использовать цилиндрическую систему координат. Увязка систем может быть получена, исходя из рис. Для цилиндрической системы $u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}$; $u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$.



Видно, что u_r не зависит от полярного угла. Приравнивая полученные выражения, получим $\frac{Q}{2\pi r} = \frac{d\varphi}{dr}$, откуда $d\varphi = \frac{Q}{2\pi}\frac{dr}{r}$.

И после интегрирования $\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r$.

Отсюда следует, что эквипотенциальные линии источника представляют собой окружности, т.к. потенциал скорости можно записать и в следующей форме $\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Для нахождения функции тока удобней использовать декартову систему координат. При этом: $u_r = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

С другой стороны, $u_x = u_r \cos\theta = u_r\, x/r$, $u_x = u_r \cos\theta = u_r\, x/r$.

Таким образом, $u_x = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{r^2} = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Аналогично $u_y = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

Дифференциальное уравнение функции тока $d\psi = u_x dy - u_y dx$.

Подстановка значений u_x и u_y дает $d\psi = \frac{Q}{2\pi}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

Заметим, что $xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$.

Таким образом, $d\psi = \frac{Q}{2\pi}\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ и $\psi = \frac{Q}{2\pi}\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Но с другой стороны $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$, т.е. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\theta\right) = \theta$, и $\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta$.

В полярной системе координат $\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta$ представляет собой семейство прямых, проходящих через начало координат. Для стока потенциал скорости и функция тока имеют те же выражения, но с противоположными знаками, т.е. $\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\ln r$ и $\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta$.

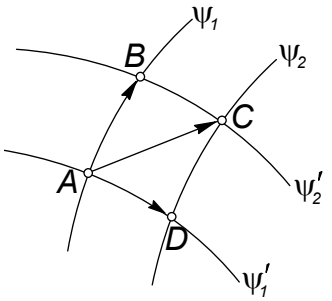
Иногда *Q* называют мощностью (обильностью) источника.

Наложение потенциальных потоков.

Предположим, что имеются два потока с известными потенциалами скорости φ_1 и φ_2, удовлетворяющими уравнению Лапласа. Из теории линейных дифференциальных уравнений, к которым принадлежит и уравнение Лапласа, известно, что сумма частных решений этих уравнений также является их решением. Другими словами, это означает, что потенциал φ, образованный как $\varphi_1 + \varphi_2$, также будет удовлетворять уравнению Лапласа, т.е. будет описывать какой-то новый поток, имеющий потенциал φ. Из этого следует, что можно получить новый поток путем сложения (наложения) уже известных. Следует обратить внимание на то,

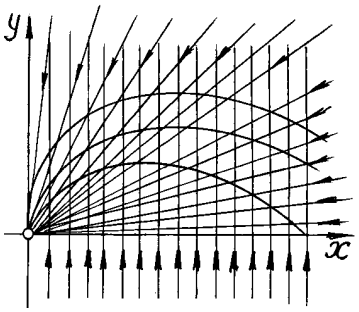
что собственно наложение потоков здесь не производится, а речь идет о сложении потенциалов скорости уже известных течений.

Скорость в каждой точке нового потока является суммой скоростей первоначальных потоков. Задача нахождения нового течения может быть решена как графически, так и аналитически.



Рассмотрим сначала графический метод. Общий подход сводится к следующему. Необходимо построить линии тока течений в одинаковом масштабе, что при достаточной густоте линий тока при пересечении дает фигуру, близкую к параллелограмму.

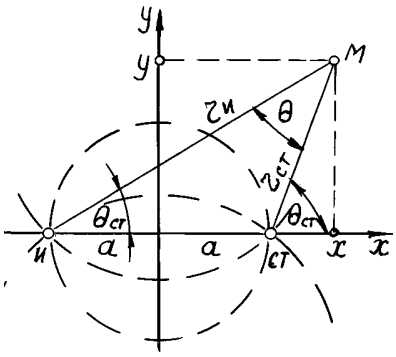
Отрезки *AB* и *AD* в каком-то масштабе представляют скорости течения, их результирующая определяется как диагональ параллелограмма (*AC*). Для построения такой сетки необходимо соблюсти следующее условие: расход между соседними линиями тока обоих течений должен быть одинаков.



В качестве примера рассмотрим картину течения, образующуюся при наложении плоского параллельного потока на сток. Частицы жидкости в новом течении будут двигаться по кривым, направленным к стоку.

Задача, как отмечалось выше, может быть решена и аналитически. В этом случае должны быть известны φ и ψ обоих течений.

Пример 4. Выполним сложение источника и стока с одинаковыми расходами, симметрично расположенными относительно начала координат на расстоянии *a*.



Потенциалы скорости: источника $\varphi_u = \dfrac{Q}{2\pi}\ln r_u$; стока - $\varphi_{ст} = -\dfrac{Q}{2\pi}\ln r_{ст}$.

Выбираем произвольную точку *M* с координатами *x* и *y*. Потенциал скорости в этой точке $\varphi = \varphi_u + \varphi_{ст}$, т.е. $\varphi = \dfrac{Q}{2\pi}\left(\ln r_u - \ln r_{ст}\right) = \dfrac{Q}{2\pi}\ln\dfrac{r_u}{r_{ст}}$. Выполним некоторые преобразования этого соотношения. Из треугольников *МИх* и *МСх* получаем:

$$r_u = \sqrt{y^2 + \left(x^2 + a^2\right)},\ r_{ст} = \sqrt{y^2 + \left(x^2 - a^2\right)}.$$

Следовательно, потенциал скорости нового течения $\varphi = \dfrac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{\dfrac{y^2 + \left(x^2 + a^2\right)}{y^2 + \left(x^2 - a^2\right)}}$.

Существенно больший интерес представляет функция тока. Как было показано, $\psi_u = \dfrac{Q}{2\pi}\theta_u$ и $\psi_{ст} = -\dfrac{Q}{2\pi}\theta_{ст}$.

Аналогично предыдущему $\psi = \psi_u + \psi_{ст} = \dfrac{Q}{2\pi}\left(\theta_u - \theta_{ст}\right)$.

С другой стороны, из рис. следует, что $\theta_{ст} = \theta + \theta_u$, откуда $\theta_u - \theta_{ст} = -\theta$, т.е. $\psi = -\dfrac{Q}{2\pi}\theta$. При этом условию $\psi = \text{const}$ (т.е. линии тока) соответствует $\theta = \text{const}$. Таким образом, линии тока нового течения представляют собой окружности, проходящие через источник и сток.

Рассмотрим теперь картину, образующуюся при сближении источника и стока.

Пример 5. Забегая несколько вперед отметим, что получаемое при сближении источника и стока течение называется диполем. В чем особенность рассматриваемой задачи? Если просто предположить, что расстояние $a = 0$, то $r_u = r_{ст}$, и φ и ψ тождественно равны нулю. Поэтому рассмотрим другой предельный случай. Пусть при $2a \to 0$ расход $Q \to \infty$, но так, что произведение $2a \cdot Q = const = M$, где M носит название момента диполя. Таким образом, $Q = \dfrac{M}{2a}$.

При этом потенциал скорости диполя $\varphi_Д = \dfrac{M}{2\pi} \dfrac{\ln\sqrt{y^2 + \left(x^2 + a^2\right)} - \ln\sqrt{y^2 + \left(x^2 - a^2\right)}}{2a}$.

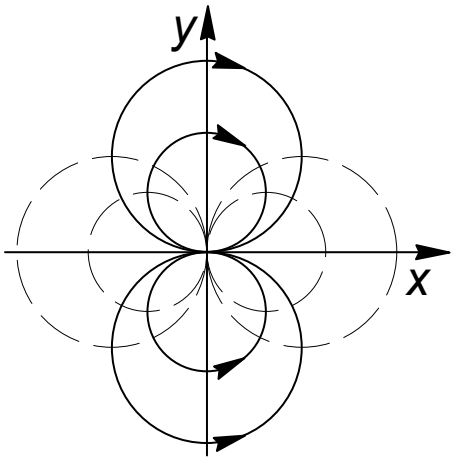
Рассмотрим предел этого отношения

$$\varphi_Д = \frac{M}{2\pi} \lim_{a \to 0} \frac{\ln\sqrt{y^2 + \left(x^2 + a^2\right)} - \ln\sqrt{y^2 + \left(x^2 - a^2\right)}}{2a}.$$

Выражение под знаком предела является производной функции $\ln\sqrt{y^2 + x^2}$, как предел отношения разности функций в точках $x + a$ и $x - a$, и разности соответствующих значений независимого переменного $\left(x + a\right) - \left(x - a\right) = 2a$.

Т.е. $\varphi_Д = \dfrac{M}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{M}{2\pi} \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

Действуя аналогичным образом, можно показать, что $\psi_Д = -\dfrac{M}{2\pi} \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.



Из чего следует, что линии тока и эквипотенциальные линии – окружности, касающиеся осей *Ox* и *Oy* в начале координат. Действительно, придавая функции тока постоянные значения, получаем: $x^2 + y^2 = Cy$ или $x^2 + \left(y - \dfrac{C}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{C}{2}\right)^2$.

А это и есть уравнения окружностей с разными центрами.

Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра.

Продолжим рассмотрение метода наложения потоков. Полученное в примере 5 течение, называемое диполем, на первый взгляд носит достаточно абстрактный характер. Однако, как будет показано ниже, такая точка зрения не совсем справедлива. Используя понятие диполя, можно получить весьма интересные и полезные для практических приложений результаты. Для подтверждения этого проанализируем течение, возникающее при наложении прямолинейного поступательного потока на диполь с центром, расположенным в начале координат. Прямолинейный поток движется вдоль оси *Ox* со скоростью, равной единице, т.е. $u_x = u_0 = \text{const}$; $u_y = 0$. Потенциал скорости $d\varphi = u_x dx + u_y dy$ и $\varphi = u_0 x$ с точностью до произвольной постоянной.

Функция тока $d\psi = u_x dy - u_y dx = u_0 dy$ и $\psi = u_0 y$. Если, как принято в условии, $u_0 = 1$, то $\varphi = x$ и $\psi = y$. Примем для упрощения выкладок момент диполя $M = 2\pi$, тогда $\varphi_Д = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ и $\psi_Д = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

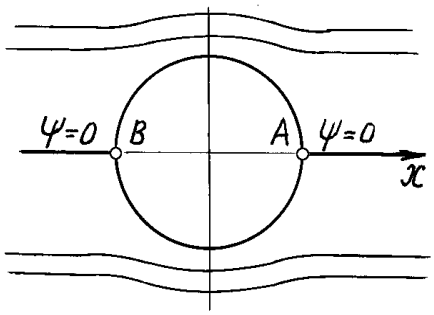
Складывая потенциалы и функции тока, получаем $\varphi = x + \dfrac{x}{x^2+y^2}$ и $\psi = y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Найдем линии тока, для чего приравняем функцию тока постоянной: $\psi = y - \dfrac{y}{x^2+y^2} = C$, откуда $y\left[\left(x^2+y^2\right)-1\right] = C\left(x^2+y^2\right)$.

Из чего следует, что линии тока течения представляют семейство кривых третьего порядка. Найдем нулевую линию тока, т.е. линию, для которой $C = 0$. Это дает два уравнения:

$$y = 0 \text{ и } x^2 + y^2 = 1.$$

Т.е. линия тока представляет собой ось x-ов и окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Это позволяет рассматривать окружность как твердую границу и течение вне ее, что приводит к задаче обтекания бесконечно длинного цилиндра.



Покажем, что на достаточно большом удалении от цилиндра скорость направлена вдоль оси x и равна $u_\infty = 1$. Найдем проекции скоростей u_x и u_y.

Имеем: $u_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = 1 + \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Откуда $u_x = 1 - \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Аналогично $u_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = -\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Для дальнейшего удобно перейти к полярным координатам, имея в виду, что $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$. Подстановка этих значений в выражения для u_x и u_y дает:

$$u_x = 1 - \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2} \text{ и } u_y = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

Перейдем к пределу. При $r \to \infty$ получаем $u_{x(\infty)} = 1$ и $u_{y(\infty)} = 0$, т.е. то, что и требовалось доказать.

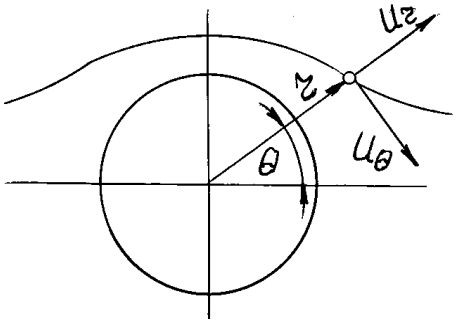
Точки B и A, показанные на рис., являются так называемыми особыми либо критическими точками, т.к. скорость в них обращается в нуль. Покажем, что это действительно так, для чего запишем выражение для потенциала скорости в полярных координатах:

$$\varphi = x + \frac{x}{x^2+y^2} = r\cos\theta + \frac{r\cos\theta}{r^2};\ \varphi = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta.$$

Найдем проекции скорости в произвольной точке на произвольной линии тока. Имеем:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta = \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta,$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta = -\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta$$



На поверхности цилиндра $r = 1$ и $u_r = 0$, т.е. обтекание безотрывно. Компонента $u_\theta = -2\sin\theta$. В общем случае, когда $u_\infty \neq 1$, $u_\theta = -2u_\infty\sin\theta$.

Знак «минус» указывает на то, что направление скорости на верхней половине цилиндра противоположно положительному направлению отсчета угла θ. В точках B и A ($\sin\theta = 0$) скорости равны нулю, т.е. действительно эти точки являются критическими.

4. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 4.1 Уравнение движения идеальной жидкости. Преобразоваиие Громеки-Лэмба. Уравнение Бернулли.

Динамика жидкости и газа, в отличие от кинематики, рассматривающей движение жидкости без учета причин, обусловивших его, изучает как само движение, так и причины, приводящие к его возникновению. Движение жидкости вызывается действием сил, а если иметь в виду, что давление есть частное от деления силы на площадь, то можно считать, что причиной возникновения движения частиц с какими-то скоростями является разность (перепад) давлений. Таким образом, для расчета течений необходимо иметь уравнение, связывающее давление в точке со скоростью движения частицы.

Уравнения движения идеальной жидкости $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$.

или в проекциях:

$$\frac{du_x}{dt} = a_x = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{du_y}{dt} = a_y = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{du_z}{dt} = a_z = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Представленная система уравнений называется системой дифференциальных уравнений Эйлера. Она связывает давления и скорости в движущейся жидкости. Следует помнить, что выражения в правой части уравнений системы являются полными либо субстанциональными производными. Наличие конвективных членов ускорения приводит к тому, что система является нелинейной, содержащей четыре неизвестных: три проекции скорости и давление. Проекции единичных массовых сил обычно известны из постановки задачи.

Эти три уравнения плюс уравнение неразрывности образуют замкнутую систему.

Преобразование Громеки-Лэмба.

Рассмотрение теоремы Гельмгольца о движении жидкой частицы показывает, что жидкость как любое материальное тело может участвовать в поступательном и вращательном движениях.

Следует обратить внимание на то, что для совершения работы в современных технических устройствах может использоваться только энергия поступательного движения. Энергия же вращательного (вихревого) движения полностью теряется, рассеивается в окружающей среде, превращаясь в теплоту.

Система уравнений Эйлера не учитывает факт существования этих двух движений, что в определенной степени обедняет ее. Поэтому целесообразно использовать преобразование, позволяющее учесть эту особенность движения жидких частиц, называемое преобразованием Громеки-Лэмба. Формально оно сводится к тому, что в выражение для ускорения вводятся члены, характеризующие вращение жидких частиц.

Рассмотрим лишь одну компоненту:

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Прибавим и вычтем в конвективной части ускорения выражение $u_y\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}$.

Скомпонуем члены с учетом знаков:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(u_y\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}$$

$$u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} - \left(u_y\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = -u_y\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) + u_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

Выражения в скобках есть не что иное, как удвоенные компоненты вихря ω_z и ω_y, т.е. можем записать

$$-2u_y\omega_z + 2u_z\omega_y = 2\left(u_z\omega_y - u_y\omega_z\right).$$

Подставляя полученные значения в выражение для ускорения частицы имеем

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} + 2\left(u_z\omega_y - u_y\omega_z\right).$$

По аналогии $a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial y} + 2\left(u_x\omega_z - u_z\omega_x\right)$ и $a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial z} + 2\left(u_y\omega_x - u_x\omega_y\right)$

В векторной форме выражение для ускорения будет иметь вид: $\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{u}$.

Если движение установившееся, то $\vec{a} = \operatorname{grad}\frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{u}$.

Уравнение движения в форме Громеки-Лэмба.

Подстановка полученного выражения для ускорения частицы жидкости приводит к уравнению движения в форме Громеки-Лэмба. Для установившегося движения имеем

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{u}.$$

Выполним некоторые преобразования (7.9).

В разделе гидростатики было введено понятие о скалярной функции Ф, называемой силовой. Было показано, что $f_x dx + f_y dy + f_z dz = d\Phi$.

Поэтому сила $\vec{f}$ можно представить в виде

$$\vec{f} = \vec{e}_x f_x + \vec{e}_y f_y + \vec{e}_z f_z = \vec{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \operatorname{grad}\Phi.$$

С учетом этого уравнение движения в форме Громеки-Лэмба примет вид:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = -2\vec{\omega}\times\vec{u}.$$

Следует иметь в виду, что эта форма записи справедлива лишь для несжимаемой жидкости, т.е. при условии $\rho = \text{const}$. И, наконец, если умножить скалярно левую и правую части полученного уравнения на произвольный направленный отрезок $d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$ уравнению движения можно придать более удобную для анализа форму

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = -2\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u_x & u_y & u_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

Интегрирование уравнения движения (*) возможно лишь в случае, когда его правая часть равна нулю. Из теории определителей известно, что признаками равенства нулю являются: равенство нулю какой-либо строки или пропорциональность элементов одной строки элементам другой.

Исходя из физического смысла имеем четыре возможных случая:

1) $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, 2) $\frac{u_x}{\omega_x} = \frac{u_y}{\omega_y} = \frac{u_z}{\omega_z}$, 3) $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$, 4) $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$.

Для любого из них можем записать $d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = 0$.

И после интегрирования $\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi = C$. (**)

Если из массовых сил действует только сила тяжести, то, как показано в разделе гидростатики, $\Phi = -gz$ и последнее равенство принимает вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C. \qquad (***)$$

Еще раз обратим внимание на то, что вид этого уравнения одинаков вне зависимости от того, какой из четырех случаев равенства нулю определителя рассматривается. Однако смысл интеграла и область его применения различны. Именно поэтому следует разобраться в этом вопросе подробней.

Первый случай, как известно, является признаком потенциальности движения. Интеграл (**) в этом случае называют интегралом Коши-Лагранжа. Он справедлив для любых точек жидкости, движущейся без вращения частиц, т.е. потенциально.

Второй случай является признаком коллинеарности вектора вихря и вектора скорости. Это весьма редкий случай так называемого винтового движения.

Третий случай характеризует движение жидкой частицы вдоль вихревой линии, а четвертый – движение вдоль линии тока. Интеграл (**) при этом носит название **интеграла Бернулли**. Он справедлив как для потенциального, так и для вихревого движений. Именно этот случай и будет интересовать нас в дальнейшем.

Энергетический смысл уравнения Бернулли.

При введении понятия о струйке было показано, что одним из ее свойств является равномерное распределение скоростей в пределах любого ее поперечного сечения. Это означает, что соотношение (***) остается справедливым для любой линии тока, проходящей внутри струйки. Поэтому уравнение (***) можно назвать **уравнением Бернулли для струйки идеальной жидкости**. Для двух произвольных поперечных сечений струйки можно записать

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}.$$

Выясним физический смысл величин, входящих в уравнение Бернулли. Все его члены имеют одинаковую размерность, Дж/кг.

Из чего следует, что каждый член уравнения выражает энергию, отнесенную к единице массы, т.е. удельную энергию. Это позволяет придать уравнению Бернулли энергетический смысл. Первые два члена выражают удельную потенциальную энергию (положения $-gz$ и давления $-p/\rho$), а третий – удельную кинетическую энергию. Следовательно, полная удельная энергия в любом сечении струйки остается неизменной. Другими словами, уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии в ее простейшей форме – форме сохранения механической энергии.

§ 4.2. Примеры применения уравнения бернулли.

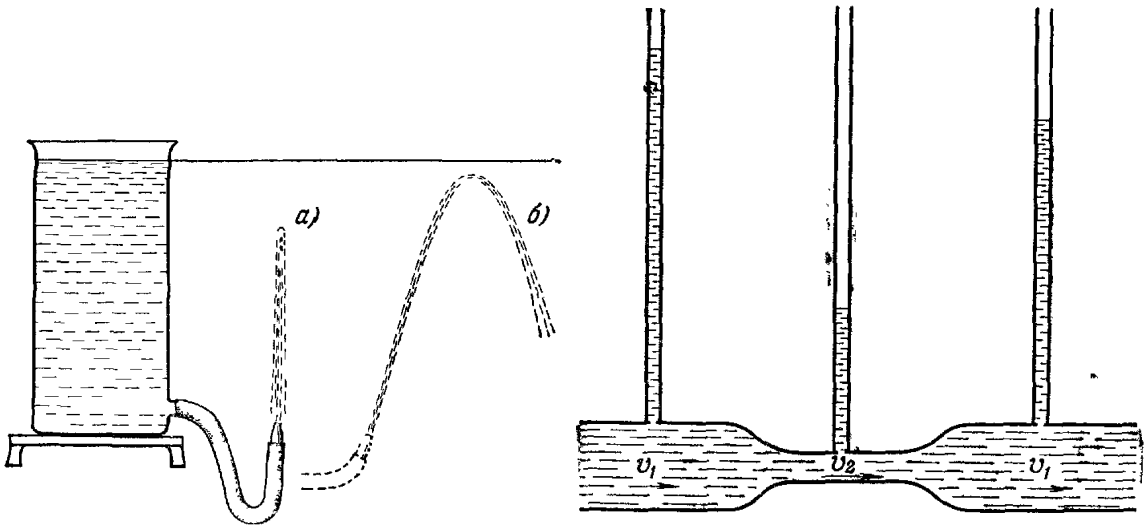
Уравнение Бернулли для стационарного течения несжимаемой жидкости.

$$p + \rho gh + \rho v^2/2 = const.$$

Это и есть известное уравнение Бернулли для стационарного течения несжимаемой жидкости. Оно играет фундаментальную роль во всех гидродинамических исследованиях. В уравнении Бернулли p – «статическое» давление, давление, сжимающее частицу жидкости; ρgh – «гидростатическое давление», т.е. изменение давления при изменении высоты на величину h, $\rho v^2/2$ – называется «динамическим давлением».

Уравнение Бернулли представляет собой следствие закона сохранения энергии для частицы жидкости, движущейся вдоль трубки тока. Оно следует из того, что работа сил давления должна равняться увеличению суммы кинетической и потенциальной энергий частицы, ведь силы давления представляют внешние силы по отношению к рассматриваемой частице.

Пользуясь уравнением Бернулли, легко определить скорость весомой жидкости, вытекающей из сосуда (формула Торричелли):



$$v = \sqrt{2g\left(h_0 - h\right)}.$$

Скорость истечения весомой жидкости из отверстия в сосуде равна той скорости, которую получит тело, падая с высоты, равной разности высот отверстия и свободной поверхности $h_0 - h$. Отметим, что величина скорости совершенно не зависит от направления к горизонту вытекающей струи. Она будет одинакова, под каким бы углом струя ни вытекала. Поэтому, если направить струю вертикально вверх, то частицы жидкости, как и всякое тело, должны подняться на высоту уровня свободной поверхности жидкости (Силы трения (вязкости) при течении воды по резиновой трубке, соединяющей «насадок», из которого вытекает струя, с сосудом, не окажут значительного влияния, если диаметр трубки будет велик по сравнению с диаметром вытекающей струи). Однако из-за трения в жидкости, а главным образом из-за трения о частицы жидкости, падающие вниз, и трения в воздухе струя не достигнет уровня жидкости в сосуде (рис. а). Но если направить струю под небольшим углом к вертикали, то она поднимется почти до уровня поверхности жидкости.

Давление при движении жидкости в трубах.

Давление измеряется высотой вертикального столбика воды. И оно в узких местах действительно оказывается меньше, чем в широких. Если после сужения площадь сечения возвращается к своей прежней величине – той, что была до сокращения, то давление до сужжения должно быть тем же, что и после него. Однако на самом деле оно заметно меньше. Дело в том, что пренебрегается трением, вязкой силой, которая вызывает падение давления вдоль трубы. Однако, несмотря на это падение, давление в узком месте определенно меньше (из-за возрастания скорости), чем по обеим сторонам от него, как это предсказывал Бернулли. Скорость v_2 должна превышать скорость v_1, чтобы через сужение могло пройти то же количество воды. Поэтому вода должна ускоряться, переходя из широкой части в узкую. Силы, которые приводят к этому ускорению, и есть перепад давления.

Истечение жидкости или газа, находящихся под давлением в сосуде.

Если жидкость или газ находятся в сосуде под давлением, много большим, чем давление, создаваемое весом жидкости, то изменениями давления но высоте столба жидкости можно пренебречь и считать, что истечение подчиняется тем же законам, что и истечение жидкости, находящейся в замкнутом сосуде под давлением $p_н$. Поэтому можно просто определить скорость истечения воды из котла, в котором вода находится под постоянным давлением пара в несколько десятков атмосфер, или скорость истечения газа из баллона, в котором давление поддерживается постоянным при помощи компрессора. В этих случаях можно считать постоянную в уравнении Бернулли постоянной по всему объему текущего газа или жидкости и равной $p_н$ давлению в сосуде, так как скоростью течения в сосуде можно пренебречь вследствие того, что сечение сосуда много больше сечения отверстия.

Скорость истечения воды из котла будет равна $v = \sqrt{\frac{2(p_н - p_0)}{\rho}}$.

Для **газа** уже нельзя определить скорость по вышеуказанной формуле ибо плотность газа ρ будет изменяться при движении частицы (элементарного объема) газа к отверстию. Изменение давления вдоль трубки тока можно при стационарном течении записать так:

$$-\frac{dp}{dx} = \rho v \frac{dv}{dx}.$$

При подходе частиц к отверстию давление должно падать: ведь частицы ускоряются в направлении движения. И величина скорости будет зависеть от того, по какому закону изменяется плотность с изменением давления. Во многих случаях, когда частица движется достаточно быстро, можно считать, как показывает опыт, что давление и плотность связаны законом адиабаты

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \frac{p_н}{\rho_н^{\gamma}} = const,$$

где γ – показатель адиабаты, зависящий от природы газа (для воздуха он равен 1.4), а $\rho_н$ – плотность газа в сосуде. Закон адиабаты следует из того, что во время расширения определенного объема газа не происходит обмена теплом с окружающим газом.

Подстановка и интегрирование по давлению от $p_н$ до p_0, а по скорости – от нуля до v_0 (скорости на выходе) получим выражение для скорости истечения газа на выходе из сосуда:

$$v_0 = \sqrt{2\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_н}{\rho_н}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_н}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}.$$

Задача. Определим точнее величину ошибки, которую мы делаем, принимая воздух несжимаемым при давлении, близком к атмосферному. Допустим, что разность давлений в сосуде и вне его составляет 10% от атмосферного, и положим, что давление в сосуде p_1 равно 1 атм, а вне его p_a = 0.9 атм. Какова была бы скорость истечения, если бы воздух был несжимаемой жидкостью?

Определение скорости потока с помощью трубок Пито и Прандтля.

Если в потоке жидкости и газа находится какое-то тело, которое жидкость обтекает со всех сторон, то трубки тока как-то расходятся вдоль поверхности тела. Поэтому на стороне тела, обращенной к потоку, есть такая точка А, называемая критической точкой, в которой трубки тока расходятся в различные стороны, охватывая тело. Так как поток в критической точке расходится, то очевидно, что скорость его в этой точке должна быть равна нулю и в силу непрерывности вблизи нее будет очень малой. Тело находится в однородном потоке идеальной несжимаемой жидкости, поэтому на некотором достаточно удаленном расстоянии от тела всюду и давление p_0, и плотность ρ_0, и скорость v_0 одинаковы. Так как в критической точке скорость потока равна нулю, то, следовательно, давление в этой точке («давление полного напора») равно $p_к = p_0 + \frac{\rho_0 v_0^2}{2}$.

Для определения скорости потока проще всего взять в качестве обтекаемого тела трубку, открытое отверстие которой направлено к потоку. Другой конец трубки соединен с манометром, измеряющим давление в трубке. Иногда вместо трубки берут цилиндрическое тело с закругленным концом по оси которого сделано отверстие, соединенное трубочкой с манометром. Этот цилиндр, укрепленный на соответствующей державке, направляют отверстием к потоку так, что критическая область лежит в зоне отверстия.

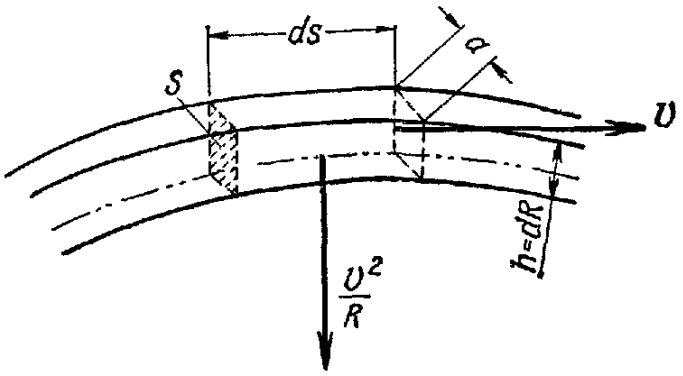
Для определения скорости потока v_0, кроме полного напора $p_к$, нужно знать и статическое давление в потоке p_0. Для измерения статического давления в потоке устанавливают цилиндрическое тело так, что его образующая направлена вдоль линии тока в невозмущенном потоке, и измеряют давление в некотором небольшом отверстии на стенке этого тела.

Если сечение трубки тока, проходящей вблизи отверстия, будет таким же, как и сечение этой трубки вдали от тела, то давление у отверстия будет равно давлению вдали от тела. Отверстие посредством трубки соединяют с манометром, который и показывает статическое давление p_0. Отверстия для определения статического давления в потоке часто делают на поверхности того же цилиндрического тела, посредством которого измеряется давление полного напора. В трубке

Прандтля отверстия для измерения статического давления находятся на некотором расстоянии от переднего конца цилиндра (примерно .на расстоянии 3—5 диаметров), там, где трубки тока выравниваются.

