

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Тензори Схоутена в неріманових геометріях»

«Schouten tensors in non-Riemannian geometries»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

Паригіна-Петку Ірина Юріївна

Керівник: ст. викл. Потапенко І.В.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доц. Курбатова І.М.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2024 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2024 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2024 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Афінна зв'язність. Коваріантне диференціювання	4
1.1 Означення та властивість афінної зв'язності	4
1.2 Аксиоматичне задання коваріантного диференціювання	10
2 Схоутени. Означення тензорів неметричності та скруту. Ви- значення неріманової афінної зв'язності за метрикою, тен- зором скруту та тензором неметричності	14
2.1 Ріманова зв'язність	15
2.2 Тензор неметричності та тензор скруту афінної зв'язності . .	17
3 Дефект зв'язності. Тензор Рімана загальної афінної зв'язно- сті	25
3.1 Дефект зв'язності	25
4 Приклади афінних зв'язностей	29
Висновки	32
Список літератури	33

ВСТУП

У роботі досліджується поняття локальної афінної зв'язності та її взаємодія з метрикою на многовиді M . У загальному випадку компоненти зв'язності $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ніякої симетрії по індексам не мають, і не пов'язані з метрикою $g_{\alpha\beta}$, оскільки ці поняття визначають на многовиді M різні геометричні операції. А саме, метрика многовиду визначає в кожній точці скалярний добуток векторів дотичного простору, а афінна зв'язність визначає коваріантне диференціювання і паралельне перенесення тензорів. Геометрія на многовиді M визначається метрикою і афінною зв'язністю. Будемо говорити, що на M задана афінна геометрія, якщо задана досить гладка метрика і афінна зв'язність, тобто задані три об'єкти (M, g, Γ) . У загальному випадку метрика і афінна зв'язність задаються довільно і є незалежними геометричними об'єктами. Тому при побудові різних моделей їх розглядають як незалежні поля, що мають різну фізичну інтерпретацію. Зокрема, у фізиці метрика описує гравітаційну взаємодію. Фізичний зміст афінної зв'язності поки незрозумілий. Причина тому, що фізична інтерпретація зв'язності залежить від конкретної моделі. Відповідні моделі складні з математичної точки зору і тому поки вивчені недостатньо добре.

В неріманових просторах за рахунок появи дефекту зв'язності збільшується кількість суттєвих компонент тензору Рімана. Наприкінці 20-х років XX століття Я. А. Схоутен проаналізував диференціальні геометрії, які відповідають певним природним умовам. Він довів, що такі геометрії описуються трьома тензорами, які називаються "схоутенами": Тензор неметричності: коваріантна похідна метричного тензора. Тензор скруту: опис симетрії коваріантної похідної. Різниця узагальнених коефіцієнтів зв'язності: для перенесення ко- та контраваріантних величин. В узагальнених диференціальних геометріях ко- і контраваріантні величини можуть переноситися за допомогою різних коефіцієнтів зв'язності. В роботі вивчається тензори скруту та неметричності, та залежність кількості компонент тензору Рімана від них.

РОЗДІЛ 1

АФІННА ЗВ'ЯЗНІСТЬ. КОВАРІАНТНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1.1 Означення та властивість афінної зв'язності

Необхідність диференціювати тензорні поля виникає у великій кількості прикладних завдань (див., наприклад, визначення дивергенції векторного поля). Першим кандидатом на цю операцію є звичайне диференціювання компонент тензорів у криволінійних координатах.

Диференціювання тензорних полів є важливою складовою багатьох прикладних задач (наприклад, при обчисленні дивергенції векторного поля). Одним з основних методів цієї операції є стандартне диференціювання компонентів тензорів у криволінійних координатах.

Розглянемо тензорне поле $T_{i_1, \dots, i_k}$. Фіксуємо криволінійну систему $x^1, \dots, x^n$ і побудуємо набір функцій $P_{\alpha; i_1, \dots, i_k} = \frac{\partial T_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^\alpha}$. Іншими словами, розглянемо частинні похідні (у звичайному сенсі) компонентів тензорного поля. Виконаємо цю операцію в кожній системі координат, тобто порівняємо в кожній системі набір компонентів $T_{i'_1, \dots, i'_k}$ та новий набір: $P_{\alpha'; i'_1, \dots, i'_k} = \frac{\partial T_{i'_1, \dots, i'_k}}{\partial x^{\alpha'}}$. Виникає запитання: ці набори утворюють тензорне поле P ? Тобто, чи ці набори будуть перетворюватися один в одного при заміні координат за тензорним законом? Перевіримо це. Під час переходу від (x) до (x') відбувається таке перетворення:

$$\begin{aligned} P_{\alpha'; i'_1, \dots, i'_k} &= \frac{\partial T_{i'_1, \dots, i'_k}}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} T_{i_1, \dots, i_k} \right) = \\ &= P_{\alpha; i_1, \dots, i_k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} + T_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$P_{\alpha' i'_1, \dots, i'_k} = P_{\alpha i_1, \dots, i_k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} + S_{\alpha' i'_1, \dots, i'_k}(T, x, x'), \quad (1.1)$$

де (1.1)

$$S_{\alpha' i'_1, \dots, i'_k} = T_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} \right).$$

При заміні $(x) \rightarrow (x')$ вираз загального вигляду $S_{\alpha' i'_1, \dots, i'_k}$ відмінний від нуля, тобто $P_{\alpha i_1, \dots, i_k}$ не перетворюються за тензорним законом.

