МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. И. МЕЧНИКОВА
Институт математики, экономики и механики
Кафедра компьютерной алгебры и дискретной математики

С.В.ФЕДОРОВСКИЙ

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ.

Методические указания для студентов 1 курса направления подготовки 050102 «компьютерная инженерия»

ОДЕССА – 2013

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ.
Методические указания для студентов 1 курса направления подготовки 050102 «компьютерная инженерия».-60с.

Составители: **Федоровский С.В**., к.ф.-м.н., доцент кафедры компьютерной алгебры и дискретной математики ИМЭМ

Рецензенты: **Евтухов В.М.** д.ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений ИМЭМ

Кореновский А.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа ИМЭМ

Рекомендовано к печати
Ученым советом ИМЭМ Одесского национального университета имени И. И. Мечникова
протокол № 1 от 19 сентября 2013 г.

.

Содержание

Введение

Настоящие методические указания предназначены для студентов первого курса ИМЭМ направления подготовки 6.050102 «компьютерная инженерия. Курс дискретной математики на этом направлении подготовки читается в первом и во втором семестре. Материал курса разбит на четыре модуля. Предлагаемые методические указания содержат материал третьего модуля - первого во втором семестре. Количество отводимых на курс дискретной математики учебных часов явно недостаточно для подробного и обстоятельного изучения тем этого курса. Этот факт и новизна материала (нет необходимой базы со средней школы) вызывают у студентов трудности в процессе изучения дискретной математики. Для устранения этого пробела и для облегчения процесса обучения студентам предлагается подробное изложение темы «Нормальные формы алгебры логики» с доказательством большинства необходимых теорем, подробным решением иллюстрирующих примеров. В настоящих методических указаниях рассмотрены все основные методы построения нормальных форм и приведены их основные применения. В конце даются задачи для самостоятельного решения с указанием ответов этих задач и приводится список рекомендуемой литературы.

Предлагаемые методические указания несомненно будут полезны и студентам направлений подготовки 6.040301«прикладная математика» и 6.040201 «математика», изучающих дискретную математику на первом курсе в ИМЭМ.

1. Булевы функции.

1.1. Булевы функции.

Теория булевых функций (ТБФ) очень тесно связана с алгеброй логики (или алгеброй высказываний (АВ)). Во многом эти теории используют одну и ту же символику и многие понятия для них являются общими. Как и в АВ мы будем использовать булево множество B={0;1} и часто интерпретировать константу « 1 » как «истину», а константу « 0 » как «ложь» (хотя для ТБФ это не обязательно и не всегда возможно).

*Определение 1.1. Булевой функцией от **n** переменных (**n**-местной БФ) называется всякая функция **f** вида $f: B^n \to B$, где $B=\{0;1\}$ – булево множество.*

Всякую булеву функцию можно задать с помощью ее таблицы. Если функция f зависит от n переменных, то, учитывая соглашение о порядке расположения в таблице двоичных наборов значений переменных (в порядке возрастания «номеров» наборов), таблицу БФ можно задавать в сокращенной форме двоичным набором длины 2^n, а именно $f: f_0 f_1 f_2 \cdots f_{2^n-2} f_{2^n-1}$, где значение f_i достигается на наборе с «номером» i.

Множество всех без исключения булевых функций обозначим P_2, а множество n-местных БФ – $P_2^{(n)}$.

*Определение 1.2. Два **n**-местных двоичных набора $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называются соседними по i-той компоненте, если они различаются только в этой компоненте, т.е. если*

$\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)$ *и* $\tilde{\beta} = (\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)$ *(обозначение* $\tilde{\alpha} \prec_i \tilde{\beta}$ *).*

Определение 1.3. Переменная x_i функции $f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ называется существенной переменной этой функции, если найдется пара *соседних по i-той компоненте двоичных наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\alpha} \prec_i \tilde{\beta}$) таких, что $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$. В противном случае переменная x_i называется <u>несущественной</u> или <u>фиктивной</u>.*

***<u>Определение 1.4.</u>** Две **n**-местные булевы функции считаются равными, если их значения совпадают на любом **n**-местном двоичном наборе значений переменных, т.е.:*

$$(\forall f, g \in P_2^{(n)})[f = g \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \tilde{\alpha} \in B^n)[f(\tilde{\alpha}) = g(\tilde{\alpha})]].$$

***<u>Замечание1.1.</u>** Рассмотренное выше понятие фиктивных переменных позволяет нам сравнивать функции от разного количества существенных переменных ведением необходимых дополнительных фиктивных переменных. Такое действие позволяет рассматривать такие функции, как функции от одного списка переменных.*

***<u>Теорема 1.1.</u>** Количество **n**-местных БФ равно 2^{2^n}, т.е.*

$$|P_2^{(n)}| = 2^{2^n}.$$

<u>Доказательство.</u> Поскольку таблица ***n***-местной *БФ* – двоичный 2^n—местный набор, то различных функций от ***n*** переменных столько, сколько различных двоичных наборов указанной длины, т.е.

$|P_2^{(n)}| = |B^{2^n}|$. Но $|B^{2^n}| = 2^{2^n}$. Тем самым, теорема доказана.

Рассмотрим основные БФ от одной и двух переменных. Пусть сначала количество переменных ***n*** равно единице. Тогда, в силу теоремы 1.1 существуют четыре БФ от одной переменной.

x	***0***	x	$\bar{x}$	***1***
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Итак, булевыми функциями от одной переменной являются константы ***0*** и ***1***, тождественная функция x и функция-отрицание $\bar{x}$.

В силу теоремы 1.1 существуют шестнадцать БФ от двух переменных. Укажем их таблицы и обозначения логическими формулами. Имеем:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Здесь: $f_0 = 0$ – константа ***0***;

$f_1 = xy$ – конъюнкция;

$f_2 = \overline{x \to y}$ – отрицание прямой импликации;

$f_3 = x$ – тождественная по x;

$f_4 = \overline{y \to x}$ – отрицание обратной импликации;

$f_5 = y$ – тождественная по y;

$f_6 = \overline{x \leftrightarrow y} = x + y$ – отрицание эквиваленции или *сумма по модулю два*;

$f_7 = x \vee y$ – дизъюнкция;

$f_8 = \overline{x \vee y} = x \downarrow y$ – отрицание дизъюнкции, *стрелка Пирса*;

$f_9 = x \leftrightarrow y$ – эквиваленция;

$f_{10} = \bar{y}$ – отрицание y;

$f_{11} = y \to x$ – обратная импликация;

f_{12} = $\overline{x}$ – отрицание x;

f_{13} = $x \to y$ – прямая импликация;

f_{14} = $\overline{xy} = x / y$ – отрицание конъюнкции, *штрих Шеффера*;

f_{15} = 1 – константа ***1***.

Оказывается, что перечисленных выше булевых функций от одной и двух переменных достаточно для описания всех без исключения БФ от произвольного конечного количества переменных. Достигается это с помощью операции суперпозиции БФ.

Определение 1.5. *Пусть* $f^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}, g_1^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_m) \in P_2^{(n)}, \dots, g_n^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_m) \in P_2^{(n)}$. *Тогда булева функция* $F(y_1, y_2, \dots, y_m) \in P_2^{(m)}$ *получена суперпозицией исходных функций в исходном указанном порядке, если:*

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = f^{(n)}(g_1^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_m)) = S^{n+1}(f^{(n)}, g_1^{(m)}, \dots, g_n^{(m)})$$

(здесь S^{n+1} *– оператор суперпозиции).*

Из определения видно, что операция суперпозиции БФ ничем не отличается от операции суперпозиции функций в математическом анализе или от композиции отображений в высшей алгебре. Суперпозиция функций представляет собой подстановку некоторых функций вместо аргументов в другую функцию. Таким образом, логические операции, которые нам знакомы из АВ, мы теперь будем понимать как суперпозиции соответствующих булевых функций. Например, если нам даны булевы функции

$$f_1(x, y) = x \to y; \quad f_2(x, y) = x \vee \overline{y}; \quad f_3(x, y) = xy \leftrightarrow \overline{x},$$

то операцию импликацию в формуле

$$(x \vee \overline{y}) \to (xy \leftrightarrow \overline{x})$$

мы будем понимать, как следующую суперпозицию функций

$$F(x,y) = S^3(f_1, f_2, f_3) = (x \vee \overline{y}) \to (xy \leftrightarrow \overline{x}).$$

В дальнейшем всякую БФ мы будем задавать, как правило, некоторой формулой ТБФ. Уточним это понятие.

Введем сначала алфавит ТБФ. Он практически ничем не отличается от алфавита АВ, но подалфавит логических операций мы теперь будем понимать, как подалфавит функциональных символов, который кроме символов основных функций $\{\overline{\ },\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}$ может содержать и другие. Итак, имеем:

$A_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество символов (букв) булевых (пропозициональных) переменных;

$A_2 = \{a_1, a_2, \ldots\}$ — счетное множество символов (букв) булевых (пропозициональных) параметров;

$A_3 = \{f_i^{(n)} \mid i, n \in N\}$ — счетное множество функциональных символов (букв) (здесь i – порядковый номер, а n – «местность или арность» символа);

$A_4 = \{(\ ;\ );\ ,\}$ — технические символы (две круглые скобки и запятая).

Тогда: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ — алфавит ТБФ.

Определение 1.6. *Под формулой ТБФ мы будем понимать любое слово в алфавите ТБФ, удовлетворяющее следующим рекуррентным правилам построения:*

1) $\alpha \in A_1 \cup A_2 \ \Rightarrow\ \alpha - \text{формула}$;

2) $f_i^{(n)} \in A_3 \wedge g_1, \ldots, g_n - \text{формулы} \ \Rightarrow\ f_i^{(n)}(g_1, \ldots, g_n) - \text{формула}$; $(n \in N_0)$

3) *Других формул, кроме тех, которые могут быть получены по правилам 1),2), нет.*

Как и в обычной алгебре, будем придерживаться правила записи двухместного функционального символа (символа бинарной операции) между аргументами этого символа, т.е, например, формулу $\to(x,y)$ записывать в виде $(x \to y)$.

Заметим еще, что при записи формул ТБФ мы будем придерживаться всех правил экономии скобок, которые были введены для формул АВ. При этом в формуле без скобок порядок выполнения операций (порядок суперпозиций) следующий (слева направо): $\bar{\ }, \wedge, +, \vee, \to, \leftrightarrow$. Кроме того, формулы АВ и ТБФ по сути своей представляют собой одни и те же объекты и, в дальнейшем, не различаются.

С практической точки зрения убедиться в том, является или нет заданное слово в алфавите ТБФ формулой, можно (аналогично подобной проверке формул АВ) построением дерева подформул.

Вспоминая таблицы Квайна формул АВ, заключаем, что всякая формула ТБФ задает некоторую БФ. Будем говорить, что эта булева функция реализуется исходной формулой. Ясно, что разные формулы могут реализовывать одну и ту же булеву функцию. Позже мы убедимся в том, что всякую булеву функцию можно реализовать подходящей формулой ТБФ. Поэтому в дальнейшем термины «формула» и «булева функция» мы часто будем отождествлять. Равносильность формул ТБФ мы будем понимать в смысле равенства реализуемых ими булевых функций и знак « = » понимать именно в этом смысле.

1.2. Степень в логике, ее свойства.

Определение 1.7.

$$x^{\alpha} \overset{def}{=} \begin{cases} x, & \text{при } \alpha = 1; \\ \bar{x}, & \text{при } \alpha = 0. \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

Из определения непосредственно вытекают следующие свойства степеней:

$$x^{\alpha}=1 \Leftrightarrow x=\alpha\,; \qquad x^{\alpha}=0 \Leftrightarrow x=\overline{\alpha}. \qquad (1.2.2)$$

1.3. Основные тождества (законы) ТБФ.

Напомним известные нам из АВ (как равносильности формул АВ) основные законы. Теперь мы будем воспринимать их как тождества ТБФ.

1.3.1. Законы традиционной логики:

$x = x$ (закон тождества);

$\overline{\overline{x}}=x$ (двойного отрицания);

(исключенного третьего) $\overline{x}\vee x=1$ | $x\,\overline{x}=0$ (противоречия).

1.3.2. Законы конъюнкции и дизъюнкции:

(ассоциативные)	$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$	$x(yz)=(xy)z\,;$
(коммутативные)	$x\vee y=y\vee x$	$xy=yx\,;$
(дистрибутивные)	I. $x(y\vee z)=xy\vee xz$	II. $x\vee yz=(x\vee y)(x\vee z)\,;$
(поглощения)	$x(x\vee y)=x$	$x\vee xy=x\,;$
(склеивания)	$x\overline{y}\vee xy=x$	$(x\vee\overline{y})(x\vee y)=x\,;$
(идемпотентности)	$x\vee x=x$	$xx=x\,;$
(de Morgan’a)	$\overline{x\vee y}=\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{xy}=\overline{x}\vee\overline{y}\,;$

1.3.3. Законы постояных:

$0\vee x=x$	$1x=x\,;$
$1\vee x=1$	$0x=0\,;$

1.3.4. Законы связи между операциями:

$$x \to y = \bar{x} \vee y;$$

$$\overline{x \to y} = x\,\bar{y};$$

$$x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x) = \bar{x}\,\bar{y} \vee xy;$$

$$x + y = \overline{x \leftrightarrow y} = \bar{x}\,y \vee x\,\bar{y};$$

В приведенном перечне основных тождеств многие законы, для лучшего их запоминания, разделены вертикальной чертой. Такие законы двойственны друг другу (подробнее о двойственных функциях см. раздел 2.). Каждый из них получается из другого заменами конъюнкций на дизъюнкции и наоборот, а также констант 0 на 1 и наоборот.

Рассмотренные законы порождают бесконечное их множество в силу теоремы о подстановке, ранее доказанной в АВ.

2. Двойственные формулы и функции.