§ 4.3 Изменение давления жидкости при искривлении трубки тока.

В тех же местах, где осевая линия трубки искривляется, давление в поперечном сечении не может быть постоянным. Действительно, частица, двигающаяся искривленной трубке тока, обладает центростремительным ускорением v^2/r, где r – радиус закругления осевой линии трубки. Поэтому на частицу должна действовать сила, расположенная в плоскости закругления и направленная перпендикулярно к линии тока, сила, равная $\rho S v^2/r\, ds$, где S — площадь сечения трубки, а ds — длина частицы жидкости.



Такую силу может создать только давление окружающих слоев текущей жидкости. Поэтому и должна быть разность давлений на сторонах трубки тока в плоскости закругления.

Тогда по второму закону динамики в направлении, перпендикулярном к линии тока, можно записать:

$$(p_1 - p_2)\, a\, ds = \rho S \frac{v^2}{r} ds$$

или после сокращения градиент давления $\frac{p_1 - p_2}{h} = \rho \frac{v^2}{r}$.

Для достаточно тонких трубок тока $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r}$.

Это равенство означает, что давление изменяется поперек трубок тока, когда они искривляются, причем падение давления происходит к центру закругления оси трубки.

Например, рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью на вращающемся диске. Если диск вращается с угловой скоростью ω, то через некоторое время все частицы жидкости будут двигаться по окружности так, что жидкость останется неподвижной относительно стенок стакана. Так как частицы по трубке тока движутся по кругу радиуса г, то давление в горизонтальной плоскости будет возрастать по мере удаления от оси вращения. Замена линейную сколрость по окружности v через ωг, получим $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$. Интегрирование по давлению от p_o до p_1, а по радиусу от 0 до r_1 получим

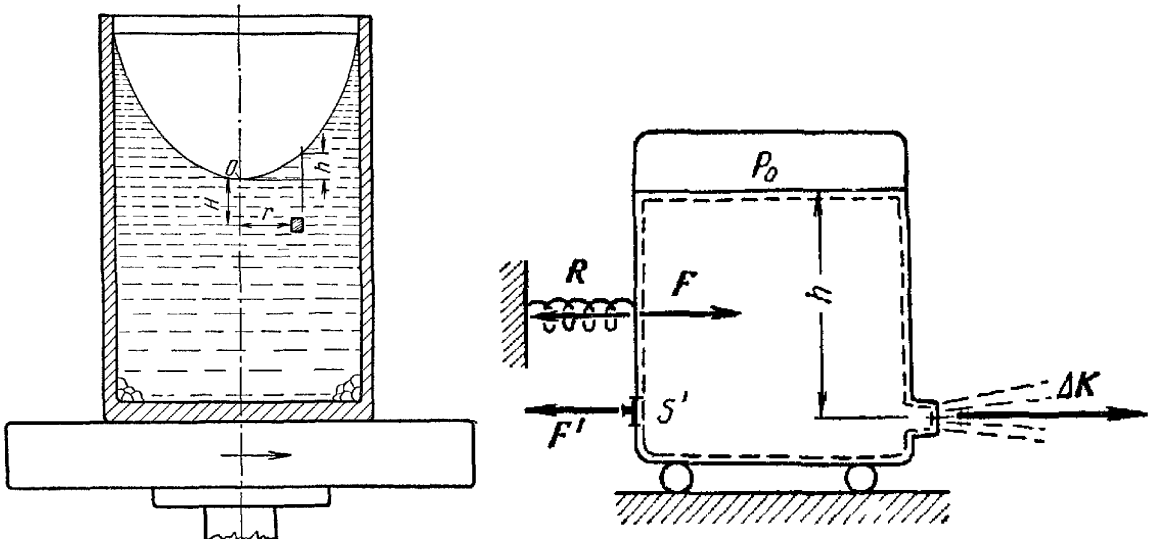
$$p_1 - p_0 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r_1^2 .$$

Отсюда видно, что давление в горизонтальном сечении сосуда возрастает пропорционально квадрату расстояния от оси вращения. Как известно, давление в каждой точке жидкости должно быть одинаково по всем направлениям, поэтому и уровень жидкости должен повышаться с расстоянием от оси. Действительно, изменение давления в вертикальном направлении возникает только за счет веса жидкости; поэтому для того, чтобы частица жидкости покоилась относительно стакана, необходимо, чтобы уровень жидкости над кольцевой площадкой радиуса r_1 был выше уровня жидкости в центре на величину h. Давление, создаваемое весом жидкости на горизонтали, проходящей через нижнюю точку свободной поверхности (точку О), равно ρgh, и оно должно равняться давлению $\rho\omega^2 r_1^2/2$. Поэтому

$$h = \frac{\omega^2}{2g} r_1^2 .$$

Высота уровня жидкости растет пропорционально квадрату расстояния от оси вращения, т. е. свободная поверхность представляет собой параболоид вращения, как и наблюдается в опытах.

Если бросить в стакан с водой, вращающийся на центробежной машине, небольшие кусочки вещества тяжелее воды, все они через некоторое время расположатся внизу у стенки стакана. Кусочки вещества, плавающего на поверхности воды, будут собираться вблизи точки О.



§ 4.4 Сила реакции текущей воды (газа).

К жидкости, проходящей через выделенный объем, применяют закон изменения количества движения. Этот закон для стационарного течения можно сформулировать так: сумма внешних сил, действующих на частицы жидкости данного объема, равна изменению за единицу времени количества движения жидкости выделенного объема.

Определим силу действия на сосуд струи жидкости, вытекающей из него. По уравнению Бернулли скорость истечения равна $v = \sqrt{\frac{2(p_0 + \rho g h)}{\rho}}$, где p_0 – избыточное давление над жидкостью в сосуде по отношению к атмосферному, h – высота уровня над отверстием. Рассмотрим силы давления и изменения количества движения жидкости только на поверхностях, нормальных к струе; во всех остальных направлениях изменение количества движения жидкости равно нулю.

Если поперечное сечение струи S_0, то изменение количества движения за секунду по направлению струи равно $\frac{dK}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \dot{m}v = \rho S_0 v^2$, где $\dot{m}$ – массовый ежесекундный расход.

Сосуд действует на жидкость с силой $\vec{F} = \frac{d\vec{K}}{dt}$, а реакция $\vec{R}$ жидкости на сосуд (реактивной силой) равна величине $\vec{F}$ и противоположно направлена.

Как реактивная сила передается на стенки сосуда? Реактивная сила создается вследствие разности давлений на стенки сосуда, разности, возникающей при вытекании струи. Давление на эадней стенке можно считать равным p_0 плюс гидростатическое давление ρgh, ибо скорость течения у этой стенки очень мала, ничтожно мала по сравнению со скоростью в струе вытекающей жидкости. Давление на передней стенке сосуда, на той стенке, в которой находится отверстие, не будет равным давлению на задней стенке. Т. е. нельзя пренебрегать скоростью течения у передней стенки вблизи отверстия, вследствие которой давление в этой области будет понижено.

Величина силы давления на площадку S'= So, полагая размеры ее очень малыми по сравнению с *h* равна $F' = S_0\left(p_0 + \rho g h\right) = \frac{1}{2}\rho S_0 v^2$.

Видно, что сила F' ровно в два раза меньше реактивной силы R. Заметим, что этот вывод справедлив только тогда, когда наименьшее сечение струи S_0 равно площади отверстия, а это не всегда имеет место.

Реальная скорость истечения жидкости из сосуда.

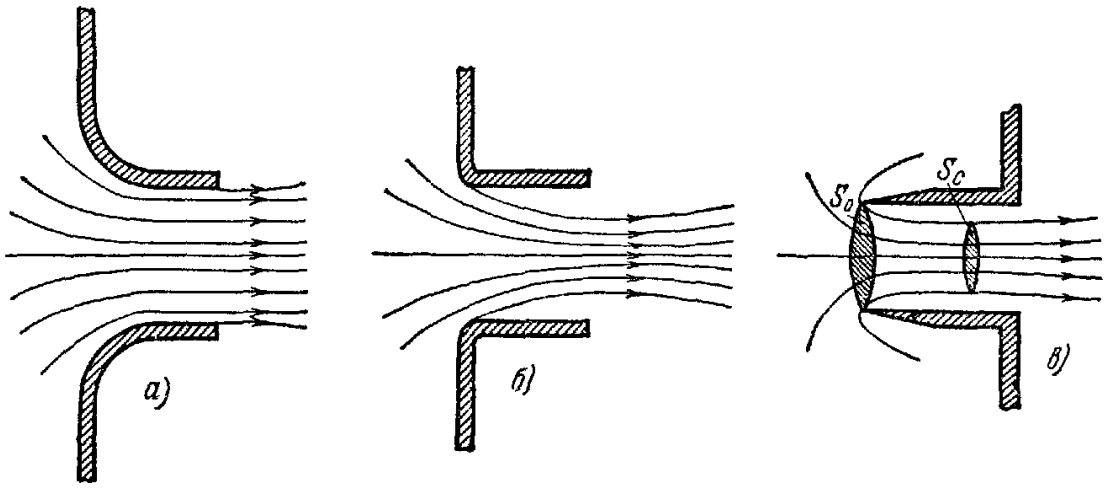
Ранее было показано, что скорость истечения жидкости из сосуда определяется формулой Торричелли $v_{вых} = \sqrt{2gh}$. Скорость получилась равной скорости предмета, падающего с высоты *h*. В этом нет ничего удивительного – ведь в конечном счете вода на выходе получает свою кинетическую энергию из запаса потенциальной энергии воды, находящейся наверху резервуара. Однако, это не означает, что скорость убывания жидкости из резервуара можно определить как произведение скорости $v_{вых}$ на площадь отверстия. Скорости частиц жидкости в тот момент, когда струя вырывается из отверстия, не параллельны друг другу, а имеюи компоненту, направленную к центру потока; струя сужается. Пройдя небольшое расстояние, струя перестает сжиматься, и скорости становятся паралельными. Таким образом, полный поток равен скорости, умноженной на плоощадь именно в том месте, где сжатие струи прекратилось. На самом деле, если имеется выходное отверстие в виде круглой дыры с острым краем, то сечение струи сокращается до 62% (коэффициент истечения) от площади отверстия.

Расмотрим более подробно различные отверстия.

До сих пор предполагалось, что струя выходит из «насадки» с довольно плавными переходами от вертикальной стенки, в этом случае струя выходит из отверстия параллельными трубками тока, заполняя все отверстие примерно так, как показано на рис. а. Если не сделать плавных переходов к «насадке» от стенок, то струя будет сжиматься (рис. б). Такое сжатие струи легко объяснить. Крайние струйки жидкости, подходящие к отверстию вдоль стенки, далее вследствие своей инерции стремятся к центру струи, и только под давлением частиц, идущих ближе к центру струи, крайние линии тока выпрямляются. В этом случае минимальное сечение струи, сечение в том месте, где трубки тока практически выпрямляются, меньше сечения отверстия. Величина отношения площади минимального сечения струи к площади отверстия зависит от формы краев отверстия и определяется опытным путем.

В случае острого края отверстия площадь сечения струи много меньше площади отверстия, но больше половины этой площади. Если струя выходит из трубочки с острыми краями, направленной внутрь сосуда (рис. в), то площадь минимального сечения струи в точности равна половине площади отверстия.

Здесь скоростью течения вдоль вертикальной стенки сосуда, в которую вделана трубка, можно вполне пренебречь, так как вертикальная стенка сосуда удалена от отверстия. Тогда давление на противоположных участках стенок сосуда одинаково и сила реакции должна быть равна



$$F' = S_0\left(p_0 + \rho g h\right),$$

где S_0 – площадь отверстия трубки. А из закона изменения количества движения сила реакции должна быть равна

$$F' = S_c \rho v^2 = S_c \cdot 2\left(p_0 + \rho g h\right),$$

где S_c – площадь поперечного сечения струи в самом узком месте (рис. в).

Сравнивая оба выражения, получаем, что $2S_c = S_0$ или сужение струи (отношение площади струи к площади отверстия) равно 1/2. Это соотношение хорошо подтверждается опытами.

§ 4.5 Истечение газов в ракетных двигателях. Сопло Лаваля.

Рассмотрим основные типы ракетных двигателей.

Химические ракетные двигатели.

Наиболее распространены химические ракетные двигатели, в которых, в результате экзотермической химической реакции горючего и окислителя (вместе именуемые топливом), продукты сгорания нагреваются в камере сгорания до высоких температур, расширяясь, разгоняются в сверхзвуковом сопле и истекают из двигателя. Топливо химического ракетного двигателя является источником, как тепловой энергии, так и газообразного рабочего тела, при расширении которого его внутренняя энергия преобразуется в кинетическую энергию реактивной струи.

В твердотопливном ракетном двигателе (РДТТ) горючее и окислитель хранятся в форме смеси твёрдых веществ, а топливная ёмкость одновременно выполняет функции камеры сгорания. Твердотопливный двигатель и ракета, оборудованная им, конструктивно устроены гораздо проще всех других типов ракетных двигателей и соответствующих ракет, а потому они надёжны, дёшевы в производстве, не требуют больших трудозатрат при хранении и транспортировке, время подготовки их к пуску минимально. Поэтому в настоящее время они вытесняют другие типы ракетных двигателей из области военного применения. Вместе с тем, твёрдое топливо энергетически менее эффективно, чем жидкое. Удельный импульс твердотопливных двигателей составляет 2000 – 3000 м/с. Тяга – свыше 13 МН (мега ньютон).

В жидкостных ракетных двигателях (ЖРД) горючее и окислитель пребывают в жидком агрегатном состоянии. Они подаются в камеру сгорания с помощью турбонасосной или вытеснительной системами подач. Жидкостные ракетные двигатели допускают регулирование тяги в широких пределах, и многократное включение и выключение, что особенно важно при маневрировании в космическом пространстве. Удельный импульс ЖРД достигает 4500 м/с. Тяга – свыше 8 МН (РД-170). По совокупности этих свойств ЖРД предпочтительны в качестве маршевых двигателей ракет-носителей космических аппаратов, и маневровых двигателей КА.

В качестве пары горючее + окислитель могут использоваться различные компоненты. В современных криогенных двигателях используется пара жидкий кислород + жидкий водород

(наиболее эффективные компоненты для ЖРД). Другой группой компонентов являются самовоспламеняющиеся при контакте друг с другом, пример такой схемы – азотный тетраоксид + несимметричный диметилгидразин. Довольно часто применяется пара жидкий кислород + керосин. Обладая сравнительно невысоким удельным импульсом (в сравнении с электрическими ракетными двигателями), химические ракетные двигатели позволяют развивать большую тягу, что особенно важно при создании средств выведения полезной нагрузки на орбиту или для осуществления межпланетных полётов в относительно короткие сроки.

На конец 1-го десятилетия XXI в. все, без исключения, ракетные двигатели, применяемые в ракетах военного назначения, и все, без исключения, двигатели ракет-носителей космических аппаратов — химические.

Ядерный ракетный двигатель – реактивный двигатель, рабочее тело в котором (например, водород, аммиак и др.) нагревается за счет энергии, выделяющейся при ядерных реакциях (распада или термоядерного синтеза). Различают радиоизотопные, ядерные и термоядерные ракетные двигатели.

Ядерные ракетные двигатели позволяют достичь значительно более высокого (по сравнению с химическими ракетными двигателями) значения удельного импульса благодаря большой скорости истечения рабочего тела (от 8 000 м/с до 50 км/с и более). Вместе с тем, общая тяга ЯРД может быть сравнима с тягой химических ракетных двигателей, что создает предпосылки для замены в будущем химических ракетных двигателей ядерными. Основной проблемой при использовании ЯРД является радиоактивное загрязнение окружающей среды факелом выхлопа двигателя, что затрудняет использование ЯРД на ступенях ракет-носителей, работающих в пределах земной атмосферы.

ЯРД по агрегатному состоянию ядерного топлива в них подразделяются на твёрдо, жидко- и газофазные. В **твёрдофазных** ЯРД делящееся вещество, как и в обычных ядерных реакторах, размещено в сборках-стержнях (ТВЭЛах) сложной формы с развитой поверхностью, что позволяет эффективно нагревать (лучистой энергией в данном случае можно пренебречь) газообразное рабочее тело (обычно – водород, реже – аммиак), одновременно являющееся теплоносителем, охлаждающим элементы конструкции и сами сборки. Температура РТ ограничена максимальной допустимой температурой элементов конструкции (не более 3 000 К), что ограничивает скорость истечения. Удельный импульс твердофазного ЯРД, по современным оценкам, составит 8 – 9 км/с, что более, чем вдвое превышает показатели наиболее совершенных химических ракетных двигателей. **Жидкофазные** ЯРД являются более эффективными: ядерное топливо в их активной зоне находится в виде расплава, и, соответственно, тяговые параметры таких двигателей выше (удельный импульс может достигать величин порядка 15 км/с).

В **газофазных** ЯРД (ГФЯРД) делящееся вещество (например, уран), также как и рабочее тело, находится в газообразном состоянии и удерживается в рабочей зоне электромагнитным полем (один из многих предложенных вариантов конструкции). В случае же удержания ядерной плазмы электромагнитным полем существует небольшая утечка делящегося вещества во внешнюю среду и в конструкции предусмотрена подача ядерного топлива в активную зону для восполнения его количества. Рабочее тело (водород) содержит частицы углерода для эффективного нагрева за счёт поглощения лучистой энергии. Термостойкость элементов конструкции в ЯРД этого типа не является сдерживающим фактором, поэтому скорость истечения рабочего тела может превышать 30 км/с при температуре рабочего тела на выходе из сопла до 12000 К. В качестве ядерного топлива для ГФЯРД предлагается, в частности, уран-233.

На настоящий момент ядерные ракетные двигатели находятся на стадии теоретической и экспериментальной отработки.

Электрические ракетные двигатели.

В электрических ракетных двигателях (ЭРД) в качестве источника энергии для создания тяги используется электрическая энергия. Удельный импульс электрических ракетных двигателей может достигать 10 – 210 км/с.

В зависимости от способа преобразования электрической энергии в кинетическую энергию реактивной струи, различают электротермические ракетные двигатели, электростатические (ионные) ракетные двигатели и электромагнитные ракетные двигатели.

Высокие значения удельного импульса ЭРД позволяет ему расходовать (в сравнении с химическими двигателями) малое количество рабочего тела на единицу тяги, но при этом возникает проблема большого количества электроэнергии, необходимой для создания тяги. Чем выше удельный импульс, тем меньше требуется вещества, и больше – энергии, для создания единицы тяги. Поскольку мощность источников электроэнергии на космических аппаратах весьма ограничена, это ограничивает и тягу, которую могут развить ЭРД. Самым приемлемым для ЭРД источником электроэнергии в космосе в настоящее время являются солнечные батареи, не потребляющие топлива, и обладающие достаточно высокой удельной мощностью (по сравнению с другими источниками электроэнергии).

Низкая тяга (не превышающая единиц ньютона для самых мощных из современных электрических ракетных двигателей) и неработоспособность в атмосфере, на высотах менее 100 км суживают область применения электрических ракетных двигателей. В настоящий момент электрические ракетные двигатели применяются в качестве двигателей ориентации и коррекции орбит автоматических.

Плазменный двигатель (ПД) – ракетный двигатель, в котором рабочее тело ускоряется, находясь в состоянии плазмы. Скорости истечения рабочего тела, достижимые в ПД, существенно выше скоростей, предельных для обычных газодинамических (химических или тепловых) двигателей. Увеличение скорости истечения позволяет получать данную тягу при меньшем расходе рабочего тела, что облегчает массу ракетной системы. В настоящее время наиболее широкое распространение – в качестве двигателей для поддержания точек стояния геостационарных спутников связи – получили СПД (стационарные плазменные двигатели). Плазменные двигатели не следует путать с ионными. ПД не предназначен для вывода грузов на орбиту, он может эффективно работать только в вакууме. Принцип работы заключается в том, что нейтральный газ, обычно водород (азот), подается в передний отсек и ионизируется. Образующаяся плазма разогревается электромагнитным полем в центральной камере посредством ионного циклотронного резонансного нагрева. В ходе этого процесса радиоволны передают свою энергию плазме, нагревая ее, подобно тому, как это происходит в микроволновой печи. После нагревания плазма направляется магнитным полем в последний отсек для создания модулированной тяги. Последний отсек – это магнитное сопло, преобразующее энергию плазмы в скорость истечения струи, обеспечивающее при этом защиту конструкции и эффективный выход плазмы из магнитного поля.

Таким образом, во всех таких двигателях различная энергия преобразуется в механическую энергию газообразных продуктов сгорания, «вытекающих» из сопла. Все это происходит в наиболее напряженной части двигателя, в его камере. Именно здесь совершаются сложные процессы, в результате которых ракета получает движущую ее силу – тягу.

На основе законов физики легко доказывается, что сила тяги P равна произведению секундного расхода массы газа $\dot{m}$ на скорость его движения w, то есть

$$P = \dot{m}\, w.$$

Увеличить тягу двигателя можно двумя путями: увеличивая секундный расход массы топлива или повышая скорость истечения газов.

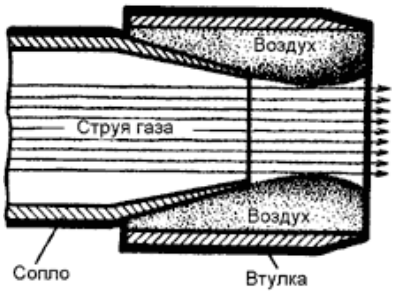
Какой же из этих двух путей наиболее выгоден? Очевидно, второй, поскольку он не связан с увеличением запаса топлива. А как можно увеличить скорость истечения газа из двигателя? Один из способов – конструктивный.

Сопло – важнейшая часть двигателя. Обратите внимание на его форму: сопло сначала сужается, затем расширяется. Казалось бы, для газа, чтобы разогнать его, следует использовать сопло сужающейся формы. Это правильно, но только до тех

пор, пока скорость газа не достигнет звуковой. А вот дальше, как бы мы ни уменьшали сечение струи, увеличить скорость не удастся: при сверхзвуковой скорости газ можно разогнать только в расширяющемся канале. Впервые это свойство газа использовал в паровых турбинах шведский ученый Густаф де Лаваль.

К сожалению, стандартный двигатель имеет лишь сужающееся сопло. Одним из выходов – добавление насадки к его соплу. Основной ее недостаток – большой вес, так как, чтобы насадка не прогорала, ее делают металлической.

Реактивные двигатели многих самолетов тоже имеют сужающееся сопло. Конструкторы авиационных двигателей не прочь бы поставить на самолет сопло Лаваля – выгоды такого сопла им хорошо известны. Но сделать это трудно: авиационный двигатель многорежимен – в крейсерском полете он создает сравнительно небольшую тягу, а вот на взлете и при маневрировании от него требуется полная, максимальная тяга. Для многорежимных двигателей нужно регулируемое сопло – сопло, изменяющее свои формы. Выполнить регулируемым сопло Лаваля чрезвычайно сложно, и поэтому приходится применять простейший тип сопла – сужающийся. Чтобы компенсировать недостатки сужающегося сопла, конструкторы нашли оригинальный выход. В зоне сопла снаружи устанавливается кольцевая втулка. Реактивная струя газа подсасывает (эжектирует) в узкую щель между втулкой и соплом воздух, который и образует недостающую, расширяющуюся часть сопла.



Принцип работы сопла Лаваля

Таким образом сопло Лаваля – техническое приспособление, разгоняющее проходящий по нему газовый поток до сверхзвуковых скоростей. Сопло представляет собой канал, суженный в середине. В простейшем случае такое сопло может состоять из пары усечённых конусов, сопряжённых узкими концами. Эффективные сопла современных ракетных двигателей профилируются на основании газодинамических расчётов.

При анализе течения газа в сопле Лаваля принимаются следующие допущения:

– газ считается идеальным.

– газовый поток является изоэнтропным (то есть имеет постоянную энтропию, силы трения и диссипативные потери не учитываются) и адиабатическим (то есть теплота не подводится и не отводится).

– газовое течение является стационарным и одномерным, то есть в любой фиксированной точке сопла все параметры потока постоянны во времени и меняются только вдоль оси сопла, причём во всех точках выбранного поперечного сечения параметры потока одинаковы, а вектор скорости газа всюду параллелен оси симметрии сопла.

– массовый расход газа одинаков во всех поперечных сечениях потока.

– влияние всех внешних сил и полей (в том числе гравитационного) пренебрежимо мало.

– ось симметрии сопла является пространственной координатой x.

Отношение локальной скорости v локальной скорости звука c обозначается числом Маха, которое также понимается местным, то есть зависимым от координаты $\boldsymbol{x}$:

$$M = v/c\ .$$

Из уравнения состояния идеального газа следует: $dp/d\rho = c^2$, здесь ρ – локальная плотность газа, p – локальное давление. С учётом этого, а также с учётом стационарности и одномерности потока уравнение Эйлера принимает вид:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -\frac{c^2}{\rho}\frac{d\rho}{dx}\ .$$

Учитывая определение числа Маха, последнее равенство преобразуем в

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} = -M^2\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} \text{ или } \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}\Big/\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = -M^2\ . \qquad (*)$$

Величины $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}$ и $\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ характеризуют относительную степень изменяемости по координате x плотности газа и его скорости соответственно. Причем уравнение (*) показывает, что соотношение между этими величинами равно квадрату числа Маха (знак минус означает противоположную направленность изменений: при возрастании скорости плотность убывает). Таким образом, на дозвуковых скоростях ($M < 1$)плотность меняется в меньшей степени, чем скорость, а на сверхзвуковых ($M > 1$) – наоборот. Это и определяет сужающуюся-расширяющуюся форму сопла.

Поскольку массовый расход газа постоянен: $\rho v S = const$, где S – площадь местного сечения сопла, то $\ln\rho + \ln v + \ln S = const$.

Дифференцируя обе части этого уравнения по x, получаем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx} = 0.$$

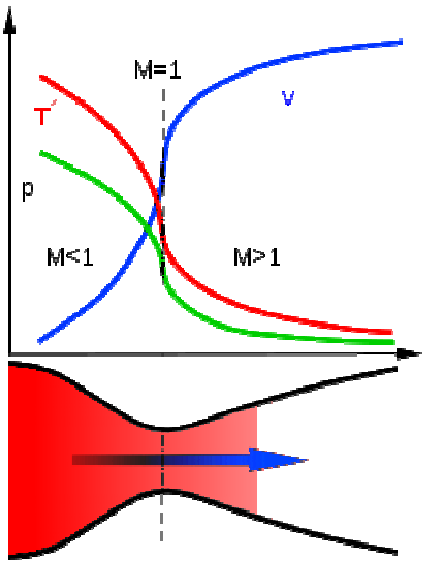
После подстановки (*) в это уравнение, получаем окончательно:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{S}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\cdot\left(M^2 - 1\right) \qquad (**)$$

Заметим, что при увеличении скорости газа в сопле знак выражения $\frac{S}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$ положителен и, следовательно, знак производной $\frac{dS}{dx}$ определяется знаком выражения: $\left(M^2 - 1\right)$.

Из чего можно сделать следующие выводы:

1) При дозвуковой скорости движения газа ($M < 1$), производная $\frac{dS}{dx} < 0$ – сопло сужается.
2) При сверхзвуковой скорости движения газа ($M > 1$), производная $\frac{dS}{dx} > 0$ – сопло расширяется.
3) При движении газа со скоростью звука (M = 1), производная $\frac{dS}{dx} = 0$ – площадь поперечного сечения достигает экстремума, то есть имеет место самое узкое сечение сопла, называемое **критическим**.



Итак, на сужающемся, докритическом участке сопла движение газа происходит с дозвуковыми скоростями. В самом узком, критическом сечении сопла локальная скорость газа достигает звуковой. На расширяющемся, закритическом участке, газовый поток движется со сверхзвуковыми скоростями.

Перемещаясь по соплу, газ расширяется, его температура и давление падают, а скорость возрастает. Внутренняя энергия газа преобразуется в кинетическую энергию его направленного движения. КПД этого преобразования в некоторых случаях (например, в соплах современных ракетных двигателей) может превышать 70 %, что значительно превосходит КПД реальных тепловых двигателей всех других типов. Это объясняется тем, что рабочее тело не передаёт механическую энергию никакому посреднику (поршню или лопастям турбины). В других тепловых двигателях на этой передаче имеют место значительные потери. Кроме того, газ, проходя через сопло на значительной скорости, не успевает передать его стенкам заметное количество своей тепловой энергии, что позволяет считать процесс адиабатическим. У реальных тепловых двигателей других типов нагрев конструкции

составляет существенную часть потерь. Автомобильный двигатель, например, работает больше на радиатор охлаждения, чем на выходной вал.

Скорость истечения газа из сопла Лаваля.

Из уравнения состояния идеального газа, и баланса энергии в газовом потоке выводится формула расчёта линейной скорости истечения газа из сопла Лаваля:

$$v_e = \sqrt{2\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{TR}{M_g}\left[1-\left(\frac{p_0}{p_н}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

где: v_e – скорость газа на выходе из сопла, м/с, T – абсолютная температура газа на входе, R – универсальная газовая постоянная, M_g – молярная масса газа, кг/кмоль, γ – показатель адиабаты $\gamma = c_P/c_V$, c_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, Дж/(моль·К), c_v – удельная теплоёмкость при постоянном объеме, Дж/(моль·К), p_e – абсолютное давление газа на выходе из сопла, Па, p_0 – абсолютное давление газа на входе в сопло, Па.

При работе сопла Лаваля в непустой среде (чаще всего речь идет об атмосфере) сверхзвуковое течение может возникнуть только при достаточно большом избыточном давлении газа на входе в сопло по сравнению с давлением окружающей среды.

При возникновении сверхзвукового течения давление газа на выходном срезе сопла может оказаться даже меньше давления окружающей среды (вследствие **перерасширения** газа при движении по соплу). Такой поток может оставаться стабильным, поскольку давление окружающей среды (пока оно ненамного превышает давление газа на срезе сопла) не может распространяться против сверхзвукового потока.

В общем случае удельный импульс сопла Лаваля (при работе, как в среде, так и в пустоте) определяется выражением:

$$I = v_e + \frac{S_e}{\dot{m}}\left(p_e - p_0\right). \qquad (***)$$

Здесь v_e – скорость истечения газа из сопла; S_e –площадь среза сопла; p_e – давление газа на срезе сопла; p_0 – давление окружающей среды; $\dot{m}$ – секундный массовый расход газа через сопло.