Отже, операція звичайного диференціювання $\frac{\partial}{\partial x^i}$ - не тензорна операція, вона перетворює тензорне поле в інше тензорне поле. З отриманої формули також видно, за яких умов операція $\frac{\partial}{\partial x^i}$ є тензорною: вона буде такою при лінійних замінах $(x) \rightarrow (x')$; якщо заміна лінійна, то $S_{\alpha'; i'_1, \dots, i'_k} \equiv 0$.

Далі, з тензорної точки зору, розглянемо векторне поле T^i , віднесене до криволінійної системи (x) , і спробуємо визначити його дивергенцію за формулою: $\text{div}(T) = \sum_i \frac{\partial T^i}{\partial x^i}$, взявши її з означення дивергенції в евклідовій системі координат. Чи буде цей вираз скаляром, тобто чи залишиться він незмінним при довільній заміні $(x) \rightarrow (x')$? Перевіримо рівність: $\text{div}(T)_{(x)} = \text{div}(T)_{(x')}$, де (x) та (x') - довільні системи. Отримуємо:

$$\begin{aligned} \text{div}(T)_{(x')} &= \sum_{i'} \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T^i \right) = \\ &= \sum_i \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + R(T, x, x') = \text{div}(T)_{(x)} + R(T, x, x'), \end{aligned}$$

де $R(T, x, x') = T^i \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i}$. При довільній заміні, величина $R(T, x, x')$ відмінна від нуля, тобто запропоноване визначення дивергенції не є інваріантним. З явної формули $R(T, x, x')$ видно, що $R = 0$, наприклад, при лінійних замінах. Отже, стосовно нелінійних замін, операція $\frac{\partial}{\partial x^i}$ не є тензорною операцією.

Мета: навчитися інваріантно диференціювати тензорні поля в довільних системах координат. Це важливо, оскільки на гладких многовидах локальні координати майже завжди криволінійні. Отже, потрібно знайти операцію (позначимо її через ∇ - «набла») з наступними властивостями (будемо поки вважати, що $\mathbb{M}^n = \mathbb{R}^n$).

1) У декартових координатах в $\mathbb{R}^n$ операція повинна збігатися зі звичайним диференціюванням $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$

2) Операція ∇ повинна бути тензорною операцією, тобто якщо T - тензорне поле на $\mathbb{R}^n$ (віднесене до криволінійних координат), то і ∇T має бути тензорним полем.

Для цього розглянемо в $\mathbb{R}^n$ векторне поле T^i ; нехай (x) - декартова система координат, (x') - довільна система. Розглянемо ∇ і запишемо вимоги 1) і 2), накладені на ∇ . Тоді в системі (x) маємо:

$$(\nabla T)_j^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^j}; \quad (1.2)$$

при переході до (x') має бути:

$$(\nabla T)_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} (\nabla T)_j^i. \quad (1.3)$$

Треба знайти явний вид ∇ , тобто обчислити компоненти $(\nabla T)_{j'}^{i'}$ в довільній системі координат.

Маємо:

$$\begin{aligned} (\nabla T)_{j'}^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} T^{k'} \right) = \delta_{k'}^{i'} \delta_{j'}^{\alpha'} \frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{\alpha'}} + T^{k'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}; \\ (\nabla T)_{j'}^{i'} &= \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'} \Gamma_{j'k'}^{i'}; \quad \Gamma_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Видно, що виникли деякі функції $\Gamma_{j'k'}^{i'}$, які вимірюють відхилення ∇ від операції звичайного (евклідового) диференціювання. Знайдено дію ∇ на векторних полях.

Розглянемо тепер в $\mathbb{R}^n$ ковекторне поле T_i . Для знаходження явного виду ∇ на T_i , потрібно знову вирішити систему рівнянь:

$$(\Delta T)_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j}; \quad (\Delta T)_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} (\Delta T)_{ij}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} (\Delta T)_{j'i'} &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} T_{k'} \right) = \\ &= \delta_{i'}^{k'} \delta_{j'}^{\alpha'} \frac{\partial T_{k'}}{\partial x^{\alpha'}} + T_{k'} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^j \partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} + T_{k'} \tilde{\Gamma}_{i'j'}^{k'} \end{aligned} \quad (1.5)$$

де $\tilde{\Gamma}_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^j \partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$. Отримали $(\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} + T_{k'} \tilde{\Gamma}_{i'j'}^{k'}$; де $\tilde{\Gamma}_{i'j'}^{k'}$ - функції, що вимірюють відхилення ∇ від звичайного диференціювання на ковекторних полях.

Лема 1.1. [6] *Має місце рівність $\tilde{\Gamma}_{i'j'}^{k'} = -\Gamma_{i'j'}^{k'}$.*

Доведення. Очевидна тотожність $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} \cdot \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} = \delta_{k'}^{i'}$. Диференціюючи її по $x^{p'}$, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{p'} \partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{p''} \partial x^{i''}} \cdot \frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}} = 0,$$

звідки випливає, що $\Gamma_{p'k'}^{i'} + \tilde{\Gamma}_{p'k'}^{i'} = 0$.