Определение 2.1. *Булева функция (формула)* $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется двойственной для функции (формулы)* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, если*

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}.$$

Из определения сразу следует, что имеют место следующие свойства:

(2.1) $\left(f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (если f^* двойственна для f, то и f двойственна для f^*, т.е. функции f и f^* двойственны друг другу);

(2.2) $\overline{f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ (двойственные функции на противоположных наборах принимают противоположные значения);

(2.3) $F = G \Leftrightarrow F^* = G^*$;

Из свойства (2.2) сразу следует, что таблица функции f^* получается инвертированием значений таблицы f и выписыванием этих инвертированных значений в обратном порядке, т.е. если $f:\ f_0 f_1 \cdots f_{2^n-2} f_{2^n-1}$ – таблица функции f, то $f^*:\ \overline{f}_{2^n-1}\overline{f}_{2^n-2}\cdots\overline{f}_1\overline{f}_0$ – таблица f^*. Используя отмеченную связь таблиц взаимно двойственных функций легко получить перечень функций, двойственных основным булевым функциям:

– для функций от одной переменной:

(2.4) $x^* = x$; *(2.5)* $0^* = 1$;

(2.6) $(\overline{x})^* = \overline{x}$; *(2.7)* $1^* = 0$;

– для функций от двух переменных:

(2.8) $(x \vee y)^* = xy$; *(2.9)* $(xy)^* = x \vee y$;

(2.10) $(x \to y)^* = \overline{y \to x}$; *(2.11)* $(x \leftrightarrow y)^* = x + y$;

(2.12) $(x + y)^* = x \leftrightarrow y$; *(2.13)* $(x \downarrow y)^* = x / y$;

(2.14) $(x / y)^* = x \downarrow y$; *(2.15)* $(x^\alpha)^* = x^\alpha,\quad \alpha \in B = \{0;1\}$.

***Теорема 2.1* (принцип двойственности).** *Если функция F представляет собой суперпозицию функций $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$ в указанном порядке, то двойственная для функции F функция F^* представляет собой суперпозицию двойственных для исходных функций $f^*, g_1^*, g_2^*, \ldots, g_n^*$ в том же порядке, т.е.*

$$F = f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \Rightarrow F^* = f^*(g_1^*, g_2^*, \ldots, g_n^*).$$

Доказательство. Пусть

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(g_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)).$$

Тогда: $F^*(y_1,y_2,\ldots,y_m) = \overline{f(g_1(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\ldots,\overline{y}_m),\ldots,g_n(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\ldots,\overline{y}_m))} =$

$$\overline{f(\overline{\overline{g_1(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\ldots,\overline{y}_m)}},\ldots,\overline{\overline{g_n(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\ldots,\overline{y}_m)}})} = \overline{f(\overline{g_1^*(y_1,\ldots,y_m)},\ldots,\overline{g_n^*(y_1,\ldots,y_m)})} =$$

$$f^*(g_1^*(y_1,\ldots,y_m),\ldots,g_n^*(y_1,\ldots,y_m)).$$

Тем самым, теорема доказана полностью.

На основании вышеизложенного мы располагаем тремя методами построения функции f^*, двойственной функции f:

- по таблице f;
- по определению f^*;
- на основании принципа двойственности.

Рассмотрим примеры построения двойственных функций.

<u>Пример 2.1.</u> Построить f^* для функции f с таблицей

$$f: \ 0001001011111100.$$

<u>Решение.</u> Используя связь таблиц взаимно двойственных функций, имеем:

$$f^*: 1100000010110111.$$

<u>Ответ:</u> f^*: 1100000010110111.

<u>Пример 2.2.</u> Построить f^* для функции f, где

$$f = f(x,y,z) = (\overline{y} \to \overline{x} \vee z) + (x(y \leftrightarrow \overline{z}) \vee \overline{x}z).$$

<u>Решение.</u> Воспользуемся определением f^*. Тогда:

$$f^* = f^*(x,y,z) = \overline{(\overline{\overline{y}} \to \overline{\overline{x}} \vee \overline{z}) + (\overline{x}(\overline{y} \leftrightarrow \overline{\overline{z}}) \vee \overline{\overline{x}}\overline{z})} = \overline{(y \to x \vee \overline{z}) + (\overline{x}(\overline{y} \leftrightarrow z) \vee x\overline{z})}.$$

<u>Ответ:</u> $f^*(x,y,z) = \overline{(y \to x \vee \overline{z}) + (\overline{x}(\overline{y} \leftrightarrow z) \vee x\overline{z})}$.

<u>Пример 2.3.</u> Построить f^* для функции f предыдущего примера 2.2., пользуясь принципом двойственности.

<u>Решение.</u> Имеем:

$$f^*(x,y,z) = (\,(\bar{y} \to \bar{x} \vee z) + (x(y \leftrightarrow \bar{z}) \vee \bar{x}z)\,)^* =$$

В исходной формуле последней операцией является сложение по модулю два (в исходной суперпозиции внешней функцией является сумма по модулю два), а потому, применяя к ней принцип двойственности и учитывая, что $(A+B)^* = A^* \leftrightarrow B^*$, получим:

$$= \quad (\bar{y} \to \bar{x} \vee z)^* \leftrightarrow (x(y \leftrightarrow \bar{z}) \vee \bar{x}z)^* \quad =$$

В первой скобке последней операцией является импликация, а во второй – дизъюнкция, а потому применяя к этим функциям принцип двойственности (см. формулы (2.10) и (2.8) соответственно), получим:

$$= \quad \overline{(\bar{x} \vee z)^* \to (\bar{y})^*} \leftrightarrow (x(y \leftrightarrow \bar{z}))^* (\bar{x}z)^* =$$

Продолжая по аналогии применение принципа двойственности, получим:

$$= \overline{(\bar{x})^*(z)^* \to (\bar{y})^*} \leftrightarrow ((x)^* \vee (y \leftrightarrow \bar{z})^*)((\bar{x})^* \vee (z)^*) =$$

$$= \overline{(\bar{x})^*(z)^* \to (\bar{y})^*} \leftrightarrow ((x)^* \vee ((y)^* + (\bar{z})^*))((\bar{x})^* \vee (z)^*) =$$

Наконец, вспоминая двойственные функции для простейших (или (2.15)), получим окончательно:

$$= \quad \overline{\bar{x}z \to \bar{y}} \leftrightarrow (x \vee (y + \bar{z}))(\bar{x} \vee z).$$

<u>Ответ:</u> $f^*(x,y,z) = \overline{\bar{x}z \to \bar{y}} \leftrightarrow (x \vee (y + \bar{z}))(\bar{x} \vee z)$.

<u>Замечание 2.1.</u> *Из приведенных методов построения двойственной функции последний (на основании принципа двойственности) кажется наиболее сложным. Однако это не так. Все зависит от сложности (или структуры) исходной формулы. Например, если исходная формула не содержит других операций, кроме булевых (дизъюнкции, конъ-*

юнкции и отрицания), то применение принципа двойственности сводится к «переворачиванию птичек», обозначающих операции дизъюнкции и конъюнкции.

Пример 2.4. Построить f^* для функции f, где

$$f = f(x,y,z) = \overline{\bar{x} \vee y\bar{z}}\,(x \vee \overline{(\bar{y} \vee z)\bar{x}}).$$

Решение. Учитывая замечание 2.1, имеем:

$$f^* = f^*(x,y,z) = \overline{\bar{x}(y \vee \bar{z})} \vee x\,\overline{\bar{y}z \vee \bar{x}}.$$

Ответ: $f^*(x,y,z) = \overline{\bar{x}(y \vee \bar{z})} \vee x\,\overline{\bar{y}z \vee \bar{x}}$.

Пример 2.5. Построить f^* для функции f, где

$$f = f(x,y,z) = (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y}).$$

Решение. Учитывая замечание 2.1, имеем:

$$f^* = f^*(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}.$$

Ответ: $f^*(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$.

Следствие 2.1. АВ (Теория БФ) – симметрическая (самодвойственная) алгебраическая система.

АВ является теорией симметрической, в том смысле, что любое утверждение, сформулированное в терминах операций ∨, ∧,¯ и использующее константы 0 и 1 имеет свой двойственный аналог. При этом, в силу предыдущей теоремы, если исходное утверждение (тождество) верное, то и его двойственный аналог будет так же утверждением (тождеством) верным и наоборот. Этот факт мы использовали при формулировке основных тождеств (законов) ТБФ (АВ) (см.1.3).

3. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)

Определение 3.1. *Пусть* $x_1, x_2, ..., x_n$ *— список переменных. Тогда формула вида* $x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots x_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$*, где* $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ *;* $\forall p_{p \in \{i_1, ..., i_k\}} : \alpha_p \in B = \{0;1\}$*;* $x_j \neq x_m$ *при* $j \neq m$*, называется* ***элементарной конъюнкцией*** *(ЭК) относительно данного списка переменных. Таким образом, ЭК относительно данного списка переменных – это произвольная конъюнкция степеней этих переменных, в которую каждая переменная входит не более одного раза. Пустая ЭК считается равной* ***0****.*

Определение 3.2. *Полная ЭК относительно* $x_1, x_2, ..., x_n$*, т.е.* $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ *называется* ***minterm'ом*** *относительно* $x_1, x_2, ..., x_n$*, отвечающим набору* $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$*, и обозначается* $m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n)$*.*

Замечание 3.1. *На практике элементарные конъюнкции и минтермы выписываются с использованием определения степени без указания показателей степеней, а применяя, где это необходимо, отрицания.*

Теорема 3.1. *Пусть* $m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *- minterm. Тогда ОИ(*$m_{\tilde{\alpha}}$*)* $= \tilde{\alpha}$*, т.е. ОИ(*$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ *)* $= \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\}$ *(здесь ОИ(F) – область истинности формулы F).*

Доказательство. Возьмём произвольный набор $\tilde{\beta} \in B^n$ и вычислим значение $m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на этом наборе:

$$m_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}) = m_{\tilde{\alpha}}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \cdots \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 0, & \exists i : \beta_i \neq \alpha_i, \\ 1, & \forall i : \beta_i = \alpha_i. \end{cases}$$

Таким образом: $m_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}$, т.е. ОИ($m_{\tilde{\alpha}}$) $= \{\tilde{\alpha}\}$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.2. *Пусть* $M = \{m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) \,/\, \tilde{\alpha} \in B^n\}$ *– множество minterm'ов от заданного списка переменных* $x_1, x_2, ..., x_n$*. Тогда соответствие:* $\varphi : M \to B^n$ *такое, что* $\varphi(m_{\tilde{\alpha}}) = \tilde{\alpha}$*, является биективным отображением.*

(Доказать самостоятельно).

Определение 3.3. *Произвольная дизъюнкция **различных** элементарных конъюнкций относительно данного списка переменных (или константа «0», как пустая дизъюнкция) называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) относительно исходного списка переменных. Таким образом:*

$$\text{ДНФ}\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) \overset{def}{=} \bigvee_i ЭК_i\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad (\text{ЭК}_i\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) \neq \text{ЭК}_j\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

при $i \neq j$).

Определение 3.4. *ДНФ равносильная некоторой формуле f называется ДНФ этой формулы и обозначается ДНФ(f). Таким образом:*

$$ДНФ = f \overset{def}{\Leftrightarrow} ДНФ = ДНФ\,(f)$$

***Теорема 3.3 (существования ДНФ (f))*.**

Для всякой формулы алгебры высказываний существует ее ДНФ. Т.е.:

$$(\forall f \in ФАВ)(\exists\, ДНФ \in ФАВ)\big[ДНФ \;=ДНФ(f)\big]$$

Доказательство (конструктивное). Укажем алгоритм построения ДНФ(f). Для того, чтобы произвольную формулу привести к виду ДНФ (построить ДНФ этой формулы) достаточно выполнить в указанном порядке следующие преобразования:

1. Избавиться в формуле от небулевых операций $\rightarrow, \leftrightarrow, +, \downarrow, /$ и их отрицаний на основании законов:

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y; \qquad \overline{x \rightarrow y} = x\bar{y};$$

$$x \leftrightarrow y = \bar{x}\,\bar{y} \vee xy = \overline{x + y}; \qquad \overline{x \leftrightarrow y} = \bar{x}y \vee x\bar{y} = x + y;$$

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}; \qquad \overline{x \downarrow y} = x \vee y;$$

$$x / y = \overline{xy}; \qquad \overline{x / y} = xy;$$

2. Перенести знаки отрицания на буквы на основании законов de Morgan’a

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}; \qquad\qquad \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y};$$

3. Избавиться от лишних знаков отрицания на основании закона двойного отрицания.

$$\bar{\bar{x}} = x;$$

4. Раскрыть все скобки на основании первого (I) и второго (II) дистрибутивных законов

$$x(y \vee z) = xy \vee xz \ \text{(I)}; \qquad\qquad (x \vee y)(x \vee z) = x \vee yz \ \text{(II)};$$

5. Упростить формулу на основании законов

– идемпотентности: $x \vee x = x$; $xx = x$;

– традиционной логики: $x\bar{x} = 0$; $x \vee \bar{x} = 1$;

– постоянных: $x0 = 0$; $x1 = x$; $x \vee 0 = x$; $x \vee 1 = 1$;

В результате получим некоторую (возможно пустую) дизъюнкцию различных элементарных конъюнкций, равносильную исходной формуле, т.е. ДНФ исходной формулы.

<u>Пример 3.1.</u> Найти ДНФ(f) для

$$f(x,y,z) = (x\bar{y} \leftrightarrow (x \vee z \to \bar{y})) \to \overline{x(\bar{y} \downarrow \bar{z})}.$$

<u>Решение.</u> Имеем:

$$f(x,y,z) = (x\bar{y} \leftrightarrow (x \vee z \to \bar{y})) \to \overline{x(\bar{y} \downarrow \bar{z})} = \overline{x\bar{y} \leftrightarrow (x \vee z \to \bar{y})} \vee \overline{x(\overline{\bar{y} \vee \bar{z}})} =$$

$$\overline{x\bar{y}}(x \vee z \to \bar{y}) \vee x\bar{y}\,\overline{(x \vee z \to \bar{y})} \vee \bar{x} \vee \overline{\overline{(\bar{y} \vee \bar{z})}} = (\bar{x} \vee \bar{\bar{y}})(\overline{x \vee z} \vee \bar{y}) \vee x\bar{y}(x \vee z)\bar{\bar{y}} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$$

$$= (\bar{x} \vee y)(\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}) \vee x\bar{y}y(x \vee z) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = (\bar{x} \vee y)(\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}) \vee x0(x \vee z) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} =$$

$$(\bar{x} \vee y)(\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}) \vee 0 \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = (\bar{x} \vee y)(\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} =$$

$$\bar{x}\,\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee y\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee 0 \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} =$$

$$\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \text{ДНФ}_1(f).$$

<u>Ответ:</u> ДНФ$_1$(f) = $\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.