Из этого выражения следует, что удельный импульс и, соответственно, тяга ракетного двигателя в пустоте (при p_0) всегда выше, чем в атмосфере. Это находит отражение в характеристиках реальных ракетных двигателей: обычно для двигателей, работающих в атмосфере, указываются по два значения для удельного импульса и тяги – **в пустоте** и **на уровне моря**.

Зависимость характеристик двигателя от давления газа на срезе сопла p_e носит более сложный характер: как следует из уравнения (***), v_e растёт с убыванием p_e, а добавка $\frac{S_e}{\dot{m}}\left(p_e - p_0\right)$ – убывает, и при $p_e < p_0$ становится отрицательной.

При фиксированном расходе газа и давлении на входе в сопло величина p_e зависит только от площади среза сопла, которую обычно характеризуют относительной величиной – **степенью расширения** сопла – отношением площади конечного среза к площади критического сечения. Чем больше степень расширения сопла, тем меньше давление p_e, и тем больше скорость истечения газа v_e.

Рассматривая соотношение давления на срезе сопла и давления окружающей среды, выделяют следующие случаи.

1) $p_e = p_0$ – **оптимальный режим расширения** сопла, при котором удельный импульс достигает максимального значения (при прочих равных условиях). При этом, как следует из уравнения (***), удельный импульс становится численно равным скорости истечения газа v_e.

2) $p_e < p_0$ – **режим перерасширения**. Уменьшение степени расширения сопла (несмотря на уменьшение скорости истечения газа) приведёт к увеличению удельного импульса. При про-

ектировании ракетных двигателей первых ступеней ракет конструкторы часто сознательно идут на перерасширение, поскольку с набором ракетой высоты атмосферное давление падает, уравнивается с давлением на срезе сопла, и удельный импульс двигателя возрастает. Таким образом, жертвуя тягой в начале полёта, получают преимущество на последующих его стадиях, что, как показывают расчёты и практика, в сумме даёт выигрыш в конечной скорости ракеты.

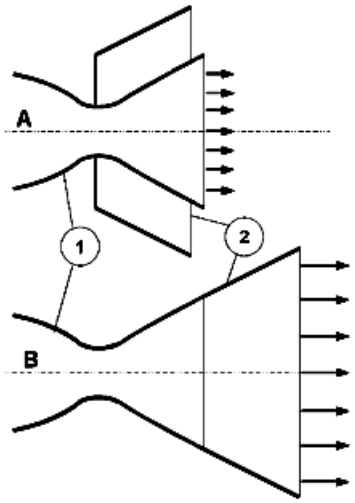
Однако, при значительном превышении давления окружающей среды над давлением в газовом потоке, в нём возникает обратная **ударная волна**, которая распространяется против потока со сверхзвуковой скоростью, тем большей, чем больше перепад давления на её фронте, что приводит к **срыву сверхзвукового течения газа в сопле** (полному или частичному). Это явление может стать причиной автоколебательного процесса, когда сверхзвуковое движение газа в сопле периодически возникает и срывается с частотой от нескольких герц до десятков герц. Для сопел ракетных двигателей, в которых происходят процессы большой мощности, эти автоколебания являются разрушительными, не говоря о том, что эффективность двигателя в таком режиме резко падает. Это накладывает ограничение на степень расширения сопла, работающего в атмосфере.

3) $p_e > p_0$ – **режим недорасширения**. Недорасширение означает, что не вся внутренняя энергия газа израсходована на его ускорение и, увеличив степень расширения сопла, можно добиться увеличения скорости истечения газа и удельного импульса. В пустоте (при $p_0 = 0$) полностью избежать недорасширения невозможно.

При подстановке $p_0 = 0$ в формулу для скорости истечения газов получается теоретический предел скорости истечения в пустоте, определяемый внутренней энергией газа:

$$v_{\max} = \sqrt{2\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{TR}{M_g}}\,.$$

К этому пределу асимптотически стремится скорость истечения при неограниченном увеличении степени расширения сопла, при этом увеличивается длина, диаметр выходного сечения, и, следовательно, вес сопла. Вышесказанное объясняет то обстоятельство, что ракетные двигатели, работающие в плотных слоях атмосферы, как правило, имеют степень расширения меньшую, чем двигатели, работающие в пустоте. Стремление добиться эффективной работы двигателя, как на Земле, так и на высоте заставляет конструкторов искать технические решения, позволяющие достигнуть эту цель. Одним из таких решений явился подвижная **сопловая насадка –** «продолжение» сопла, которое пристыковывается к нему по достижении ракетой разреженных слоёв атмосферы, увеличивая, таким образом, степень расширения сопла.



Регулирование степени расширения сопла с насадкой. 1 – собственно сопло Лаваля; 2 – сопловая насадка; А – положение насадки при работе в нижних, наиболее плотных, слоях атмосферы; В – положение насадки на большой высоте.

5. ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 5.1 Течение вязкой жидкости в трубе.

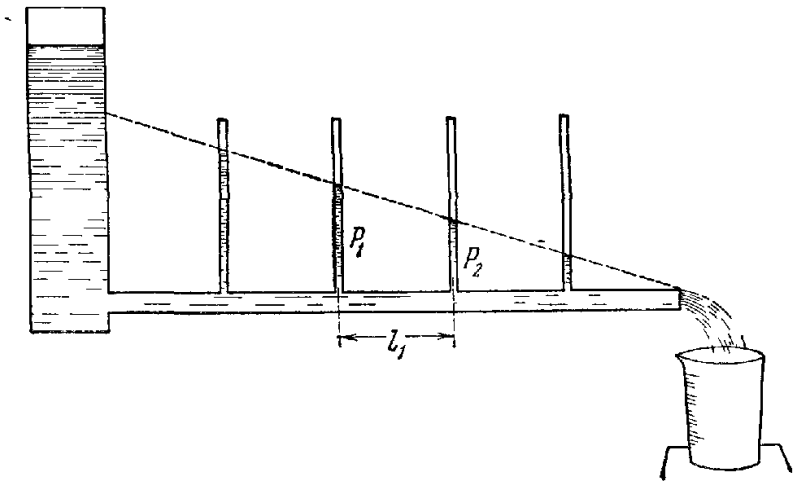
Силы вязкости пропорциональны изменению скорости потока в направлении, перпендикулярном к скорости, и, следовательно, они будут сказываться особенно резко там, где эти изменения скорости велики. При обтекании вязкой жидкостью твердых тел частицы жидкости, непосредственно прилегающие к телу, как бы «прилипают» к нему и имеют нулевую скорость относительно тела. Поэтому в непосредственной близости от поверхности твердого тела скорость потока нарастает от нулевого значения до некоторой величины. Дальше от тела изменения скорости потока сравнительно малы, и там совершенно ничтожно влияние вязкости.

Слой окружающей тело жидкости, в котором нарастает скорость и в котором влияние вязкости существенно, называется пограничным слоем. В некоторых случаях этот слой очень тонок и влиянием его можно пренебречь: течение вязкой жидкости или газа близко к тому течению, которое имело бы место при обтекании этого тела идеальной жидкостью, лишенной вязкости. В других случаях пограничный слой не будет тонким, и тогда уже нельзя пренебрегать вязкостью Так, например, при течении вязкой жидкости в узкой трубе такой слой может заполнить весь объем текущей жидкостью, и при анализе этого течения необходимо учитывать силы вязкости.

Произведем опыты с измерением распределения давления манометрическими трубками в- жидкости, текущей по горизонтальной трубе постоянного сечения. Если жидкость достаточно вязкая, например глицерин или какой-нибудь сироп, или труба достаточно тонкая, то давление будет падать равномерно вдоль трубы. Это можно видеть по тому, что уровни во всех равноотстоя- равноотстоящих друг от друга манометрических трубках лежат на наклонной прямой. Если бы жидкость была невязкой, то уровни во всех трубках были бы одинаковы, давление вдоль трубки было бы постоянным.

Действительно, жидкость можно считать вполне несжимаемой, поэтому скорость течения в каждом сечении трубки одинакова, — ведь трубка имеет постоянное сечение, а по уравнению Бернулли и давление должно было быть одинаковым. В данном случае в вязкой жидкости на частицу, кроме сил давления, действуют еще и силы вязкости, поэтому при стационарном течении с постоянной скоростью давление падает вдоль трубки тока.

Течение происходит вдоль трубы прямолинейно, скорости всех частиц направлены вдоль оси трубы, следовательно, силы вязкости будут действовать только в направлении оси трубы. Падение давления вдоль трубки тока уравновешивается силами вязкости, и поэтому скорость течения жидкости остается постоянной вдоль трубки.



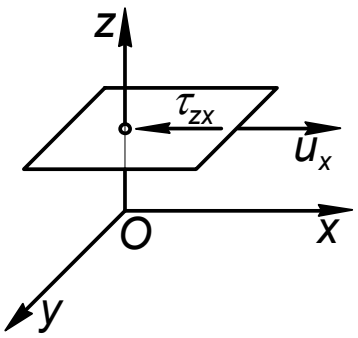
Модель вязкой жидкости.

При рассмотрении вязкой жидкости необходимо установить вид функциональной зависимости для напряжений. Под вязкой понимают жидкость, удовлетворяющую трем гипотезам: **линейности, однородности и изотропности**.

Гипотеза линейности.

Применим закон Ньютона к жидкости, движущейся параллельно плоскости *xOy*:

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$



Согласно теореме Гельмгольца о движении жидкой частицы, скорость угловой деформации относительно оси *y* $\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$.

Так как движение происходит в плоскости *xOy*, то $u_z = 0$ и $\gamma_y = \frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial z}$ и, следовательно, касательное напряжение $\tau_{zx} = 2\mu\gamma_y$.

Полученный результат иллюстрирует так называемый **закон трения Стокса**. Согласно этому закону, напряжения, возникающие в жидкости, в отличие от твердого тела, пропорциональны не величинам, а скоростям деформаций, и связаны с ними линейной зависимостью. При этом коэффициент пропорциональности остается неизменным и равным 2μ.

Кроме того, согласно закону Стокса касательные напряжения, как показано выше, пропорциональны скоростям угловой деформации, а нормальные – скорости линейной деформации, т.е. $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial z}$. Таким образом, можем записать

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\gamma_z = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \text{ и т.д.}$$

Рассмотрим теперь нормальные напряжения, возникающие от сил вязкости. Согласно закону Стокса, их можно записать в виде: $\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Полные нормальные напряжения отличаются тем, что помимо записанных выше в любой, как в вязкой, так и в невязкой жидкости, действуют и статические давления. Другими словами

$$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad p_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad p_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Выполним следующую операцию: из утроенной величины p_{xx} вычтем сумму ($p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$). Это дает:

$$3p_{xx} - \left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} \right) = -3p + 6\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \left[-3p + 2\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = 6\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - 2\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u},$$

откуда найдем $p_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$.

В качестве давления в вязкой жидкости принимают среднее арифметическое, т.е. $p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$. И, следовательно,

$$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u},\ p_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u},\ p_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u}.$$

Для несжимаемой жидкости $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, и выражения упрощаются.

Гипотеза однородности.

Предполагается, что вид линейной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций одинаков для всех точек пространства.

Гипотеза изотропности.

Вязкая жидкость предполагается изотропной, т.е. ее свойства в любом направлении одинаковы.

§ 5.2. Уравнение движения вязкой жидкости (уравнение Навье-Стокса).

Уравнения движения вязкой жидкости можно получить из уравнений движения в напряжениях, выполнив некоторые преобразования. Рассмотрим лишь одну проекцию этих уравнений: $\frac{du_x}{dt} = f_x + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$.

Как было показано при рассмотрении модели вязкой жидкости, нормальные напряжения

$$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{u}\,.$$

Для упрощения задачи будем считать жидкость несжимаемой ($\operatorname{div}\vec{u} = 0$), тогда

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\,.$$

Касательное напряжение $\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$ и $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$.

Аналогично $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x}$.

Суммируя $\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$ и группируя члены, получаем:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x}\right).$$

Третий член можно записать в виде:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\vec{u}\,.$$

Но жидкость несжимаема, и $\operatorname{div}\vec{u} = 0$. Таким образом получаем:

$$\frac{du_x}{dt} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

Выражение в скобках есть ни что иное, как оператор Лапласа $\nabla^2\vec{u}$, а $\frac{\mu}{\rho} = \nu$. Окончательно получаем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right).$$

Аналогично можно расписать и две другие проекции. Полученная система уравнений движения вязкой жидкости и носит название системы уравнений Навье-Стокса.

В векторной форме можно записать

$$\vec{a} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\nabla^2\vec{u}\,.$$

Это уравнение отличается от уравнения движения идеальной жидкости дополнительным членом ($\nu\nabla^2\vec{u}$), учитывающим действие сил вязкого трения.

Целью гидродинамического расчета является нахождение полей скоростей и давлений, т.е. в результате расчета должны быть найдены четыре величины: u_x, u_y, u_z и p. Принципиально это оказывается возможным, так как три уравнения Навье-Стокса (в проекциях) плюс

уравнение неразрывности образуют замкнутую систему. Плотность и вязкость, входящие в них, считаются известными, а проекции массовых сил (f_x, f_y, f_z) задаются условиями конкретной задачи.

С чисто математических позиций уравнения Навье-Стокса относится к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одно из наиболее неприятных из их свойств – нелинейность, обусловленная наличием конвективных членов ускорения. Следует отметить, что до настоящего времени вследствие практически непреодолимых математических трудностей не получено ни одного общего решения уравнений Навье-Стокса в их полном виде, т.е. при сохранении всех конвективных членов и всех членов, учитывающих вязкость. Известны лишь отдельные частные решения.

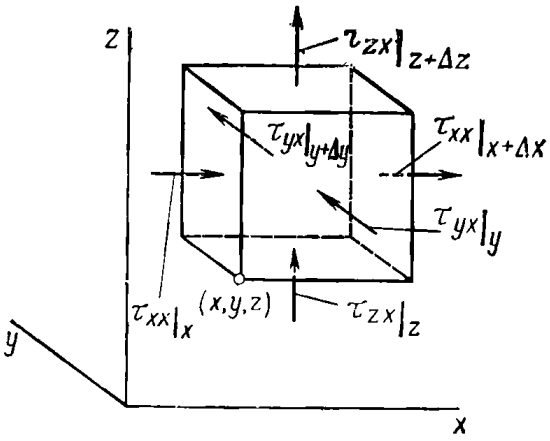
Одним из основных граничных условий при интегрировании является условие «прилипания», т.е. равенство нулю скорости жидкости на стенке.

§ 5.3. Вывод уравнения Навье-Стокса (на основе закона сохранения импульса)

Уравнение баланса количества движения для элемента объема $\Delta x \Delta y \Delta z$ жидкости можно написать в следующей форме:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{скорость}\\ \text{накопления}\\ \text{количества}\\ \text{движения}\\ \text{в элементе}\\ \text{объема}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{скорость}\\ \text{прихода}\\ \text{количества}\\ \text{движения}\\ \text{в элемент}\\ \text{объема}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{скорость}\\ \text{ухода}\\ \text{количества}\\ \text{движения}\\ \text{из элемента}\\ \text{объема}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{сумма сил,}\\ \text{действующих}\\ \text{на элемент}\\ \text{объема}\end{array}\right\}. \qquad (*)$$

В общем случае при неустановившемся состоянии жидкость может входить в элемент и выходить из него через все шесть граней в произвольном направлении.



Отметим, что данное уравнение является векторным, поэтому можно написать компоненты уравнения движения для каждого координатного направления **x**, **y** и **z** . Для этого составим выражения **x**-компонента для каждого члена уравнения, а **y**- и **z**-компоненты напишем по аналогии.

Выразим через параметры потока скорость прихода количества движения внутрь, элемента объема и ухода из него для **x**- компонента.

Различают два механизма переноса количества движения:

а) конвективный перенос осуществляется элементарными объемами движущейся жидкости;

б) молекулярный перенос осуществляется молекулами под действием градиента скорости.

Скорость прихода количества движения путем конвективного переноса через левую грань элемента, перпендикулярную оси x и расположенную на расстоянии x от начала координат,

$$\rho \omega_x \omega_x \big|_x \Delta y \Delta z ; \qquad (а)$$

скорость ухода через правую грань, расположенную на расстоянии x+Δx от начала координат,

$$\rho \omega_x \omega_x \big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z . \qquad (б)$$

Скорость прихода количества движения через переднюю грань элемента, перпендикулярную оси y,

$$\rho \omega_y \omega_x \big|_y \Delta x \Delta z . \qquad (в)$$

Подобным же образом можно составить выражения скоростей прихода или ухода количества движения для трех других граней элемента объема жидкости.

Скорость накопления количества движения (x-компонента) в элементе объема при конвективном переносе определяется суммированием для всех шести граней величин (а), (б), (в):

$$\Delta y\Delta z\left(\rho\omega_x\omega_x\big|_x-\rho\omega_x\omega_x\big|_{x+\Delta x}\right)+\Delta x\Delta z\left(\rho\omega_y\omega_x\big|_y-\rho\omega_y\omega_x\big|_{y+\Delta y}\right)+\Delta x\Delta y\left(\rho\omega_z\omega_x\big|_z-\rho\omega_z\omega_x\big|_{z+\Delta z}\right).$$

Скорость прихода количества движения (x-компонента) молекулярным переносом через левую грань элемента

$$\tau_{xx}\big|_x\,\Delta y\Delta z\,. \qquad (а')$$

а скорость ухода через правую грань

$$\tau_{xx}\big|_{x+\Delta x}\,\Delta y\Delta z\,. \qquad (б')$$

Скорость прихода через правую грань

$$\tau_{yx}\big|_y\,\Delta x\Delta z\,. \qquad (в')$$

Подобным же образом можно написать выражения для трех других граней элемента.

Отметим, что τ_{yx} изменяет количество движения (x-компонент) путем воздействия через грань, перпендикулярную оси y.

Суммируя выражения (а'), (б') и (в') для всех шести граней элемента, получим

$$\Delta y\Delta z\left(\tau_{xx}\big|_x-\tau_{xx}\big|_{x+\Delta x}\right)+\Delta x\Delta z\left(\tau_{yx}\big|_y-\tau_{yx}\big|_{y+\Delta y}\right)+\Delta x\Delta y\left(\tau_{zx}\big|_z-\tau_{zx}\big|_{z+\Delta z}\right).$$

Здесь τ_{xx} – нормальное напряжение на грани элемента, перпендикулярной оси x; оно направлено вдоль оси x. Это напряжение возникает от сил трения в вязкой жидкости под действием неравномерного распределения скорости в потоке. Величина τ_{yx} – тангенциальное, или касательное, напряжение на грани элемента, перпендикулярной оси y; оно направлено вдоль оси x. Это напряжение также возникает от сил трения.

Во многих случаях наиболее важными силами будут те, которые возникают от давления жидкости p, и гравитационные силы на единицу массы, обусловленные ускорением g. Проекция на ось x суммы этих сил, приложенных к элементу, равна

$$\Delta y\Delta z\left(p\big|_x-p\big|_{x+\Delta x}\right)+\rho g_x\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Давление в движущейся жидкости определяется уравнением состояния; оно является скалярной величиной.

Скорость накопления количества движения (x-компонент) элементом объема в целом [левая часть уравнения (*)] может быть представлена в форме

$$\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial\rho\omega_x}{\partial t}.$$

Теперь подставим найденные значения в уравнение (*), разделим все члены на $\Delta x\Delta y\Delta z$ и найдем их предел при Δx, Δy и Δz стремящихся к нулю. В результате получим x-компонент уравнения движения в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\omega_x=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\omega_x\omega_x+\frac{\partial}{\partial y}\rho\omega_y\omega_x+\frac{\partial}{\partial z}\rho\omega_z\omega_x\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x.$$

Подобным же образом можно получить y- и z- компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\omega_y=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\omega_x\omega_y+\frac{\partial}{\partial y}\rho\omega_y\omega_y+\frac{\partial}{\partial z}\rho\omega_z\omega_y\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zy}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\omega_z=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\omega_x\omega_z+\frac{\partial}{\partial y}\rho\omega_y\omega_z+\frac{\partial}{\partial z}\rho\omega_z\omega_z\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz}+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z.,$$

где $\rho\omega_x$, $\rho\omega_y$, $\rho\omega_z$ – компоненты вектора массой скорости $\rho\vec{\omega}$;

g_x, g_y и g_z –компоненты гравитационного ускорения;

$\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$ – компоненты вектора $\vec{\nabla}p$, известного как grad p;

$\rho\omega_x\omega_x$, $\rho\omega_x\omega_y$, $\rho\omega_x\omega_z$, $\rho\omega_y\omega_z$ и т.д. – девять компонентов конвективного потока количества движения $\rho\vec{\omega}\vec{\omega}$ продукта двух элементов $\rho\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}$;

τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx} и т.д. – девять компонентов τ, известного как тензор напряжения.

Эти три уравнения можно представить в более удобной векторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\vec{\omega} = -\left[\vec{\nabla}\rho\vec{\omega}\vec{\omega}\right] - \vec{\nabla}p - \left[\vec{\nabla}\cdot\vec{\tau}\right] + \rho\vec{g} \quad \text{.....(**)}$$

{скорость возрастания количества движения на единицу обьема} {скорость прироста количества движения за счет конвекции на единицу обьема} {сила давления к элементу на единицу обьема} {скорость прироста количества движения за счет молекулярного переноса на единицу обьема} {гравитационная сила к элементу на единицу обьема}.

Здесь члены $\left[\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{\omega}\vec{\omega}\right]$ и $\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{\tau}\right]$ не являются простыми дивергенциями, потому что величины $\rho\vec{\omega}\vec{\omega}$ и $\vec{\tau}$ представляют собой тензоры. Величина $\left[\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{\omega}\vec{\omega}\right]$ – скорость потери количества движения (вектор) потоком жидкости на единицу объема. Уравнение (**) может быть преобразовано с помощью уравнения неразрывности следующим образом:

$$\rho\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) + \rho g_x. \qquad (***)$$

Аналогично можно получить y- и z-компоненты. Когда все три компонента будут объединены в одно векторное уравнение, получим

$$\rho\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\vec{\nabla}p - \left[\vec{\nabla}\cdot\tau\right] + \rho\vec{g}, \qquad (****)$$

{ускорение массы на единицу обьема} {силы давления, действующие на элемент на единицу обьема} {силы трения от вязкости, действующие на элемент на единицу обьема} {силы гравитации, действующие на элемент на единицу обьема}.

В этой форме уравнение движения устанавливает, что малый элемент объема, перемещающийся с жидкостью, ускоряется потому, что на него действуют силы. Уравнение баланса количества движения полностью эквивалентно второму закону Ньютона.

Исключим из уравнения (****) член $\left(\left(\vec{\nabla}\cdot\tau\right)\right.$. Для этого используем следующие зависимости:

$$\tau_{xx} = -2\mu\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\right);\ \tau_{yy} = -2\mu\frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\right);\ \tau_{zz} = -2\mu\frac{\partial\omega_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\right);$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y} + \frac{\partial\omega_y}{\partial x}\right);\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial z} + \frac{\partial\omega_z}{\partial y}\right);\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z} + \frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right).$$

В основе этих зависимостей лежит закон трения Стокса, который гласит: силы, возникающие при деформации капельных жидкостей и газов, пропорциональны скорости деформации. Выход этих уравнений громоздок и здесь не приводится.

Система из представленных шести уравнений **упрощается** для случая, когда поток движется в направлении оси x и ограничен двумя пластинами, перпендикулярными оси y, так что **ω_x есть функция только координаты y**. В этом случае

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xy} = -\mu\left(\frac{d\omega_x}{\partial y}\right).$$

Подставим уравнения в уравнение (***) и, распространяя полученный результат на y- и z-компоненты, получим

$$\rho\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial\omega_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y} + \frac{\partial\omega_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial x} + \frac{\partial\omega_x}{\partial z}\right)\right] + \rho g_x;$$

$$\rho\frac{d\omega_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y} + \frac{\partial\omega_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial\omega_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y} + \frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\right] + \rho g_y;$$

$$\rho\frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y} + \frac{\partial\omega_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y} + \frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial\omega_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\right)\right] + \rho g_z.$$

Эти уравнения вместе с уравнениями неразрывности, уравнением состояния $p = p(\rho)$, зависимостью вязкости от плотности $\mu = \mu(\rho)$ и краевыми условиями полностью определяют давление, плотность и компоненты скорости в жидкости, текущей изотермически.

Большое значение для практических расчетов имеют **частные случаи** полученных уравнений. Для потока жидкости с постоянной плотностью ρ и вязкостью μ справедливо $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\right) = 0$ и уравнения (****) можно представить в виде

$$\rho\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\vec{\nabla}p - \mu\vec{\nabla}^2\cdot\vec{\omega} + \rho\vec{g}.$$

В декартовых координатах оно имеет вид

$$\rho\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2\omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_x}{\partial z^2}\right) + \rho g_x;$$

$$\rho\frac{d\omega_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2\omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_y}{\partial z^2}\right) + \rho g_y; \quad \rho\frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_z}{\partial z^2}\right) + \rho g_z;$$

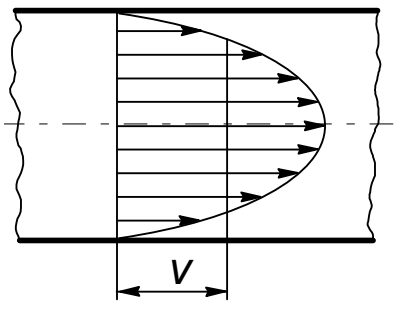
Это есть уравнение Навье-Стокса.

§ 5.4. Уравнение Бернулли для вязкой жидкости.

Одномерными называются течения, в которых основные параметры потока зависят лишь от одной координаты, направление которой совпадает с направлением вектора скорости. Использование одномерных течений позволяет достаточно просто решать многие важные прикладные задачи.

Расход потока и средняя скорость.

Согласно струйной модели потока Эйлера поток представляется состоящим из бесконечного множества струек жидкости. При рассмотрении потока поперечные сечения в нем выбираются так, чтобы пересекающие их линии тока были нормальны к ним. В этом случае сечение потока называется «живым». Очевидно, что если линии тока параллельны, то живое сечение будет плоским.



Элементарный объемный расход несжимаемой жидкости

может быть определен как $dQ = udS$, где u – скорость в сечении струйки, dS – площадь ее поперечного сечения.

В соответствии со струйной моделью расход потока $Q = \iint_S udS$.

Рассмотрим движение жидкости в трубе круглого поперечного сечения. В силу тормозящего действия сил вязкого трения распределение скоростей в поперечном сечении трубопровода (эпюра скорости) будет иметь вид, показанный на рис. Для удобства перейдем к цилиндрическим координатам (r, θ), где θ – полярный угол.

В этой системе $dS = rdrd\theta$. Таким образом, $Q = \int_0^{2\pi}\int_0^R u(r)\,drd\theta = 2\pi\int_0^R u(r)\,rdr$.

Запись $u(r)$ обозначает, что местные скорости в сечении трубы изменяются по радиусу. Другими словами, $u(r)$ описывает закон изменения скорости, т.е. является математическим описанием эпюры.

Рассмотрим, как решается эта задача в механике жидкости. С чисто математических позиций интеграл в правой части выражает объем эпюры скорости. Представим теперь, что при неизменном расходе Q в силу каких-то причин жидкость потеряла вязкость. Это, очевидно, приведет к тому, что эпюра начнет перестраиваться и, так как исчезнут силы вязкого трения, то все частицы жидкости будут двигаться с какой-то одинаковой скоростью v, а так как по условию расход остается тем же, то объем новой эпюры равен объему старой. При этом условии $u(r) = v = \text{const}$, получаем $Q = 2\pi\int_0^R vrdr = 2\pi v\int_0^R rdr = 2\pi v\frac{R^2}{2} = vS$.

Скорость v, введенная таким образом носит название **средней** либо **среднерасходной скорости**. Следовательно, формально средняя скорость может быть определена как фиктивная скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы жидкости для того, чтобы расход был равен его истинному значению.

С физической точки зрения использование понятия средней скорости, одинаковой для всех частиц жидкости в сечении, позволяет свести задачу о движении жидкости в трубах и каналах к одномерной.

Слабодеформированные потоки и их свойства.

Рассмотрим движение в трубе с несколько иных позиций. Если считать его установившимся, то все производные по времени, входящие в уравнение движения, равны нулю. Если исходить из одномерной модели, то равны нулю и компоненты скорости u_y и u_z. При этом из уравнения неразрывности следует, что $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$. Применительно к этому случаю система дифференциальных уравнений Навье-Стокса принимает вид:

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) = 0, \quad f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Последние два уравнения совпадают с уравнениями гидростатики, а это означает, что в плоскости поперечного сечения движущейся жидкости давления распределены по гидростатическому закону $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$.

Этот вывод приближенно справедлив для слабодеформированных потоков. Под слабодеформированными понимают потоки, у которых угол расхождения линий тока мал, а радиус кривизны – велик, т.е. понятие это носит скорее качественный, чем количественный характер.

Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.

Уравнение Навье-Стокса в подавляющем большинстве случаев не поддаются интегрированию. Одним из путей решения этой задачи, оказавшимся наиболее плодотворным, явился

путь обобщения уравнения Бернулли, т.е. распространения его на поток вязкой жидкости. В основу этого метода, как уже отмечалось, положена струйная модель – представление о потоке как о бесконечно большой сумме струек, протекающих через сечение.

Исходим из того, что движение установившееся и в рассматриваемом сечении поток слабо деформирован. Определим энергию, проносимую секундной массой струйки через сечение (т.е. мощность струйки). Эта величина может быть найдена как произведение полной удельной энергии струйки ($gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}$) на ее массовый расход ($\rho u dS$).

Таким образом $dN=\left(gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)\rho u dS$.

Секундная энергия (мощность) потока в соответствии со струйной моделью

$$N=\iint\limits_S\left(gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)\rho u dS \text{ либо } N=\rho\iint\limits_S\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)u dS+\frac{\rho}{2}\iint\limits_S u^3 dS .$$

Так как поток слабодеформированный, то $gz+\frac{p}{\rho}=\text{const}$ и первый интеграл принимает вид $\rho\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)\iint\limits_S u dS=\rho\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)Q$. Тогда $N=\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho Q+\frac{\rho}{2}\iint\limits_S u^3 dS$.

По физическому смыслу второй член представляет собой кинетическую энергию секундной массы.