Лемма доведена. $\square$

Отже, дія оператора ∇ на векторні та ковекторні поля у криволінійних координатах $\mathbb{R}^n$ має вигляд:

$$(\nabla T)_{j'}^{i'} = \frac{\partial T_{j'}^{i'}}{\partial x^{j'}} + T_{k'}^{i'} \Gamma_{j'k'}^{i'}; \quad (\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial T_{i'j'}}{\partial x^{j'}} - T_{k'} \Gamma_{i'j'}^{k'}. \quad (1.6)$$

Розглянемо тепер дію оператора ∇ на операторних полях, тобто на полях типу $(1, 1)$. Для тензора другого рангу типу $(1,1)$ коваріантна похідна має вигляд

$$(\Delta T)_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial x^k} (T_j^i); \quad (1.7)$$

$$(\Delta T)_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} T_{p'}^{\alpha'} \right) =$$

Більш детально формула виводиться так:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} \frac{\partial T_{p'}^{\alpha'}}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^k} + T_{p'}^{\alpha'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{q'} \partial x^{\alpha'}} \cdot \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} + \\ &+ T_{p'}^{\alpha'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}} (T_{j'}^{i'}) + T_{j'}^{p'} \Gamma_{p'k'}^{i'} - T_{j'}^{p'} \Gamma_{j'k'}^{p'}. \end{aligned}$$

Таким чином, знайдено дію ∇ на T_j^i .

Теорема 1.1. *Нехай $\mathbb{M}^n = \mathbb{R}^n$, (x') - довільні криволінійні координати, (x) - декартові координати, . Тоді на $\mathbb{R}^n$ існує тензорна операція ∇ , що*

задається на довільному тензорному полі $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k}$ формулою:

$$\begin{aligned} (\nabla T)_{j'_1 \dots j'_p; \alpha'}^{i'_1 \dots i'_k} = \\ = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} (T_{j'_1 \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_k}) + \sum_{s=1}^k T_{j'_1 \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_s = q' \dots i'_k} \Gamma_{q' \alpha'}^{i'_s} - \sum_{s=1}^p T_{j'_1 \dots j'_s = q' \dots j'_k}^{i'_1 \dots i'_p} \Gamma_{j'_s \alpha'}^{q'} , \end{aligned} \quad (1.8)$$

де функції $\Gamma_{j'q'}^{i'}$ перетворюються при заміні $(x') \rightarrow (x'')$ за правилом:

$$\Gamma_{j''k''}^{i''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \Gamma_{j'k'}^{i'} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j''} \partial x^{k''}} . \quad (1.9)$$

Доведення. Вигляд ∇ на полі $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k}$ визначається повторенням обчислень для векторних, ковекторних та операторних полів, зроблених вище, стільки разів, в залежності який ранг має поле $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k}$. Далі розглянемо закон перетворення $\Gamma_{j'k'}^{i'}$:

$$\Delta_{k'} T^{i'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{p'} \Gamma_{p'k'}^{i'} ;$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \Delta_{k''} T^{i''} &= \frac{\partial T^{i''}}{\partial x^{k''}} + T^{p''} \Gamma_{p''k''}^{i''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k''}} + T^{i'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} + \\ &+ T^{p'} \frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}} \Gamma_{p''k''}^{i''} = \Delta_{k''} T^{i''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \cdot \Delta_{k'} T^{i'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{p'} \Gamma_{p'k'}^{i'} \right) . \end{aligned}$$

Порівнюючи, отримуємо:

$$T^{p'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \Gamma_{p'k'}^{i'} = T^{p'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} + T^{p'} \frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}} \Gamma_{p''k''}^{i''} . \quad (1.10)$$

Оскільки це тотожність має місце для будь-якого поля T^i , то

$$\Gamma_{p''k''}^{i''} = \Gamma_{p'k'}^{i'} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} - \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} \quad (1.11)$$

В силу леми 1.1

$$\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}} \cdot \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} = - \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{k''} \partial x^{i''}} \cdot \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} = - \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{p''} \partial x^{k''}} \cdot \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} . \quad (1.12)$$

Теорему доведено. $\square$

Для випадку, коли $M^n = \mathbb{R}^n$, доведено теорему існування «тензорного диференціювання». Це дозволяє у явному вигляді обчислити $\Gamma_{j'k'}^{i'}$, що вимірюють відхилення ∇ від евклідового диференціювання $\frac{\partial}{\partial x^i}$ а саме:

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} = - \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Використовувалося те, що в R^n існують відокремлені привілейовані координати - декартові, в яких операція ∇ збігається зі звичайним диференціюванням. Тепер перейдемо до розгляду довільних гладких многовидів. Нову операцію ∇ визначимо аксіоматично, базуючись на властивостях, визначених вище для $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.1. Будемо говорити, що на гладкому многовиді M^n задана операція **коваріантного диференціювання** ∇ , якщо для кожного гладкого атласу в кожній карті заданий набір гладких функцій Γ_{jk}^i , які перетворюються при заміні координат згідно з законами перетворення:

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{jk}^i + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \quad (1.13)$$

Тоді маємо, що ∇ задається формулою:

$$\begin{aligned} (\Delta T)_{j_1 \dots j_p; \alpha}^{i_1 \dots i_k} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (T)_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k} + \sum_{s=1}^k T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots; i_s=q; \dots i_k} \Gamma_{q\alpha}^{j_s} - \\ &\quad - \sum_{s=1}^p T_{j_1 \dots; j_s=q; \dots j_p}^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{j_s \alpha}^q \end{aligned} \quad (1.14)$$

Існування таких многовидів M^n , на яких можна ввести ∇ , доведено вище. Для $M^n = \mathbb{R}^n$, де Γ_{jk}^i задаються отриманими вище формулами. Важливо зауважити, що набір Γ_{jk}^i не утворює тензора. Ці функції називаються **символами Крістоффеля**. Їх закони перетворення відповідають тензорним, наприклад, у випадку, коли заміна $(x) \rightarrow (x')$ лінійна. У визначенні ∇ система (x) не є декартовою системою, оскільки події розвиваються вже у довільному M^n . Іноді кажуть, що символи Крістоффеля (або ∇) задають

на M^n афінну зв'язність.