<u>Замечание 3.2.</u> *В рассмотренном примере построения ДНФ(f) мы не придерживались жестко отмеченным при доказательстве теоремы шагам алгоритма, а вели преобразования формулы на каждом шаге,* *отправляясь от последних операций в каждом дизъюнктивном слагаемом этой формулы с использованием возможных для данного шага упрощений формулы. Придерживаясь подобной схемы, можно во многих случаях упростить процесс построения ДНФ(f).*

<u>Замечание 3.3.</u> *Процесс построения ДНФ(f) в рассмотренном примере можно продолжить. Тогда получим:*

ДНФ₂(f) = $\bar x\bar z\vee\bar x\bar y\vee\bar x\vee\bar y\vee\bar z$ *(учли закон поглощения* $\bar x\bar z\vee\bar xy\bar z=\bar x\bar z$*);*

ДНФ₃(f) = $\bar x\bar y\vee\bar x\vee\bar y\vee\bar z$ *(учли закон поглощения* $\bar x\bar z\vee\bar x=\bar x$ *);*

ДНФ₄(f) = $\bar x\vee\bar y\vee\bar z$ *(аналогично предыдущему).*

Таким образом, ДНФ(f) для данной формулы f определяется неоднозначно.

<u>Пример 3.2.</u> Найти ДНФ(f) для

$$f(x,y,z)=(x\vee\bar z\to\bar y)\leftrightarrow(\bar x+yz)\to x\bar y\vee z\,.$$

<u>Решение.</u> Будем следовать приведенным выше рекомендациям. В исходной формуле последней операцией является эквиваленция, а потому имеем:

$$f(x,y,z)=x\vee\bar z\to\bar y\leftrightarrow(\bar x+yz)\to x\bar y\vee z\;=$$

$$\overline{x\vee\bar z\to\bar y}\;\overline{(\bar x+yz)\to x\bar y\vee z}\vee(x\vee\bar z\to\bar y)((\bar x+yz)\to x\bar y\vee z)\;=$$

Далее, учитывая порядок выполнения операций в последней формуле, получим:

$$(x\vee\bar z)\bar{\bar y}(\bar x+yz)\overline{x\bar y\vee z}\vee(\overline{x\vee\bar z}\vee\bar y)(\overline{\bar x+yz}\vee x\bar y\vee z)\;=$$

$$(x\vee\bar z)y(\bar{\bar x}yz\vee\bar x\,\overline{yz})\overline{x\bar y}\,\bar z\vee(\overline{x\bar z}\vee\bar y)(\bar{\bar x}\,\overline{yz}\vee\bar xyz\vee x\bar y\vee z)\;=$$

$$(x\vee\bar z)y(xyz\vee\bar x(\bar y\vee\bar z))(\bar x\vee\bar{\bar y})\,\bar z\vee(\bar xz\vee\bar y)(x(\bar y\vee\bar z)\vee\bar xyz\vee x\bar y\vee z)\;=$$

$$(x\vee\bar z)(xyyz\vee\bar xy\bar y\vee\bar xy\bar z)(\bar x\vee y)\bar z\vee(\bar xz\vee\bar y)(x\bar y\vee x\bar z\vee\bar xyz\vee x\bar y\vee z)\;=$$

Учтем законы идемпотентности, традиционной логики, постоянных, поглощения. Получим:

$$(xyz\vee\bar xy\bar z)(\bar x\vee y)\bar z\vee(\bar xz\vee\bar y)(x\bar z\vee\bar xyz\vee x\bar y\vee z)=$$

Раскроем последовательно все скобки на основании дистрибутивных законов. Получим:

$$(xyz\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}\,\bar{z})(\bar{x} \vee y) \vee (x\bar{x}\,z\bar{z} \vee \bar{x}\bar{x}yzz \vee \bar{x}x\bar{y}z \vee \bar{x}zz \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}yz \vee x\bar{y}\bar{y} \vee \bar{y}z) =$$

$$(0 \vee \bar{x}y\bar{z})(\bar{x} \vee y) \vee (0 \vee \bar{x}yz \vee 0\bar{y}z \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}0z \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z) =$$

$$\bar{x}y\bar{z}(\bar{x} \vee y) \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z =$$

Вспоминая законы поглощения, имеем:

$$\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z = \text{ДНФ}_1(f) =$$

Первые два слагаемых в ДНФ$_1(f)$ можно «склеить» по переменной «z». Тогда получим:

$$\bar{x}y \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z = \text{ДНФ}_2(f).$$

Ответ: ДНФ$_1(f) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$; ДНФ$_2(f) = \bar{x}y \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$.

Теорема 3.4. *Область истинности произвольной дизъюнкции некоторых формул равна объединению областей истинности этих формул, т.е.:*

$$ОИ\Big(\bigvee_{i \in \overline{1;k}} f_i\Big) = \bigcup_{i \in \overline{1;k}} ОИ(f_i)$$

Доказательство. Утверждение теоремы сразу следует из свойств операции дизъюнкции – дизъюнкция равна единице (истинна), тогда и только тогда, когда равно единице (истинно) хотя бы одно ее дизъюнктивное слагаемое.

Последняя теорема дает возможность строить таблицы формул по их ДНФ.

Пример 3.3. Построить таблицу формулы, не используя таблиц Квайна, для

$$f(x, y, z) = (x \vee \bar{z} \to \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \to x\bar{y} \vee z\,.$$

Решение. Для построения таблицы формулы достаточно знать ее область истинности (ОИ) или область ложности (ОЛ). Область истинности формулы можно получить на основании ее ДНФ. Воспользуемся результатами примера 3.2. Получим:

$$f(x,y,z) = x \vee \bar{z} \to \bar{y} \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \to x\bar{y} \vee z \;=\; \ldots = \;\bar{x}y \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z.$$

Тогда:

$$\text{ОИ}(f) = \text{ОИ}(\bar{x}y) \cup \text{ОИ}(\bar{x}z) \cup \text{ОИ}(x\bar{y}) \cup \text{ОИ}(\bar{y}z).$$

Имеем:

$$\text{ОИ}(\bar{x}y) = \{(01\alpha) \mid \alpha \in B = \{0;1\}\} = \{(010), (011)\} = \{2;3\},$$

$$\text{ОИ}(\bar{x}z) = \{(0\alpha1) \mid \alpha \in B = \{0;1\}\} = \{(001); (011)\} = \{1;3\},$$

$$\text{ОИ}(x\bar{y}) = \{(10\alpha) \mid \alpha \in B = \{0;1\}\} = \{(100); (101)\} = \{4;5\},$$

$$\text{ОИ}(\bar{y}z) = \{(\alpha01) \mid \alpha \in B = \{0;1\}\} = \{(001); (101)\} = \{1;5\}.$$

Таким образом:

$$\text{ОИ}(f) = \{1;2;3;4;5\}$$

(ОИ задана «номерами» наборов) и, следовательно: f: 01111100.

<u>Ответ:</u> f: 01111100.

Рассмотренный выше пример свидетельствует о том, что *всякая непустая ДНФ является формулой выполнимой.*

<u>Теорема 3.5</u> (критерий тождественной истинности по ДНФ).

$$F \in \text{ТИ (или } F = 1) \Leftrightarrow \text{ДНФ}(\bar{F}) = 0.$$

<u>Доказательство.</u>

а) Необходимость.

$$F \in \text{ТИ (или } F = 1) \Rightarrow \text{ДНФ}(\bar{F}) = 0.$$

Имеем. Поскольку $F \in$ ТИ, то $\bar{F} = 0$ и, следовательно, процесс построения ДНФ для $\bar{F}$ не может закончиться непустой ДНФ (ибо в этом случае $\bar{F}$ была бы выполнимой, что противоречило бы тому, что $\bar{F} = 0$). Значит, ДНФ($\bar{F}$) пустая, т.е. ДНФ($\bar{F}$) = 0 и, тем самым, необходимость доказана.

б) Достаточность.

$$\text{ДНФ}(\bar{F}) = 0 \Rightarrow F \in \text{ТИ (или } F = 1).$$

Имеем. Поскольку ДНФ($\bar{F}$) = 0 и $\bar{F}$ = ДНФ($\bar{F}$), то $\bar{F} = 0$. Откуда $F = 1$ (т.е. $F \in$ ТИ) и достаточность доказана.

Теорема 3.6 (критерий тождественной ложности по ДНФ).

$$F = 0 \Leftrightarrow \text{ДНФ}(f) = 0.$$

Доказательство. (Доказать самостоятельно).

Теорема 3.7 (о дизъюнктивном разложении):

Пусть нам задана некоторая формула $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *и зафиксирован некоторый список переменных этой формулы (не ограничивая общности, будем считать, что зафиксированы первые* ***k*** *переменных)* $x_1, x_2, ..., x_k$ *;* $k \in \overline{1;n}$ *. Тогда для* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *имеет место единственное (с точностью до равносильности «коэффициентов») дизъюнктивное разложение:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n).$$

Доказательство. Воспользуемся определением равносильности формул. Покажем, что значения правой и левой части проверяемого тождества совпадают на любом наборе значений переменных.

Пусть $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in B^n$ — произвольный ***n***—местный двоичный набор. Тогда на этом наборе переменных:

Левая часть $= f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = f(\tilde{\beta})$.

Правая часть $= \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \cdots \beta_k^{\alpha_k} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, ..., \beta_n) =$

В силу свойств степеней в логике (а именно $\beta_i^{\alpha_i} = \begin{cases} 1, & при\ \alpha_i = \beta_i; \\ 0, & при\ \alpha_i \neq \beta_i. \end{cases}$), имеем:

$$= \beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2} \cdots \beta_k^{\beta_k} f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, ..., \beta_n) \vee 0 = f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = f(\tilde{\beta}).$$

Тем самым возможность разложения доказана. Докажем единственность. Пусть еще имеет место другое разложение

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} g(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n).$$

Это разложение отличается от предыдущего «коэффициентами» $g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,x_{k+1},x_{k+2},...,x_n)$. Покажем, что «коэффициенты» разложений – равносильные формулы. Имеем:

$$\forall\tilde{\beta}\in B^n:\quad f(\tilde{\beta}) = \bigvee_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)\in B^k}\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}\cdots\beta_k^{\alpha_k}g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,\beta_{k+1},\beta_{k+2},...,\beta_n) =$$

$$= \beta_1^{\beta_1}\beta_2^{\beta_2}\cdots\beta_k^{\beta_k}g(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k,\beta_{k+1},\beta_{k+2},...,\beta_n) = g(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) = g(\tilde{\beta}).$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

Пример 3.4. Разложить формулу

$$f(x,y,z) = (x\bar{y}\to\bar{z})(y\vee\bar{x}z)\vee(x+y\bar{z})$$

по переменным x и z.

Решение. В силу теоремы о дизъюнктивном разложении имеем:

$$f(x,y,z) = (x\bar{y}\to\bar{z})(y\vee\bar{x}z)\vee(x+y\bar{z}) = x^0z^0((0\bar{y}\to\bar{0})(y\vee\bar{0}0)\vee(0+y\bar{0}))\vee$$

$$x^0z^1((0\bar{y}\to\bar{1})(y\vee\bar{0}1)\vee(0+y\bar{1}))\ \vee\ x^1z^0((1\bar{y}\to\bar{0})(y\vee\bar{1}0)\vee(1+y\bar{0}))\vee$$

$$x^1z^1((1\bar{y}\to\bar{1})(y\vee\bar{1}1)\vee(1+y\bar{1})) = \bar{x}\,\bar{z}((0\to 1)(y\vee 0)\vee(0+y))\vee$$

$$\bar{x}z((0\to 0)(y\vee 1)\vee(0+0))\vee\ x\bar{z}((\bar{y}\to 1)(y\vee 0)\vee(1+y))\vee\ xz((\bar{y}\to 0)(y\vee 0)\vee(1+0)) =$$

$$\bar{x}\,\bar{z}\,(y\vee y)\vee\bar{x}z\vee x\bar{z}(y\vee\bar{y})\vee xz(y) = \bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{x}z\vee x\bar{z}\vee xzy.$$

Ответ: $f(x,y,z) = \bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{x}z\vee x\bar{z}\vee xzy$.

Пример 3.5. Разложить формулу

$$f(x,y,z) = (\overline{x}\overline{y}\to\bar{z})(y\leftrightarrow\bar{x}z)\to(x\vee y\bar{z})$$

по переменной x.

Решение. Имеем:

$$f(x,y,z) = (\overline{x}\overline{y}\to\bar{z})(y\leftrightarrow\bar{x}z)\to(x\vee y\bar{z}) = \bar{x}((\bar{0}\,\bar{y}\to\bar{z})(y\leftrightarrow\bar{0}z)\to(0\vee y\bar{z}))\vee$$

$$x((\overline{1}\overline{y}\to\bar{z})(y\leftrightarrow\bar{1}z)\to(1\vee y\bar{z})) = \bar{x}((\bar{y}\to\bar{z})(y\leftrightarrow z)\to y\bar{z})\vee\ x((0\to\bar{z})(y\leftrightarrow 0)\to 1) =$$

$$\bar{x}((\bar{y}\to\bar{z})(y\leftrightarrow z)\to y\bar{z})\vee\ x.$$

Ответ: $f(x,y,z) = \bar{x}((\bar{y}\to\bar{z})(y\leftrightarrow z)\to y\bar{z})\vee\ x$.

Частным случаем теоремы о дизъюнктивном разложении является:

***Теорема 3.8** (о полном дизъюнктивном разложении):*

Пусть нам задана некоторая формула $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. *Тогда для* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *имеет место единственное полное дизъюнктивное разложение:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in B^n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из предыдущей теоремы о дизъюнктивном разложении при $\boldsymbol{k = n}$.