Введем среднюю скорость. Разделим обе части уравнения на массовый расход ρQ, т.е. отнесем это соотношение к единице массы. Таким образом, имеем

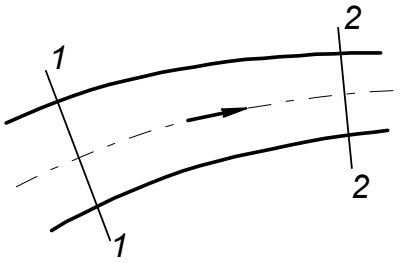
$$E=gz+\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2Q}\iint\limits_S u^3 dS ,$$

где $E=\frac{N}{\rho Q}$ – удельная энергия

Разделив и умножив третий член на квадрат средней скорости v^2, с учетом того, что $Q=vS$, получим $E=gz+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\frac{1}{v^3S}\iint\limits_S u^3 dS$.

Обозначим выражение $\frac{1}{v^3S}\iint\limits_S u^3 dS=\alpha$; тогда $E=gz+\frac{p}{\rho}+\frac{\alpha v^2}{2}$.

Величина α носит название коэффициента кинетической энергии, корректива скорости либо коэффициента Кориолиса.



Рассмотрим движение потока вязкой жидкости в канале от сечения 1-1 к сечению 2-2. Обозначим удельную энергию потока в сечении 1-1 через E_1, а в 2-2 – E_2.

Так как жидкость вязкая, то процесс ее перемещения сопровождается диссипацией энергии, т.е. какая-то ее часть расходуется на преодоление сил внутреннего трения и превращается в тепло, следовательно, $E_2<E_1$. Поэтому баланс энергии для выбранных сечений должен быть записан в виде $E_1=E_2+\Delta e$, где Δe – потери энергии.

Раскрывая значения E_1 и E_2, получаем:

$$gz_1+\frac{p_1}{\rho}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2}=gz_2+\frac{p_2}{\rho}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2}+\Delta e .$$

Это и есть энергетическая форма **уравнения Бернулли для потока вязкой жидкости**.

Для газовых потоков (без учета сжимаемости) обычно используют уравнение Бернулли в форме давлений $\rho g z_1 + p_1 + \frac{\rho \alpha_1 v_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \frac{\rho \alpha_2 v_2^2}{2} + \Delta p$,

где Δp – потери давления.

Физический смысл коэффициента Кориолиса.

Как уже упоминалось, коэффициент α носит название коэффициента кинетической энергии, корректива скорости, коэффициента Кориолиса. Выясним физический смысл этой величины.

В уравнении Бернулли кинетическая энергия секундной массы потока определяется истинным распределением скоростей в сечении, т.е. $E_к^{ист} = \frac{\rho}{2}\iint\limits_S u^3 dS$.

Если бы скорости в сечении были бы распределены равномерно, то $u = v = \text{const}$ (v – средняя скорость потока), и кинетическая энергия потока была бы

$$E_к^{ср} = \frac{\rho}{2}\iint\limits_S v^3 dS = \frac{\rho}{2} v^3 \iint\limits_S dS = \frac{\rho v^3 S}{2}.$$

Таким образом, $\frac{E_к^{ист}}{E_к^{ср}} = \frac{1}{v^3 S}\iint\limits_S u^3 dS = \alpha$.

Следовательно, коэффициент Кориолиса представляет собой отношение кинетической энергии потока, вычисленной по истинному распределению скоростей, к кинетической энергии, определенной по средней скорости.

Пример. Рассмотрим гипотетический «поток», состоящий из двух струек, скорости которых $u_1 = 2$ м/с и $u_2 = 4$ м/с и вычислим коэффициент Кориолиса.

Истинная кинетическая энергия (сумма кинетических энергий струек)

$$E_к^{ист} = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{4}{2} + \frac{16}{2} = 10\frac{м^2}{с^2}.$$

Средняя скорость $v = \frac{u_1 + u_2}{2} = 3\frac{м}{с}$; $E_к^{ср} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{9+9}{2} = 9\frac{м^2}{с^2}$

и $\alpha = \frac{E_к^{ист}}{E_к^{ср}} = \frac{10}{9}$, т. е. $\alpha > 1$ (истинная кинетическая энергия больше средней).

Легко убедится, что чем больше неравномерность распределения скоростей, тем больше коэффициент Кориолиса. Так, если $u_1 = 2$ м/с, а $u_2 = 6$ м/с, то $\alpha = 5/4$. Очевидно, что минимальное значение $\alpha = 1$ будет при равномерном распределении скоростей. Действительно, пусть $u_1 = u_2 = 4$ м/с, тогда $E_к^{ист} = 16\frac{м^2}{с^2}$ и $E_к^{ср} = 16\frac{м^2}{с^2}$. Следовательно, можно утверждать, что α корректирует ошибку, возникающую при вычислении кинетической энергии при замене истинного распределения скоростей условным равномерным.

Забегая несколько вперед, отметим, что в природе существует два принципиально отличающихся режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. При ламинарном течении в трубах $\alpha_л = 2$, при турбулентном $\alpha_T = 1.02...1.04$. Это позволяет утверждать, что в турбулентном потоке скорости в поперечном сечении распределены существенно равномерней, чем в ламинарном (эпюра турбулентного потока более «наполненная», ближе к прямоугольной по сравнению с эпюрой ламинарного потока).

Таким образом, использование струйной модели потока и сведение его к одномерному путем введения представления о средней скорости позволяют получить одно из основных уравнений гидродинамики – уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости. Принципиально, с помощью этого уравнения можно рассчитать движение жидкости в каналах при установившемся течении и условии, что в выбранных сечениях поток слабодеформированный

либо параллельно-струйный. Однако для полного решения задачи необходимо уметь определять потери напора (Δp), возникающие при движении жидкости в каналах.

§ 5.5. Классификация течений жидкости. Устойчивость движения.

В 80-х годах XIX-го столетия работы, связанные с изучением сопротивления движению жидкости при течении в трубах, зашли в тупик. Опыты одних исследователей (немецкий инженер-строитель Г.Хаген, французский врач Ж .Пуазейль) показали, что сопротивление линейно зависит от скорости. В то же время не менее тщательные и точные опыты французского инженера А.Дарси свидетельствовали, что сопротивление пропорционально квадрату скорости. Возникшее противоречие тормозило развитие инженерной практики и требовало разрешения.

Наблюдения, выполненные Г.Хагеном еще в 1855 г. показали, что характер движения в трубе изменяется при достижении каких-то определенных условий. На это же со всей определенностью было указано в 1870 году нашим соотечественником проф. Н.Н.Петровым при разработке им теории гидродинамической смазки. Эта гипотеза нашла блестящее подтверждение в опытах английского физика Осборна Рейнольдса, результаты которых были опубликованы в 1883-1884 годах и имели далеко идущие последствия для всей механики жидкости.

Идея опытов отличалась ясностью и предельной простотой. В стеклянную трубу, скорость движения воды в которой могла регулироваться, Рейнольдс вводил струйки красителя. При малых скоростях струйки двигались параллельно оси трубы и вся картина представлялась неподвижной. При увеличении скорости воды за счет открытия крана картина изменялась, струйка красителя сначала приобретала синусоидальную форму, а дальнейшее увеличение скорости приводило к ее размыву, что свидетельствовало о беспорядочном движении.

Первый режим – спокойный, слоистый без перемешивания частиц был назван ламинарным. Второй – бурный, хаотичный, приводящий к перемешиванию частиц, позднее по предложению У. Томсона (Лорда Кельвина) получил название турбулентного. Как истинный ученый, Рейнольдс не остановился на констатации факта. Он предположил, что увеличении скорости потока приводит к возникновению каких-то возмущений, дестабилизирующих его структуру. Если понимать под устойчивостью способность потока подавлять возникающие в нем малые возмущения, то переход к турбулентному режиму может рассматриваться как потеря устойчивости. При этом из двух категорий сил, действующих на жидкие частицы, вязкого трения и инерции, первые играют стабилизирующую роль, а вторые – дестабилизирующую. Таким образом, отношение этих сил может служить критерием (мерой) устойчивости потока, т.е.

$$Мера\ устойчивости = \frac{сила\ инерции}{сила\ вязкого\ трения}$$

В дальнейшем это соотношение получило название числа Рейнольдса, т.е. $Re = \frac{\rho u l}{\mu}$,

где u - характерная скорость течения; l - характерный линейный размер.

Оригинальное толкование этого комплекса дано самим Рейнольдсом. Он писал: «Жидкость можно уподобить отряду воинов, ламинарное течение – монолитному походному строю, турбулентное – беспорядочному движению. Скорость жидкости – скорость отряда, диаметр трубы – величина отряда. Вязкость – дисциплина, а плотность – вооружение. Чем больше отряд, чем быстрее его движение и тяжелей вооружение, тем раньше распадается строй».

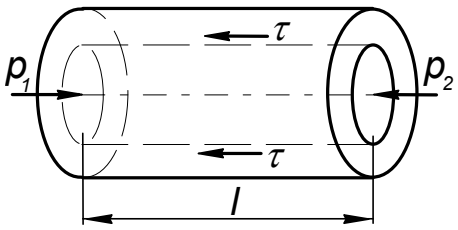
Для круглых труб характерный размер – диаметр, характерной скоростью является средняя скорость. С учетом этого, имея в виду, что $\mu/\rho = \nu$ число Рейнольдса $Re = \frac{vd}{\nu}$.

Одним из наиболее существенных результатов, обнаруженных в опытах Рейнольдса являлось то, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходил при одном и

том же численном значении введенного им критерия устойчивости, названного впоследствии критическим значением числа Рейнольдса ($Re_{кр}$). По данным многочисленных опытов в круглых трубах $Re_{кр} \approx 2300$. Это так называемое нижнее критическое число Рейнольдса, которое получают, если не принимать специальных мер по стабилизации потока. При принятии мер, переход к турбулентному течению можно существенно затянуть. При выполнении технических расчетов принято считать, что если число Рейнольдса, вычисленное по фактическим значениям параметров, меньше критического, то режим ламинарный, и наоборот.

§ 5.6. Закономерности ламинарного режима течения в трубах.

При рассмотрении уравнений движения вязкой жидкости (уравнений Навье-Стокса) отмечалось, что интегрирование их в большинстве случаев связано с непреодолимыми математическими трудностями. Однако известны и исключения. К числу их относится ламинарное течение между параллельными пластинами, одна из которых движется с какой-то скоростью *u*. Это так называемое течение Куэтта.



Другим примером, интересующим нас в данном случае, является установившееся течение в круглой трубе, происходящее под действием постоянного перепада давлений – течение Пуазейля. Опыты, выполненные Пуазейлем с трубкой диаметром 0,14 мм согласовывались с полученным им соотношением до тех пор, пока длина трубки составляла 51 мм; при уменьшении длины эта зависимость не соблюдалась. Этот факт и объясняется переходом от ламинарного к турбулентному режиму течения.

Рассмотрим подробнее стационарное течение вязкой жидкости в прямой горизонтальной трубе постоянного сечения, происходящее под действием постоянного перепада давления. Радиус трубопровода *R*. Давление в каждом поперечном сечении можно считать одинаковым. Если этого не было бы, то линии тока изгибались бы или возникали бы течения поперек трубы. Все частицы жидкости, прилегающие к стенке круглой трубы, прилипли к ней и имеют скорость, равную нулю, кольцевой слой, прилегающий к ним, из условия симметрии должен иметь по всей окружности одинаковую скорость. Если представим себе жидкость разделенной на достаточно тонкие концентрические кольцевые слои, то скорость в каждом таком слое одинакова; поэтому величину скорости течения можно полагать только функцией расстояния r данной частицы от оси трубы.

Запишем уравнение Навье-Стокса:

$$\rho_g \frac{du}{dt} = \rho_g g - \nabla p + \mu \Delta u ,$$

где *u* – скорость распространения пламени относительно газа вдоль оси z, *g* – ускорение свободного падения, *p* – давление, ρ_g – плотность газа, μ – динамическая вязкость среды (газа).

Допустим стационарность скорости потока, т. е. $u = const \neq u(t)$ и зависимость ее только от радиальной координаты $u = u(r)$. Тогда уравнение Навье-Стокса в цилиндрических координатах примет вид:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Умножим правую и левую часть уравнения на r :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} r + \mu \left(r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} r + \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial u}{\partial r} r \right).$$

Дополним граничными условиями на стенках и в центре трубы:

$$\begin{cases} u(r=r_s)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}(r=0)=0 \end{cases}.$$

Учтём постоянство профиля давления вдоль трубы $\dfrac{\partial p}{\partial z} \equiv const = C_1 < 0$.

Тогда уравнение Навье-Стокса видоизменится следующим образом: $C_1 r = \mu \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} r\right)$,

проинтегрировав которое получим $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{C_1}{\mu}\dfrac{r}{2} + C_2$.

С учетом граничного условия в центре трубы, откуда $C_2 = 0$, $\dfrac{\partial u_z}{\partial r} = \dfrac{C_1}{\mu}\dfrac{r}{2}$, проинтегрировав которое получим $u = \dfrac{C_1}{\mu}\dfrac{r^2}{4} + C_3$.

Применим граничное условие на стенке $u = \dfrac{r_s^2}{4\mu}\left(-\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)\left(1-\dfrac{r^2}{r_s^2}\right)$:

Т.о. окончательное выражение примет вид **формулы Пуазейля**

$$u(r) = u_{\max}\left(1-\frac{r^2}{r_s^2}\right), \quad u_{\max} = \frac{r_s^2}{4\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

Из чего следует, что в поперечном сечении трубы скорости распределены по параболическому закону, т.е. эпюра скорости представляет собой параболоид вращения.

Таким образом, отношение скорости в любой точке к скорости на оси не зависит от расхода, рода жидкости и материала стенок трубы: при всех значениях $Re < Re_{кр}$ оно одинаково.

Определим расход, протекающий через трубопровод. При введении понятия о средней скорости было показано, что $Q = 2\pi\int_0^R u(r) r dr = \dfrac{2\pi u_{\max}}{r_s^2}\int_0^R \left(r_s^2 - r^2\right) r dr$,

где $u(r)$ – уравнение эпюры скорости.

Выполнив интегрирование можно получить $Q = \dfrac{\pi u_{\max} r_s^2}{2} = \dfrac{1}{2} u_{\max} S = vS$.

Из чего следует, что $u_{\max} = 2v$, где v – средняя скорость потока.

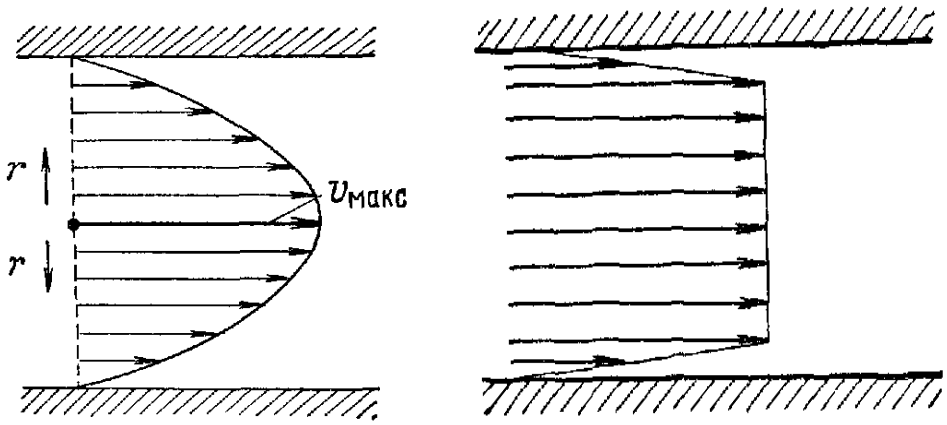
Потери давления при ламинарном течении в трубе.

Раскрывая значение $u_{\max}$ и предполагая, что $-\dfrac{\partial p}{\partial x} \approx \dfrac{\Delta p}{L}$ (где L – длина трубы), получаем выражение для определения потерь давления при ламинарном режиме течения в круглой трубе $\Delta p = \dfrac{8v\mu L}{r_s^2}$, либо, заменяя радиус диаметром, $\Delta p = \dfrac{32\mu L v}{d^2}$.

Полученное соотношение носит название **формулы Хагена-Пуазейля**. Для потерь напора с учетом того, что $\Delta p = \rho g \Delta h$, формула принимает вид $\Delta h = \dfrac{32\mu l v}{\rho g d^2}$.

Важнейший вывод, следующий из этого соотношения, можно сформулировать так: потери давления (напора) при ламинарном течении в круглых трубах линейно зависят от средней скорости.

Выполним некоторые формальные преобразования формулы Хагена-Пуазейля. Умножим числитель и знаменатель на $2v$, что дает $\Delta h = \dfrac{32\cdot 2\nu}{vd}\dfrac{l}{d}\dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{64\nu}{vd}\dfrac{l}{d}\dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{64}{Re}\dfrac{l}{d}\dfrac{v^2}{2g}$.



Таким образом, в формуле $\Delta h = f\left(v^m\right)$ при ламинарном течении $m = 1$.

Напомним, что течение жидкости в цилиндрической трубе, при котором скорости частиц всюду направлены вдоль оси, называется ламинарным или слоистым. Такое течение наблюдается при небольшом значении скорости потока вязкой жидкости. С увеличением скорости потока, с увеличением перепада давления на концах трубы, течение принципиально изменяет свой характер: вместо спокойного слоистого течения наблюдается турбулентное, или завихренное течение.

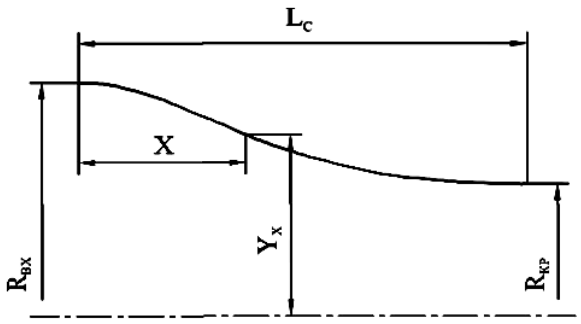
При стационарном турбулентном движении скорость в данном месте не остается постоянной по величине и направлению, а совершает быстрые беспорядочные колебания как по величине, так и по направлению. Но среднее значение скорости будет постоянной определенной величиной, направленной вдоль оси трубки. Поэтому в завихренном потоке чаще всего определяют среднее значение скорости.

При завихренном движении средняя скорость почти по всему сечению трубы остается почти постоянной и только вблизи стенок быстро спадает до нуля, пограничный слой вблизи стенок занимает сравнительно небольшою долю потока, а в центре поле скоростей почти однородно и более похоже на то, которое должно быть в трубе при отсутствии вязкости жидкости. При слоистом (ламинарном) движении нет четкого пограничного слоя, во всех частях трубы поле скоростей изменяется из-за сил вязкости так же, как вблизи стенок, можно даже сказать, что в этом случае пограничный слой занимает весь поток жидкости.

Сопло Витошинского – профилированный канал с плавной формой проточной части, позволяющий получать равномерные эпюры скорости из предварительно параболического ламинарного профиля. Форма канала образована вращением кривой, описываемой кривой Витошинского:

$$y(x) = \frac{R_{вх} R_{кр}}{\sqrt{R_{вх}^2 - \left(R_{вх}^2 - R_{кр}^2\right)\dfrac{\left(1-\xi\right)^2}{\left(1+\xi/3\right)^3}}},$$

где $\xi = \left(x/L\right)^2$, L – длина сопла, $R_{вх}$ – радиус на входе сопла, $R_{кр}$ – радиус сопла в критическом (выходном) сечении.



§ 5.6. Закономерности турбулентного режима течения жидкости в трубах.

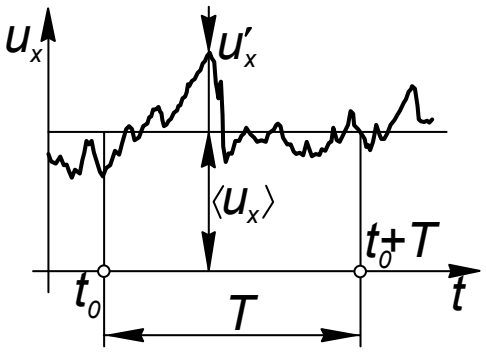
Теория турбулентных течений представляет собой важнейший для практики, но и наиболее сложный раздел гидродинамики.

Основной, определяющей чертой турбулентного движения является его хаотичность. Это означает, что скорость (и другие параметры) в любой точке потока зависят от времени. Более того, эти флуктуации скорости в данной точке также являются хаотическими.

Впервые гипотеза о физическом механизме турбулентного перемешивания была высказана английским ученым Л. Ричардсоном в 1922 г. Условно турбулентное движение принято рассматривать как совокупное движение отдельных структур, называемых молями либо вихрями, совершающими как поступательное, так и вращательное движение. По Ричардсону развитая турбулентность представляет собой иерархию «вихрей». При зарождении вихри имеют большие размеры, соизмеримые с размерами канала. Затем за счет потери устойчивости они распадаются на более мелкие, передавая при этом им свою энергию. Возникает каскадный процесс, в котором энергия осредненного потока последовательно передается вихрям все более мелких масштабов. В конечном итоге образуются вихри минимального масштаба, которые далее не разрушаются. При этом нижний размер вихря (турбулентного образования) определяется вязкостью среды. В самых малых вихрях кинетическая энергия турбулентности за счет сил вязкого трения превращается в тепло, т.е. происходит диссипация энергии. Это указывает на необратимый характер процесса.

Из сказанного ясно, что турбулентное движение по своей физической природе является движением неустановившимся. С другой стороны, непосредственные измерения свидетельствуют, что при турбулентном характере потока в нем можно выделить основную, так называемую регулярную часть, на которую накладывается случайная часть движения.

На рис. показан типичный вид экспериментально снятой зависимости проекции скорости в какой-то точке потока от времени при сохраняющихся неизменными граничных условиях.



Как следует из графика, особенностью этого процесса является его непериодичность, при этом $u'_x = u_x - \langle u_x \rangle$, где $\langle u_x \rangle$ – осредненная скорость, представляющая регулярную часть; u'_x – пульсационная скорость, разность между мгновенным и регулярным значением скорости.

Аналогичные соотношения можно записать и для других компонент.

Таким образом, осредненная скорость – это какое-то устойчивое значение, вокруг которого происходит изменение рассматриваемой проекции скорости (в данном случае). Все сказанное в равной мере относится и к другим параметрам, в частности, к давлению.

Наиболее важной характеристикой течения при его расчете является поле скоростей. Но, как показано выше, в любой точке потока при турбулентном течении скорость выступает как случайная величина, что исключает возможность записи начальных условий для системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса, т.е. оказывается невозможной математическая постановка задачи. Именно это и приводит к необходимости перехода к какому-то осредненному описанию, использующему не истинные, а осредненные величины скоростей и давлений. Осреднение скоростей и давлений производится путем интегрирования функций $u_x(x,y,z,t)$, $u_y(x,y,z,t)$, $u_z(x,y,z,t)$, $p(x,y,z,t)$ по промежутку времени T, величина которого намного больше так называемого характерного времени турбулентных пульсаций. Это время определяется как частное от деления масштаба l на скорость турбулентных пульсаций. Под масштабом турбулентных пульсаций понимают расстояние, на котором пульсации претерпевают заметное изменение. Так, например, при турбулентном движении в трубах наи-

больший масштаб пульсаций равен диаметру трубы. Таким образом, осредненная компонента скорости, например, $\langle u_x \rangle$: $\langle u_x \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u_x(t)\,dt$.

Аналогичное соотношение можно записать и для давления. При этом, поскольку флуктуации (пульсации) имеют как положительный, так и отрицательный знак, то

$$\langle u'_x \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u_x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u'_x(t)\,dt \equiv 0.$$

Ясно также, что $\langle u'^2_x \rangle \neq 0$. Если в данной точке потока $\langle u'^2_x \rangle = \langle u'^2_y \rangle = \langle u'^2_z \rangle$, то турбулентность называют изотропной, а если это условие соблюдается во всех точках, то она называется еще и однородной.

Уравнения Рейнольдса.

Сложность турбулентного движения делает невозможным строгое рассмотрение течений при заданных граничных условиях. Одной из возможных альтернатив является переход от истинной картины, детали которой нам неизвестны, к рассмотрению осредненного турбулентного течения, т.е., по существу, замена принципиально неустановившегося движения на квазиустановившееся. Этот переход был предложен О.Рейнольдсом. Суть его сводится к тому, что в уравнениях движения вязкой жидкости (уравнениях Навье-Стокса) и уравнении неразрывности истинные значения параметров по определенным правилам заменяются их осредненными значениями. Получаемая таким образом новая система уравнений носит название уравнений Рейнольдса.

Наиболее существенным результатом этой операции является то, что вследствие нелинейности уравнений Навье-Стокса в уравнениях Рейнольдса появляются дополнительные члены, которые получили название напряжений Рейнольдса. Для наиболее простого плоскопараллельного течения эти напряжения имеют вид: $\tau_T = -\rho\langle u'_x u'_y \rangle$,

где (угловые скобки - символ осреднения).

Таким образом, в осредненном турбулентном потоке к обычным вязкостным напряжениям добавляются напряжения, зависящие от пульсации скорости. Физически это объясняется тем, что между разными участками турбулентного потока происходит обмен количеством движения, обусловленный перемешиванием частиц. Перенос количества движения вызывает дополнительное торможение либо ускорение отдельных масс жидкости, т.е. приводит к возникновению турбулентных напряжений.

Поскольку исходная система уравнений являлась замкнутой (четыре уравнения и четыре неизвестных – u_x, u_y, u_z, p), то появление дополнительных членов в уравнениях Рейнольдса приводит к тому, что она превращается в незамкнутую. Возникает новая проблема «замыкания системы уравнений Рейнольдса».

Полуэмпирические теории турбулентности.

Современная теория турбулентности не располагает возможностями теоретическим путем получить уравнения для определения напряжений Рейнольдса. Поэтому единственным способом, позволяющим замкнуть систему, является привлечение полуэмпирических соотношений, связывающих эти напряжения с осредненными по времени компонентами скорости $\langle u_x \rangle$, $\langle u_y \rangle$ и $\langle u_z \rangle$. Угловые скобки вокруг *u,* символизирующие операцию осреднения.

Один из первых исследователей турбулентности, Ж. Буссинеск, предложил выражать турбулентные напряжения аналогично закону трения Ньютона, т.е. $\tau_T = -\rho\langle u'_x u'_y \rangle = \eta\frac{d\langle u \rangle}{dy}$,

где η – турбулентная вязкость.

В отличие от физической, турбулентная вязкость характеризует не физические свойства жидкости, а статистические свойства пульсационного движения. Поэтому она не является постоянной величиной, а может изменяться как в пространстве, так и во времени. Важно

также отметить, что даже на небольших удалениях от твердых границ турбулентная вязкость существенно превосходит физическую ($\eta >> \mu$).

В целом для турбулентного потока можно записать $\tau = \mu \frac{d\langle u \rangle}{dy} + \eta \frac{d\langle u \rangle}{dy}$.

Однако представление Буссинеска не приводит к решению задачи, т.к., к сожалению, отсутствуют прямые методы определения турбулентной вязкости.

Первого заметного успеха в этом направлении добился Л.Прандтль в 1925 году, предложив так называемую теорию пути перемешивания (смешения).

В основе ее лежит аналогия с кинетической теорией газов и предположение о том, что путь смешения зависит от условий течения. В соответствии с гипотезой Прандтля, каждый турбулентный моль (вихрь) жидкости переносит некоторое количество движения, которое сохраняется постоянным на пути перемешивания. Другими словами, длина пути перемешивания в известной мере аналогична длине свободного пробега молекул в кинетической теории газов, и определяет путь, который проходит моль жидкости, прежде чем он перемешается с другими жидкими образованиями и передаст свой импульс.

Допустив далее, что вертикальная и горизонтальная компоненты пульсационной скорости (u'_x и u'_y) являются величинами одного порядка, **Прандтль** получил **формулу** для определения турбулентного напряжения в виде $\tau_T = \rho l_n^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$, где l_n – длина пути перемешивания.

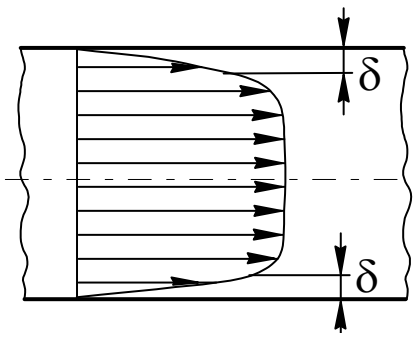
На первый взгляд может показаться, что формула Прандтля не имеет каких-либо существенных преимуществ по сравнению с формулой Буссинеска, и единственным результатом является замена одной не поддающейся вычислению величины η другой – l_n. Однако это не так, поскольку величину l_n оценить значительно проще, чем η. В частности, l_n не может быть больше размера канала и должна стремиться к нулю вблизи твердой стенки (поперечное движение у стенки невозможно).

Турбулентное течение в трубах.

Расчет турбулентного течения в трубах относится к широко распространенным инженерным задачам. Одним из важных элементов расчета является нахождение закона распределения осредненных скоростей в поперечном сечении трубы.

По Прандтлю, поток в трубах при турбулентном течении условно разбивается на две области (двухслойная модель Прандтля): турбулентное ядро, в котором определяющими являются напряжения Рейнольдса, и тонкий вязкий подслой (ламинарный подслой по Прандтлю либо пристенный слой) вблизи стенки, в котором влияние турбулентности пренебрежимо мало, а касательные напряжения обусловлены физической вязкостью в соответствии с законом трения Ньютона.

На рис. приведен примерный вид поля осредненных скоростей (эпюра скорости) при турбулентном течении в трубопроводе. Следует обратить внимание на ее большую наполненность (большую равномерность) по сравнению с ламинарным течением. Это объясняется тем, что вследствие перемешивания частиц за счет турбулентных пульсаций происходит обмен количеством движения и, как следствие, более равномерное распределение скоростей в поперечном сечении.



В непосредственной близости от стенки в пределах пристенного слоя решающее влияние на течение оказывают жесткость стенки, ее непроницаемость и эффект прилипания частиц. На самой стенке справедливы условия:

$$u_x = u_y = u_z = 0 ; \; u'_x = u'_y = u'_z = 0 ; \; \rho \langle u'_x u'_y \rangle = 0 .$$

Таким образом, для области в пределах вязкого под-

слоя можно записать:

$\tau = \tau_0 = \mu \dfrac{du}{dy}$, где τ_0 – касательное напряжение на стенке.