1.2 Аксіоматичне задання коваріантного диференціювання

Зв'язність, яка була введена в $\mathbb{R}^n$, є симетричною. Це впливає з формул, що задають ∇ в термінах частинних похідних. Символи Крістофеля, на довільному $\mathbb{M}^n$ вже не мають вигляд других частинних похідних від координат. Така формула виникає, коли на M^n існують локально евклідові координати. ∇ представляється у вигляді сукупності операцій ∇_k - коваріантних диференціювань (за окремими координатами), якщо є фіксована система координат,

Теорема 1.2. [4] Коваріантне диференціювання (зв'язність) ∇ задовольняє співвідношенням:

- 1) операція $\nabla = \{\nabla_k\}$ - лінійна;
- 2) набір функцій $\nabla_k T_{(j)}^{(i)} = (\nabla T)_{k;(j)}^{(i)}$ утворює тензорне поле, для довільного тензорного поля $T_{(j)}^{(i)}$;
- 3) якщо тензорне поле скалярне, тобто гладка функція f на $\mathbb{M}^n$, то:

$$\nabla f = \{\nabla_k f\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\} = \text{grad } f; \quad (1.15)$$

- 4) на векторних полях T_i операція ∇ має вигляд:

$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma_{\alpha k}^i. \quad (1.16)$$

На ковекторних полях T_i операція ∇ має вигляд:

$$\nabla_k T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T^\alpha \Gamma_{ik}^\alpha; \quad (1.17)$$

- 5) Операція ∇ задовольняє формулі Лейбніца:

$$\nabla_k \{T_{(j)}^{(i)} \cdot P_{(\beta)}^{(\alpha)}\} = \left(\nabla_k T_{(j)}^{(i)} \right) \cdot P_{(\beta)}^{(\alpha)} + T_{(j)}^{(i)} \cdot (\nabla_k P_{(\beta)}^{(\alpha)}), \quad (1.18)$$

де $T_{(j)}^{(i)}$ та $P_{(\beta)}^{(\alpha)}$ - довільні тензорні поля.

Доведення. Властивості 1)-4) впливають безпосередньо з визначення ∇ . Залишилося довести 5). Розглянемо найпростіший випадок: одне з полів $T_{(j)}^{(i)}$, $P_{(\beta)}^{(\alpha)}$ - скалярне. Тоді 5) випливає із формули Лейбніца для скалярних функцій. Нехай тепер покладемо поля T та P , як векторні поля T^i , P^j . Тоді маємо рівність:

$$\begin{aligned} \nabla_k(T^i \cdot P^j) &= \frac{\partial}{\partial x^k}(T^i \cdot P^j) + T^\alpha P^j \Gamma_{\alpha k}^i + T^i P^\alpha \Gamma_{\alpha k}^j = \\ &= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma_{\alpha k}^i \right) P^j + T^i \left(\frac{\partial P^j}{\partial x^k} + P^\alpha \Gamma_{\alpha k}^j \right) = (\nabla_k T^i) P^j + T^i (\nabla_k P^j). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Теорема 1.3. Нехай на $\mathbb{M}^n$ задана операція $\nabla = \{\nabla_k\}$, яка задовольняє 1-5 (див. Теорема 1.2). Тоді має місце тотожність, для довільного тензорного поля $T_{(j)}^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \nabla_k T_{(j)}^{(i)} &= \nabla_k T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_\alpha} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} (T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_\alpha}) + \sum_{q=1}^{\alpha} T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_{q-1} i_{q+1} \dots i_\alpha} \Gamma_{rk}^{i_q} - \sum_{s=1}^p T_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_p}^{i_1 \dots i_\alpha} \Gamma_{jsk}^{\omega}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

тобто, можна розуміти, що ∇ - коваріантне диференціювання у сенсі наданого визначення. Властивості 1)-5) однозначно задають операцію ∇ , тобто її можна вводити аксіоматично за допомогою властивостей 1)-5).

Доведення. Дія ∇ вже визначено для скалярних функцій та тензорів 1-го рангу (див. формули 1)-4). Залишається визначити ∇ на тензорах довільного типу. Доведемо наступну лему. Лема: Будь-яке тензорне поле можна розкласти на лінійну комбінацію (з гладкими коефіцієнтами) добутків тензорних полів 1-го рангу.