Определение 3.5. *Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется непустая ДНФ, все элементарные конъюнкции которой представляют собой minterm'ы относительно заданного списка переменных.*

Определение 3.6. *СДНФ равносильная некоторой формуле f называется СДНФ этой формулы и обозначается СДНФ(f). Таким образом:*

$$СДНФ = f \overset{def}{\Leftrightarrow} СДНФ = СДНФ\,(f)$$

***Теорема 3.9** (о существовании СДНФ(f) для выполнимой формулы f).*

Для всякой выполнимой формулы f существует и притом единственная ее СДНФ(f), т.е.:

$$(\forall f \in ВП)(\exists!\, СДНФ \in ФАВ)[СДНФ = СДНФ(f)].$$

Доказательство. Утверждение теоремы является прямым следствием теоремы о полном дизъюнктивном разложении. В самом деле, в силу этой теоремы имеем:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in B^n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) =$$

В силу того, что $B^n = ОИ(f) \cup ОЛ(f)$ и $ОИ(f) \cap ОЛ(f) = \emptyset$, получим:

$$\Big(\bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in ОИ(f)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \Big) \vee$$

$$\vee \Big(\bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in ОЛ(f)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \Big) =$$

$$(\bigvee_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in ОИ(f)} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}1) \vee (\bigvee_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in ОЛ(f)} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}0) =$$

$$(\bigvee_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in ОИ(f)} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}) \vee 0 = \bigvee_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in ОИ(f)} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} = СДНФ(f)$$

Замечание 3.4. *Из теоремы существования и единственности $СДНФ(f)$, а именно из $СДНФ(f) = \bigvee_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in ОИ(f)} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, следуют правила (алгоритм) построения выполнимой формулы по ее таблице.*

Для построения выполнимой формулы по ее таблице достаточно:

– выписать область истинности формулы;

– для каждого набора из области истинности найти соответствующий ему минтерм (см. теорему о соответствии минтермов и наборов);

– взять дизъюнкцию полученных на предыдущем шаге минтермов и построить тем самым формулу (СДНФ), таблица которой совпадает с исходной таблицей.

Пример 3.6. Задать логической формулой булеву функцию f, если известна ее таблица:

$$f: 0010111011000011.$$

Решение. Заметим прежде всего, что таблица булевой функции содержит шестнадцать значений. Поскольку длина таблицы определяется количеством различных наборов значений переменных, то, в нашем случае, имеем:

$$2^n = 16, \quad \text{т.е.} \quad n = 4.$$

Таким образом, булева функция (искомая формула) зависит от четырех переменных. Обозначим эти переменные, как x,y,z,u, т.е. $f = f(x,y,z,u)$.

Выпишем область истинности по заданной таблице. Имеем:

ОИ(f) = {2; 4; 5; 6; 8; 9; 14; 15} («номерами» наборов), или

$$\text{ОИ}(f) = \{0010; 0100; 0101; 0110; 1000; 1001; 1110; 1111\}.$$

Найдем минтермы, отвечающие наборам из ОИ(f):

$$\{\bar{x}\,\bar{y}z\bar{u};\ \bar{x}y\bar{z}\,\bar{u};\ \bar{x}y\bar{z}u;\ \bar{x}yz\bar{u};\ x\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{u};\ x\bar{y}\,\bar{z}u;\ xyz\bar{u};\ xyzu\}.$$

Тогда:

$$f = f(x,y,z,u) = СДНФ\,(f) =$$

$$\bar{x}\,\bar{y}z\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{z}\,\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{z}u \vee \bar{x}yz\bar{u} \vee x\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{u} \vee x\bar{y}\,\bar{z}u \vee xyz\bar{u} \vee xyzu\,.$$

Ответ: $СДНФ\,(f) = \bar{x}\,\bar{y}z\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{z}\,\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{z}u \vee \bar{x}yz\bar{u} \vee x\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{u} \vee x\bar{y}\,\bar{z}u \vee xyz\bar{u} \vee xyzu$.

Замечание 3.5. *Поскольку* $0 = 0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\overline{x_1} \vee x_2\overline{x_2} \vee \cdots \vee x_n\overline{x_n}$ *и всякую выполнимую булеву функцию можно задать логической формулой (в виде* $СДНФ\,(f)$*), то любая булева функция может быть задана некоторой логической формулой алгебры логики (алгебры высказываний АВ). Поэтому в дальнейшем термины «булева функция» и «формула» мы будем использовать в одном и том же смысле (т.е. отождествлять).*

Алгоритм построения СДНФ (f) выполнимой формулы f(аналитический):

Для построения $СДНФ\,(f)$ ***выполнимой формулы f аналитически достаточно:***

– привести исходную формулу к виду ДНФ (см. алгоритм построения ДНФ(f));

– в полученной ДНФ разложить каждую элементарную конъюнкцию на минтермы;

– устранить «лишние» вхождения минтермов (если они есть) на основании закона идемпотентности дизъюнкции;

Рассмотрим указанный выше алгоритм на конкретном примере.

Пример 3.7. Построить СДНФ (f) для формулы:

$$f(x,y,z) = (x \vee \bar{z} \to \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \to x\bar{y} \vee z\,.$$

Решение. Приведем сначала исходную формулу к виду ДНФ. Воспользуемся результатами примера 3.2. Получим:

$$f(x,y,z) = x \vee \bar{z} \to \bar{y} \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \to x\bar{y} \vee z \ = \ldots = \bar{x}y \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z = \text{ДНФ}\ (f).$$

Разложим теперь элементарные конъюнкции полученной ДНФ (f) на минтермы. Для этого в каждую ЭК на местах отсутствующих переменных добавим множители, равные единице (по каждой отсутствующей в данной ЭК переменной). Получим:

$$f(x,y,z) = \bar{x}y1 \vee \bar{x}1z \vee x\bar{y}1 \vee 1\bar{y}z.$$

Распишем теперь каждую из единиц с помощью соответствующей переменной на основании закона исключенного третьего. Получим:

$$f(x,y,z) = \bar{x}y(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})z \vee x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})\bar{y}z.$$

Осталось в последней формуле раскрыть скобки и избавиться от «лишних» вхождений минтермов (если такие вхождения появятся в результате раскрытия скобок). Получим окончательно:

$$f(x,y,z) = \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}z =$$

$$\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} = \text{СДНФ}\ (f).$$

Ответ: СДНФ (f) $= \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z}$.

Замечание 3.6. *По СДНФ (f), выполняя действия, обратные действиям при построении СДНФ по таблице (см. пример 3.6), легко найти таблицу формулы.*

Пример 3.8. Используя СДНФ(f) построить таблицу формулы:

$$f(x,y,z) = x \vee \bar{z} \to \bar{y} \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \to x\bar{y} \vee z.$$

Решение. Воспользуемся результатами примера 3.7. Получим:

$f(x,y,z) =$ СДНФ (f) $= \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} = x^0y^1z^0 \vee x^0y^1z^1 \vee x^0y^0z^1 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^0z^0$.

Теперь, вспоминая соответствие между минтермами и наборами, легко выписать область истинности исходной формулы:

ОИ(f) = {010; 011; 001; 101; 100}

или, с помощью «номеров» наборов,

$$\text{ОИ}(f) = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Но тогда трехместные наборы, не вошедшие в ОИ(f) попадут в ОЛ(f). Следовательно,

$$\text{ОЛ}(f) = \{0; 6; 7\}.$$

Тогда окончательно: f: 01111100.

Ответ: f: 01111100.

Теорема 3.10. *(критерий равносильности по СДНФ).*

Две формулы равносильны тогда и только тогда, когда они обе тождественно ложные или приводятся к одной и той же СДНФ, т.е.

$$(F = G) \Leftrightarrow (F=0 \wedge G=0) \vee (\text{СДНФ}(F) = \text{СДНФ}(G)).$$

Доказательство.

а) Необходимость.

$$(F = G) \Rightarrow (F=0 \wedge G=0) \vee (\text{СДНФ}(F) = \text{СДНФ}(G)).$$

По условию нам дано $(F = G)$. Поэтому, в силу критерия равносильности по ОИ, имеем: $\text{ОИ}(F) = \text{ОИ}(G)$. Если $\text{ОИ}(F) = \text{ОИ}(G) = \emptyset$, то $F=G=0$. Если же $\text{ОИ}(F) = \text{ОИ}(G) \neq \emptyset$, то $\text{СДНФ}(F) = \text{СДНФ}(G)$, поскольку, в силу теоремы существования, СДНФ(f) однозначно определяется областью истинности f. Необходимость доказана.

б*)* Достаточность.

$$(F=0 \wedge G=0) \vee (\text{СДНФ}(F) = \text{СДНФ}(G)) \Rightarrow (F = G).$$

Если $(F=0 \wedge G=0)$, то $(F=0=G)$ и все доказано. Если же $(\text{СДНФ}(F) = \text{СДНФ}(G))$, то $F = \text{СДНФ}(F) = \text{СДНФ}(G) = G$. И в этом случае все доказано.

Итак, мы познакомились с одной из нормальных форм алгебры логики (теории булевых функций), а именно с ДНФ и ее совершенным видом – СДНФ. Отметим еще раз применения этих нормальных форм.

Применения дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ):

– критерий тождественной ложности по ДНФ:

$$F = 0 \Leftrightarrow ДНФ(F) = 0;$$

– критерий тождественной истинности по ДНФ:

$$F = 1 \Leftrightarrow ДНФ(\overline{F}) = 0;$$

– построение таблиц формул по их ДНФ;

– ДНФ(F) – промежуточный этап построения СДНФ(F).

Применения совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ):

– критерий равносильности по СДНФ:

$$(F = G) \Leftrightarrow (F{=}0 \wedge G{=}0) \vee (СДНФ(F) = СДНФ(G));$$

– СДНФ применяется для аналитического задания ненулевой булевой функции

по ее таблице;

– по СДНФ(f) легко восстанавливается таблица f;

– СДНФ(f) используется, как промежуточный этап построения нормальной формы Жегалкина для f (познакомимся позже).

4. Конъюнктивные нормальные формы (КНФ).

Поскольку имеют место законы связи между операциями, то при изучении формул ТБФ (или АВ) можно ограничиться их записями только с помощью булевых операций, т.е. рассматривать алгебру высказываний (АВ), как булеву алгебру

$$\tilde{B} = \{B; \{0; x \vee y; \bar{x}; xy; 1\}\},$$

где B = {0; 1} – основа алгебры, а $\{0; x \vee y; \bar{x}; xy; 1\}$ – сигнатура алгебры, включающая две нульместные операции (константы 0 и 1), одну одноместную операцию (отрицание) и две двухместные операции (дизъюнкцию и конъюнкцию). Заметим, что константы 0 и 1 двойственны (как булевы функции) друг другу, аналогично двойственны друг другу функции дизъюнкция и конъюнкция, а функция-отрицание двойственна сама себе (самодвойственная). Мы уже отмечали ранее, что алгебра высказываний является теорией симметрической (или самодвойственной) – любое утверждение, сформулированное в терминах булевых операций имеет свой двойственный аналог. В этом смысле теория конъюнктивных нормальных форм двойственна теории дизъюнктивных нормальных форм. Используем этот факт при изучении КНФ.

Определение 4.1. *Формула, двойственная элементарной конъюнкции (ЭК) относительно данного списка переменных, называется элементарной дизъюнкцией (ЭД). Иначе:*

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *— список переменных. Тогда формула вида*

$x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \vee x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \vee \cdots \vee x_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$*, где* $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ *;* $\underset{p \in \{i_1, \ldots, i_k\}}{\forall p} : \alpha_p \in B = \{0;1\}$*;* $x_j \neq x_m$ *при* $j \neq m$*, называется* ***элементарной дизъюнкцией*** *(ЭД) относительно данного списка переменных. Таким образом, ЭД относительно данного списка переменных – это произвольная дизъюнкция степеней этих переменных, в которую каждая переменная входит не более одного раза. Пустая ЭД считается равной 1.*

Определение 4.2. *Формула, двойственная* ***minterm'у*** *относительно данного списка переменных называется* ***maxterm'ом****. Иначе:*

Полная ЭД относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, т.е.* $x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_n}$ *называется* ***maxterm'ом*** *относительно* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, отвечающим набору* $\overline{\tilde{\alpha}} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$*, и обозначается* $M_{\overline{\tilde{\alpha}}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*.*

Замечание 4.1. *На практике элементарные дизъюнкции и макстермы выписываются с использованием определения степени без указания показателей степеней, а применяя, где это необходимо, отрицания. Кроме того, вместо*

$$M_{\overline{\tilde{\alpha}}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_n}$$

будем использовать равноценную запись:

$$M_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) \ = \ x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}} \ .$$

Теорема 4.1. *Пусть* $M_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *- maxterm. Тогда ОЛ*($M_{\tilde{\alpha}}$) $= \{ \overline{\tilde{\alpha}} \}$ *, т.е. ОЛ*($x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_n}$) $= \{ (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) \}$ *(здесь ОЛ(F) – область ложности формулы F).*

Доказательство. Возьмём произвольный набор $\tilde{\beta} \in B^n$ и вычислим значение $M_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на этом наборе:

$$M_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}) = M_{\tilde{\alpha}}\ (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \ \beta_1^{\alpha_1} \vee \beta_2^{\alpha_2} \vee \cdots \vee \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 0, & \forall i : \beta_i = \overline{\alpha}_i, \\ 1, & \exists i : \beta_i = \alpha_i. \end{cases}$$

Таким образом: $M_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\beta} = \overline{\tilde{\alpha}}$, т.е. ОЛ($M_{\tilde{\alpha}}$) $= \{ \overline{\tilde{\alpha}} \}$, что и требовалось доказать.

Теорема 4.2. *Пусть* $M = \{ M_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) \ / \ \tilde{\alpha} \in B^n \}$ *– множество maxterm'ов от заданного списка переменных* $x_1, x_2, ..., x_n$*. Тогда соответствие:* $\varphi : M \to B^n$ *такое, что* $\varphi(M_{\tilde{\alpha}}) = \overline{\tilde{\alpha}}$*, является биективным отображением.*

(Доказать самостоятельно).

Определение 4.3. *Формула, двойственная ДНФ, называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ). Иначе:*

Произвольная конъюнкция ***различных*** *элементарных дизъюнкций относительно данного списка переменных (или константа «1», как пустая конъюнкция) называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ) относительно исходного списка переменных. Таким образом:*

КНФ $(x_1, x_2, ..., x_n) \overset{def}{=} \bigwedge_i ЭД_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ (ЭД$_i(x_1, x_2, ..., x_n) \neq$ ЭД$_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ *при* $i \neq j$).