Интегрирование дает $\mu u = y\tau_0 + C$ при $y = 0$, $u = 0$ и $C = 0$. Таким образом, $u = \dfrac{\tau_0}{\mu} y$.

Имея в виду, что $\mu = \nu\rho$, после подстановки получаем $u = \dfrac{\tau_0}{\rho} \dfrac{y}{\nu}$.

Т.е. в пределах подслоя скорость изменяется по линейному закону. Величина τ_0 / ρ имеет размерность квадрата скорости, поэтому корень квадратный из нее, т.е. $\sqrt{\dfrac{\tau_0}{\rho}} = u_\tau$, называют динамической скоростью либо скоростью трения. Из выражения для напряжений Рейнольдса следует, что $|\tau_T| = \rho \langle u_x' u_y' \rangle$ и $\sqrt{\dfrac{|\tau_T|}{\rho}} = \sqrt{\langle u_x' u_y' \rangle} = u_\tau$.

Таким образом, динамическая скорость является мерой интенсивности турбулентного пульсационного движения, т.е. мерой интенсивности переноса количества движения.

После подстановки получаем $u = u_\tau^2 \dfrac{y}{\nu}$.

Оценим толщину вязкого подслоя. На его границе $y = \delta$, тогда $\dfrac{u}{u_\tau} = \dfrac{u_\tau \delta}{\nu}$.

В правой части стоит выражение, аналогичное числу Рейнольдса. Согласно тщательным опытам ближайшего сотрудника Л.Прандтля, Никурадзе, эта величина приближенно равна 11.6; тогда $\delta = 11.6 \dfrac{\nu}{u_\tau}$.

Очевидно, что этим соотношением можно воспользоваться лишь в случае, если известна динамическая скорость. Для ее нахождения необходимо увязать ее с параметрами осредненного потока, что является решаемой задачей.

Чтобы завершить вопрос о турбулентном течении в трубах, установим закон распределения осредненных скоростей в ядре потока. В этой области определяющую роль играют турбулентные касательные напряжения, и, следовательно, можно воспользоваться формулой Прандтля. Однако для того, чтобы продвинуться дальше, необходимо принять дополнительные допущения. Они оказываются достаточно грубыми, и единственным их оправданием является то, что результаты, к которым они приводят, достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Первое допущение связано с длиной пути перемешивания. Согласно наиболее простой гипотезе, принадлежащей Л.Прандтлю, $l_n = \kappa y$, где κ – какая-то величина, называемая постоянной Кармана. Выполненные измерения показывают, что $\kappa \approx 0.4$. Более поздние исследования показали, что зависимость справедлива лишь в пристенной части турбулентного ядра потока.

Вторым является допущение о касательных напряжениях. Следует полагать, что принципиально они являются величинами переменными. Однако, если рассматривать область, расположенную достаточно близко к стенке, то здесь величина касательного напряжения изменяется незначительно, и можно принять ее равной касательному напряжению на стенке, т.е. $\tau_T = \tau_0$.

При этих допущениях формула Прандтля принимает вид

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad \text{либо} \quad u_\tau^2 = \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 .$$

Извлекая квадратный корень и разделяя переменные, получаем $du = \frac{u_\tau}{\kappa}\frac{dy}{y}$.

И после интегрирования $u = \frac{u_\tau}{\kappa}\ln y + C$, т.е. скорости в ядре потока распределены по логарифмическому закону.

Произвольную постоянную интегрирования можно найти из граничных условий на оси трубы: при $y = R$ $u = u_{\max}$, и $C = u_{\max} - \frac{u_\tau}{\kappa}\ln R$. После подстановки и простых преобразований

$$\frac{u_{\max} - u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{R}{y}.$$

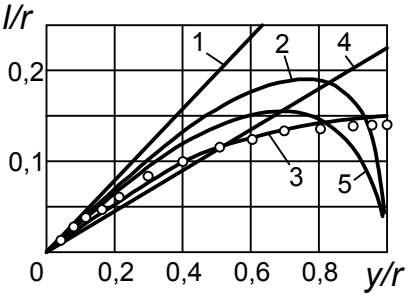
Строго говоря, это соотношение выводится для плоских труб, но опыт показывает, что оно оказывается справедливым и для круглых, и подтверждает экспериментально установленный факт о независимости распределения скорости от причин, обусловливающих возникновение касательных напряжений (вязкости, шероховатости). Это выражение иногда называют **законом дефекта скорости**.

Использование двухслойной модели, т.е. разделение потока на ядро и пристенный слой, приводит к специфической классификации стенок труб. Если толщина пристенного слоя больше выступов шероховатости, трубы называют гидравлически гладкими, в противном случае – шероховатыми.

Обратим внимание на следующие обстоятельства. Как отмечалось, для получения закона распределения скоростей в поперечном сечении трубопровода использовались простейшие гипотезы: постоянство касательных напряжений в ядре потока ($\tau_T = \tau_0$) и линейная зависимость для длины пути перемешивания ($l_n = \kappa y$). Легко показать, что первая из них не согласуется с реальностью при рассмотрении течения в трубах. Действительно, выделим в трубе цилиндрический элемент жидкости длиной *l* и радиусом *r*, на который действует постоянный перепад давления Δp. Сила давления на этот элемент $\Delta p \pi r^2$, а сила трения $2\pi r l \tau$. Приравняв эти силы, получаем $\Delta p = \frac{2l}{r}\tau$.

А для всей трубы длиной *l* и радиусом *R* имеем $\Delta p = \frac{2l}{R}\tau_0$, где τ_0 – напряжение на стенке. Поскольку $\Delta p = \text{const}$ по условию, то с учетом того, что $r = R - y$, $\tau = \tau_0\left(1 - \frac{y}{R}\right)$, т.е. касательные напряжения по сечению не постоянны, а изменяются по линейному закону, и лишь на достаточно малом расстоянии от стенки ($\frac{y}{R} << 1$) можно считать, что $\tau = \tau_0$.

Вторая гипотеза также не согласуется с данными опытов. На рис. приведены графики, характеризующие распределение длины пути перемешивания в поперечном сечении круглой трубы по данным опытов Никурадзе (кружки) и по формулам, предложенным различными авторами. В соответствии с результатами экспериментов, значение l_n достигает максимума на оси трубы. Из графика следует, что гипотеза Прандтля (прямая 1) неприемлема.



Существенно отличаются от опытной и кривые, полученные другими авторами: Карманом (кривая 2), Конаковым (кривая 4), Саткевичем (кривая 5). Достаточно близка к эксперименту кривая Альтшуля (кривая 3), описывающая длину пути перемешивания с помощью формулы

$$l_n = \kappa_1\left[\frac{2y}{R} - \left(\frac{y}{R}\right)^2\right].$$

Васильевым получена аппроксимирующая зависимость, практически точно совпадающая с данными опыта и имеющая вид $l_n = \frac{\kappa}{3}\left[1-\left(1-\frac{y}{R}\right)^3\right]R$.

Использование этого соотношения с учетом линейного распределения касательных напряжений по сечению трубы приводит к закону распределения скоростей, соответствующему гиперболическому тангенсу.

Существуют и другие подходы. Так, например, А.Д.Альтшуль считает, что разделение потока на две области является грубой схематизацией, носящей искусственный характер. Не оправдана с теоретических позиций гипотеза о ламинарном подслое, как об области, в которой отсутствуют пульсации. Пульсации проникают и в этот слой, но следуют там особым закономерностям. Слабо обосновано и то, что в ядре потока физическая вязкость не играет никакой роли. На базе этих представлений автором разработана полуэмпирическая теория, рассматривающая турбулентный поток в трубе как единое целое, без разделения его на ядро и ламинарный подслой.

Полуэмпирические теории неоднократно подвергались серьезной критике. Главные возражения обычно касались выводов, связанных с особенностями структуры турбулентности. Тем не менее, они широко распространены из-за их простоты и удобства, хотя получаемые результаты достаточно грубы и приближенны.

Степенные законы распределения скоростей.

Логарифмический закон распределения скоростей хорошо подтверждается результатами эксперимента, но вызывает определенные трудности при численных расчетах. Поэтому в последние годы получают распространение степенные зависимости вида $\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n}$.

Главным достоинством этих формул является их простота, а недостатком – зависимость показателя степени от числа Рейнольдса. Поэтому степенной закон нельзя рассматривать как универсальный. В диапазоне изменения чисел $Re = 4\cdot10^3...3\cdot10^6$ показатель степени $1/n$ меняется в пределах от 1/6 до 1/10.

Следует отметить, что ни логарифмический, ни степенной законы не удовлетворяют условию равенства нулю производной от скорости на оси симметрии потока.

Потери давления (напора) при турбулентном течении в трубах.

Напомним, что рассмотрение закономерностей как ламинарного, так и турбулентного течений в трубах помимо чисто познавательных целей преследовало и цели сугубо практические: получить соотношения, позволяющие определять потери давления (напора) в трубопроводных сетях при выполнении инженерных расчетов. Для ламинарного течения эта задача решается с помощью формулы Хагена-Пуазейля. Из рассмотрения закономерностей турбулентного течения становится ясным, что вследствие его чрезвычайной сложности получение аналогичного соотношения чисто теоретическим путем практически невозможно. Поэтому, основываясь на уже известных положениях, установим хотя бы общую структуру необходимой формулы.

Как было показано, выражение для турбулентных касательных напряжений (напряжений Рейнольдса) имеет вид $\tau = \rho\left\langle u_x' u_y' \right\rangle$.

Это с большой долей уверенности позволяет утверждать, что существует связь между средней скоростью и касательным напряжением на стенке трубы вида $\tau_0 = k\rho v^2$,

где k – коэффициент пропорциональности.

С другой стороны, из условия равновесия движущегося под действием постоянного перепада давления жидкого цилиндра длиной l: $\Delta p = \frac{2l}{R}\tau_0$.

После замены радиуса диаметром и подстановки τ_0 имеем

$$\Delta p = 4k\frac{l}{d}\rho v^2 \quad \text{либо} \quad \Delta p = 8k\frac{l}{d}\frac{\rho v^2}{2}.$$

В такой форме записи выражение $\frac{\rho v^2}{2}$ имеет четкий физический смысл. Это так называемое динамическое давление потока, обусловленное средней скоростью, либо кинетическая энергия потока, заключенная в единице объема.

Обозначим величину $8k = \lambda$ и назовем ее гидравлическим коэффициентом трения, тогда

$$\Delta p = \lambda\frac{l}{d}\frac{\rho v^2}{2}.$$

Полученное соотношение носит название **формулы Дарси**. Отметим попутно, что если в преобразованной формуле Хагена-Пуазейля обозначить величину $\frac{64}{Re}$ буквой λ, то она превращается в формулу Дарси. В этом смысле формула Дарси может быть названа универсальной, т.е. пригодной как для ламинарного, так и для турбулентного течений. В последнем случае открытым остается вопрос о нахождении гидравлического коэффициента трения, который, как следует из всего сказанного выше, может быть решен только экспериментальным путем.

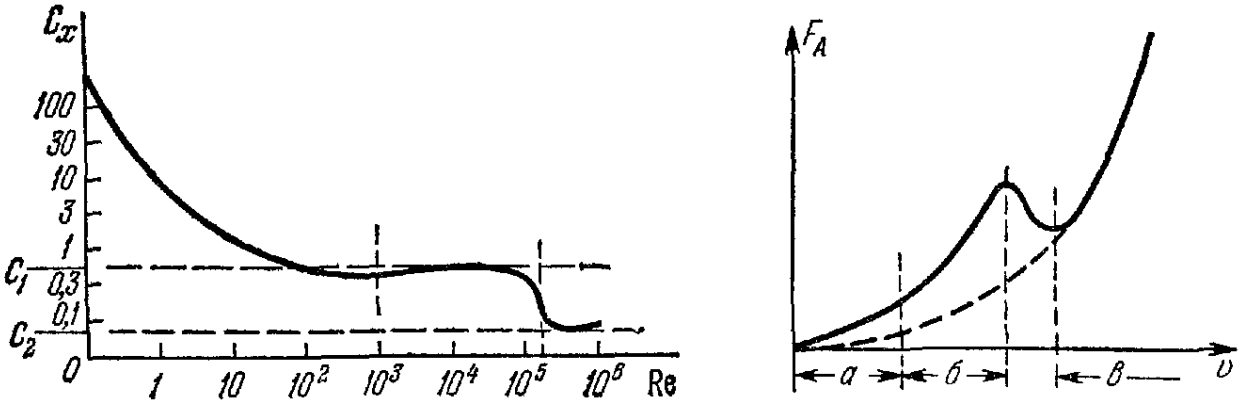
6. ДЕЙСТВИЕ ПОТОКА ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА НА ТЕЛО

§ 6.1 Лобовое сопротивление тел в потоке.

При движении частицы в среде возникают силы сопротивления. Сила лобового сопротивления зависит от формы, от размеров тела, от скорости потока и от физических свойств жидкости. Опыты показывают, что сила сопротивления тел одинаковой формы пропорциональна площади поперечного сечения тела (поперечного по отношению к направлению скорости потока v), скоростному напору (динамическому давлению $\rho v^2/2$) и некоторому коэффициенту C_x, называемому коэффициентом лобового сопротивления тела данной формы:

$$F_C = C_D \cdot S \cdot \rho_g \frac{u^2}{2},$$

где ρ_g – плотность газа, u – относительная скорость движения частицы в среде, S – площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную вектору его скорости (миделево сечение), C_D – коэффициент сопротивления среды.



Коэффициент C_D зависит от числа Рейнольдса $C_D = f(\mathrm{Re})$, и в большинстве случаев оценивается эмпирически. **Критерий Рейнольдса** для движущейся в среде частицы определяется как

$$\mathrm{Re} = \frac{d \cdot u}{\nu_g},$$

где d – характерный размер частицы, ν_g – кинематическая вязкость газа.

Рассмотрим подробнее различные режимы потоков.

1.Для ламинарного потока $(\mathrm{Re} < 1)$ имеем $C_D = 24/\mathrm{Re}$. В этом случае для силы сопротивления сферической частицы в потоке, для которой $S = \frac{1}{4}\pi d^2$, получаем закон Стокса:

$$F_C = 3\pi d\, u\, \eta_g,$$

где $\eta_g = \nu_g \cdot \rho_g$ – динамическая вязкость среды.

2.В случае промежуточного потока $(1 \le \mathrm{Re} \le 1000)$ существуют много эмпирических формул для C_D. Одной из наиболее удачных есть формула Клячко:

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} + \frac{4}{\mathrm{Re}^{1/3}}.$$

Более удобными в применении, но дающие менее точные значения, могут следующие формулы

$$C_D = \frac{14}{\mathrm{Re}^{0.5}} \ (2 < \mathrm{Re} < 800) \quad \text{и} \quad C_D = \frac{18.5}{\mathrm{Re}^{0.6}} \ (1 < \mathrm{Re} < 1000).$$

3.В области малой турбулентности $\left(1000 < \mathrm{Re} < 2\cdot 10^5\right)$ коэффициент сопротивления

$$C_D = 0.44\,.$$

В области высокой турбулентности $\left(\mathrm{Re} > 2\cdot 10^5\right)$ коэффициент сопротивления

$$C_D = 0.10\,.$$

В случае, когда диаметр частицы очень мал и близок к средней длине свободного пробега молекул среды, сила сопротивления движению частицы меньше, чем предсказывается законом Стокса. Это происходит потому, что для больших частиц основным источником сопротивления является вязкость среды. Для маленьких частиц или при очень малой вязкости среды вследствие увеличения роли инерции молекул газа при столкновении их с частицами сила сопротивления среды становиться функцией сечения частицы. Для этого эффекта в законе Стокса вводится **поправка Каннингема** C_C:

$$F = \frac{3\pi\eta_g u\, d}{C_C}\,,$$

где $$C_C = 1 + \frac{2L}{d}\left(A + Q\exp\left(-\frac{bd}{2L}\right)\right) = 1 + Kn\cdot C_m\,,$$

A = 1.257, Q = 0.400, b = 1.10, $Kn = 2L/d$ – число Кнудсена, C_m – коэффициент изотермического скольжения, L – средняя длина свободного пробега молекул газа. Для воздуха при 0°C L = 0.065 мкм, при 25°C L = 0.071 мкм.

В зависимости от **числа Кнудсена**, поправку Каннингема можно аппроксимировать при $Kn < 1$:

$$C_C = 1 + Kn\cdot 1.257\,,$$

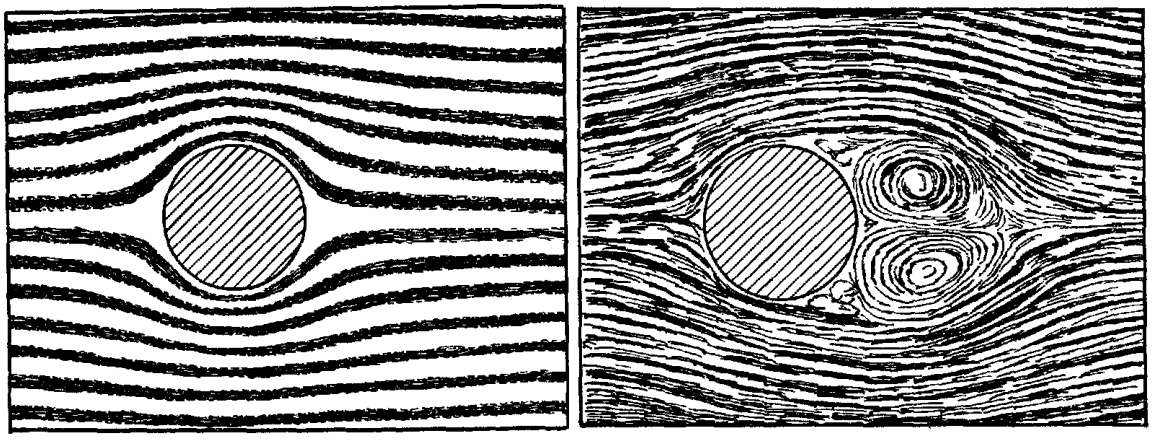
а при $Kn > 1$:

$$C_C = 1 + Kn\cdot 1.657\,.$$

Поправку Каннингема к закону Стокса следует использовать, когда диаметр частицы меньше 1 мкм. Поправка Каннингема учитывает переход от вязкого течения к молекулярному. Для больших значений d сила сопротивления пропорциональна d, а при малых – квадрату d.

В случае движении частицы в жидкой среде сила сопротивления рассчитывается по тем же формулам, что и при движении в газе, но при замене соответствующих значений плотности и кинематической вязкости.

Теоретический анализ безотрывного, плавного обтекания идеальной жидкостью любого тела показывает, что и в этом случае сила сопротивления равна нулю («парадокс» Даламбера).



а) *б)*

При очень малой скорости потока в неидеальной (вязкой) жидкости мы наблюдаем плавное, безотрывное движение жидкости около тела. При увеличении скорости обтекания картина принципиально изменяется. Линии тока перестают замыкаться за телом и «отрываются» от него, образуя за телом резко завихренное пространство; обтекание происходит с отрывом трубок тока от тела.

В этом случае нет симметрии давления, действующего на тело со стороны потока сзади и спереди. Впереди остается примерно такая же картина, как и при плавном обтекании — давление в критической области и вблизи нее больше статического на величину порядка $\rho v^2/2$ – величину динамического напора. Но сзади цилиндра линии тока, оторвавшись от тела, идут более прямолинейно, и сзади, в зоне завихрения, давление всегда меньше, чем спереди, оно примерно равно статическому давлению в невозмущенном потоке. Следовательно, при отрыве потока результирующая сила давления дает составляющую назад.

Кроме этого, при отрыве потока от тела в завихренной области течения наблюдается образование отдельных вихрей (вихревой след), которые иногда регулярно, иногда нерегулярно отходят от границы отрыва потока на теле и заполняют собой завихренную область за телом. Понятно, что образование и уход вихрей от тела вызывает колебания потока и, следовательно, колебания давления у поверхности тела, регулярные или нерегулярные в зависимости от периодичности образования вихрей. Эти колебания давления довольно трудно измерить и рассчитать теоретически, но несомненно одно, если усреднить по времени колебания давления, то они дадут добавочное лобовое сопротивление, которое иногда так и называют вихревым, сопротивлением.

Таким образом, можно различать три причины возникновения лобового сопротивления тела в вязкой жидкости: а) касательные силы вязкости, б) перераспределение давления из-за отрыва потока, в) колебания давления из-за вихреобразования за телом.

При одном и том же поперечном сечении наименьшее сопротивление имеют «каплевидные» тела, у которых тупой нос и плавное заострение сзади. Такое плавное заострение задней части, где сходятся струйки охватывающего тело потока, обеспечивает небольшую область срыва потока и предупреждает срыв. Большая часть тела обтекается плавным потоком, примерно таким же, как и в «идеальной» жидкости; поток смыкается сзади в области с повышенным давлением, и вследствие этого уменьшается сила сопротивления.

Наоборот, «каплеобразное» тело, поставленное острием к потоку, дает большее сопротивление, ибо почти вся задняя часть тела будет находиться в области срыва потока, поток не смыкается за телом и сопротивление будет больше. Поэтому стойки, растяжки на самолетах и другие выступающие в поток тела обычно имеют хорошо обтекаемою форму. Форма их поперечного сечения подобна форме каплеобразного тела; за такими стойками или растяжками не возникает срыва потока совсем или он занимает очень малую часть их поверхности.

§ 6.2. Гидродинамический пограничный слой. Условия прилипания.

В настоящее время в гидродинамике вязкой жидкости получила признание гипотеза о том, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к твердому телу, адсорбируются "им, как бы прилипают к его поверхности, т. е. их скорость равна скорости тела (а если тело неподвижно, то нулю).

Этот слой «прилипшей» жидкости нужно рассматривать как бесконечно тонкий слой. Гипотеза о равенстве нулю скоростей жидкости на стенке нашла косвенное подтверждение в хорошем согласии с опытом результатов многочисленных теоретических работ, в основу которых она была положена.

Равенство нулю скорости жидкости на стенке выполняется до тех пор, пока газ можно считать сплошной средой. По мере увеличения разрежения ослабляется взаимодействие газа со стенкой и разреженный газ вблизи стенки начинает проскальзывать.

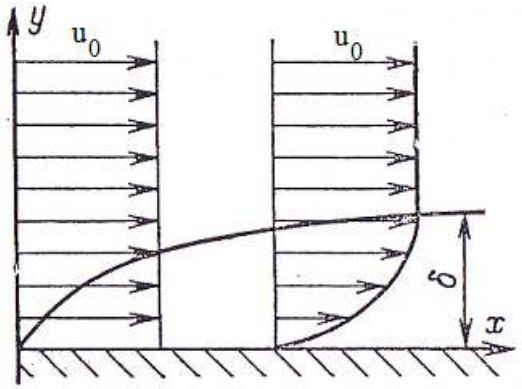
Степень разрежения потока характеризуется значением параметра Кнудсена *Kn*, представляющего отношение средней длины свободного пробега молекул газа к характерному размеру твердого тела.

Если примерно $Kn < 0.001$, то газ можно рассматривать как сплошную среду, для которой выполняется условие прилипания.

При значениях параметра Кнудсена, примерно больших 10, газ должен рассматриваться как свободный молекулярный поток. Его взаимодействие с твердым телом описывается на основе законов кинетической теории газов.

При значениях параметра Кнудсена в интервале 0.001–10 разреженный газ не может рассматриваться ни как полностью сплошная, ни как полностью свободномолекулярная среда. Для этой области чисел Кнудсена разрабатываются свои методы расчета течения и теплообмена.

Рассмотрим продольное обтекание плоской поверхности тела безграничным потоком жидкости. Скорость u_0 и температура набегающего потока постоянны и равны. При соприкосновении частиц жидкости с поверхностью тела они «прилипают» к ней. В результате в области около пластины вследствие действия сил вязкости образуется тонкий слой заторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущенного потока (вдали от тела). Этот слой заторможенной жидкости получил название **гидродинамического пограничного слоя**.



Чем больше расстояние x от передней кромки пластины, тем толще пограничный слой, так как влияние вязкости по мере движения жидкости вдоль тела все дальше проникает в невозмущенный поток (см. рис.).

Для течения жидкости внутри пограничного слоя справедливо условие $\partial u_x / \partial y \neq 0$, вне пограничного слоя и на его внешней границе $\partial u_x / \partial y = 0$ и $u_x = u_0$.

Понятия «**толщина пограничного слоя**» и «**внешняя граница пограничного слоя**» довольно условны, так как резкого перехода от пограничного слоя к течению вне слоя нет. Скорость в пограничном слое по мере увеличения *y* асимптотически стремится к u_0.

Поэтому под **толщиной пограничного слоя** δ подразумевается такое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости потока вдали от тела на определенную заранее заданную малую величину $\varepsilon << 1$ (например, на 1 %): при $y = \delta u_x = (1-\varepsilon)u_0$.

Таким образом, при омывании тела поток жидкости как бы разделяется на две части: *пограничный слой* и *внешний поток.* Во внешнем потоке преобладают силы инерции, вязкостные силы здесь не проявляются. Напротив, в пограничном слое силы вязкости и инерционные силы соизмеримы. Тогда можно написать следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих стационарное поле скоростей при омывании плоской пластины, бесконечной в направлении оси Oz. Уравнения движения:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Уравнение сплошности имеет вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим, возможности упрощения записанной системы дифференциальных уравнений и наметим границы справедливости упрощенной записи.

Ввиду малости толщины пограничного слоя принимаем, что поперек него давление не изменяется, т. е. $\partial p/\partial y = 0$. При омывании плоской поверхности неограниченным потоком, когда во внешнем течении скорость постоянна и равна u_0, из уравнения Бернулли

$$p + \frac{\rho u_0}{2} = const$$

следует, что во внешнем потоке не изменяется и давление. Тогда $\partial p/\partial x = 0$ (такое течение в гидродинамике часто называют «безградиентным течением»). Условия $\partial p/\partial y = 0$ для пограничного слоя и $\partial p/\partial x = 0$ для внешнего течения приводят к выводу, что производная $\partial p/\partial x$ равна нулю и в области пограничного слоя (в рассматриваемом случае).

Скорость u_x изменяется от нуля до u_0, порядок величины w_x оценим как w_0. Для продольной координаты возьмем масштаб l, тогда (O – обозначение порядка данной величины)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = O\left(\frac{u_0}{l}\right).$$

Согласно уравнению сплошности порядок производных $\partial u_x/\partial x$ и $\partial u_y/\partial y$ одинаков:

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = O\left(\frac{u_0}{l}\right) = O\left(u_0 \frac{\delta}{l}\frac{1}{\delta}\right),$$

где δ – порядок поперечной координаты y для пограничного слоя. Порядок величины u_y при этом может быть оценен как $u_y = O\left(u_0 \frac{\delta}{l}\right)$.

Оценим отдельные члены инерционной (конвективной) и вязкостной частей уравнения движения в проекциях на ось *Ox:*

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0\left(\frac{u_0^2}{l}\right);\ \ u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = O\left(u_0 \frac{\delta}{l}\frac{u_0}{\delta}\right) = O\left(\frac{u_0^2}{l}\right);$$

$$v\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = v\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x} = O\left(v\frac{u_0}{l^2}\right);\ v\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial y} = O\left(v\frac{u_0}{\delta^2}\right).$$

Из оценки следует, что порядок отдельных слагаемых инерционной части одинаков и равен u_0^2/l. Отношение вязкостных членов дает:

$$\frac{\partial^2 u_x/\partial x^2}{\partial^2 u_x/\partial y^2} = 0\left(\frac{u_0/l^2}{u_0/\delta^2}\right) = 0\left(\frac{\delta^2}{l^2}\right).$$

Для пограничного слоя $\delta << l$, отсюда $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} >> \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ последней производной можно пренебречь. Тогда уравнение движения в проекциях на ось *Ox* может быть записано в следующем виде:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = v\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}.$$

Порядок левой части этого уравнения равен $O\left(\frac{u_0^2}{l}\right)$, правой $O\left(v\frac{u_0}{\delta^2}\right)$.

Приравнивая левую и правую части, получаем:

$$O\left(\frac{u_0^2}{l}\right) = O\left(v\frac{u_0}{\delta^2}\right) \text{ или } \frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{u_0 l}{v}}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right).$$

где $\mathrm{Re} \equiv u_0 l/\nu$ – число Рейнольдса, характеризующее соотношение сил инерции и сил вязкости.

Поэтому ориентировочно можно оценивать толщину пограничного слоя δ по формуле $\frac{\delta}{l} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$, где l – характерная длина тела.

Если $\mathrm{Re} << 1$, то $\delta / l >> 1 (\delta >> l)$. В этом случае по сути дела нет разделения потока на две области, все пространство жидкости у тела охвачено действием сил вязкости.

При очень малых значениях числа Рейнольдса (порядка 1) толщина пограничного слоя примерно совпадает с размерами тела.

Если $\mathrm{Re} >> 1$, то $\delta << l$ т. е. у поверхности тела образуется сравнительно тонкий слой подторможенной жидкости, для которого в первом приближении справедливы сделанные нами упрощения. Таким образом, теория пограничного слоя представляет собой метод упрощения математической формулировки краевой задачи и связанной с этим возможности решения.

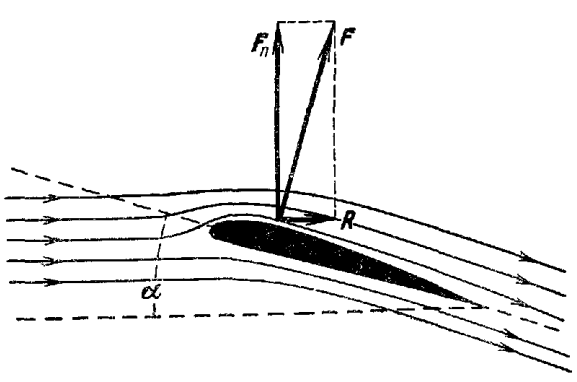
Рассмотрим влияние пограничного слоя на обтекание На передней части цилиндра, где скорость потока вне слоя возрастает в направлении потока, а давление падает, никаких особенных изменений пограничный слой не вызовет, и давление в нем почти такое же, как и в потоке жидкости вблизи слоя. В передней части тела давление будет падать в направлении потока и тем самым будет уменьшать пограничный слой, уменьшать торможение частиц, вызванное силами вязкости, падение давления по потоку, так сказать, «выжимает» частицы из слоя.