Насправді, будь-яке тензорне поле є полілінійним відображенням векторних полів у скалярні поля.

$$T = a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} : (T_*)^q \times (T^*)^k \rightarrow R, \quad (1.21)$$

де e_{i_α} , e^{i_α} - поля 1-го рангу. Це визначення інваріантне, щодо вибору коор-

динатної системи (в іншій системі розкладання зміниться). В (1.31) $a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k}$ - гладкі функції. Фіксуємо будь-яку систему $x^1, \dots, x^n$ і нехай $\{T_{i_s}^\alpha\}$ (де i_s - фіксовано) - набір компонент тензора e_{i_s} ; відповідно $\{T_{\beta}^{j_s}\}$ (де j_s - фіксовано) - набір компонент e^{j_s} . Записав T в цій системі, отримаємо:

$$T = a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k} T_{i_1}^{\alpha_1} \dots T_{i_k}^{\alpha_k} T_{\beta_1}^{j_1} \dots T_{\beta_q}^{j_q} \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}} \right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\beta_q};$$

тобто,

$$T = T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}} \right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\beta_q},$$

де,

$$T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k} T_{i_1}^{\alpha_1} \dots T_{i_k}^{\alpha_k} T_{\beta_1}^{j_1} \dots T_{\beta_q}^{j_q}.$$

Будь-яке полілінійне відображення повністю визначається коефіцієнтами щодо базису. Повернемося до доведення формули дії ∇ на $T_{(j)}^{(i)}$. Для простоти розглянемо випадок тензора 2-го рангу (для довільного поля викладення аналогічні). З огляду на лінійність ∇ формулу 5) достатньо перевірити на мономах $T_{ij} = \alpha(x)T_i P_j$, де $\alpha(x)$ - гладка функція. Обчислимо $\nabla_k(T_{ij})$ у припущенні, що $\nabla_k(T_i)$ вже відомі (див. 4)). За формулою Лейбніца 5) маємо:

$$\nabla_k(T_{ij}) = \nabla_k(\alpha(x)T_i P_j) = \frac{\partial}{\partial x^k}(T_{ij}) - \Gamma_{ik}^p T_{pj} - \Gamma_{jk}^p T_{ip}, \quad (1.22)$$

що й потрібно. $\square$

Означення 1.2. Нехай ∇ - афінна зв'язність на $\mathbb{M}^n$. Локальні координати $x^1, \dots, x^n$ називаються евклідовими для ∇ , якщо в них $\Gamma_{jk}^i(x) = 0$.

Такі координати можуть і не існувати, наприклад, якщо ∇ не симетрична. Справді, якщо ∇ несиметрична, то Ω_{jk}^i відмінна від нуля. Якби існували координати, у яких $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$, то в цій же системі звернувся б у нуль і Ω_{jk}^i , а тоді він був би тотожним нулем у будь-якій системі через тензорність.

Важливо, що поняття коваріантного диференціювання (тобто афінної зв'язності) не використовує поняття ріманової метрики, ми користувалися лише наявністю гладкої структури на $\mathbb{M}^n$. Тому, ріманова метрика і зв'язність це дві різні структури на $\mathbb{M}^n$. Зокрема, евклідові координати для афінної зв'язності та евклідові координати для метрики g_{ij} (тобто такі, в яких $g_{ij} = \delta_{ij}$), це - різні поняття, тож у загальному випадку ріманова метрика та частинне диференціювання не визначають один одного.

Нехай на $\mathbb{M}^n$ фіксована метрика g_{ij} . Тоді з множини всіх афінних симетричних зв'язностей можна виділити одну (і тільки одну!) зв'язність, «узгоджену» з цією метрикою і повністю обумовлену нею. Це - важливий клас зв'язностей, які називаються **рімановими зв'язностями**.

РОЗДІЛ 2

СХОУТЕНИ. ОЗНАЧЕННЯ ТЕНЗОРІВ НЕМЕТРИЧНОСТІ ТА СКРУТУ. ВИЗНАЧЕННЯ НЕРІМАНОВОЇ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ ЗА МЕТРИКОЮ, ТЕНЗОРОМ СКРУТУ ТА ТЕНЗОРОМ НЕМЕТРИЧНОСТІ

Нехай в скінченномірному рімановому просторі задана метрика

$$g_{ij} = (\bar{r}_i \bar{r}_j), \quad i, j = \overline{1, n} \quad \bar{e}_i = \bar{r}_i$$

Коефіцієнти афінної зв'язності (символи Крістоффеля 1 і 2 роду) визначаються, як коефіцієнти розкладання кобазиса і базиса по самому базису. Отримуємо зв'язність симетричну за нижніми індексами. Ця зв'язність має властивість, що коваріантна похідна метричного тензора дорівнює нулю. Кажуть, що зв'язність узгоджена з метрикою.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_j}{\partial x^j} &= \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^h \bar{e}_h = \Gamma_{ij,h} e^{-h} \\ \Gamma_{ij}^h &= \Gamma_{ji}^h; \quad g_{ij,k} = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} S_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ji}^h \equiv 0 \\ g_{ij,k} = 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \diagdown \\ \text{ріманова геометрія} \end{array} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Gamma_{ij}^h = g^{hk} \Gamma_{ij,k} = g^{hk} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g}{\partial x^{ij}} \right) - \text{ріманова зв'язність} \quad (2.2)$$

Закон перетворення ріманової зв'язності:

$$\Gamma_{i'j'}^{h'} = \frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} \Gamma_{ij}^h \quad (2.3)$$

2.1 Ріманова зв'язність

Нехай Γ_{jk}^i – афінна зв'язність на $\mathbb{M}^n$, а g_{ij} – метрика ∇ .