Определение 4.4. *КНФ равносильная некоторой формуле f называется КНФ этой формулы и обозначается КНФ(f). Таким образом:*

$$КНФ = f \overset{def}{\Leftrightarrow} КНФ = КНФ\,(f).$$

***Теорема 4.3** (существования КНФ (f)).*

Для всякой формулы алгебры высказываний существует ее КНФ. Т.е.:

$$(\forall f \in ФАВ)(\exists\, КНФ \in ФАВ)\left[КНФ\ = КНФ(f)\right]$$

Доказательство 1. Для всякой БФ f существует двойственная к ней функция f^*. Для f^* существует $ДНФ(f^*)$. Для этой $ДНФ$ существует двойственная функция $(ДНФ(f^*))^*$. Это и есть искомая $КНФ\,(f)$.

Доказательство 2. (конструктивное). Укажем алгоритм построения КНФ(f). Для того, чтобы произвольную формулу привести к виду КНФ (построить КНФ этой формулы) достаточно выполнить в указанном порядке следующие преобразования:

1. Избавиться в формуле от небулевых операций $\rightarrow, \leftrightarrow, +, \downarrow, /$ и их отрицаний на основании законов:

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y; \qquad \overline{x \rightarrow y} = x\bar{y};$$

$$x \leftrightarrow y = \bar{x}\,\bar{y} \vee xy = \overline{x + y}; \qquad \overline{x \leftrightarrow y} = \bar{x}y \vee x\bar{y} = x + y;$$

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}; \qquad \overline{x \downarrow y} = x \vee y;$$

$$x / y = \overline{xy}; \qquad \overline{x / y} = xy;$$

2. Перенести знаки отрицания на буквы на основании законов de Morgan’a

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}; \qquad \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y};$$

3. Избавиться от лишних знаков отрицания на основании закона двойного отрицания.

$$\bar{\bar{x}} = x;$$

4. Разложить на множители все неэлементарные дизъюнкции на основании второго (II) дистрибутивного закона

$$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z) \text{ (II)};$$

5. Упростить формулу на основании законов

– идемпотентности: $x \vee x = x$;

– традиционной логики: $x \vee \overline{x} = 1$;

– постоянных: $x0 = 0$; $x1 = x$; $x \vee 0 = x$; $x \vee 1 = 1$;

В результате получим некоторую (возможно пустую) конъюнкцию различных элементарных дизъюнкций, равносильную исходной формуле, т.е. КНФ исходной формулы.

Замечание 4.2. *Доказательства 1 и 2 теоремы одновременно дают практические схемы построения КНФ (f). Второй метод (из доказательства 2), как правило, более громоздкий и трудоемкий. Мы рекомендуем следующую последовательность действий при построении КНФ(f)(основной алгоритм):*

$$f \to ДНФ\,(f) \to (ДНФ\,(f))^* = f^* \to ДНФ(f^*) \to (\,ДНФ(f^*))^* = \text{КНФ}(f).$$

Пример 4.1. Найти КНФ(f) для

$$f(x,y,z) = (x\overline{y} \leftrightarrow (x \vee z \to \overline{y})) \to \overline{x(\overline{y} \downarrow \overline{z})}.$$

Решение. Воспользуемся вторым алгоритмом построения КНФ(f) (конструктивным). Имеем:

$$f(x,y,z) = (x\overline{y} \leftrightarrow (x \vee z \to \overline{y})) \to \overline{x(\overline{y} \downarrow \overline{z})} = \overline{x\overline{y} \leftrightarrow (x \vee z \to \overline{y})} \vee \overline{x(\overline{\overline{y} \vee \overline{z}})} =$$

$$\overline{x\overline{y}}(x \vee z \to \overline{y}) \vee x\overline{y}\,\overline{(x \vee z \to \overline{y})} \vee \overline{x} \vee \overline{\overline{(\overline{y} \vee \overline{z})}} = (\overline{x} \vee \overline{\overline{y}})(\overline{x \vee z} \vee \overline{y}) \vee x\overline{y}(x \vee z)\overline{\overline{y}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$$

$$= (\overline{x} \vee y)(\overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}) \vee x\overline{y}y(x \vee z) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = (\overline{x} \vee y)(\overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}) \vee x0(x \vee z) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} =$$

$$(\overline{x} \vee y)(\overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}) \vee 0 \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = (\overline{x} \vee y)(\overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} =$$

Разложим на множители полученную формулу, применяя последовательно второй дистрибутивный закон, и упростим :

$$(\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})(\overline{z} \vee \overline{y}) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = \big((\overline{x} \vee y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\big)((\overline{x} \vee \overline{y}) \vee (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

$$\big((\overline{z} \vee \overline{y}) \vee (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\big) = (\overline{x} \vee y \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,(\overline{z} \vee \overline{y} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) =$$

$$(\bar x\vee y\vee\bar y\vee\bar z)\,(\bar x\vee\bar y\vee\bar z)\,(\bar x\vee\bar y\vee\bar z)\;=\;(\bar x\vee 1\vee\bar z)\,(\bar x\vee\bar y\vee\bar z)=(\bar x\vee\bar y\vee\bar z).$$

Ответ: КНФ$(f)=(\bar x\vee\bar y\vee\bar z)$.

Пример 4.2. Найти КНФ(f) для

$$f(x,y,z)=(x\vee\bar z\to\bar y)\leftrightarrow(\bar x+yz)\to x\bar y\vee z.$$

Решение. В исходной формуле последней операцией является эквиваленция, а потому имеем:

$$f(x,y,z)=x\vee\bar z\to\bar y\leftrightarrow(\bar x+yz)\to x\bar y\vee z\;=$$

$$\overline{x\vee\bar z\to\bar y}\;\;\overline{(\bar x+yz)\to x\bar y\vee z}\vee(x\vee\bar z\to\bar y)((\bar x+yz)\to x\bar y\vee z)\;=$$

Далее, учитывая порядок выполнения операций в каждой скобке последней формулы, получим:

$$(x\vee\bar z)\bar{\bar y}(\bar x+yz)\overline{x\bar y\vee z}\vee(\overline{x\vee\bar z}\vee\bar y)(\overline{\bar x+yz}\vee x\bar y\vee z)\;=$$

$$(x\vee\bar z)y(\bar{\bar x}yz\vee\bar x\,\overline{yz})\overline{x\bar y}\,\bar z\vee(\bar x\bar{\bar z}\vee\bar y)(\bar{\bar x}\,\overline{yz}\vee\bar xyz\vee x\bar y\vee z)\;=$$

$$(x\vee\bar z)y(xyz\vee\bar x(\bar y\vee\bar z))(\bar x\vee\bar{\bar y})\,\bar z\vee(\bar xz\vee\bar y)(x(\bar y\vee\bar z)\vee\bar xyz\vee x\bar y\vee z)\;=$$

$$(x\vee\bar z)(xyyz\vee\bar xy\bar y\vee\bar xy\bar z)(\bar x\vee y)\bar z\vee(\bar xz\vee\bar y)(x\bar y\vee x\bar z\vee\bar xyz\vee x\bar y\vee z)\;=$$

Учтем законы идемпотентности, традиционной логики, постоянных, поглощения. Получим:

$$(xyz\vee\bar xy\bar z)(\bar x\vee y)\bar z\vee(\bar xz\vee\bar y)(x\bar z\vee\bar xyz\vee x\bar y\vee z)=$$

Далее можно раскладывать полученную формулу на множители. Однако, как видим, эти действия будут явно нерациональными. А потому далее будем действовать по основному алгоритму. Приведем последнюю формулу к ДНФ. Раскроем последовательно все скобки на основании дистрибутивных законов. Получим:

$$(xyz\bar z\vee\bar xy\bar z\,\bar z)(\bar x\vee y)\vee(x\bar x\,z\bar z\vee\bar x\bar xyzz\vee x\bar x\bar yz\vee\bar xzz\vee x\bar y\,\bar z\vee\bar x\bar yyz\vee x\bar y\bar y\vee\bar yz)\;=$$

$$(0\vee\bar xy\bar z)(\bar x\vee y)\vee(0\vee\bar xyz\vee 0\bar yz\vee\bar xz\vee x\bar y\,\bar z\vee\bar x0z\vee x\bar y\vee\bar yz)\;=$$

$$\bar xy\bar z(\bar x\vee y)\vee\bar xyz\vee\bar xz\vee x\bar y\,\bar z\vee x\bar y\vee\bar yz\;=$$

Вспоминая законы поглощения, имеем:

$$\bar xy\bar z\vee\bar xyz\vee\bar xz\vee x\bar y\vee\bar yz\;=\text{ДНФ}_1(f)=$$

Первые два слагаемых в ДНФ$_1(f)$ можно «склеить» по переменной «z». Тогда получим:

$$\bar{x}y \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z = \text{ДНФ}_2(f).$$

Воспользуемся последней ДНФ для построения f^*. Применим принцип двойственности. Поскольку последняя формула содержит только булевы операции, то действие принципа двойственности сведется к «переворачиванию птичек» операций. Имеем:

$$f^* = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee z)(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee z) = (\bar{x} \vee yz)(xz \vee \bar{y}) = \bar{x}\,\bar{y} \vee xyz = \text{ДНФ}(f^*)\,.$$

Тогда:

$$\text{КНФ}(f) = (\text{ДНФ}(f^*))^* = (\bar{x}\,\bar{y} \vee xyz)^* = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y \vee z)\,.$$

Ответ: КНФ$(f) = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y \vee z)$.

Теорема 4.4. *Область ложности произвольной конъюнкции некоторых формул равна объединению областей ложности этих формул, как конъюнктивных множителей, т.е.:*

$$ОЛ(\bigwedge_{i\in 1;k} f_i) = \bigcup_{i\in 1;k} ОЛ(f_i)\,.$$

Доказательство. Утверждение теоремы сразу следует из свойств операции конъюнкции (конъюнкция равна нулю (ложна) тогда и только тогда, когда равен нулю (ложный) хотя бы один ее конъюнктивный множитель).

Последняя теорема дает возможность строить таблицы формул по их КНФ.

Пример 4.3. Построить таблицу формулы, не используя таблиц Квайна, для

$$f(x,y,z) = (x \vee \bar{z} \rightarrow \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \rightarrow x\bar{y} \vee z\,.$$

Решение. Для построения таблицы формулы достаточно знать ее область истинности (ОИ) или область ложности (ОЛ). Область ложности формулы можно получить на основании ее КНФ. Воспользуемся результатами примера 4.2. Получим:

$$f(x,y,z) = x \vee \bar{z} \to \bar{y} \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \to x\bar{y} \vee z = \ldots = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y \vee z).$$

Тогда:

$$\text{ОЛ}(f) = \text{ОЛ}(\bar{x} \vee \bar{y}) \cup \text{ОЛ}(x \vee y \vee z).$$

Имеем:

$$\text{ОЛ}(\bar{x} \vee \bar{y}) = \{(11\alpha) \mid \alpha \in B = \{0;1\}\} = \{(110), (111)\} = \{6;7\},$$

$$\text{ОЛ}(x \vee y \vee z) = \{(000)\} = \{0\},$$

Таким образом:

$$\text{ОЛ}(f) = \{0;6;7\}$$

(ОЛ задана «номерами» наборов) и, следовательно: f: 01111100.

Ответ: f: 01111100.

Рассмотренный выше пример свидетельствует о том, что *всякая непустая КНФ является формулой опровержимой.*

Теорема 4.5 (критерий тождественной истинности по КНФ).

$$F \in \text{ТИ (или } F = 1) \Leftrightarrow \text{КНФ (F)} = 1.$$

Доказательство.

а) Необходимость.

$$F \in \text{ТИ (или } F = 1) \Rightarrow \text{КНФ (F)} = 1.$$

Имеем. Поскольку $F \in$ ТИ, то процесс построения КНФ для F не может закончиться непустой КНФ (ибо в этом случае F была бы опровержимой, что противоречило бы тому, что F = 1). Значит, КНФ(F) пустая, т.е. КНФ(F) = 1 и, тем самым, необходимость доказана.

б) Достаточность.

$$\text{КНФ}(F) = 1 \Rightarrow F \in \text{ТИ (или } F = 1).$$

Имеем. Поскольку КНФ(F) = 1 и F = КНФ(F), то $F = 1$ (т.е. $F \in$ ТИ) и достаточность доказана.

Теорема 4.6 (критерий тождественной ложности по КНФ).

$$\text{F} = 0 \Leftrightarrow \text{КНФ}(\bar{F}) = 1.$$

Доказательство. (Доказать самостоятельно).

Теорема 4.7 (о конъюнктивном разложении):

Пусть нам задана некоторая формула $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *и зафиксирован некоторый список переменных этой формулы (не ограничивая общности, будем считать, что зафиксированы первые* ***k*** *переменных)* $x_1, x_2, ..., x_k$*;* $k \in \overline{1;n}$*. Тогда для* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *имеет место конъюнктивное разложение*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots x_k^{\overline{\alpha_k}} \vee f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)),$$

единственное с точностью до равносильности дизъюнктивных слагаемых $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)$.

Доказательство. Воспользуемся доказанной ранее теоремой 3.7 о дизъюнктивном разложении и применим ее для f^*. Получим:

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} f^*(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n).$$

Перейдем к двойственной формуле. Получим:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \Big(\bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} f^*(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n) \Big)^* =$$

$$\bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} f^*(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n))^* =$$

$$\bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} ((x_1^{\alpha_1})^* \vee (x_2^{\alpha_2})^* \vee \cdots \vee (x_k^{\alpha_k})^* \vee (f^*(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n))^*) =$$

$$\bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} (x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \cdots \vee x_k^{\alpha_k} \vee (f^*)^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_k^*, x_{k+1}^*, x_{k+2}^*, ..., x_n^*)) =$$

$$\bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in B^k} (x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \cdots \vee x_k^{\alpha_k} \vee f(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ..., \overline{\alpha_k}, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)) =$$

Учтем теперь, что конъюнкция в последней формуле берется *по всем без исключения* двоичным наборам длины *k*. Но тогда в указанной конъюнкции для каждого *k*-местного двоичного набора присутствует множитель, в котором показателями переменных служат значения, противоположные компонентам этого набора. Поэтому, переставив соответствующим образом множители в последней конъюнкции, получим:

$$\bigwedge_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)\in B^k} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots x_k^{\overline{\alpha_k}} \vee f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n)).$$

Тем самым возможность разложения доказана. Единственность конъюнктивного разложения с точностью до равносильности дизъюнктивных слагаемых $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n)$ следует из подобной единственности дизъюнктивного разложения с точностью до равносильности конъюнктивных «коэффициентов» и того, что для всякой БФ двойственная ей функция определяется единственным образом.