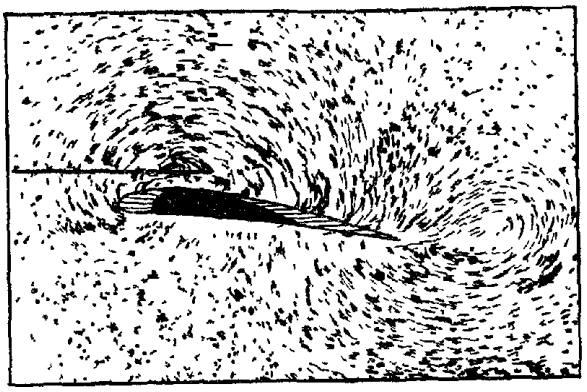
Совсем другая картина будет на задней половине цилиндра (шара или другого тела), где линии тока расширяются по потоку и скорость падает, а давление возрастает вдоль потока. Здесь давление будет еще более тормозить движение частиц в пограничном слое, и при увеличении скорости потока, при увеличении падения давления может оказаться, что частицы жидкости вблизи тела совсем остановятся и даже начнут возвратное движение против потока. Частицы, идущие против потока вдоль поверхности тела, и частицы набегающего потока на какой-то границе (границе «отрыва») встречаются и заворачиваются набегающим потоком обратно, таким образом возникает вращательное движение частиц, которое все более раскручивается потоком, захватывает все большее количество жидкости и, наконец, увлекается потоком и \ходит от тела, продолжая по инерции вращательное движение За телом возникает облапь вихреобразования, поток заполняется вихрями.

§ 6.3 Подъемная сила в потоке жидкости или газа.

Подъемная сила крыла самолета

Крыло самолета представляет собой пластинку определенного профиля, закругленную спереди (передняя кромка) и заосгренную сзади (задняя кромка). Если пластинка поставлена под некоторым углом к потоку а (этот угол называют углом атаки), то реакцию жидкости на пластинку можно разложить на две составляющие: нормальную к потоку силу $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ и силу лобового сопротивления $\boldsymbol{R}$. При маленьких углах атаки а сила $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ много больше $\boldsymbol{R}$. Обычно самолет летит при таком угле атаки, когда подъемная сила $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ («полезная» сила) много больше силы $\boldsymbol{R}$ («вредной» силы лобового сопротивления).





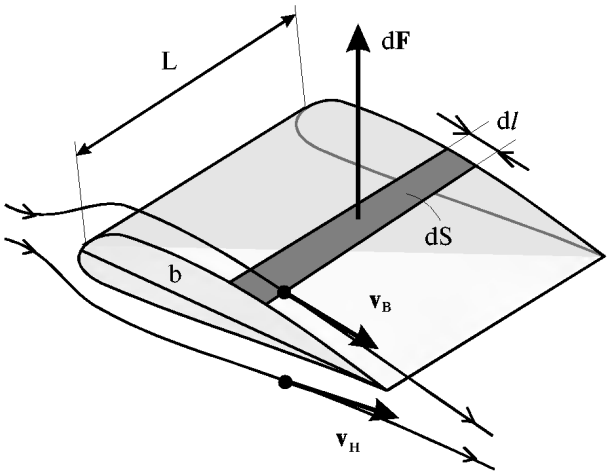
Объяснение Ньютона. Частицы воздуха задолго до прохождения около них крыла самолета находились в покое; когда крыло подошло к ним, давление на частицы под крылом увеличилось и частицы воздуха получили движение вниз и вперед. Если мы подсчитали бы общее ежесекундное изменение количества движения частиц, направленное вниз, и разность давлений по поверхности, окружающей крыло, то определили бы подъемною силу. Таким образом, крыло сообщает частицам воздуха, встречающимся на его пути, некоторое количество движения вниз, частицы отталкиваются крылом вниз, следовательно, они в свою очередь действуют па крыло вверх. Самолет «держится» потому, что крыло все время «ударяет» частицы воздуха и посылает их вниз, Давление на нижней поверхности будет больше, чем на верхней, и в результате на крыло действует подъемная сила, уравновешивающая вес самолета.

Из картины обтекания крыла потоком видно, что скорость частиц у верхней поверхности крыла больше, чем у нижней, ибо струйки тока вверху уже, чем внизу крыла. А по уравнению Бернулли давление больше там, где скорость меньше, следовательно, давление на верхнюю поверхность меньше, чем на нижнюю, что и является причиной подъемной силы. Разность давлений на верхней и нижней поверхностях легко обнаружить опытами.

Циркуляция и подъемная сила.

В обычных условиях при начале движения крыла можно заметить образование вихря у задней кромки крыла. Это объясняется тем, что вначале при небольшой скорости частицы жидкости под действием давления стремятся обогнать снизу заднюю кромку, но вследствие вязкости теряют свою кинетическою энергию и останавливаются; встречный поток, который должен был бы остановиться, тормозится давлением частиц потока, идущих назад, и поэтому он не останавливается, а продолжает движение вдоль поверхности, образуя вихрь. Вихрь срывается с задней кромки и уносится потоком. После этого течение принимает стационарную форму. При отрыве вихря от крыла он, уходя от крыла, унесет какой-то момент количества движения. Жидкость, ушедшая с вихрем, имеет определенный момент количества движения; следовательно, оставшаяся жидкость должна получить противоположный момент количества движения, ибо до начала движения ее момент количества движения был равен нулю. Жидкость поэтому будет вращаться вокруг крыла в направлении, противоположном вращению в вихре, и таким путем возникнет циркуляционное движение вокруг крыла. Уравнения гидродинамики полностью объясняют существование такого циркуляционного движения.

Циркуляционное движение – это движение частиц жидкости по замкнутым линиям, причем каждая частица во время движения деформируется, но не вращается; она совершает как бы поступательное движение по замкнутой траектории. Как показывает теория, такое движение обладает следующим важным свойством: циркуляция скорости по любому замкнутому геометрическому контуру, охватывающему тело, – величина постоянная. Циркуляцией скорости называют скалярную величину



$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{s} \,,$$

где v – скорость, а ds – элемент контура.

Условие плавного обтекания задней кромки теоретически получил Жуковский позволяет определить величину циркуляции Γ_0

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}\pi\lambda v\alpha \,,$$

где λ – хорда крыла, или расстояние по по-

току от передней до задней кромки крыла, α – угол атаки. Если циркуляция вокруг крыла нам известна, то можно найти величину подъемной силы, действующей на крыло.

Допустим, что крыло имеет угол атаки α и поток обтекает крыло с определенной циркуляцией Γ_0, скорость потока на достаточном удалении от крыла v_0, а давление p_0. Пусть скорости на верхней и нижней стороны пластинки равны $v_в(x)$ и $v_н(x)$, а давление $p_в(x)$ и $p_в(x)$, где x – расстояние от передней кромки. Тогда сила, действующая со стороны потока на элемент шириной dx и l, равна $(p_в - p_н)ldx$, а сила, действующая потока на всю пластинку длиной l, можно записать в виде

$$P = \int_0^b (p_в - p_н)ldx .$$

По уравнению Бернулли

$$p_в = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v_в^2}{2},\ p_н = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v_н^2}{2}.$$

Отсюда $p_в - p_н = \frac{1}{2}\rho(v_в - v_н)(v_в + v_н)$.

При малых углах α скорости мало будут отличаться от v_0, поэтому сила, действующая на пластинку:

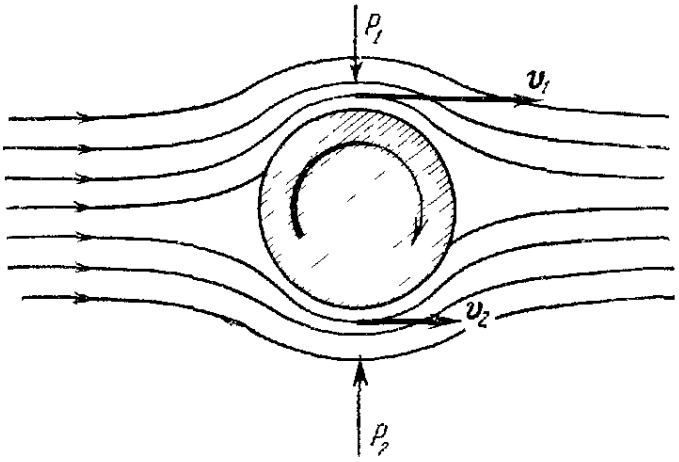
$$P = \frac{\rho}{2}\int_0^b 2v_0(v_в - v_н)ldx = \rho v_0 l\int_0^b (v_в - v_н)dx = \rho v_0 l\Gamma_0 ,$$

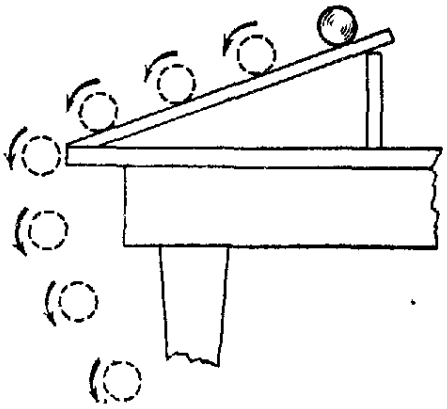
где $\Gamma_0 = \int_0^b (v_в - v_н)dx$ – циркуляция вокруг крыла.

Это и есть известная **формула Жуковского – Кутта**, определяющая подъемную силу крыла в зависимости от циркуляции. Так как циркуляция Γ_o растет пропорционально углу атаки α и скорости, то, следовательно, подъемная сила крыла растет пропорционально квадрату скорости, плотности воздуха и углу атаки. Все эти выводы теории крыла при небольших углах атаки хорошо согласуются с опытом.

§ 6.4 Эффект Магнуса.

Известно, что если поместить вращающийся цилиндр в поток воздуха, то на него будет действовать поперечная к потоку сила, происхождение которой совершенно аналогично происхождению подъемной силы крыла. Действительно, там, где окружная скорость цилиндра совпадает со скоростью потока, скорость потока v_1 из-за сил вязкости будет больше, чем на скорость потока v_2 противоположной стороне цилиндра, и поэтому давление с одной стороны будет больше, чем с другой ($p_2 > p_1$). Было показано, что боковая сила вообще растет как с увеличением скорости потока, так и с увеличением скорости вращения цилиндра. Наличие поперечной силы легко продемонстрировать, скатывая цилиндр из твердой бумаги со стола. Цилиндр, падая, всегда заворачивает под стол. Легко сообразить, что вращение цилиндра, возникающее при его качении по столу и продолжающееся при падении, должно вызвать силу, направленную под стол. Явление возникновения поперечной силы при вращении цилиндра называется эффектом Магнуса.


P_1
v_1
v_2
P_2



7. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ.

§ 7.1 Распространение возмущений давления в сжимаемой жидкости или газе.

При малых скоростях движения воздух можно считать несжимаемым. Допускаемая при этом ошибка еще не так велика при скорости, меньшей 100 м/с. Скорость звука в воздухе при обычных условиях (t = 15 °C, p = 760 мм рт. ст.) равна 340 м/с. Когда скорость движения тела в воздухе возрастает, то необходимо считаться с его сжимаемостью.

Распространение какого-либо импульса давления в воздухе (если этот импульс не так велик) происходит со скоростью звука в воздухе. Если в каком-либо месте воздушной среды увеличим давление, сожмем воздух, а затем предоставим его самому себе, то воздух начнет разжиматься и приведет в движение соседние частицы воздуха, которые в свою очередь приведут в движение находящиеся за ними частицы, и т. д. В среде будет распространяться возмущение, или волна, со скоростью да 340 м/с. Величина (или интенсивность) этих колебаний падает с увеличением расстояния от центра волны. Опыт показывает, что при малых колебаниях плотности скорость распространения звуковой волны не зависит от формы колебаний и является постоянной величиной, зависящей от физических свойств среды.

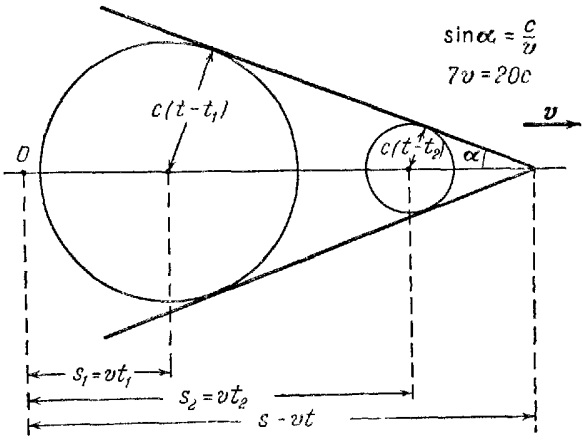
Скорость распространения звуковых волн определяется по формуле $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. В звуковой волне имеют место очень малые изменения давления и плотности, связанные законом адиабаты. Поэтому $c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$, где p_0 и ρ_0 – давление и плотности в отсутствие волны.

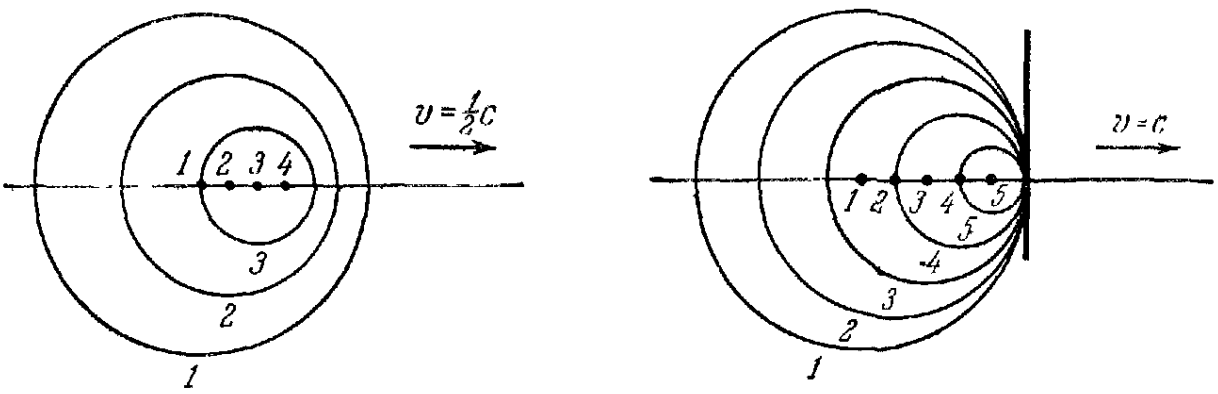
Движение тела со сверхзвуковой скоростью в среде (газе).

Во время движения тело сталкивается с покоящимися частицами среды. В результате этих ударов возникают импульсы, распространяющиеся во все стороны в окружающем пространстве с постоянной скоростью звука с. Очевидно, что фронт волны представляет собой сферу, так как частицы среды не движутся. Этот процесс непрерывен: в момент времени t_1 тело находится в точке с координатой s_1 и за промежуток времени dt претерпевает соударение с частицей газа длиной vdt; от этой частицы за время $t - t_1$ распространяется сферическая звуковая волна с радиусом $c(t - t_1)$; то же происходит и во все последующие промежутки времени. Так, например, из точки с координатой $s_2 - vt_2$ в момент времени $t_2 > t_1$ начинает распространяться такая же сферическая волна, которая в момент $t > t_2$ будет иметь радиус $c(t - t_2)$, и т. д. Можно представить себе огибающую поверхность совокупности всех сферических волн – она, очевидно, будет иметь форму конуса, вершина которого находится в данный момент t в точке с координатой s = vt, в которой находится движущееся тело. Конус имеет угол раствора при вершине, равный 2α; величина α определяется из уравнения

$$\sin\alpha = \frac{c(t-t_2)}{v(t-t_2)} = \frac{c}{v}.$$

Важно, что только часть пространства, находящегося внутри конуса, который называют конусом Маха, «возмущена» движущейся частицей. Все остальные частицы среды в момент времени t находятся в покое. Следовательно, картину движения тела (точки) со сверхзвуковой скоростью можно представить себе как непрерывный процесс распространения последовательности звуковых воли внутри конуса Маха, движущегося вместе с телом. Чем больше скорость v, тем меньше α, тем уже раствор конуса, тем меньшая область пространства возмещена движущейся частицей.

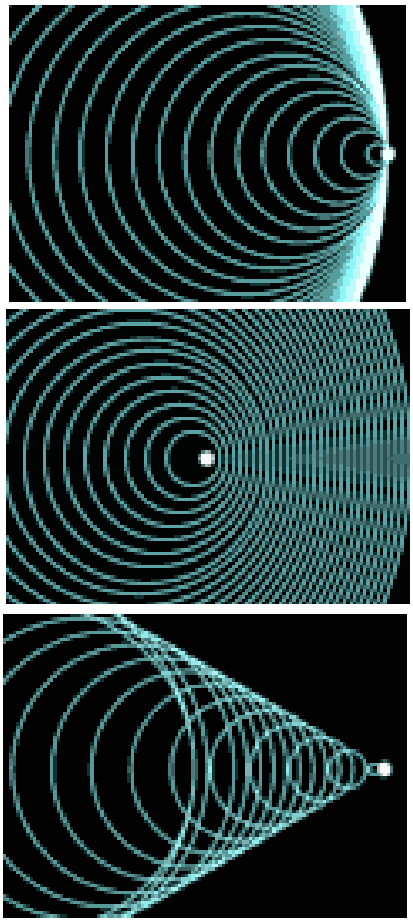




Ясно, что на образование волн расходуется энергия; кинетическая энергия тела отчасти превращается в энергию звуковых волн, и, следовательно, на тело действует «сила сопротивления движению», которая называется силой волнового сопротивления. Колебания в звуковых волнах со временем ослабляются, так как волны с течением времени занимают все большую область пространства и затухают вследствие внутреннего трения в газе; в конце концов «хвост» конуса рассеивается в пространстве.

Если бы частица двигалась не со сверхзвуковой скоростью, то от нее также распространялись бы звуковые волны, но характер их был бы совсем другим: возмущение занимало бы все пространство газа, что можно представить себе, рассматривая рис. а, где положение тела и фронт посылаемой им волны отмечены одинаковыми цифрами. Если частица долго двигалась до данного момента, то волны занимают все пространство.

При скорости тела, равной скорости звука, область возмущения занимает половину пространства, так как угол раствора конуса Маха равен $2\alpha = \pi$ (соответствующая картина показана на рис. б).



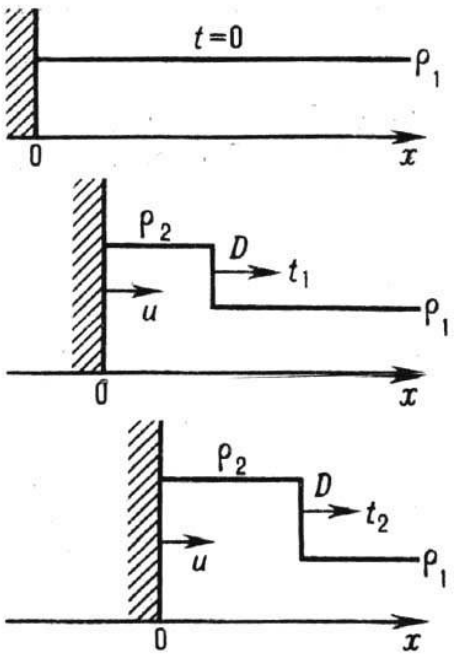
Ударная волна (скачок уплотнения) – распространяющаяся со сверхзвуковой скоростью тонкая переходная область, в которой происходит резкое увеличение плотности, давления и скорости вещества. Ударные волны возникают при взрывах, детонации, сверхзвуковых движениях тел, мощных электрических разрядах и т.д.

Рассмотрим объект, который движется со скоростью звука (например, самолёт). В каждый момент времени он будет излучать круговую звуковую волну. За счёт того, что скорость источника совпадает со скоростью звука, излучаемые волны накладываются друг на друга и впереди источника возникает скачок уплотнения (фронт ударной волны) как показано на рис. а.

Если источник движется со скоростью меньше, чем скорость звука, то ударная волна не образуется (рис. b). Возбуждаемые волны распространяются вперёд по ходу движения источника, обгоняя его, и назад. При этом за счёт эффекта Доплера неподвижный приёмник, расположенный перед источником, воспринимает звук с большей частотой, чем позади него. На рис. кольца показывают максимумы амплитуды звуковой волны, распространяющейся от источника. Мы видим, что впереди источника плотность таких линий больше. Так как скорость звука относительно среды во всех направлениях одинакова, это приводит к увеличению частоты принимаемого звука перед источником и уменьшению частоты сзади него.

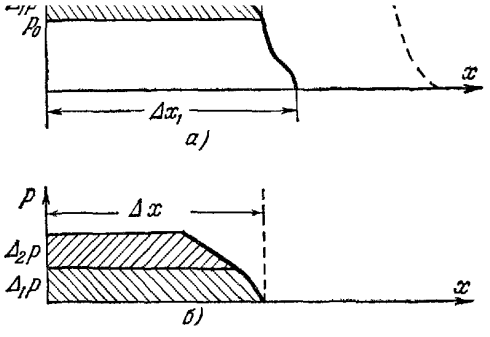
Рассмотрим случай, когда источник звука движется в среде со сверхзвуковой скоростью (на рис. с изображён случай движения источника со скоростью в 2 раза больше, чем скорость звука). В этом случае звуковые волны уже не могут обогнать источник звука. Поэтому перед источником звуковых волн нет, они появляются только за ним. Возникающие за источником звуковые волны, сливаясь друг с другом, образуют в пространстве коническую поверхность. Эта поверхность, разделяющая возмущённую движением источника часть среды от невозмущённой, является фронтом ударной волны. Нетрудно показать, что синус угла, образуемого фронтом ударной волны с направлением движения источника звука, равен отношению скорости звука к скорости источника (т.е. величине обратной числу Маха).

Простейший пример возникновения и распространения ударной волны – сжатие газа в трубе поршнем. Если первоначально покоившийся поршень мгновенно приходит в движение с постоянной скоростью u, то сразу же непосредственно перед ним возникает ударная волна. Скорость её распространения D по невозмущённому газу постоянна и больше u. Поэтому расстояние между поршнем и ударной волной увеличивается пропорционально времени движения. Скорость газа за ударной волной совпадает со скоростью поршня (рис.). Если поршень разгоняется до скорости u постепенно, то ударная волна образуется не сразу. Вначале возникает волна сжатия с непрерывным распределением плотности и давления. С течением времени крутизна волны сжатия нарастает, т. к. возмущения от ускоряемого поршня догоняют её и усиливают, приводя в итоге к разрыву непрерывности всех гидродинамических величин и к образованию ударной волны.



Распределения плотности ρ в последовательные моменты времени t = 0, t1, t2 в ударной волне, возбуждаемой поршнем, движущимся с постоянной скоростью и (D - скорость ударной волны; $D>u$).

Рассмотрим волну при большом изменении давления. Предположим, что давление поршня поднялось за время Δt на значительную величину p_1 и распределение давления перед поршнем в момент Δt имеет форму, показанную на рис. Распространение такой сложной волны можем представить как распространение последовательных элементарных волн с такой же малой интенсивностью. Каждая из этих элементарных волн распространяется вслед за другой, и изменение давления в ней мало и равно $\Delta_1 p$; тогда $\Delta x = c \cdot \Delta t$. Допустим, что элементарная волна давления величиной Δp распространяется в среде, сжатой до p_0, так, как показано на рис. б. В среде, уже сжатой на величину $p_0 + \Delta_1 p$, распространяется следующая за ней элементарная волна давления величиной $\Delta_2 p$, и т. д. до величины p_1. Каждая из последующих элементарных волн распространяется в более плотной среде. Изменение плотности и давления связано законом адиабаты $p = \text{const} \cdot \rho^{\gamma}$; поэтому скорость звука с увеличением плотности растет. Следовательно, более поздние элементарные волны будут догонять вышедшие раньше и фронт волны со временем будет становиться круче и круче и в конце концов примет такой вид, как показано на рис. а пунктиром: это значит, что далее в трубе будет распространяться разрывная волна давлений, в которой скачком, почти мгновенно, нарастают давление и скорость, и после скачка величины давления и скорости остаются постоянными. Скорость распространения разрывной волны определяется сложнее, она отличается от скорости звука и зависит от величины скачка давления. Следова-



тельно, при больших и резких изменениях давления, например при взрыве снаряда или бомбы в воздухе, распространяются разрывные волны давления.

В этих волнах величина скачка давления также убывает с расстоянием, особенно если взрыв происходит в небольшой области и от него распространяется волна почти сферической формы. Когда фронт разрывной волны проходит через данную частицу, она испытывает удар со стороны движущихся частиц, при котором скорость ее мгновенно нарастает от нуля до некоторого конечного значения. Поэтому разрывные волны называют еще ударными волнами.

Энергия движущегося тела (снаряда, пули и т. п.) в значительной степени расходуется на образование ударных волн, сопровождающих его движение со сверхзвуковой скоростью. Сопротивление движению тела при такой скорости в основном является волновым сопротивлением. Частицы среды приходят в движение вследствие удара тела о частицы, встречающиеся на его пути. Частицы, о которые ударилось тело, расступаясь, вызывают движение частиц окружающей среды, которое начинается после прохода головной ударной волны. Энергия, затраченная на движение частиц и на тепло при ударе частиц, получается за счет уменьшения кинетической энергии движущегося тела или за счет источника, приводящего тело в движение. Форма передней части тела существенно влияет на величину лобового сопротивления: тела с заостренным носом и с малым поперечным сечением имеют меньшее лобовое сопротивление. Форма задней части тела не имеет уже такого важного значения, как при небольшой скорости обтекания.

Структура ударной волны.

Типичная ширина ударной волны в воздухе – 10^{-4} мм (порядка нескольких длин свободного пробега молекул). Малая толщина такой волны дает возможность во многих задачах считать ее поверхностью разрыва. Но в некоторых случаях имеет значение структура ударной волны. Такая задача представляет и теоретический интерес. Для слабых ударных волн хорошее согласие эксперимента и теории дает модель, учитывающая вязкость и теплопроводность среды. Для ударных волн достаточно большой интенсивности структура должна учитывать (последовательно) стадии установления термодинамического равновесия поступательных, вращательных, для молекулярных газов еще и колебательных степеней свободы, в определенных условиях – диссоциацию и рекомбинацию молекул, химические реакции, процессы с участием электронов (ионизацию, электронное возбуждение).

§ 7.2. Теория распространения ударных волн.

Рассмотрим два сечения цилиндрического объема газа, располагающие перед волной (индекс 1) и непосредственно после волны (индекс 2). Слой газа, заключенный между этими сечениями, очень тонок, но волна целиком находится внутри слоя, благодаря скачкообразным изменениям в ней, так, что вне слоя никаких изменений в состоянии системы не происходит.

Для определения скорости волны D, давления p_2, плотности ρ_2, удельного объема v_2 ($v_2 = 1/\rho_2$), скорости движения ω_2 газа после фронта (обычно $\omega_2 = 0$) используются законы сохранения массы, энергии и импульса.

Введем относительные скорости движения газа до фронта волны u_1 и после фронта u_2 относительно фронта ударной волны

$$u_1 = D - \omega_1, \qquad u_2 = D - \omega_2. \tag{7.1}$$

Скорость u_2 втекания газа в разрыв численно совпадает со скоростью распространения ударной волны (при $\omega_2 = 0$) по невозмущённому газу.

Дальнейшее рассмотрение будем проводить относительно фронта ударной волны, считая его неподвижным.

Ударная волна движется по исходному веществу со сверхзвуковой скоростью $D > c$, $M_1 > 1$. Поэтому газодинамические возмущения из области за ударной волной не проникают в вещество перед ней и не влияют, следовательно, на его состояние. Скорость ударной волны относительно вещества за ней дозвуковая $v_2 < c$, благодаря чему пространственное распреде-

ление газодинамических величин за ударной волной влияет на зависимость её интенсивности от времени. Например, возмущения от ускоряющегося поршня, который сжимает в трубе газ и создаёт ударную волну, догоняют и усиливают ударную волну. Приращение энтропии в ударной волне малой интенсивности – величина третьего порядка малости, поэтому такую ударную волну можно считать изоэнтропичной. При неограниченном возрастании интенсивности ударной волны сжатие, т. е. отношение ρ_2 / ρ_1 остаётся ограниченным.

Закон сохранения массы.

Ввиду стационарности явления масса вещества, протекающего через любое сечение цилиндра, будет постоянным (условие непрерывности):

$$\dot{m} = u_1\rho_1 = u_2\rho_2 = \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1 + u_2}{v_1 + v_2} = \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} \tag{7.2}$$

где $\dot{m}$ – массовая скорость ударной волны, кг/(м^2 с), u_1, u_2 – скорость движения исходной газовой смеси и продуктов соответственно относительно фронта ударной волны, м/с.

Закон сохранения импульса. Данный закон удобно представить в виде равенства изменений импульса силы и импульса массы на границе фронта детонации

$$\left(p_1 - p_2\right) dVdt = m\left(u_2 - u_1\right)$$

или для единицы объема вещества в единицу времени

$$p_1 + \dot{m}u_1 = p_2 + \dot{m}u_2 . \tag{7.3}$$

Используя дополнительно закон сохранения массы, закон сохранения импульса при постоянной скорости ударной волны представится в виде **прямой Михельсона**

$$p_2 + \dot{m}^2 v_2 = p_1 + \dot{m}^2 v_1 = const \text{ или } p_2 = p_1 + \dot{m}^2 v_1 - \dot{m}^2 v_2 . \tag{7.4}$$

При постоянстве величины массовой скорости последнее соотношение в системе p и v изображаются в виде прямой линии, наклоненной к оси v под углом ψ, где $tg\psi = \dot{m}^2$.

Используя (7.1), (7.2) и (7.4) скорость ударной волны

$$D = \dot{m}v_1 + \omega_1 = v_1\sqrt{\frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2}} + \omega_1 . \tag{7.4а}$$

Закон сохранения энергии для данной массы газа имеет вид

$$\dot{m}\left(\frac{u_1^2}{2} + i_1\right) = \dot{m}\left(\frac{u_2^2}{2} + i_2\right) \tag{7.5}$$

где $i_1 = c_p T_1$, $i_2 = c_p T_2$ – удельная энтальпия исходной газовой смеси и продуктов реакции, Дж/кг.