Означення 2.1. Симетрична афінна зв'язність $\nabla = \{\Gamma_{jk}^i\}$ називається рімановою або узгодженою з метрикою g_{ij} , якщо $\nabla(g_{ij}) \equiv 0$.

Спираючись на тензорність ∇ , тотожність $\{\nabla_k(g_{ij}) = 0\}$ справедлива для будь-якої системи координат, завдяки тензорним властивостям. Щодо ріманової зв'язності, тензор метрики g_{ij} можна вважати постійним, адже його коваріантна похідна дорівнює нулю. Звідси випливає, що для будь-якого тензорного поля $T_{(q)}^{(p)}$ справедливе правило Лейбніца: $\nabla_k(g_{ij}T_{(q)}^{(p)}) \equiv g_{ij}\nabla_k(T_{(q)}^{(p)})$, (див. формулу Лейбніца 5). Зокрема, операція коваріантної похідної ∇ комутує з операціями підняття та опускання індексів. Доведемо існування та єдиність ріманової зв'язності. Далі буде доведено, що для будь-якої метрики g_{ij} на $\mathbb{M}^n$ існує єдина ріманова зв'язність.

Теорема 2.1. *Нехай g_{ij} метрика задана на $\mathbb{M}^n$. Тоді існує і єдина симетрична афінна зв'язність, узгоджена з g_{ij} , причому:*

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (2.4)$$

Доведення. Припустимо, що ріманова зв'язність для метрики g_{ij} існує. Доведемо, що вона єдина. Згідно з означенням ріманової зв'язності: $\nabla_k(g_{ij}) = 0$. Так як ∇ задається Γ_{jk}^i , то достатньо довести, що з цієї системи однозначно визначаються компоненти ріманової зв'язності Γ_{jk}^i як функції g_{ij} і $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}$ маємо: $\nabla_k g_{ij} = 0$, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j}\Gamma_{ik}^\alpha + g_{\alpha i}\Gamma_{jk}^\alpha$. Циклічно переставляючи індекси у другому рівнянні, отримуємо ще два рівняння, які також описують зв'язок:

$$\begin{aligned} & + \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{j;ik} + \Gamma_{i;jk} \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{i;kj} + \Gamma_{k;ij} \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{k;ji} + \Gamma_{j;ki} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (ijk) \\ (kij) \\ (jki) \end{array} \end{aligned} \quad (2.5)$$

де $\Gamma_{i;kj} = g_{i\alpha}\Gamma_{kj}^\alpha$. Складаючи перші два рівняння системи, отриманої в

попередньому пункті і віднімаючи із суми третє, в результаті отримуємо:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 2\Gamma_{i,jk} = 2g_{i\alpha}\Gamma_{jk}^{\alpha}. \quad (2.6)$$

(Нагадаємо: $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$.) Далі маємо,

$$\Gamma_{jk}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right). \quad (2.7)$$

В результаті були отримані формули, які описують компоненти ріманової зв'язності Γ_{jk}^{α} через компоненти метрики g_{ij} і їх похідні.

Завдяки знайденим формулам можна зробити висновок, що для заданої метрики g_{ij} існує лише один розв'язок системи рівнянь, що описує Γ_{jk}^{α} . Для доведення існування, достатньо визначити Γ_{jk}^i за допомогою одержаних вище формул. Повторюючи дії у зворотному порядку, одержуємо: $\nabla_k(g_{ij}) \equiv 0$. Теорема доведена.

Зауваження 2.1. Припустимо, що на $\mathbb{M}^n$ існує система координат $x^1, \dots, x^n$, де $g_{ij} = \delta_{ij}$. Існування такої системи еквівалентне існуванню системи, в якій (g_{ij}) стає постійною матрицею, не залежною від точки всередині деякого околу. За допомогою лінійних перетворень цю матрицю можна привести до виду δ_{ij} (у всіх точках околу одночасно). Тому систему координат, де матриця метричного тензора стала одиничною, можна назвати евклідовою. Зважаючи на це зауваження, розглянемо ріманову зв'язність. Локальна система координат є евклідовою з точки зору зв'язності тоді і тільки тоді, коли в цій системі, у деякому околі, $\{\Gamma_{jk}^i \equiv 0\}$.

Теорема 2.2. Система координат - евклідова з погляду ріманової зв'язності, що відповідає g_{ij} , тоді і лише тоді, коли ця система евклідова з погляду самого g_{ij} (тобто g_{ij} локально постійний в деякому околі).

Доведення. Дійсно, якщо g_{ij} локально постійний (сталий), то в силу теореми 1.4 маємо: $\{\Gamma_{jk}^i \equiv 0\}$, тобто система є евклідовою відносно ріманової зв'язності ∇ . Зворотньо, якщо $\{\Gamma_{jk}^i = 0\}$, то згідно з теоремою 1 маємо: $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{k\alpha j}\Gamma_{jk}^{\alpha} - g_{k\alpha i}\Gamma_{jk}^{\alpha} = 0$, тобто g_{ij} є постійним в цій системі координат, що й потрібно довести. $\square$

Розглянемо гладку гіперповерхню $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, задану графіком: $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$; Нехай $P_0 \in V^{n-1}$ - довільна точка. Нехай $T_{P_0}(V^{n-1})$ паралельна до площини $\mathbb{R}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})$, тобто $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x^i} = 0$, $1 \leq i \leq n-1$. Вже було обчислено вид g_{ij} у точці P_0 відносно спеціальної системи координат. Маємо: $g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j}$. Звідси: $\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_{P_0} = 0$, тобто $\Gamma_{jk}^i(P_0) = 0$, де ∇ - ріманова зв'язність, узгоджена з g_{ij}). Умова $\Gamma_{jk}^i = 0$ виконується лише в точці P_0 . В околі цієї точки Γ_{jk}^i не повинна бути нульовою.