Пример 4.4. Найти конъюнктивное разложение формулы

$$f(x,y,z) = (\overline{x}\,\overline{y} \to \overline{z})(y \leftrightarrow \overline{x}z) \to (x \vee y\overline{z})$$

по переменной $\boldsymbol{x}$.

Решение. Имеем:

$$f(x,y,z) = (\overline{x}\,\overline{y} \to \overline{z})(y \leftrightarrow \overline{x}z) \to (x \vee y\overline{z}) = (\overline{x} \vee ((\overline{1}\,\overline{y} \to \overline{z})(y \leftrightarrow \overline{1}z) \to (1 \vee y\overline{z})))$$

$$(x \vee ((\overline{\overline{0}}\,\overline{y} \to \overline{z})(y \leftrightarrow \overline{0}z) \to (0 \vee y\overline{z})) = (\overline{x} \vee (y \leftrightarrow 0) \to 1))\,(x \vee ((\overline{y} \to \overline{z})(y \leftrightarrow z) \to y\overline{z}) =$$

$$(\overline{x} \vee (\overline{y} \to 1))\,(x \vee ((\overline{y} \to \overline{z})(y \leftrightarrow z) \to y\overline{z}))) = (\overline{x} \vee 1)\,(x \vee ((\overline{y} \to \overline{z})(y \leftrightarrow z) \to y\overline{z})))$$

Ответ: $f(x,y,z) = (\overline{x} \vee 1)\,(x \vee ((\overline{y} \to \overline{z})(y \leftrightarrow z) \to y\overline{z}))$.

Частным случаем теоремы о конъюнктивном разложении является:

Теорема 4.8 (о полном конъюнктивном разложении):

Пусть нам задана некоторая формула $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. *Тогда для* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *имеет место единственное полное конъюнктивное разложение:*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in B^n} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}} \vee f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)).$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из предыдущей теоремы о конъюнктивном разложении при $\boldsymbol{k = n}$.

Определение 4.5. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется непустая КНФ, все элементарные дизъюнкции которой представляют собой maxterm'ы относительно заданного списка переменных.*

Определение 4.6. *СКНФ равносильная некоторой формуле f называется СКНФ этой формулы и обозначается СКНФ(f). Таким образом:*

$$СКНФ = f \overset{def}{\Leftrightarrow} СКНФ = СКНФ\,(f).$$

Теорема 4.9 *(о существовании СКНФ(f) для опровержимой формулы).*

Для всякой опровержимой формулы f существует и притом единственная ее СКНФ(f), т.е.:

$$(\forall f \in ОП)(\exists!\, СКНФ \in ФАВ)\left[СКНФ = СКНФ(f)\right].$$

Доказательство. Утверждение теоремы является прямым следствием теоремы о полном конъюнктивном разложении. В самом деле, в силу этой теоремы имеем:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}} \vee f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) =$$

В силу того, что $B^n = ОИ(f) \cup ОЛ(f)$ и $ОИ(f) \cap ОЛ(f) = \emptyset$, получим:

$$\Big(\bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in ОИ(f)} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}} \vee f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))\Big) \wedge$$

$$\Big(\bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in ОЛ(f)} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}} \vee f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))\Big) =$$

$$\Big(\bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in ОИ(f)} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}} \vee 1)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in ОЛ(f)} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}} \vee 0)\Big) =$$

$$\bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in ОЛ(f)} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}) = СКНФ\,(f)$$

Замечание 4.3. *Из теоремы существования и единственности СКНФ (f), а именно из*

$$СКНФ\,(f) = \bigwedge_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in ОЛ(f)} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}),$$

следуют правила (алгоритм) построения опровержимой формулы по ее таблице.

Для построения опровержимой формулы по ее таблице достаточно:

– выписать область ложности формулы;

– для каждого набора из области ложности найти соответствующий ему макстерм (см. теорему о соответствии макстермов и наборов);

– взять конъюнкцию полученных на предыдущем шаге макстермов и построить тем самым формулу (СКНФ), таблица которой совпадает с таблицей исходной таблицей.

Пример 4.5. Задать логической формулой булеву функцию f, если известна ее таблица:

$$f: 1010111011001011.$$

Решение. Заметим прежде всего, что таблица булевой функции содержит шестнадцать значений. Поскольку длина таблицы определяется количеством различных наборов значений переменных, то, в нашем случае, имеем:

$$2^n = 16, \quad \text{т.е.} \quad n = 4.$$

Таким образом, булева функция (искомая формула) зависит от четырех переменных. Обозначим эти переменные x,y,z,u, т.е. $f = f(x,y,z,u)$.

Выпишем область ложности по заданной таблице. Имеем:

$$\text{ОЛ}(f) = \{1; 3; 7; 10; 11; 13\} \text{ («номерами» наборов)},$$

или

$$\text{ОЛ}(f) = \{0001; 0011; 0111; 1010; 1011; 1101\}.$$

Найдем макстермы, отвечающие наборам из ОЛ(f)

$$\{x \vee y \vee z \vee \bar{u};\ x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u};\ x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{u};\ \bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee u;\ \bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u};\ \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{u}\}.$$

Тогда: $f = f(x,y,z,u) = СКНФ(f) =$

$$(x \vee y \vee z \vee \bar{u})(x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{u})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{u}).$$

Ответ: $СКНФ(f) =$

$$(x \vee y \vee z \vee \bar{u})(x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{u})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{u}).$$

Замечание 4.4. *Подчеркнем еще раз, что поскольку* $1 = 1(x_1, x_2, ..., x_n) =$ $(x_1 \vee \overline{x_1})(x_2 \vee \overline{x_2})\cdots(x_n \vee \overline{x_n})$ *и всякую опровержимую булеву функцию можно задать логической формулой (в виде СКНФ (f)), то любая булева функция может быть задана некоторой логической формулой алгебры логики (алгебры высказываний (АВ)). Поэтому в дальнейшем мы вправе термины «булева функция» и «формула» использовать в одном и том же смысле (т.е. отождествлять).*

Алгоритм построения СКНФ (f) опровержимой формулы f (аналитический):

Для построения СКНФ (f) опровержимой формулы f аналитически достаточно:

– привести исходную формулу к виду КНФ (см. алгоритм построения КНФ(f));

– в полученной КНФ разложить каждую элементарную дизъюнкцию на макстермы;

– устранить «лишние» вхождения макстермов (если они есть) на основании закона идемпотентности конъюнкции;

Рассмотрим указанный выше алгоритм на конкретном примере.

Пример 4.6. Построить СКНФ (f) для формулы:

$$f(x, y, z) = (x \vee \overline{z} \to \overline{y}) \leftrightarrow (\overline{x} + yz) \to x\overline{y} \vee z\,.$$

Решение. Приведем сначала исходную формулу к виду КНФ. Воспользуемся результатами примера 4.2. Получим:

$$f(x, y, z) = x \vee \overline{z} \to \overline{y} \leftrightarrow (\overline{x} + yz) \to x\overline{y} \vee z = ... = (\overline{x} \vee \overline{y})(x \vee y \vee z)\,.$$

В КНФ второй множитель – макстерм. Поэтому для построения СКНФ(f) достаточно первый множитель (элементарную дизъюнкцию) разложить на макстермы. Для этого в эту ЭД на местах отсутствующих переменных добавим дизъюнктивные слагаемые, равные нулю (по каждой отсутствующей в данной ЭД переменной). Получим:

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee 0)(x \vee y \vee z)\ .$$

Представим теперь каждый из нулей с помощью соответствующей переменной на основании закона противоречия. Получим:

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}z)(x \vee y \vee z)\ .$$

Осталось в последней формуле разложить первую скобку на множители (макстермы) на основании второго дистрибутивного закона и избавиться от «лишних» вхождений макстермов (если такие вхождения появятся в результате разложения на множители). Получим окончательно:

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z) = \text{СКНФ}(f)\ .$$

Ответ: СКНФ $(f) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)$.

Замечание 4.5. *Построение СКНФ непосредственно по указанному алгоритму может стать громоздким в силу того, что на заключительном этапе построения применяется второй дистрибутивный закон. Можно предложить второй алгоритм построения СКНФ, использующий двойственность СКНФ и СДНФ, а именно:*

$$f \to ДНФ(f) \to f^{*} \to (ДНФ(f^{*})) \to СДНФ(f^{*}) \to (СДНФ(f^{*}))^{*} = \text{СКНФ}(f).$$

Замечание 4.6. *По СКНФ (f), выполняя действия, обратные действиям при построении СКНФ по таблице (см. пример 4.5.), легко найти таблицу формулы.*

Пример 4.7. Используя СКНФ(f) построить таблицу формулы:

$$f(x,y,z) = x \vee \bar{z} \to \bar{y} \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \to x\bar{y} \vee z\ .$$

Решение. Приведем исходную формулу к виду СКНФ, если это возможно. Воспользуемся результатами предыдущего примера. Имеем:

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)\ .$$

Теперь воспользуемся теоремой об области ложности конъюнкции и биекцией между макстермами и наборами:

$$\text{ОЛ}(f) = \text{ОЛ}((\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})) \cup \text{ОЛ}((\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)) \cup \text{ОЛ}((x \vee y \vee z)) =$$

$$\{111\} \cup \{110\} \cup \{000\} = \{000,110,111\} = \{0,6,7\}.$$

Наборы, не вошедшие в область ложности, составят область истинности:

$$\text{ОИ}(f) = \{1,2,3,4,5\} \text{ (номерами наборов).}$$

Тогда: f: 01111100.

Ответ: f: 01111100.

Теорема *(критерий равносильности по СКНФ).*

Две формулы равносильны тогда и только тогда, когда они обе тождественно истинные или приводятся к одной и той же СКНФ, т.е.

$$(F = G) \Leftrightarrow (F{=}1 \wedge G{=}1) \vee (\text{СКНФ}(F) = \text{СКНФ}(G)).$$

Доказательство.

а) Необходимость.

$$F = G) \Rightarrow (F{=}1 \wedge G{=}1) \vee (\text{СКНФ}(F) = \text{СКНФ}(G)).$$

По условию нам дано $(F = G)$. Поэтому, в силу критерия равносильности по ОЛ, имеем: $\text{ОЛ}(F) = \text{ОЛ}(G)$. Если $\text{ОЛ}(F) = \text{ОЛ}(G) = \emptyset$, то $F{=}G{=}1$. Если же $\text{ОЛ}(F) = \text{ОЛ}(G) \neq \emptyset$, то $\text{СКНФ}(F) = \text{СКНФ}(G)$, поскольку, в силу теоремы существования, СКНФ(f) однозначно определяется областью ложности f. Необходимость доказана.

б*)* Достаточность.

$$(F{=}1 \wedge G{=}1) \vee (\text{СКНФ}(F) = \text{СКНФ}(G)) \Rightarrow (F = G).$$

Если $(F{=}1 \wedge G{=}1)$, то $(F{=}1{=}G)$ и все доказано. Если же $(\text{СКНФ}(F) = \text{СКНФ}(G))$, то $F = \text{СКНФ}(F) = \text{СКНФ}(G) = G$. И в этом случае все доказано.

Итак, мы познакомились со второй разновидностью нормальных форм алгебры логики (теории булевых функций), а именно с КНФ и ее совершенным видом – СКНФ. Отметим еще раз применения этих нормальных форм.

Применения конъюнктивной нормальной формы (КНФ):

– критерий тождественной ложности по КНФ:

$$F = 0 \Leftrightarrow КНФ(\overline{F}) = 1;$$

– критерий тождественной истинности по КНФ:

$$F = 1 \Leftrightarrow КНФ(F) = 1;$$

– построение таблиц формул по их КНФ;

– КНФ(F) – промежуточный этап построения СКНФ(F).

Применения совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ):

– критерий равносильности по СКНФ:

$$(F = G) \Leftrightarrow (F{=}1 \wedge G{=}1) \vee (СКНФ(F) = СКНФ(G));$$

– СКНФ применяется для аналитического задания опровержимой булевой функции по ее таблице;

– по СКНФ(f) легко восстанавливается таблица f

5. Многочлен Жегалкина.

Сумма по модулю два, ее свойства.

По определению: $x + y \overset{def}{=} \overline{x \leftrightarrow y}$.

Свойства:
(5.1) $x + y = y + x;$

(5.2) $(x + y) + z = x + (y + z);$

(5.3) $x(y + z) = xy + xz;$

(5.4) $x + x = 0;$

(5.5) $x + 0 = x;$

(5.6) $x + 1 = \overline{x};$

Любой из приведенных выше законов может быть доказан с помощью таблиц Квайна или с использованием критериев равносильности на основании совершенных ДНФ или КНФ.

Определение 5.1. *Многочленом Жегалкина от* n *переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *(нормальной формой Жегалкина (НФЖ)) называется сумма по модулю два*

$$\sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \cdots + a_{n-1\,n} x_{n-1} x_n +$$

$$+ a_{123} x_1 x_2 x_3 + a_{124} x_1 x_2 x_4 + \cdots + a_{n-2\,n-1\,n} x_{n-2} x_{n-1} x_n + \cdots + a_{12\ldots n} x_1 x_2 \cdots x_n$$

(в которой каждое слагаемое представляет собой конъюнкцию некоторых переменных с двоичным коэффициентом, индекс которого определяется множеством индексов переменных, входящих в конъюнкцию), берущаяся по всем без исключения подмножествам $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ *множества индексов* $\{1,2,\ldots,n\}$*.*

Пример 5.1. Общий вид многочлена Жегалкина от трех переменных x_1, x_2, x_3:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Определение 5.2. *НФЖ, равносильная данной формуле* f*, называется НФЖ для данной формулы и обозначается НФЖ(*f*), т.е.:*

$$НФЖ = НФЖ(f) \overset{def}{\Leftrightarrow} НФЖ = f.$$

Теорема 5.1. *Для всякой формулы (булевой функции) существует и притом единственный ее многочлен Жегалкина, т.е.:*

$$(\forall f \in ФАВ)(\exists! НФЖ)[НФЖ = НФЖ(f)].$$

Доказательство. Пусть исходная функция зависит от n переменных, т.е. $f \in P_2^{(n)}$. Каждый многочлен Жегалкина от n переменных однозначно определяется двоичным набором своих коэффициентов $(a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{12}, \ldots, a_{n-1\,n}, a_{123}, \ldots, a_{12\ldots n}) \in B^{2^n}$. Таким образом, существует $\left| B^{2^n} \right| = 2^{2^n}$ различных многочленов Жегалкина от n переменных, т.е. ровно столько, сколько существует различных булевых функций от n переменных. Многочлен Жегалкина, как всякая формула АВ, имеет некоторую таблицу. Эту таблицу можно рассматривать, как таблицу некоторой БФ. Пусть $M^{(n)}$ – множество различных многочленов Жегалкина от n переменных. Установим соответствие $\varphi : P_2^{(n)} \to M^{(n)}$, сопоставив каждой булевой функции от n переменных многочлен Жегалкина от n переменных так, что их таблицы совпадают. Легко убедиться (проделать это!), что это соответствие является биективным отображением. Тем самым, теорема доказана.