Применяя закон сохранения массы (7.2), закон сохранения энергии представим в виде

$$\frac{1}{2}\dot{m}^2\left(v_1^2 - v_2^2\right) = i_2 - i_1$$

или, используя (7.4)

$$\frac{1}{2}\left(p_2 - p_1\right)\left(v_1 + v_2\right) = i_2 - i_1 . \tag{7.6}$$

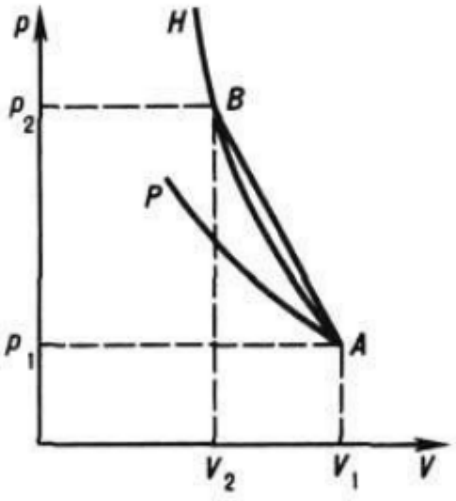
Дополнительно справедливо уравнение Менделеева-Клапейрона

$$p_1 v_1 = \frac{R}{M}T_1 \quad \text{и} \quad p_2 v_2 = \frac{R}{M}T_2 .$$

Используя соотношение Майера $c_p - c_v = R/M$ и $c_p/c_v = \gamma$, имеем выражение для температуры газа до и после фронта

$$T_1 = \frac{p_1 v_1 \gamma}{c_p\left(\gamma - 1\right)} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{p_2 v_2 \gamma}{c_p\left(\gamma - 1\right)} .$$

Уравнение сохранения энергии (7.6), таким образом, примет вид



Ударная адиабата и адиабата Пуассона, проходящие через общую точку А начального состояния (В – точка конечного состояния ударной волны). АВ – прямая Михельсона.

$$\frac{1}{2}\left(p_2-p_1\right)\left(v_1+v_2\right)=\frac{p_2v_2-p_1v_1}{\left(\gamma-1\right)}\gamma, \qquad (7.7)$$

откуда $$p_2=\frac{p_1\left(2v_1\gamma-\left(v_1+v_2\right)\left(\gamma-1\right)\right)}{2v_2\gamma-\left(v_1+v_2\right)\left(\gamma-1\right)}.$$

или

$$p_2=p_1\frac{v_1\left(\gamma+1\right)-v_2\left(\gamma-1\right)}{v_2\left(\gamma+1\right)-v_1\left(\gamma-1\right)}. \qquad (7.8)$$

Полученная зависимость (8) в координатах p и v носит название **адиабаты Гюгонио**.

По сравнению с обычной адиабатой (адиабатой Пуассона), для которой $p_2=p_1\left(v_1/v_2\right)^{\gamma}$, ударная волна характеризуется большим возрастанием давления при сжатии. При ударном сжатии вещества для данного изменения v необходимо большее изменение p, чем при адиабатическом сжатии. Это является следствием необратимости нагревания при ударном сжатии, связанного, в свою очередь, с переходом в тепло кинетической энергии потока, набегающего на фронт ударной волны.

Параметры газа за ударной волной, отнесенных к их значениям перед ударной волной, выражаются

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\left(\gamma+1\right)M_1^2}{\left(\gamma-1\right)M_1^2+2}, \quad \frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma M_1^2}{\left(\gamma+1\right)}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1},$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\left[2\gamma M_1^2-\left(\gamma-1\right)\right]\left[\left(\gamma-1\right)M_1^2+2\right]}{\left(\gamma+1\right)^2M_1^2}$$

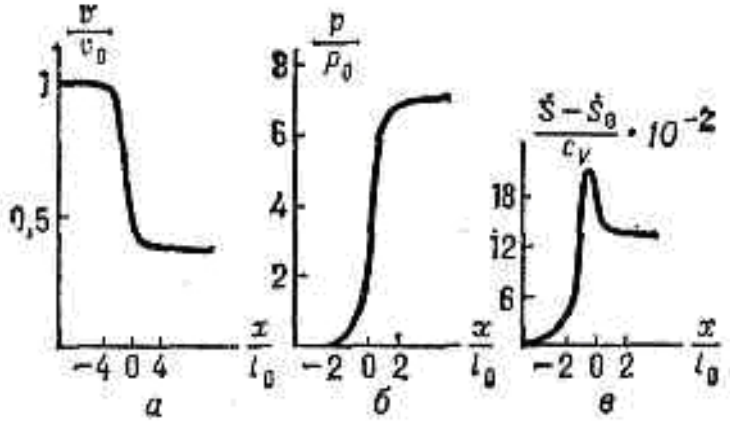
В пределе больших интенсивностей, т.е. при $M_1\to\infty$

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad \frac{p_2}{p_1}=\frac{2}{\left(\gamma+1\right)}D^2, \; u_1=\frac{2D}{\gamma+1}, \; T_2=\frac{2\left(\gamma-1\right)\mu_1D^2}{\left(\gamma+1\right)^2R}.$$

Таким образом, сколь угодно сильная ударная волна не может сжать газ более чем в (γ+1)/(γ–1) раз. Напр., для одноатомного газа γ = 5/3 и предельное сжатие равно 4, а для двухатомного (напр., воздуха) γ = 7/5 и предельное сжатие равно 6. Предельное сжатие тем выше, чем больше теплоёмкость газа (меньше γ).

Вязкий скачок уплотнения. Необратимость ударного сжатия свидетельствует о наличии диссипации механической энергии во фронте ударной волны. Диссипативные процессы можно учесть, приняв во внимание вязкость и теплопроводность газа. При этом оказывается, что сам скачок энтропии в ударной волне не зависит ни от механизма диссипации, ни от вязкости и теплопроводности газа.

Последние определяют лишь внутреннюю структуру фронта волны и его толщину. В ударных волнах не •слишком большой интенсивности все величины – u, p, ρ и T монотонно изменяются от своих начальных до конечных значений. Энтропия же S меняется немонотонно и внутри ударной волны достигает максимума в точке перегиба скорости, т. е. в центре волны (x=0). Возникновение максимума S в волне связано с существованием теплопроводности. Вязкость приводит только к возрастанию энтропии, т. к. благодаря ей происходит рассеяние импульса направленного газового потока, набегающего на ударной волны, и превращение кинетической энергии направленного движения в энергию хаотической движения, т.е. в теплоту. Благодаря же теплопроводности теплота необратимым образом перекачивается из более нагретых слоев газа в менее нагретые.

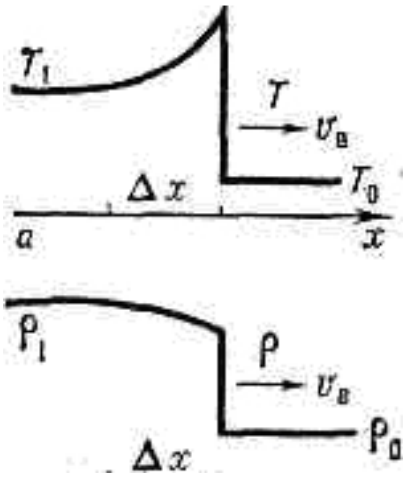


Распределение скорости (а), давления (б) и энтропии (в) в вязком скачке уплотнения с числом $M = 2$ в газе; x – координата, нормальная к фронту ударной волны, l_0 – длина свободного пробега молекул в невозмущённом газе.

Ударные волны в реальных газах. В реальном газе при высоких температурах происходят возбуждение молекулярных колебаний, диссоциация молекул, химической реакции, ионизация и т. д., что связано с затратами энергии и изменением числа частиц. При этом внутренняя энергия не сложным образом зависит от p и ρ и параметры газа за фронтом ударной волны можно определить только численными расчётами.

Для перераспределения энергии газа, сжатого и нагретого в сильном скачке уплотнения, по различным степеням свободы требуется обычно очень много соударений молекул. Поэтому ширина слоя, в котором происходит переход из начального в конечное термодинамически равновесное состояние, т.е. ширина фронта ударной волны, в реальных газах обычно гораздо больше ширины вязкого скачка и определяется временем релаксации наиболее медленного из процессов: возбуждения колебаний, диссоциации, ионизации и т. д.

Распределения температуры и плотности в ударной волне при этом имеют вид, показанный на рис, где вязкий скачок уплотнения изображён в виде взрыва.



Распределение температуры (а) и плотности (б) в ударной волне, распространяющейся в реальном газе.

8. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

§ 8.1. Система уравнений для конвективного переноса

Процесс теплообмена твердого тела в вынужденном потоке сжатой вязкой жидкости можно подать системой уравнений, в которую входят: уравнение движения жидкости, уравнения непрерывности, и два уравнения, которые выражают процесс теплопередачи в сплошной подвижной среде и условия теплообмена потока с твердым телом. Последнее уравнение является чисто эмпирическим. Напишем общую систему уравнений.

Уравнение движения жидкости:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3\rho}\nabla^2 \vec{u}\,. \tag{8.1}$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{u}) = 0\,. \tag{8.2}$$

Уравнение теплопроводности в сплошной подвижной среде при наличии объемных источников теплоты:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T = a\nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho}\,. \tag{8.3}$$

Дифференциальное уравнение теплообмена на поверхности твердого тела:

$$-\lambda_g \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_s = \alpha(T_s - T_g)\,. \tag{8.4}$$

В общем случае необходимо рассматривать и массоперенос отдельных компонентов в системе. Уравнение диффузии некоторого активного компонента в сплошной подвижной среде при наличии объемного стока массы активного компонента:

$$\frac{\partial(\rho Z_a)}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})(\rho Z_a) = D_a \nabla^2 (\rho Z_a) - W_a\,. \tag{8.5}$$

Дифференциальное уравнение массообмена на поверхности твердого тела:

$$-D_a \left.\frac{\partial(\rho Z_a)}{\partial n}\right|_s = \beta\rho(Z_{as} - Z_a)\,. \tag{8.6}$$

Первое уравнение (8.1) выражает второй закон Ньютона, согласно которому ускорение, с которым движется единица массы произвольно выбранного объема жидкости (газа), определяется силой тяжести (первое слагаемое), силой разности давления (второе слагаемое), силами вязкости (третье и четвертое слагаемые).

Второе уравнение (8.2) выражает неразрывность подвижной среды. Третье и четвертое уравнение (8.3) и (8.5) являются уравнениями теплопроводности и диффузии в подвижной среде. Они выражают равенство количества тепла (количество массы некоторого компонента), которое подводится к объему, количеству тепла (массы), которое выходит из этого объема через его поверхность с учетом источников тепла (стока массы). Уравнения (8.4) и (8.6) выражает условие теплообмена и массообмена на границе между потоком и твердым телом.

§ 8.2. Уравнение теплопроводности для движущейся жидкости или газа.

В основу выведения дифференциального уравнения теплопроводимости положен закон сохранения энергии, который в данном случае может быть сформулирован в следующем виде: количество теплоты, что введено в элементарный объем извне в результате теплопроводимости и конвекции, а также от внутренних источников равняется изменению внутренней энергии или энтальпии вещества (в зависимости от рассмотрения изохорного или изобарного процесса), которое содержится в этом объеме.

Рассмотрим элементарный объем $dxdydz$ в прямоугольной системе координат. Через поверхность $dydz$ за время dt вдоль оси Ox подводится количество тепла:

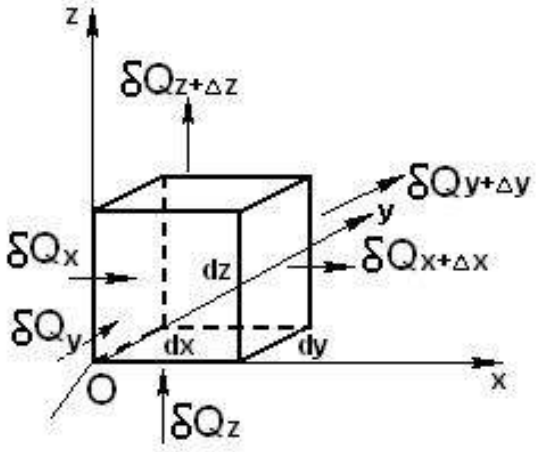
$$\delta Q_x = q_x dydzdt .$$

Здесь $q_x = -\lambda \dfrac{dT}{dx}$ – плотность теплового потока за сет теплопроводности.

Через противоположную сторону $x + dx$ отводится количество теплоты δQ_{x+dx}.

Количество теплоты, которое осталась в элементарном объеме за время dt вдоль оси Ox:

$$\delta Q_{Ox} = \delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(q_x\right) dxdydzdt .$$



Аналогично запишем для изменения количества теплоты вдоль осей Oy и Oz:

$$\delta Q_{Oy} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(q_y\right) dxdydzdt ,$$

$$\delta Q_{Oz} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(q_z\right) dxdydzdt .$$

Общее количество теплоты δQ, что было подведено к элементарному объему за время dt за счет теплопроводности

$$\delta Q = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(q_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(q_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(q_z\right)\right] dxdydzdt$$

Внутри тела может выделяться или поглощаться теплота в результате, например, химических или фазовых превращений, действия электрического тока и др. Количество теплоты, которая выделяется внутренними источниками теплоты в объеме за время dt есть

$$\delta Q_V = q_V dxdydzdt ,$$

где $q_V = q_V\left(x, y, z, t\right)$ – объемная мощность внутренних источников теплоты.

Согласно закону сохранения энергии для изобарного процесса

$$\delta Q + \delta Q_V = dH ,$$

где dH – приращение энтельпии элементарного об'єма за время dt.

Так, как $dH = c_p \rho \left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial T}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial T}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial T}{\partial z}\right) dxdydzdt$ имеем:

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_V$$

или в векторном виде

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} + c_p \rho \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T\right) = -div \vec{q} + q_V ,$$

где ρ – плотность вещества кг/м^3; c_p – изобарная теплоемкость единицы массы жидкости Дж/(кг·К).

Используя закон Фурье получим дифференциальное уравнение теплопроводности в следующем виде:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} + c_p \rho \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T\right) = div\left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_V .$$

Второе слагаемое левой части в последнем выражении описывает перенос теплоты за сет вынужденной конвекции.

§8.3 Основные понятия теории подобия.

Система уравнений (8.1) – (8.6) не дает однозначного определения процесса теплообмена. Ведь потоки могут быть весьма разнообразными:

1) безграничный поток, что обтекают или систему тел некоторой формы (слой, цилиндр, плоскость, крыло самолета, щепоток труб);

2) поток в трубе определенной формы сечения (например, круг, прямоугольник);

3) поток, ограниченный стенками твердого тела и в то же время обтекающий систему тел.

Для этих трех случаев уравнения (8.1) – (8.4) остаются справедливыми, однако их решения разные в результате резкого отличия в предельных условиях для этих три случаев. Решение системы уравнений будут одинаковы для тех процессов, для которых заданы тождественные предельные условия. Если система уравнений (8.1) – (8.4) не имеет решения, то применяют принципы теории подобия.

Два процесса теплообмена при наличии вынужденной конвекции подобны между собой, если геометрические размеры d, скорость u, плотность ρ, давление p, время t, температура T, динамическая вязкость μ, удельная теплоемкость c, теплопроводность λ, коэффициент теплоотдачи α будут удовлетворять следующим условиям пропорциональности:

$$\begin{aligned} &x' = \eta_\ell x, && y' = \eta_\ell y, && z' = \eta_\ell z, && d' = \eta_\ell d, \\ &v' = \eta_v v, && \rho' = \eta_\rho \rho, && t' = \eta_t t, && \\ &c' = \eta_c c, && \mu' = \eta_\mu \mu, && \lambda' = \eta_\lambda \lambda, && \alpha' = \eta_\alpha \alpha, \\ &p' = \eta_p p + p_0, && T' = \eta_T T + T_0, && u' = \eta_V u + u_0. && \end{aligned} \tag{8.7}$$

Величины с разными знаками являются постоянными и безразмерными. Допустим, что уравнения (8.1) – (8.4) относятся к первому процессу. Для второго процесса напишем такие же уравнения, в которых для соответствующих величин примем те же обозначения, но со штрихами:

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla})\vec{u}' = \vec{g} - \frac{1}{\rho'} \operatorname{grad} p' + \frac{\mu'}{\rho'} \nabla^2 \vec{u}' + \frac{\mu'}{3\rho'} \nabla^2 \vec{u}', \tag{8.8}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \operatorname{div}(\rho' u') = 0, \tag{8.9}$$

$$\frac{dT'}{dt'} = a' \nabla^2 T', \tag{8.10}$$

$$-\lambda'_g \left. \frac{\partial T'}{\partial n'} \right|_s = \alpha'(T'_s - T'_g). \tag{8.11}$$

В уравнениях (8.8) – (8.11) величины со штрихами можем заменить величинами без штрихов с помощью уравнений (8.7). При замене необходимо помнить о размерности каждого члена уравнения. Проводя замену вместо (8.8) – (8.11), получим:

$$\frac{\eta_v}{\eta_t} \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\eta_p}{\eta_\rho \eta_l} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta_\mu}{\eta_\rho} \frac{\eta_v}{\eta_l^2} \frac{\mu}{\rho} (\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \operatorname{graddiv} \vec{u}), \tag{8.12}$$

$$\frac{\eta_T}{\eta_t} \frac{dT}{dt} = \frac{\eta_\alpha \eta_T}{\eta_l^2} a \nabla^2 T, \tag{8.13}$$

$$\frac{\eta_\rho}{\eta_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\eta_\rho \eta_T}{\eta_l} \operatorname{div}(\rho \cdot u) = 0, \tag{8.14}$$

$$-\frac{\eta_\lambda \eta_T}{\eta_l} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \eta_\alpha \eta_T \alpha (T_s - T_g). \tag{8.15}$$

Если система уравнений (8.12) – (8.15) тождественная с системой (8.1) – (8.4), то числовые множители в соответствующих уравнениях должны быть равны. Как следствие

$$\frac{\eta_v}{\eta_t}=\frac{\eta_p}{\eta_\rho\eta_l},\ \frac{\eta_T}{\eta_t}=\frac{\eta_\alpha\eta_T}{\eta_l^2},\ \frac{\eta_v}{\eta_t}=\frac{\eta_\mu}{\eta_\rho}\frac{\eta_v}{\eta_l^2},\ \frac{\eta_\lambda\eta_T}{\eta_l}=\eta_\alpha\eta_T\,. \qquad (8.16)$$

Подставляя в уравнение (8.16) вместо безразмерных коэффициентов отношения соответствующих величин из уравнения (8.7) и группируя отдельные величины со штрихами и величины без штрихов (имея в виду, что $d/t=u$, $d'/t'=u'$), получим вместо (8.16) следующие безразмерные комплексы (**числа подобия**):

$$\frac{p}{u^2\rho}=\frac{p-p_0}{u'^2\rho'}=const=\mathrm{Eu}\ -\text{ число Эйлера,}$$

$$\frac{ud\rho}{\mu}=\frac{u'd'\rho'}{\mu'}=const=\mathrm{Re}\ -\text{число Рейнольдса,}$$

$$\frac{at}{d^2}=\frac{a't'}{d'^2}=const=\mathrm{Fo}\ -\text{число Фурье,}$$

$$\frac{\alpha d}{\lambda}=\frac{\alpha' d'}{\lambda'}=const=\mathrm{Nu}\ -\text{число Нуссельта,}$$

$$\frac{ud}{a}=\frac{u'd'}{a'}=const=\mathrm{Pe}\ -\text{число Пекле.}$$

Критерии подобия Эйлера и Рейнольдса получены из уравнения гидродинамики и могут быть рассмотрены вне связи с другими величинами. Эти постоянные зависят между собой причем, определяющей величиной является число Рейнольдса. Равенство чисел Re для двух потоков указывает на гидродинамическое подобие этих потоков. Критерий Рейнольдса характеризует гидродинамический поток.

Такое же свойство имеет и критерий Фурье Fo. Так как этот критерий получен из сравнения двух дифференциальных уравнений теплопроводности, то он характеризует подобие температурных полей двух сред.

Критерий Нуссельта Nu и критерий пекле Pe, вместе с критерием Рейнольдса Re характеризуют подобие процессов теплообмена при вынужденной конвекции. Эти критерии зависимы между собой. Отсюда, не решая дифференциальных уравнений, с помощью принципа подобия можно установить наименьшее число величин, которые характеризуют данный процесс. Так гидродинамический процесс характеризуется критерием Рейнольдса Re, температурное поле – критерием Фурье Fo. Если же данный процесс характеризуется и температурным и скоростным полем, то для его описания необходимо знать оба критерия, а также функциональную связь, между ними.

Однако, принцип подобия не может показать функциональный вид этой связи. Для его установления необходимы оптимальные данные. Если эта функция известна, то, согласно принципа подобия, она будет такой же для другого процесса, подобного данному.

Процессы теплообмена при вынужденном движении теплоносителя и при свободной конвекции протекают по-разному. Различными оказываются также числа подобия для этих процессов. Поэтому эти два случая теплообмена целесообразно рассматривать, вначале раздельно.

§ 8.4. Условия подобия конвективного теплообмена при вынужденном движении теплоносителя.

На практике встречается большое число разнообразных задач, в которых теплообмен происходит в условиях вынужденного движения теплоносителя. Они различаются по геометрической форме и конфигурации систем, в которых протекает процесс теплообмена, по кинематической картине и режиму течения потока. Различными могут быть также сами теплоносители – жидкости и газы. Однако для всех таких процессов условия подобия имеют единообразный, универсальный вид, определяемый теорией подобия. Прежде всего, подобными могут быть лишь процессы теплообмена, протекающие в геометрически подобных системах. Далее необходимой предпосылкой подобия должно быть подобие полей скорости,

температур и давлений во входном или начальном сечении таких систем. При выполнении этих условий стационарные процессы конвективного теплообмена при вынужденном движении будут подобны, если выполняется совместное условие (*idem* – с *латинского* «всегда одно и тоже»):

$$\mathrm{Re} = idem \text{ и } \mathrm{Pr} = idem .$$

Число Рейнольдса определяет гидромеханическое подобие течений теплоносителей:

$$\mathrm{Re} = \frac{\omega_0 l}{\nu},$$

где ω_0 – характерная, обычно средняя скорость жидкости или газа в начальном сечении системы; l – характерный геометрический размер системы (например, диаметр канала, длина пластины и т. д.); ν – кинематический коэффициент вязкости теплоносителя.

Число Прандтля является теплофизической характеристикой теплоносителя. Оно составлено лишь из физических параметров:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \text{ или } \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

так как коэффициенты кинематической вязкости $\nu = \mu / \rho$ и температуропроводности $a = \lambda / c_p \rho$. Численные значения числа Прандтля приводятся в таблицах.

При равенстве чисел Re условие одинаковости чисел Pr обеспечивает тепловое подобие, т. е. подобие полей температурных напоров и тепловых потоков во всем объеме рассматриваемых систем.

Согласно теории подобия у подобных процессов должны быть одинаковы также и определяемые числа подобия. В процессах конвективного теплообмена, в качестве определяемого выступает число Нуссельта Nu, характеризующее интенсивность процесса конвективного теплообмена:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}.$$

где α – коэффициент теплоотдачи; l – характерный геометрический размер; λ – коэффициент теплопроводности теплоносителя.

Уравнение подобия для процессов конвективного теплообмена при вынужденном движении теплоносителя имеет вид:

$$Nu = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}).$$

Приведенные выше условия подобия определяются путем анализа математического описания процессов конвективного теплообмена. При вынужденном движении теплоносителя гидромеханическая картина течения не зависит от теплообмена, поэтому условия гидромеханического подобия являются необходимой предпосылкой теплового подобия. Они сводятся к подобию полей скорости и давления во входном сечении систем и к выполнению условия $\mathrm{Re} = idem$.

§8.4. Условия подобия процессов теплообмена при свободной конвекции.

Процесс свободной конвекции возникает из-за различия плотностей нагретых и холодных частиц теплоносителя. Для большинства теплоносителей в том интервале температур, который обычно встречается на практике, зависимость плотности от температуры с достаточным приближением может рассматриваться как линейная. Так, если вдали от нагретого тела температура теплоносителя составляет T_g, а в некоторой точке около поверхности равна T, то соответствующие значения плотности ρ_g и ρ связаны уравнением

$$\rho = \rho_g \left[1 - \beta \left(T - T_g \right) \right],$$

где β – температурный коэффициент объемного расширения среды.

Так как $\rho < \rho_g$, то на частицы нагретой жидкости (единицы объема жидкости), имеющей температуру T, действует подъемная архимедова сила, равная:

$$f_A = g\left(\rho_g - \rho\right) = g\rho_g\beta\left(T - T_g\right).$$

Эта сила и вызывает конвективное движение среды. Из уравнения следует, что подъемная сила будет тем больше, чем выше значение следующих величин: напряженности гравитационного поля g, температурного коэффициента объемного расширения β и температурного напора ΔT.

Необходимой предпосылкой подобия процессов теплообмена при свободной конвекции должно быть подобие температурных полей на поверхностях нагрева или охлаждения (в геометрически подобных системах). При выполнении этих требований стационарные процессы свободной конвекции будут подобны, если выполняются условия:

$$Gr = idem, \quad \mathrm{Pr} = idem.$$

Число Gr характеризует относительную эффективность подъемной силы, вызывающей свободно-конвективное движение среды; оно имеет вид:

$$Gr = g\beta\Delta T\frac{l^3}{\nu^2},$$

где g – ускорение свободного падения; β – температурный коэффициент объемного расширения среды; ΔT – характерный температурный напор; l – характерный линейный размер системы; ν – кинематический коэффициент вязкости.

Уравнение подобия для процессов теплообмена при свободной конвекции имеет вид:

$$Nu = f(Gr, \mathrm{Pr}). \qquad (1.30)$$

Вывод чисел подобия можно получить из анализа математического описания процессов свободной конвекции. В таких процессах гидродинамическая и тепловая стороны явления оказываются взаимосвязанными.

§ 8.5. Условия подобия процессов конвективного теплообмена при совместном свободно-вынужденном движении теплоносителя.

Анализ условий подобия раздельно для случаев вынужденного движения и свободной конвекции был проведен выше. На практике, однако, встречаются также случаи, когда одновременно с вынужденным движением в системе под действием подъемных сил развиваются токи свободной конвекции, т. е. имеет место свободно-вынужденное течение теплоносителя. В таком более сложном случае для выполнения условий подобия процессов необходима инвариантность (одинаковость) уже не двух, а трех определяющих чисел подобия: Рейнольдса Re, Грасгофа Gr и Прандтля Pr. Соответствующее уравнение подобия для теплоотдачи при совместном свободно-вынужденном движении принимает вид:

$$Nu = f(\mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr}).$$

Это уравнение подобия представляет собой общее соотношение, из которого вытекают ранее рассмотренные частные случаи. Когда влияние подъемных сил, характеризуемых числом Gr, перестает быть существенным, в уравнении подобия это число может быть опущено и наоборот.

Для нестационарных процессов, т. е. процессов, изменяющихся во времени, необходимо добавить и число Фурье, определяющее временное подобие процессов:

$$Fo = \frac{a\tau}{l^2} = idem,$$

где a – коэффициент температуропроводности жидкости; τ – время: l – характерный геометрический размер.

Иногда при обобщении экспериментальных данных по теплообмену в качестве чисел подобия применяются некоторые сочетания, образованные из других чисел подобия, которые имеют свои названия.

Числом Пекле Pe называется произведение чисел Re и Pr:

$$\mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr} \text{ или } \mathrm{Pe} = \frac{\omega l}{a},$$

где ω – характерная для процесса скорость течения теплоносителя; l – характерный геометрический размер системы; a – коэффициент температуропроводности теплоносителя.

Числом Стантона St называется частное от деления числа Nu на число Pe:

$$\mathrm{St} = \mathrm{Nu}/\mathrm{Pe} \quad \text{или} \quad \mathrm{St} = \frac{\alpha}{c_p \rho \omega},$$

где α – коэффициент теплоотдачи; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении теплоносителя; ρ – плотность теплоносителя; ω – характерная скорость.

Произведение числа Gr на число Pr иногда называют **числом Релея** Ra:

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} \quad \text{или} \quad \mathrm{Ra} = g\beta\Delta T\frac{l^3}{\nu a},$$

где g – ускорение свободного падения; β – температурный коэффициент объемного расширения теплоносителя; ΔT – характерный температурный напор; l – характерный линейный размер; ν – кинематический коэффициент вязкости теплоносителя; a – коэффициент температуропроводности теплоносителя. При использовании этих чисел подобия уравнения подобия принимают внешне иной вид, хотя по существу это лишь иная форма записи той же самой связи между величинами. Поясним это на следующем примере. Пусть для определенного процесса теплоотдачи при вынужденном движении теплоносителя в итоге обобщения опытных данных получена зависимость:

$$\mathrm{Nu} = c\,\mathrm{Re}^n\,\mathrm{Pr}^m$$

где c – постоянный числовой коэффициент; n и m –постоянные показатели степени.

Если разделить обе части этого уравнения на величину Re·Pr, то его можно записать также в виде:

$$\mathrm{St} = c\,\mathrm{Re}^{n-1}\,\mathrm{Pr}^{m-1}.$$

Ясно, что эти три соотношения представляют собой просто три разные формы записи одной и той же зависимости. Этот пример показывает, что разные по внешнему виду уравнения подобия, как:

$$\mathrm{Nu} = f_1(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}), \quad \mathrm{St} = f_2(\mathrm{Re},\mathrm{Pr})$$

в действительности представляют лишь разную форму записи одной и той же функциональной зависимости. Для нестационарных процессов иногда вместо числа Фурье применяется иное число подобия, называемое числом гомохронности Но:

$$\mathrm{Ho} = \mathrm{Fo}\cdot\mathrm{Pe} \quad \text{или} \quad \mathrm{Ho} = \frac{\tau\omega}{l},$$

где τ – время.

Условия подобия процессов конвективного теплообмена получены в предположении, что коэффициент теплопроводности λ, коэффициент вязкости μ и удельная теплоемкость при постоянном давлении c_p среды постоянны во всей области протекания процесса. В действительности эти физические свойства зависят от температуры, причем для разных теплоносителей характер зависимостей $\lambda = \lambda(T)$, $\mu = \mu(T)$, $c_p = c_p(T)$ различен. В процессе теплообмена температура теплоносителя изменяется, следовательно, в общем случае и физические свойства не остаются постоянными. Подобие процессов выполняется тем строже, чём меньше относительное изменение этих свойств, т. е. чем слабее зависимость λ, μ, c_p от T, тем меньше сами температурные напоры в системе и ниже тепловые потоки. При значительном изменении свойств, строгое подобие различных процессов, как показывает анализ, в общем случае становится невозможным. В этих условиях имеет место лишь приближенное подобие. Это обстоятельство должно учитываться при обобщении опытных данных.