2.2 Тензор неметричності та тензор скруту афінної зв'язності

Чи можна скласти зв'язність по-іншому?

Зазвичай компоненти зв'язності $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ не мають симетрії за індексами і не пов'язані з метрикою $g_{\alpha\beta}$, оскільки ці поняття описують на многовиді $\mathbb{M}$ різні геометричні операції. Тобто, метрика многовиду визначає у кожній точці скалярний добуток векторів із дотичного простору. Афінна зв'язність, з іншого боку, визначає коваріантне диференціювання та паралельне перенесення тензорів. Разом метрика та афінна зв'язність визначають геометрію на многовиді $\mathbb{M}$. Будемо казати, що у $\mathbb{M}$ задана **афінна геометрія**, якщо задані досить гладка метрика і афінна зв'язність. Таким чином, афінна геометрія описується трьома об'єктами: $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$.

Зауваження 2.2. В загальному випадку метрика та афінна зв'язність задаються довільним чином і є незалежними геометричними об'єктами. Це дозволяє розглядати їх як незалежні поля з різним фізичним змістом при побудові фізичних моделей.

Сучасна наука вважає, що метрика визначає гравітаційну взаємодію. Фізичний зміст афінної зв'язності поки не зрозумілий. Це пов'язано з тим, що фізична інтерпретація зв'язності залежить від конкретної моделі, а самі моделі - складні з математичної точки зору і потребують подальшого вивчення. $\square$

Визначимо тензор **скруту**:

Означення 2.2. Тензор скруту на многовиді в локальній системі координат є антисиметричною частиною афінної зв'язності

$$S_{ikm} = \frac{1}{2}(\Gamma_{ikm} - \Gamma_{imk})$$

або

$$S_{km}^i = \frac{1}{2}(\Gamma_{km}^i - \Gamma_{mk}^i) \quad (2.8)$$

Із закону перетворення зв'язності бачимо, що скрут (2.8) є тензором типу (1, 2).

Визначимо **тензор неметричності**:

Означення 2.3. Якщо на многовиді задана афінна геометрія, то можна побудувати тензор неметричності Q_{mki} .

Він дорівнює коваріантною похідною від метрики.

$$Q_{mki} = g_{ki;m}. \quad (2.9)$$

Тензор неметричності, за побудовою, симетричний щодо перестановки двох останніх індексів

$$Q_{mki} = Q_{mik}$$

Зауважимо, що для визначення неметричності необхідні обидва об'єкти: і метрика, і зв'язність

Щоб з'ясувати зміст тензора неметричності, розглянемо, як змінюється квадрат приросту радіус-вектора $d\vec{r}^2$ (відрізок AB – див. Рис. 1) при перенесенні з точки A в нескінченно близьку точку C (нове положення відрізка CD), якщо координати кінців відрізка AB відрізняються на величини δx^α :

$$(d\vec{r}^2)_{(AB)} = g_{\alpha\beta}(A)\delta x^\alpha\delta x^\beta. \quad (2.10)$$

Точка D відповідає наявності двох зміщень $dx^\alpha + \delta x^\alpha$.

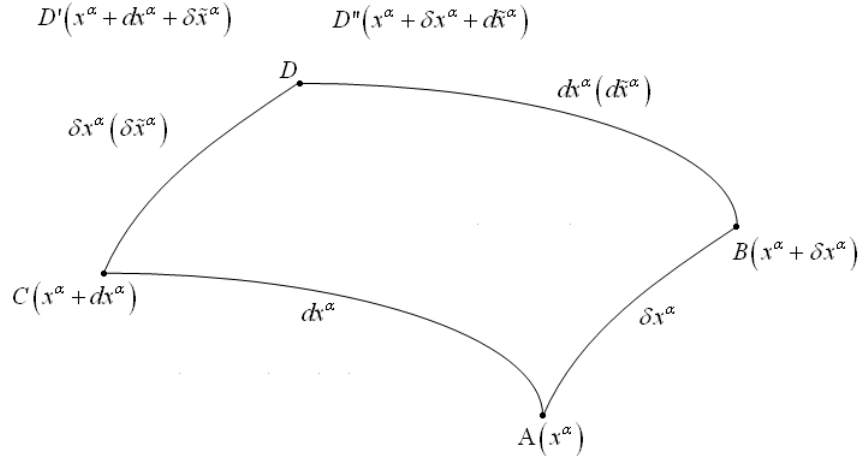


Рис. 2.1. Перенесення приросту δx^α з точки A в точку C і перенесення приросту dx^α з точки A в точку B

Будемо вимагати, щоб при нескінченно малому перенесенні вздовж AC с компонентами dx^α в новому положенні CD приріст δx^α прийняв такі значення

$$\delta \tilde{x}^\alpha = \delta x^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha dx^\beta \delta x^\gamma, \quad (2.11)$$

щоб квадрат приросту радіус-вектора

$$(d\vec{r}^2)_{(CD)} = g_{\alpha\beta}(C) \delta \tilde{x}^\alpha \delta \tilde{x}^\beta \quad (2.12)$$