Рассмотрим методы построения НФЖ(f).

<u>1). Построение НФЖ(f) по таблице f.</u>

Рассмотрим этот метод на конкретном примере, из которого будет следовать алгоритм построения НФЖ(f) по таблице f в общем случае.

<u>Пример 5.2.</u> Построить многочлен Жегалкина булевой функции, заданной своей таблицей: f: 10001101.

<u>Решение.</u> Заметим, прежде всего, что исходная функция зависит от трех переменных, т.к. таблица функции содержит восемь значений. Пусть $f = f(x,y,z)$. Запишем НФЖ(f) от указанных переменных пока еще с неопределенными коэффициентами:

$$f(x,y,z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{123}xyz\,.$$

Теперь, для определения коэффициентов, воспользуемся тем, что таблица БФ известна, т. е. известны значения НФЖ(f) на каждом наборе значений переменных. Подставим последовательно в выражение НФЖ значения наборов переменных, увеличивая на каждом шаге количество единиц в записи наборов, и учтем значения БФ на этих наборах. Рассмотрим сначала набор, в записи которого нет единиц. Имеем:

$$f(0,0,0) = a_0 + a_1 0 + a_2 0 + a_3 0 + a_{12} 00 + a_{13} 00 + a_{23} 00 + a_{123} 000 = 1.$$

Тогда, учитывая свойства сложения по модулю два, получим:

$$f(0,0,0) = a_0 = 1.$$

Тем самым, первый коэффициент многочлена Жегалкина a_0 найден ($a_0 = 1$) и исходное выражение НФЖ(f) принимает вид:

$$f(x, y, z) = 1 + a_1x + a_2y + a_3z + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{123}xyz.$$

Далее последовательно используем наборы, в записи которых присутствует одна единица (причем эта единица будет занимать последовательно места в записи наборов, начиная с первого). Имеем:

$$f(1,0,0) = a_0 + a_1 1 + a_2 0 + a_3 0 + a_{12}10 + a_{13}10 + a_{23}00 + a_{123}100 = a_0 + a_1 = 1 + a_1 = 1.$$

Откуда: $a_1 = 0$.

$$f(0,1,0) = a_0 + a_1 0 + a_2 1 + a_3 0 + a_{12}01 + a_{13}00 + a_{23}10 + a_{123}010 = a_0 + a_2 = 1 + a_2 = 0.$$

Откуда: $a_2 = 1$.

$$f(0,0,1) = a_0 + a_1 0 + a_2 0 + a_3 1 + a_{12}00 + a_{13}01 + a_{23}00 + a_{123}001 = a_0 + a_3 1 = 1 + a_3 = 0.$$

Откуда: $a_3 = 1$.

Таким образом:

$$f(x, y, z) = 1 + 0x + 1y + 1z + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{123}xyz.$$

Теперь используем наборы, в записи которых присутствуют две единицы. Имеем:

$$f(1,1,0) = a_0 + a_1 1 + a_2 1 + a_3 0 + a_{12}11 + a_{13}10 + a_{23}10 + a_{123}110 = a_0 + a_1 + a_2 + a_{12} =$$

$$= 1+0+1+a_{12} = 0.$$

Откуда: $a_{12} = 0$.

$$f(1,0,1) = a_0 + a_1 1 + a_2 0 + a_3 1 + a_{12}10 + a_{13}11 + a_{23}01 + a_{123}101 = a_0 + a_1 + a_3 + a_{13} =$$

$$= 1 + 0 + 1 + a_{13} = 1.$$

Откуда: $a_{13} = 1$.

$$f(0,1,1) = a_0 + a_1 0 + a_2 1 + a_3 1 + a_{12}01 + a_{13}01 + a_{23}11 + a_{123}011 = a_0 + a_2 + a_3 + a_{23} =$$

$$= 1 + 1 + 1 + a_{23} = 0.$$

Откуда: $a_{23} = 1$.

Таким образом: $f(x, y, z) = 1 + 0x + 1y + 1z + 0xy + 1xz + 1yz + a_{123}xyz.$

Осталось найти последний коэффициент многочлена Жегалкина, используя набор значений переменных, состоящий из всех единиц. Имеем:

$$f(1{,}1{,}1) \;=\; a_0 + a_1 1 + a_2 1 + a_3 1 + a_{12} 11 + a_{13} 11 + a_{23} 11 + a_{123} 111 \;=$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} \;=\; 1+0+1+1+0+1+1+a_{123} \;=\; 1 + a_{123} = 1.$$

Откуда: $a_{123} = 0$.

Таким образом: $f(x,y,z) \;=\; 1 + 0x + 1y + 1z + 0xy + 1xz + 1yz + 0xyz \;=$

$$1 + y + z + xz + yz\,.$$

Ответ. $f(x,y,z) \;=\; \text{НФЖ}(f) = \; 1 + y + z + xz + yz\,.$

Замечание 5.1. *Проведенные вычисления коэффициентов многочлена Жегалкина удобнее оформлять с помощью таблицы:*

x	*y*	*z*	*f*	*соотношения*	*коэффициенты*
0	0	0	1	$= a_0$	$a_0 = 1$
0	0	1	0	$= a_0 + a_3$	$a_3 = 1$
0	1	0	0	$= a_0 + a_2$	$a_2 = 1$
0	1	1	0	$= a_0 + a_2 + a_3 + a_{23}$	$a_{23} = 1$
1	0	0	1	$= a_0 + a_1$	$a_1 = 0$
1	0	1	1	$= a_0 + a_1 + a_3 + a_{13}$	$a_{13} = 1$
о	1	0	0	$= a_0 + a_1 + a_2 + a_{12}$	$a_{12} = 0$
1	1	1	1	$= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123}$	$a_{123} = 0$

Заметим, что в каждой строке соотношения между коэффициентами представляют собой суммы коэффициентов, в которых обязательно присутствует коэффициент a_0 *и те коэффициенты, индексы которых определяются номерами единиц в соответствующих наборах.*

Например, для набора (1,0,1), номера единиц в записи набора – один и три. Поэтому в указанной сумме участвуют коэффициенты a_0, a_1, a_3, a_{13}.

<u>2). Построение НФЖ(f) аналитически, с использованием НФЖ основных БФ f.</u>

Рассмотрим сначала НФЖ основных БФ. Для булевых функций от одной переменной их многочлены Жегалкина следующие:

(5.7) $x =$ НФЖ(x);

(5.8) $\overline{x} = 1 + x = НФЖ(\overline{x})$;

(5.9) $0 =$ НФЖ(0);

(5.10) $1 =$ НФЖ(1).

Для булевых функций от двух переменных имеем:

(5.11) $xy = НФЖ(xy)$;

(5.12) $\overline{xy} = x / y = 1 + xy = НФЖ(\overline{xy}) = НФЖ(x / y)$;

(5.13)

$$x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = 1 + \overline{x}\,\overline{y} = 1 + (1+x)(1+y) = 1+1+x+y+xy = x+y+xy = НФЖ(x \vee y);$$

(5.14) $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = 1 + (x \vee y) = 1 + x + y + xy = НФЖ(x \downarrow y) = НФЖ(\overline{x \vee y})$;

(5.15) $x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x} + y + \overline{x}y = 1 + x + y + (1+x)y = 1 + x + xy = НФЖ(x \to y)$;

(5.16) $\overline{x \to y} = 1 + (x \to y) = 1 + 1 + x + xy = x + xy = НФЖ(\overline{x \to y})$;

(5.17) $\overline{x \leftrightarrow y} = x + y = НФЖ(\overline{x \leftrightarrow y}) = НФЖ(x + y)$;

(5.18) $x \leftrightarrow y = \overline{\overline{x \leftrightarrow y}} = \overline{x + y} = 1 + x + y = НФЖ(x \leftrightarrow y)$;

Полученные равенства можно рассматривать, как выражения основных булевых функций в виде суперпозиций функций системы Жегалкина — $\{xy;\, x+y;\, 0;\, 1\}$, т.е. как некоторые правила, с помощью которых любую булеву функцию можно представить в виде формулы, содержащей только операции системы Жегалкина.

Покажем на примере, как эти правила работают при построении НФЖ(f) для функций, заданных некоторыми формулами ТБФ.

<u>Пример 5.3.</u> Построить многочлен Жегалкина для БФ:

$$f(x,y,z)=(x\bar{y}\leftrightarrow(x\vee z\to\bar{y}))\to\overline{x(\bar{y}\downarrow\bar{z})}.$$

Решение. Порядок преобразования исходной формулы неважен, но для алгоритмизации процесса построения НФЖ(f) будем всякий раз преобразовывать в функции системы Жегалкина «внешние» функции соответствующих суперпозиций (последние операции подформул, не входящие в систему Жегалкина). Последней операцией исходной формулы является импликация. Поэтому, используя (5.15), получим:

$$f(x,y,z)=(x\bar{y}\leftrightarrow(x\vee z\to\bar{y}))\to\overline{x(\bar{y}\downarrow\bar{z})}\ =$$

$$=\ 1+(x\bar{y}\leftrightarrow(x\vee z\to\bar{y}))+(x\bar{y}\leftrightarrow(x\vee z\to\bar{y}))\overline{x(\bar{y}\downarrow\bar{z})}\ =$$

Далее, используя (5.18) заменим вхождения эквиваленций. Получим, учитывая ассоциативность операции «+»:

$$=\ 1+1+x\bar{y}+(x\vee z\to\bar{y})+(1+x\bar{y}+(x\vee z\to\bar{y}))\overline{x(\bar{y}\downarrow\bar{z})}\ \ =$$

Используя (5.15) и (5.8), имеем:

$$=\ \ 0+x\bar{y}+1+(x\vee z)+(x\vee z)\bar{y}+(1+x\bar{y}+1+(x\vee z)+(x\vee z)\bar{y})(1+x(\bar{y}\downarrow\bar{z}))=$$

Заменим теперь дизъюнкции и стрелку Пирса, пользуясь (5.13) и (5.14). Получим:

$$=1+x\bar{y}+x+z+xz+(x+z+xz)\bar{y}+(0+x\bar{y}+x+z+xz+(x+z+xz)\bar{y})(1+x(1+\bar{y}+\bar{z}+\bar{y}\ \bar{z}))$$

Раскроем скобки на основании дистрибутивного закона (5.3) и упростим формулу с применением (5.4) и (5.5). Получим:

$$1+x\bar{y}+x+z+xz+x\bar{y}+z\bar{y}+xz\bar{y}+(x\bar{y}+x+z+xz+x\bar{y}+z\bar{y}+xz\bar{y})(1+x+x\bar{y}+x\bar{z}+x\bar{y}\ \bar{z})$$

$$=\ \ 1+x+z+xz+z\bar{y}+xz\bar{y}+(x+z+xz+z\bar{y}+xz\bar{y})(1+x+x\bar{y}+x\bar{z}+x\bar{y}\ \bar{z})\ \ =$$

Можем еще воспользоваться равенством

(5.19) $\quad x+x\bar{y}=x(1+\bar{y})=x\bar{\bar{y}}=xy$;

Тогда имеем:

$$=\ \ 1+x+yz+xyz+(x+yz+xyz)(1+xz+x\bar{y}z)\ =$$

Раскроем скобки и упростим:

$$=1+x+yz+xyz+(x+yz+xyz)(1+xz+x(1+y)z)\ =$$

$$= 1 + x + yz + xyz + (x + yz + xyz)(1 + xz + xz + xyz) =$$

$$1 + x + yz + xyz + (x + yz + xyz)(1 + xyz) =$$

$$= 1 + x + yz + xyz + x + yz + xyz + xyz + xyz + xyz = 1 + xyz = \text{НФЖ}(f).$$

Ответ: НФЖ(f) $= 1 + xyz$.

Замечание 5.2. *Еще раз заметим, что порядок преобразований формулы при построении многочлена Жегалкина жестко нерегламентирован. Конечная цель – привести формулу только к операциям системы Жегалкина, а затем раскрыть все скобки и упростить формулу.*

3). Построение НФЖ(f) аналитически, с использованием СДНФ(f).

Докажем теорему, лежащую в основе этого метода построения НФЖ(f).

Теорема 5.2. *Пусть* $x_1, x_2, ..., x_n$ *— некоторый список переменных,* $m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *и* $m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *— два различных минтерма от этого списка переменных. Тогда*

$$m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) \vee m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n) = m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) + m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

т.е. сумма двух различных минтермов равна их сумме.

Доказательство. Пусть

$$m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_i^{\alpha_i} \cdots x_n^{\alpha_n} \text{ и } m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_i^{\beta_i} \cdots x_n^{\beta_n}.$$

Поскольку $m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) \neq m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n)$, то найдется индекс i такой, что $\alpha_i \neq \beta_i$. Но тогда $\overline{\alpha_i} = \beta_i$. Рассмотрим дизъюнкцию исходных минтермов и преобразуем ее в сумму по модулю два на основании (5.13). Получим:

$$m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) \vee m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n) = m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) + m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n) +$$

$$+ m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n)\, m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n) = m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) + m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n) +$$

$$+ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots \underbrace{x_i^{\alpha_i} \cdots x_n^{\alpha_n} \wedge x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_i^{\beta_i}}_{x_i^{\alpha_i} x_i^{\beta_i} = x_i^{\alpha_i} x_i^{\overline{\alpha_i}} = 0} \cdots x_n^{\beta_n} = m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, ..., x_n) + m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, ..., x_n) + 0$$

$$= \; m_{\tilde{\alpha}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + m_{\tilde{\beta}}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Теорема доказана.