9. ДВИЖЕНИЕ ГАЗА И ЯВЛЯНИЯ В АТМОСФЕРЕ

§ 9.1 Атмосферное давление. Ветры.

Атмосфера – это газовая оболочка (воздух), окружающая земной шар и связанная с ним силой тяжести. Она представляет собой смесь газов, водяного пара и примесей (аэрозолей). По составу воздух у поверхности земли содержит 78% азота (N_2) и около 21% кислорода (O_2), т.е. на эти два элемента приходится около 99% объема воздуха. Заметная доля принадлежит аргону (Ar) - 0,9%. Важные составные части атмосферы - озон (O_3), углекислый газ (CO_2), а также водяной пар. Значение этих газов определяется прежде всего тем, что они очень сильно поглощают лучистую энергию и тем самым оказывают существенное влияние на температурный режим поверхности земли и атмосферы.

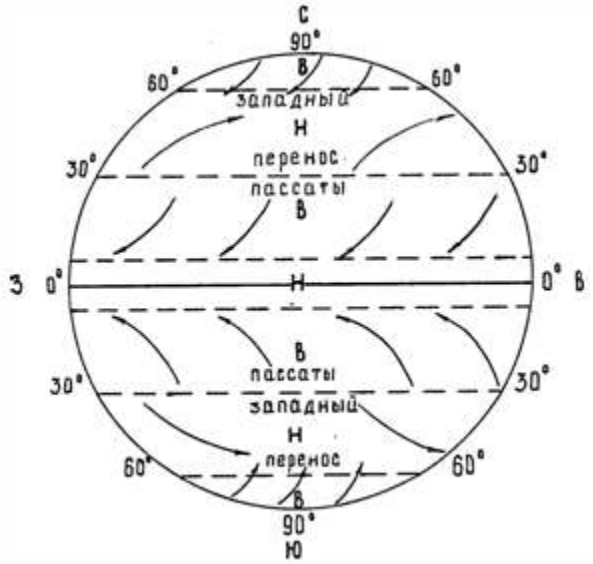
В состав атмосферного воздуха входят также многочисленные взвешенные в нем твердые и жидкие примеси - так называемые аэрозоли. Они имеют естественное и искусственное (антропогенное) происхождение (пыль, сажа, пепел, кристаллики льда и морской соли, капельки воды, микроорганизмы и т.д.).

Вес воздуха обусловливает атмосферное давление (1 $м^3$ воздуха весит 1,033 кг). На каждый метр земной поверхности воздух давит с силой 10033 кг. Иначе говоря, собственная масса воздуха создает атмосферное давление, величина которого на единицу площади соответствует массе находящегося над нею воздушного столба. При этом уменьшение воздуха в этом столбе приводит к уменьшению (падению) давления, а увеличение воздуха – к увеличению (росту) давления. За *нормальное* атмосферное давление принято давление воздуха на уровне моря на широте 45° и при температуре 0°С. В этом случае атмосфера давит на каждый 1 $см^2$ земной поверхности с силой 1,033 кг, а масса этого воздуха уравновешивается ртутным столбиком высотой 760 мм.

Давление на земном шаре может изменяться в широких пределах. Так, максимальная величина атмосферного давления (815.85 мм рт.ст.) зарегистрирована зимой в Туруханске, минимальная (641.3 мм рт.ст.) – в урагане “Ненси” над Тихим океаном.

Давление изменяется с высотой. Принято считать средним значением атмосферного давления давление над уровнем моря 760 мм рт.ст.. С увеличением высоты воздух становится все более разреженным и давление уменьшается. В нижнем слое тропосферы до высоты 10 км оно понижается на 1 мм рт.ст. на каждые 10 м. На высоте 5 км оно уже меньше в два раза, 15 км – в 8 раз, 20 км – в 18 раз.

Атмосферное давление непрерывно меняется в связи с изменением температуры и перемещением воздуха. В течении суток оно повышается дважды (утром и вечером), дважды понижается (после полудня и после полуночи). В течении года на материках максимальное давление наблюдается зимой, когда воздух переохлажден и уплотнен, а минимальное – летом.



Распределение атмосферного давления по земной поверхности носит хорошо выраженный зональный характер, что обусловлено неравномерным нагреванием земной поверхности, а следовательно, и изменением давления. Изменение давления объясняется перемещением воздуха. Оно высокое там, где воздуха становится больше, низкое там, откуда воздух уходит. Нагреваясь от поверхности, воздух устремляется вверх и давление на теплую поверхность понижается. Но на высоте воздух охлаждается, уплотняется и начинает опускаться на соседние холодные участки, где давление возрастает. Таким образом, нагревание и охлаждение воздуха от поверхности Земли сопровождается его пере-

распределением и изменением давления.

В *экваториальных* широтах температуры воздуха постоянно высокие, воздух, нагреваясь, поднимается и уходит в сторону тропических широт. Поэтому в экваториальной зоне давление постоянно пониженное. В тропических широтах в результате притока воздуха создается повышенное давление. Над постоянно холодной поверхностью полюсов (в Арктике и Антарктике) давление повышенное, его создает воздух, приходящий из умеренных широт. Вместе с тем в умеренных широтах отток воздуха формирует пояс пониженного давления. В результате на Земле формируются *пояса пониженного* (экваториальный и два умеренных) и *повышенного* (два тропических и два полярных) *давления*. В зависимости от сезона они несколько смещаются в сторону летнего полушария (вслед за Солнцем).

Воздух непрерывно движется: он поднимается – *восходящее* движение, опускается – *нисходящее* движение. Движение воздуха в *горизонтальном* направлении называется *ветром*. Причиной возникновения ветра является неравномерное распределение давления воздуха на поверхность Земли, которое вызвано неравномерным распределением температуры. При этом воздушный поток движется от мест с большим давлением в сторону, где давление меньше.

При ветре воздух движется не равномерно, а толчками, порывами, особенно у поверхности Земли. Существует много причин, которые влияют на движение воздуха: трение воздушного потока о поверхность Земли, встреча с препятствиями и др. Кроме того, воздушные потоки под влиянием вращения Земли отклоняются в северном полушарии вправо, а в южном – влево.

Ветер характеризуется *скоростью, направлением и силой*.

Скорость ветра измеряется в метрах в секунду (м/с), километрах в час (км/ч), баллах (по шкале Бофорта от 0 до 12, в настоящее время до 13 баллов). Скорость ветра зависит от разницы давления и прямо пропорциональна ей: чем больше разность давления (горизонтальный барический градиент), тем больше скорость ветра. Средняя многолетняя скорость ветра у земной поверхности 4-9 м/с, редко более 15 м/с. В штормах и ураганах (умеренных широт) - до 30 м/с, в порывах до 60 м/с. В тропических ураганах скорости ветра доходят до 65 м/с, а в порывах могут достигать 120 м/с.

Направление ветра определяется той стороной горизонта, с которой дует ветер. Для его обозначения применяется восемь основных направлений (румбов): С, СЗ, З, ЮЗ, Ю, ЮВ, В, СВ. Направление зависит от распределения давления и от отклоняющего действия вращения Земли.

Сила ветра зависит от его скорости и показывает, какое динамическое давление оказывает воздушный поток на какую-либо поверхность. Сила ветра измеряется в килограммах на квадратный метр (кг/м^2).

Ветры чрезвычайно разнообразны по происхождению, характеру и значению. Так, в умеренных широтах, где господствует западный перенос, преобладают ветры *западных* направлений (СЗ, З, ЮЗ). Эти области занимают обширные пространства - примерно от 30 до 60° в каждом полушарии. В полярных областях ветры дуют от полюсов к зонам пониженного давления умеренных широт. В этих областях преобладают северо-восточные ветры в Арктике и юго-восточные в Антарктике. При этом юго-восточные ветры Антарктики, в отличие от Арктических, более устойчивые и имеют большие скорости.

Воздух непрерывно движется: он поднимается – *восходящее* движение, опускается – *нисходящее* движение. Движение воздуха в *горизонтальном* направлении называется **ветром**. Причиной возникновения ветра является неравномерное распределение давления воздуха на поверхность Земли, которое вызвано неравномерным распределением температуры. При этом воздушный поток движется от мест с большим давлением в сторону, где давление меньше.

При ветре воздух движется не равномерно, а толчками, порывами, особенно у поверхности Земли. Существует много причин, которые влияют на движение воздуха: трение воздушного потока о поверхность Земли, встреча с препятствиями и др. Кроме того, воздушные по-

токи под влиянием вращения Земли отклоняются в северном полушарии вправо, а в южном – влево.

Ветер характеризуется **скоростью, направлением и силой**.

Скорость ветра измеряется в метрах в секунду (м/с), километрах в час (км/ч), баллах (по шкале Бофорта от 0 до 12, в настоящее время до 13 баллов). Скорость ветра зависит от разницы давления и прямо пропорциональна ей: чем больше разность давления (горизонтальный барический градиент), тем больше скорость ветра. Средняя многолетняя скорость ветра у земной поверхности 4-9 м/с, редко более 15 м/с. В штормах и ураганах (умеренных широт) - до 30 м/с, в порывах до 60 м/с. В тропических ураганах скорости ветра доходят до 65 м/с, а в порывах могут достигать 120 м/с.

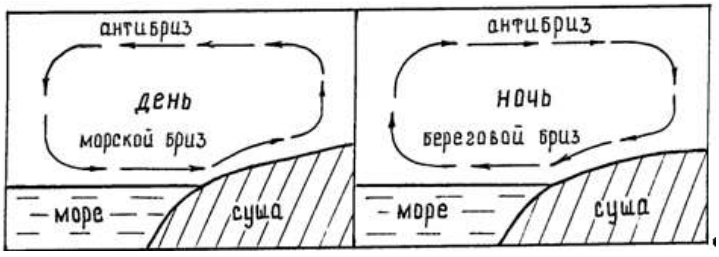
Направление ветра определяется той стороной горизонта, с которой дует ветер. Для его обозначения применяется восемь основных направлений (румбов): С, СЗ, З, ЮЗ, Ю, ЮВ, В, СВ. Направление зависит от распределения давления и от отклоняющего действия вращения Земли.

Сила ветра зависит от его скорости и показывает, какое динамическое давление оказывает воздушный поток на какую-либо поверхность. Сила ветра измеряется в килограммах на квадратный метр (кг/м^2).

Ветры чрезвычайно разнообразны по происхождению, характеру и значению. Так, в умеренных широтах, где господствует западный перенос, преобладают ветры *западных* направлений (СЗ, З, ЮЗ). Эти области занимают обширные пространства - примерно от 30 до 60° в каждом полушарии. В полярных областях ветры дуют от полюсов к зонам пониженного давления умеренных широт. В этих областях преобладают северо-восточные ветры в Арктике и юго-восточные в Антарктике. При этом юго-восточные ветры Антарктики, в отличие от Арктических, более устойчивые и имеют большие скорости.

Самая обширная зона ветров земного шара находится в тропических широтах, где дуют пассаты.

Пассаты – постоянные ветры тропических широт. Они распространены в зоне от 30°с.ш. до 30°ю.ш., то есть ширина каждой зоны 2-2,5 тыс. км. Это устойчивые ветры умеренной скорости (5-8 м/с). У земной поверхности они вследствие трения и отклоняющего действия суточного вращения Земли имеют преобладающее северо-восточное направление в северном полушарии и юго-восточное в южном. Образуются они потому, что в экваториальном поясе нагретый воздух поднимается вверх, а на его место с севера и юга приходит тропический воздух.



Бризы – местные ветры, которые днем дуют с моря на сушу, а ночью с суши на море. В связи с этим различают **дневной** и **ночной** бризы. **Дневной** (морской) бриз образуется в результате того, что днем суша нагревается быстрее, чем море, и над ней устанавливается более низкое давление. В это время над морем (более охлажденным) давление выше и воздух начинает перемещаться с моря на сушу. **Ночной** (береговой) бриз дует с суши на море, так как в это время суша охлаждается быстрее, чем море, и пониженное давление оказывается над водной поверхностью - воздух перемещается с берега на море.

Смена берегового бриза на морской происходит незадолго до полудня, а морского на береговой – вечером. Слой воздуха, охваченный бризом, может распространяться на высоту до нескольких сот метров, а выше, как правило, отмечается движение воздуха в обратном направлении – *антибриз*. Антибризы вместе с бризами образуют замкнутую циркуляцию.

Муссоны – это ветры, аналогичные бризам, но меняющие свое направление в зависимости от времени года и охватывающие огромные площади. Зимой они дуют с суши на море, летом – с моря на сушу. Зимой материк более холодный и, следовательно, давление над ним выше. Летом, наоборот, суша прогрета и давление над ней ниже. Тогда влажный океаниче-

ский воздух перемещается на сушу. Со сменой муссонов происходит смена сухой малооблачной зимней погоды на дождливую летнюю.

При подъеме теплой воздушной массы вверх водяной пар в ней конденсируется, образует мельчайшие капельки и кристаллы, которые, сгущаясь, формируют облака. Высота их образования зависит от температуры и относительной влажности воздуха. При достижении им высоты, на которой насыщение станет полным, - уровня конденсации - начинается конденсация и облакообразование. Облака находятся в постоянном движении.

При определенных условиях капельки и кристаллы в облаках начинают укрупняться и достигают такой величины, что восходящие токи и сопротивление воздуха не могут удерживать их на высоте. Они падают или осаждаются на земную поверхность. Вода в жидком или твердом состоянии, выпадающая из облаков или осаждающаяся из воздуха на поверхность земли, называется **атмосферными осадками**.

§ 9.2. Воздушные массы. Циклоны и антициклоны. Атмосферные фронты.

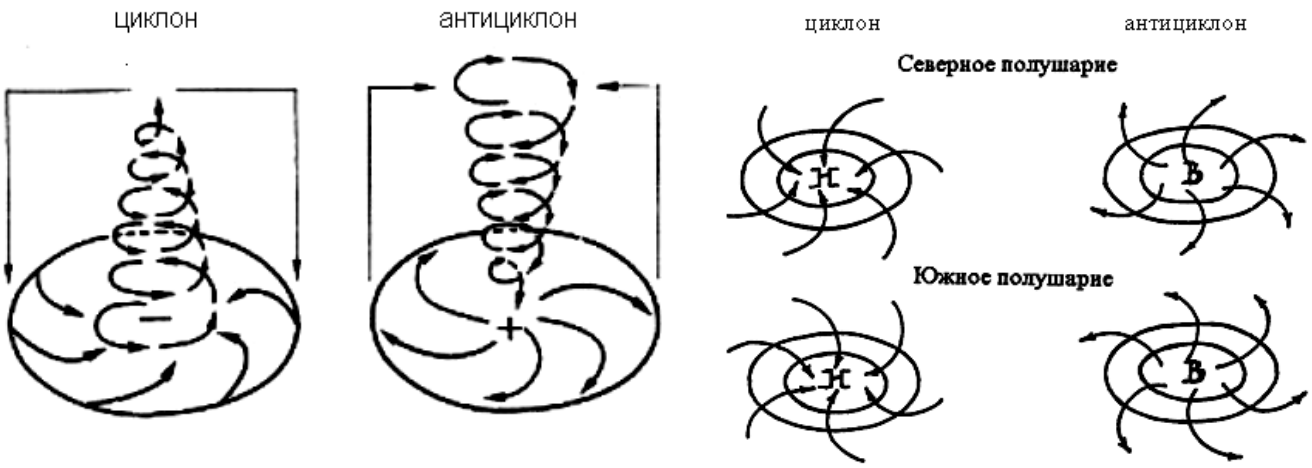
Атмосфера неоднородна. В ее составе, особенно вблизи земной поверхности, можно выделить воздушные массы.

Воздушные массы – отдельные крупные объемы воздуха, обладающие определенными общими свойствами (температурой, влажностью, прозрачностью и т.д.) и движущиеся как одно целое. Однако внутри этого объема ветры могут быть разные. Свойства воздушной массы определяются районом ее формирования. Она приобретает их в процессе соприкосновения с подстилающей поверхностью, над которой она формируется или задерживается. Воздушные массы имеют разные свойства. Например, воздух Арктики имеет низкие, а воздух тропиков высокие температуры во все сезоны года, воздух северной Атлантики существенно отличается от воздуха материка Евразии. Горизонтальные размеры воздушных масс огромны, они соизмеримы с материками и океанами или их крупными частями. Выделяют главные (зональные) типы воздушных масс, формирующихся в поясах с разным атмосферным давлением: арктические (антарктические), умеренные (полярные), тропические и экваториальные. Зональные воздушные массы подразделяются на морские и континентальные – в зависимости от характера подстилающей поверхности в районе их формирования.

Воздушные массы находятся в непрерывном движении. При этом если воздушные массы движутся в более высокие широты или на более холодную поверхность, их называют **теплыми**, так как они приносят потепление. Воздушные массы, перемещающиеся в более низкие широты или на более теплую поверхность, называются **холодными**. Они приносят похолодание.

Перемещаясь в другие географические районы, воздушные массы постепенно меняют свои свойства, прежде всего температуру и влажность, т.е. переходят в воздушные массы другого типа. Процесс превращения воздушных масс из одного типа в другой под влиянием местных условий называется трансформацией.

В тропосфере постоянно возникают, развиваются и исчезают вихри разных размеров – от



небольших, до гигантских по площади циклонов и антициклонов .

Циклон – это область с пониженным давлением в центре. Поэтому воздух в циклоне перемещается по спирали от периферии (из областей высокого давления) к центру (в область низкого давления) и затем поднимается вверх, образуя **восходящие** потоки. В циклоне воздух движется по криволинейному пути и направлен против часовой стрелки в Северном полушарии и по часовой стрелке – в Южном. С циклонами связаны обширные области облаков и осадков, значительные изменения температуры, сильные ветры.

Кроме умеренных широт циклоны наблюдаются в тропическом поясе. **Тропические** циклоны возникают только над морем, между 10-15° с. и ю.ш. При переходе на сушу они быстро затухают. Это, как правило, небольшие циклоны, их диаметр около 250 км но с очень низким давлением в центре. Тропические циклоны перемещаются со скоростью 10-20 км/ч в основном с востока на запад, но их траектория отклоняется в сторону высоких широт (например, в Северном полушарии они движутся к северо-западу). Это очень мощные вихри с исключительно сильными ветрами (20-30 м/с, в порывах до 100 м/с и более), которые вызывают сильнейшее волнение на море и большие разрушения на суше. В различных районах они имеют местные названия (**циклон** – в Индийском океане; **ураган** – в Северной и Центральной Америке; **тайфун** – в Восточной Азии). Циклоны особенно характерны для территории Европы, где они перемещаются с Атлантики на восток и существуют до 5-7 суток, т.е. пока не выровняется атмосферное давление.

Считается, что возникновение циклонов и пополнение их энергией происходит в результате подъёма больших масс тёплого воздуха и скрытой теплоты конденсации. Считается, что в районах образования тропических циклонов вода теплее атмосферы. В этом случае воздух нагревается от океана и поднимается вверх. В результате влага конденсируется и выпадает в виде дождей, давление в центре циклона падает, что и приводит к возникновению вращательных движений воздуха, влаги, твердых веществ, заключенных в циклоне.

Антициклон – это область с повышенным давлением в центре. Благодаря этому движение воздуха в антициклоне направлено от центра (из области более высокого давления) к периферии (в области более низкого давления). В центре антициклона воздух опускается, образуя нисходящие потоки, и растекается во все стороны, т.е. от центра к периферии. При этом он также вращается, но направление вращения противоположно циклоническому – оно происходит по часовой стрелке в Северном полушарии и против часовой стрелки – в Южном. Антициклоны в умеренных широтах чаще всего следуют за циклонами, нередко они принимают малоподвижное (стационарное) состояние и также существуют до тех пор, пока давление не выровняется (6-9 суток). В связи с нисходящими движениями в антициклоне воздух не насыщается влагой, облакообразование не происходит и преобладает малооблачная и сухая погода со слабыми ветрами и штилями. Кроме умеренных широт антициклоны в самой большей степени распространены в субтропических широтах – в поясах высокого давления. Здесь это постоянные, существующие в течение всего года атмосферные вихри (области высокого давления).

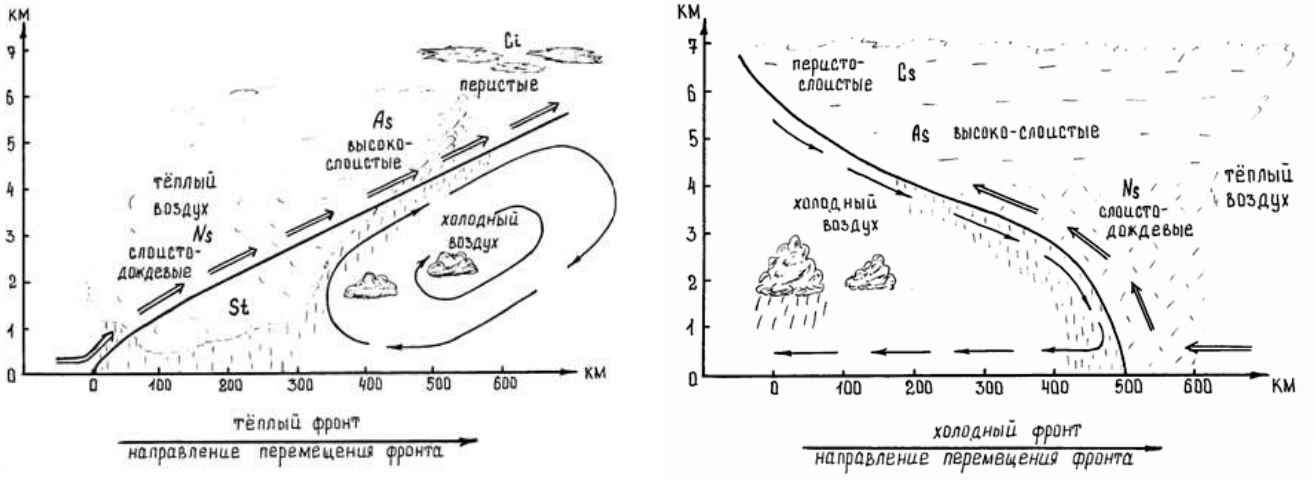
Размеры циклонов и антициклонов сопоставимы: диаметр их может достигать 3-4 тыс. км, а высота – максимум 18-20 км, т.е. они представляют собой плоские вихри с сильно наклонной осью вращения. Перемещаются они обычно с запада на восток со скоростью 20-40 км/ч (кроме стационарных).

Воздушные массы, имея различные физические свойства (особенно температуру воздуха), разделяются между собой довольно узкими переходными зонами, которые сильно наклонены к земной поверхности (меньше 1°). **Атмосферным фронтом** называется раздел между воздушными массами, обладающими разными физическими свойствами. Пересечение фронта с земной поверхностью называется **линией фронта**. На фронте все свойства воздушных масс (температура, направление и скорость ветра, влажность, облачность, осадки) резко меняются. Прохождение фронта через место наблюдения сопровождается более или менее резкими изменениями погоды.

Различают фронты, связанные с **циклонами**, и **климатические** фронты.

В циклонах фронты образуются при встрече теплого и холодного воздуха. Холодный воздух, встречаясь с теплым, всегда оказывается внизу. Он подтекает под теплый, стремясь вытеснить его вверх. Теплый воздух, наоборот, натекает на холодный и если теснит его, то сам при этом поднимается по плоскости раздела. В зависимости от того, какой воздух активнее, в какую сторону смещается фронт, он называется теплым или холодным.

Теплый фронт перемещается в сторону холодного воздуха и означает наступление теплого воздуха. Он медленно оттесняет холодный воздух. Как более легкий он натекает на клин холодного воздуха, полого поднимаясь вверх по поверхности раздела. При этом перед фронтом образуется обширная зона облаков, из которых выпадают обложные осадки. Полоса осадков перед теплым фронтом достигает 300, а в холодное время даже 400 км. За линией фронта осадки прекращаются. Постепенная смена холодного воздуха теплым приводит к понижению давления и усилению ветра. После прохождения фронта наблюдается резкое изменение погоды: повышается температура воздуха, ветер изменяет направление примерно на 90° и ослабевает, ухудшается видимость, образуются туманы, могут выпадать моросящие осадки.



Холодный фронт перемещается в сторону теплого воздуха. В этом случае холодный воздух (как более плотный и тяжелый) движется по земной поверхности в виде клина, движется быстрее, чем теплый и, как бы приподнимает впереди себя теплый воздух, энергично выталкивая его вверх. Над линией фронта и впереди его образуются большие кучево-дождевые облака, из которых выпадают ливневые дожди, возникают грозы, наблюдаются сильные ветры. После прохождения фронта осадки и облачность значительно уменьшаются, ветер изменяет направление примерно на 90° и несколько ослабевает, температура понижается, уменьшается влажность воздуха, увеличивается его прозрачность и видимость; давление растет.

Климатические фронты –фронты глобального масштаба, являющиеся разделами между главными (зональными) типами воздушных масс. Таких фронтов пять: **арктический**, **антарктический**, два **умеренных** (полярных) и **тропический**.

Ураган (тайфун) – это атмосферный вихрь, который образуется в тропических широтах и в его эпицентре максимально пониженное давление. Ураганом принято называть тропический циклон на побережье американского континента, северного или южного, тайфун является тем же явлением, только уже на побережье Юго-Восточной Азии и Дальнего Востока.

Ураган (тайфун) возникает над водой, в тропических широтах недалеко от экватора, примерно от 10 до 30 градусов широты, на самом экваторе циклон возникнуть не может, так как там нет отклоняющей магнитной силы земли, и закручивания воздушных масс не получится. Для зарождения тайфуна (урагана) необходима температура на поверхности воды минимум 27 градусов. При испарении воды и поднятии водяного пара в воздушные массы, происходит выделение огромного количества энергии, далее перегретые воздушные массы начинают своё вращение всё с большей и большей скоростью. Вращение воздуха в эпицентре урагана

(тайфуна) к югу от экватора идёт по часовой стрелке, а в северном полушарии против часовой.

Далее эта вращающаяся воздушная масса набирает всё большие обороты и движется над поверхностью воды с востока на запад, при этом тайфун (ураган) постепенно отходит всё дальше от экватора. Скорость ветра в завихрениях воздуха может достигать 250-320 км/час, и при движении над водными просторами ураган (циклон) поднимает огромную волну и гонит её впереди себя. На побережье или острова, попавшие в зону прохождения тайфуна (урагана), эта сила природы несёт настоящее бедствие и разрушения.

Помимо огромной волны, которая способна затопить прилегающие невысокие берега, ураган (тайфун) несёт в своих воздушных массах и огромное количество воды, при выпадении в виде осадков так же вызывает мощные наводнения. И как следствия огромные разрушения от оползней, вышедших из русла рек и других водоёмов. Но попав на континент, подпитка урагана (тайфуна) от горячих водных испарений заканчивается, и буйство природной стихии начинает потихоньку успокаиваться.

Торнадо (смерч). Ещё одно интереснейшее явление природы – торнадо, в переводе с испанского смерч. Природа возникновения торнадо (смерч) пока до конца не изучена, но в целом общие причины понятны. Холодный воздух от грозового облака опускается на землю, при этом в центре его теплый воздух выдавливается и начинает подниматься вверх с поверхности земли. Далее он входит в облако, заставляя по периметру его опускаться ещё большее количество холодного воздуха, процесс воздухообмена постепенно усиливается, под действие магнитной силы земли закручивается, в северном полушарии чаще всего против часовой стрелки.

Давление по краям облака растёт и в эпицентре появляется область сильно разряженного воздуха, которое вращается с огромной скоростью и чаще всего выглядит в виде хобота, выходящего из тучи. За счёт огромной разряженности воздуха внутри хобота, пространства, заполненные газом и имеющие свою обычную плотность просто взрываются, и обломки поднимаются вверх, уносимые потоком. Сила этого явления настолько огромна, что любые человеческие дома или строения, попадающие в эпицентр, взрываются как хлопушки и разлетаются на мелкие кусочки.

Давление воздуха в циклонах понижено, но в смерчах падение давления может быть очень сильным, до 66.6 кПа при нормальном атмосферном давлении 101.33 кПа. Масса воздуха в торнадо вращается вокруг общего центра («глаза бури», где наблюдается затишье) и средняя скорость ветра может достигать 200 м/с , вызывая катастрофические разрушения, часто с человеческими жертвами. Внутри торнадо есть более мелкие турбулентные вихри, которые вращаются со скоростью, превышающей скорость звука (320 м/с). С гиперзвуковыми турбулентными вихрями связаны самые злые и жестокие проделки смерчей и торнадо, которые разрывают людей и животных на части или сдирают с них кожу и шкуру. Пониженное давление внутри смерчей и торнадо создает «эффект насоса», т.е. втягивания окружающего воздуха, воды, пыли и предметов, людей и животных внутрь тромба.

Литература:

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа.– М.: Дрофа, 2003 . – 840 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика.– М.: Наука, 1998. – 733 с.
3. *Альтшуль А.Д., Киселев П.Г.* Гидравлика и аэродинамика (основы механики жидкости). – М.: Стройиздат, 1965. – 273 с.
4. *Давидсон В.Е.* Основы гидрозагодинамики в примерах и задачах. – М., Академия, 2008. – 320 с.
5. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. – Ижевск, 2000. – 576 с.
6. *Рауз Х.* Механика жидкости. – М., 1967. – 392 с.
7. *Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. – Л.: Химия, 1982. – 592 с.
8. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем.– М., Мир, 1971, 536 с.
9. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости.– М., Мир, 1973, 708 с.
10. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М., 1955. – 521 с.
11. *Швыдкой В.С.* Механика жидкости и газа. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2003. – 464 с.
12. *Ван-Дейк М.* Альбом течений жидкости и газа.– М., Мир, 1986, 181 с.
13. *Жукаускас А.А.* Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982. – 472 с.
14. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. – М.: Энергия, 1975. – 488 с.
15. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: справочник / под ред. *В.А. Григорьева, В.М. Зорина*. – М.: Энергоатомиздат, 1988 – 560 с.
16. *Матвеев Л.Т.* Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 751 с.
17. *Хргиан А.Х.* Физика атмосферы. – М. Гидрометеоиздат, 1969. – 645 с.
18. Физическая география: Учебное пособие / под ред. *В.В. Орлёнка*. Калининград, 1998. – 480 с