Следствие 5.2. *Если* $m_{\tilde{\alpha}_1}, m_{\tilde{\alpha}_2}, \ldots, m_{\tilde{\alpha}_k}$ *– различные минтермы от одного списка переменных, то* $m_{\tilde{\alpha}_1} \vee m_{\tilde{\alpha}_2} \vee \ldots \vee m_{\tilde{\alpha}_k} \; = \; m_{\tilde{\alpha}_1} + m_{\tilde{\alpha}_2} + \ldots + m_{\tilde{\alpha}_k}$.

Доказательство. Операция дизъюнкция ассоциативная. Расставим в начальной дизъюнкции скобки, прижимая их к левому краю. Получим:

$$((\ldots((m_{\tilde{\alpha}_1} \vee m_{\tilde{\alpha}_2}) \vee m_{\tilde{\alpha}_3}) \ldots) \vee m_{\tilde{\alpha}_k}).$$

Теперь последовательно будем преобразовывать дизъюнкции в суммы по модулю два, пользуясь (5.13), законом дистрибутивности (5.3) и учитывая, что конъюнкция различных минтермов равна нулю. В итоге получим требуемое:

$$m_{\tilde{\alpha}_1} \vee m_{\tilde{\alpha}_2} \vee \ldots \vee m_{\tilde{\alpha}_k} \; = \; m_{\tilde{\alpha}_1} + m_{\tilde{\alpha}_2} + \ldots + m_{\tilde{\alpha}_k}.$$

Из последнего следствия имеем:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = СДНФ(f) = \bigvee_{\substack{\tilde{\alpha} \in B^n \\ f(\tilde{\alpha})=1}} m_{\tilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_n) \; = \; \sum_{\substack{\tilde{\alpha} \in B^n \\ f(\tilde{\alpha})=1}} (x_1 + \overline{\alpha_1}) \cdots (x_n + \overline{\alpha_n}) = \ldots = НФЖ(f).$$

Откуда следует третий алгоритм построения НФЖ(f):

Для построения НФЖ(f) достаточно:

– привести исходную функцию к СДНФ (построить СДНФ(f));

– заменить все дизъюнкции в СДНФ(f) на суммы по модулю два;

– снять отрицания над переменными (если они есть) на основании (5.6);

– раскрыть скобки и упростить формулу до НФЖ(f).

Пример 5.4. Построить многочлен Жегалкина для функции:

$$f(x, y, z) = (x\bar{y} \leftrightarrow (x \vee z \to \bar{y})) \to \overline{x(\bar{y} \downarrow \bar{z})}.$$

Решение. Построим сначала СДНФ(f). Имеем:

$$f(x, y, z) = (x\bar{y} \leftrightarrow (x \vee z \to \bar{y})) \to \overline{x(\bar{y} \downarrow \bar{z})} \; = \; \overline{x\bar{y} \leftrightarrow (x \vee z \to \bar{y})} \vee \overline{x(\overline{\bar{y} \vee \bar{z}})} \; =$$

$$\overline{x\bar{y}}(x\vee z\to\bar{y})\vee\bar{x}\bar{y}\,\overline{(x\vee z\to\bar{y})}\vee\bar{x}\vee\overline{(\bar{\bar{y}}\vee\bar{\bar{z}})} = (\bar{x}\vee\bar{\bar{y}})(\overline{x\vee z}\vee\bar{y})\vee x\bar{y}(x\vee z)\bar{\bar{y}}\vee\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}$$

$$(\bar{x}\vee y)(\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y})\vee x\bar{y}y(x\vee z)\vee\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z} = (\bar{x}\vee y)(\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y})\vee x0(x\vee z)\vee\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z} =$$

$$(\bar{x}\vee y)(\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y})\vee 0\vee\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z} = (\bar{x}\vee y)(\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y})\vee\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z} =$$

$$\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\vee\bar{x}y\bar{z}\vee y\bar{y}\vee\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}.$$

Учитывая законы поглощения, получим:

$$f(x,y,z) = \bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z} = ДНФ(f) = \bar{x}11\vee 1\bar{y}1\vee 11\bar{z} =$$

$$\bar{x}(y\vee\bar{y})(z\vee\bar{z})\vee(\bar{x}\vee x)\bar{y}(z\vee\bar{z})\vee(x\vee\bar{x})(y\vee\bar{y})\bar{z} =$$

$$\bar{x}yz\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}z\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} =$$

Устраняя лишние вхождения минтермов на основании идемпотентности дизъюнкции, получим:

$$\bar{x}yz\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z} = СДНФ(f) =$$

Тем самым, первый шаг рассматриваемого алгоритма построения НФЖ(f) пройден. Имеем далее (на основании следствия теоремы 5.2):

$$\bar{x}yz+\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}+x\bar{y}\,\bar{z}+x\bar{y}z+xy\bar{z} =$$

$$(1+x)yz+(1+x)(1+y)z+(1+x)y(1+z)+(1+x)(1+y)(1+z)+$$

$$+x(1+y)(1+z)+x(1+y)z+xy(1+z) =$$

$$yz+xyz+z+xz+yz+xyz+y+xy+yz+xyz+1+$$

$$+y+z+yz+x+xy+xz+xyz+x+xy+xz+xyz+$$

$$+xz+xyz+xy+xyz = 1+xyz = НФЖ(f).$$

Ответ: НФЖ(f) $= 1 + xyz$.

Теорема 5.3. *(критерий равносильности по НФЖ):*

$$f = g \Leftrightarrow НФЖ(f) = НФЖ(g)$$

Доказательство. Утверждение теоремы сразу следует из того, что

$$f = НФЖ(f) \text{ и } НФЖ(g) = g.$$

Теорема 5.4. *(критерий тождественной истинности по НФЖ):*

$$f = 1 \Leftrightarrow НФЖ(f) = 1$$

Доказательство. Поскольку НФЖ для всякой БФ определяется однозначно и НФЖ(1) = 1, то все доказано.

Теорема 5.5. *(критерий тождественной ложности по НФЖ):*

$$f = 0 \Leftrightarrow НФЖ(f) = 0$$

Доказательство. Поскольку НФЖ для всякой БФ определяется однозначно и НФЖ$(0) = 0$, то все доказано.

Подчеркнем еще раз некоторые применения НФЖ:

НФЖ используется:

- *в критерии равносильности;*
- *в критерии тождественной истинности;*
- *в критерии тождественной ложности.*

Задачи для самостоятельного решения.

Для каждой из булевых функций:

1. $f_1(x,y,z) = \overline{x}y \leftrightarrow (y \vee \overline{z} \to xz);$
2. $f_2(x,y,z) = (x\overline{y} + \overline{z}) \to (\overline{x} \vee y \leftrightarrow z);$
3. $f_3(x,y,z) = ((\overline{x} \vee \overline{y})/\overline{z}) + (x \vee \overline{y}z \to \overline{x}y);$
4. $f_4(x,y,z) = (\overline{x} \vee y)(y \vee \overline{z}) \to ((x \to \overline{y}) + \overline{z});$

выполнить следующие задания:

1. Построить функцию f^*, двойственную данной функции f:
   – непосредственно по определению;
   – пользуясь принципом двойственности;
   – на основании ДНФ исходной функции;
2. Найти ДНФ(f^*):
   – пользуясь f^*, построенной по определению;
   – пользуясь f^*, построенной на основании принципа двойственности;
   – на основании ДНФ исходной функции;
3. Найти таблицы f и f^*:
   – пользуясь их ДНФ;

– пользуясь таблицей двойственной функции (таблицу f найти на основании таблицы f^* и наоборот);

4. Пользуясь результатами 1.2 и 1.3 провести классификацию функций f и f^*;

5. Построить СДНФ f и f^*:

– исходя из их ДНФ;

– на основании их таблиц (см. п.3);

6. Построить КНФ f и f^*:

– непосредственно (теорема 4.3);

– опосредованно (пользуясь алгоритмом

$$f \rightarrow ДНФ\,(f) \rightarrow (ДНФ\,(f))^* = f^* \rightarrow ДНФ(f^*) \rightarrow (\,ДНФ(f^*))^* = \text{КНФ}(f));$$

7. Построить СКНФ f и f^*:

– используя их КНФ;

– используя таблицы функций (см. п.3);

– по алгоритму:

$$f \rightarrow ДНФ\,(f) \rightarrow (ДНФ\,(f))^* = \ f^* \rightarrow СДНФ(f^*) \rightarrow (\,СДНФ(f^*))^* = \text{СКНФ}(f);$$

8. Построить НФЖ для f и f^*:

– используя таблицы f и f^*;

– используя НФЖ основных БФ;

– используя СДНФ для f и f^*.

9. Проверить тождество $f = f^*$:

– по СДНФ функций;

– по СКНФ функций;

– по НФЖ функций.

Ответы:

Для функции f_1:

ДНФ(f_1) = $x\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}$;

СДНФ(f_1) = $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee xy\bar{z}$,   ({0;4;6});

КНФ(f_1) = $(x \vee \bar{y})\bar{z}$;

СКНФ(f_1) = $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$,
({1;2;3;5;7});

НФЖ(f_1) = $1 + y + z + xy + yz + xyz$;

f_1 :10001010. $f_1 \in$ВП; $f_1 \in$ОП; $f_1 \notin$ ТИ; $f_1 \notin$ ТЛ.

ДНФ(f_1^*) = $\bar{x}\,\bar{z} \vee x\bar{y} \vee y\,\bar{z}$;

СДНФ(f_1^*) = $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$,   ({0;2;4;5;6});

КНФ(f_1^*) = $(x \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z})$;

СКНФ(f_1^*) = $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$, ({1;3;7});

НФЖ(f_1^*) = $1 + z + xz + xyz$;

f_1^* :10101110. . $f_1^* \in$ВП; $f_1^* \in$ОП; $f_1^* \notin$ ТИ; $f_1^* \notin$ ТЛ.

Для функции f_2:

ДНФ(f_2) = $\bar{x}z \vee yz \vee x\bar{y}\,\bar{z}$;

СДНФ(f_2) = $\bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee xyz$,   ({1;3;4;7});

КНФ(f_2) = $(x \vee z)(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$;

СКНФ(f_2) = $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$, ({0;2;5;6});

НФЖ(f_2) = $x + z + xy$;

f_2 :01011001.   . $f_2 \in$ВП; $f_2 \in$ОП; $f_2 \notin$ ТИ; $f_2 \notin$ ТЛ.

ДНФ(f_2^*) = $xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$;

СДНФ(f_2^*) = $\bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\,z \vee xyz$,   ({1;2;5;7});

КНФ(f_2^*) = $(\bar{x} \vee z)(y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

СКНФ(f_2^*) = $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$, ({0;3;4;6});

НФЖ(f_2^*) = $y + z + xy$;

f_2^* :01100101. $f_2^* \in$ВП; $f_2^* \in$ОП; $f_2^* \notin$ ТИ; $f_2^* \notin$ ТЛ.

Для функции f_3:

ДНФ$(f_3) = \bar{x}\,\bar{z} \vee xy \vee xz \vee \bar{y}z$;

СДНФ$(f_3) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\,z \vee xy\bar{z} \vee xyz$, $(\{0;1;2;5;6;7\})$;

КНФ$(f_3) = (\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

СКНФ$(f_3) = (\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$; $(\{3;4\})$;

НФЖ$(f_3) = 1 + x + xy + xz + yz$;

f_3 :11100111. $f_3 \in$ВП; $f_3 \in$ОП; $f_3 \notin$ ТИ; $f_3 \notin$ ТЛ.

ДНФ$(f_3^*) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}\,\bar{z}$;

СДНФ$(f_3^*) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}\,\bar{z}$; $(\{3;4\})$;

КНФ$(f_3^*) = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{z})(x \vee z)(\bar{y} \vee z)$;

СКНФ$(f_3^*) = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$,

$(\{0;1;2;5;6;7\})$;

НФЖ$(f_3^*) = x + xy + xz + yz$;

f_3^* :00011000. $f_3^* \in$ВП; $f_3^* \in$ОП; $f_3^* \notin$ ТИ; $f_3^* \notin$ ТЛ.

Для функции f_4:

ДНФ$(f_4) = x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}z$;

СДНФ$(f_4) = \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{y}\,z$, $(\{1;2;3;4;5\})$;

КНФ$(f_4) = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y})$;

СКНФ$(f_4) = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$; $(\{0;6;7\})$;

НФЖ$(f_4) = x + y + z + xz + yz + xyz$;

f_4 :01111100. $f_4 \in$ВП; $f_4 \in$ОП; $f_4 \notin$ ТИ; $f_4 \notin$ ТЛ.

ДНФ$(f_4^*) = \bar{x}\,\bar{y} \vee xyz$;

СДНФ$(f_4^*) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee xyz$; $(\{0;1;7\})$;

КНФ$(f_4^*) = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$;

СКНФ$(f_4^*) = (x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$,

$(\{2;3;4;5;6\})$;

НФЖ$(f_4^*) = 1 + x + y + xy + xyz$;

f_4^* :11000001. $f_4^* \in$ВП; $f_4^* \in$ОП; $f_4^* \notin$ ТИ; $f_4^* \notin$ ТЛ.

Замечание 6.1. ***В приведенных ответах ДНФ может быть и другой, поскольку она для всякой БФ определяется неоднозначно.***

Рекомендуемая литература

1. Тишин В.В., Дискретная математика в примерах и задачах. – С.-Петербург.: БХВ- Петербург, 2008. 336 с.
2. Игошин В.И., Математическая логика и теория алгоритмов. - М.: Академия, 2008. 449 с.
3. Игошин В.И., Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов.- М.: Академия, 2007. 305 с.
4. Шапорев С.Д., Математическая логика (курс лекций и практических занятий). - С.- Петербург, 2005. 410 с.
5. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н.- Конспект лекций по дискретной математике (с упражнениями и контрольными работами). – М.: Айрис пресс, 2007. 174 с.
6. Новиков Ф.А., Дискретная математика для программистов.- С.-Петербург.: Питер, 2001. 301 с.