при розкладі в ряд Тейлора, з точністю до нескінченно малих вкладів I порядку, вміщував тільки тензорні вклади (включаючи коваріантну похідну $g_{\alpha\beta;\mu}$):

$$\begin{aligned} (d\vec{r}^2)_{(CD)} &= \\ &= \left(g_{\alpha\beta}(A) + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} dx^\mu \right) (\delta x^\alpha - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha dx^\nu \delta x^\sigma) (\delta x^\beta - \Gamma_{\gamma\rho}^\beta dx^\gamma \delta x^\rho) \approx \\ &\approx (g_{\alpha\beta}(A) g_{\alpha\beta;\mu} dx^\mu) \delta x^\alpha \delta x^\beta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$g_{\alpha\beta;\mu} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu g_{\nu\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^\nu g_{\alpha\nu}. \quad (2.14)$$

З (2.13) видно, що **тензор неметричності** $Q_{\alpha\beta\mu}$ (2.9) **встановлює зміну квадрата приросту радіус-вектора** $d\vec{r}^2$ при перенесенні на величину dx^μ :

$$Q_{\alpha\beta\mu}dx^\mu\delta x^\alpha\delta x^\beta = (d\vec{r}^2)_{(CD)} - (d\vec{r}^2)_{(AB)}. \quad (2.15)$$

В метричних просторах тензор неметричності дорівнює нулю:

$$Q_{\alpha\beta\mu} = g_{\alpha\beta;\mu} = 0, \quad (2.16)$$

тобто метричний тензор в них є коваріантно сталим.

Перейдемо до знаходження афінних зв'язностей

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (2.17)$$

Перепозначаючи в (2.14) індекси отримаємо:

$$g_{\alpha\mu;\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu g_{\nu\mu} - \Gamma_{\mu\beta}^\nu g_{\alpha\nu}, \quad (2.18)$$

$$g_{\beta\mu;\alpha} = \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\nu g_{\nu\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu g_{\beta\nu} \quad (2.19)$$

Якщо (2.18) та (2.19) почленно відняти від отриманого виразу (2.14), будемо мати:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta\mu} + Q_{\alpha\mu\beta} - Q_{\beta\mu\alpha} = & 2\{\alpha\beta\mu\} + (\Gamma_{\beta\alpha}^\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu)g_{\nu\mu} + \\ & + (\Gamma_{\mu\alpha}^\nu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu)g_{\beta\nu} - (\Gamma_{\mu\beta}^\nu + \Gamma_{\beta\mu}^\nu)g_{\alpha\nu}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $\{\alpha\beta\mu\}$ – символи Крістоффеля 1 роду, що визначаються формулою

$$\{\alpha\beta\mu\} = \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}. \quad (2.21)$$

Введемо позначення:

$$S_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \Gamma_{\beta\alpha}^\nu). \quad (2.22)$$

Не важко переконатися, що цей об'єкт представляє собою тензор III рангу, антисиметричний за нижніми індексами:

$$S_{\alpha\beta}^{\nu} = -S_{\beta\alpha}^{\nu}. \quad (2.23)$$

$S_{\alpha\beta}^{\nu}$ і є **тензором скруту**, згідно з означенням 1. Не обмежуючи загальності міркувань, з метою прозорості результатів, будемо вважати, що в (2.13) метричний тензор є коваріантно сталим $g_{\alpha\beta;\mu} = 0$, і розглянемо перенесення зміщення AC вздовж зміщення AB – див. Рис 2.1. В цьому випадку замість δx^{α} (2.11) розглянемо перенесення dx^{α} :

$$d\tilde{x}^{\alpha} = dx^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \delta x^{\beta} dx^{\gamma}. \quad (2.24)$$

Різниця коваріантних диференціалів для приросту координати x^{α} в точці D при використанні (2.11) $D' = x^{\alpha} + dx^{\alpha} + \delta\tilde{x}^{\alpha}$ и використанні (2.24) $D'' = x^{\alpha} + \delta x^{\alpha} + d\tilde{x}^{\alpha}$

$$Dx^{\alpha}(D') - Dx^{\alpha}(D'') = (\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}) \delta x^{\beta} dx^{\gamma}. \quad (2.25)$$

Оскільки ліва частина цього виразу є вектором, а в правій є згортки векторів δx^{β} та dx^{γ} , то різниця $\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ є тензор III рангу. Простір, в якому тензор скруту відінний від нуля, називається **простором зі скрутом**. В цьому просторі ліве відрізняється від правого.

Розглянемо геометричний сенс антисиметричної частини узагальнених коефіцієнтів зв'язності. Для цього паралельно перенесемо мале зміщення AC уздовж малого зміщення AB згідно з формулою

$$d\tilde{x}^{\mu} = dx^{\mu} - K_{\alpha\beta}^{\mu} \delta x^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (2.26)$$

У результаті отримаємо нове зміщення BD' , де точка D' має координати

$$D'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} + \delta\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} + dx^{\mu} - K_{\alpha\beta}^{\mu} \delta x^{\alpha} dx^{\beta}, \quad (2.27)$$

де x^{μ} - координати точки A (див. рис. 4.2). Враховуючи, що координати

точки D , яку отримали у результаті першого перенесення, мають значення:

$$D^\mu = x^\mu + dx^\mu + \delta\tilde{x}^\mu = x^\mu + dx^\mu + \delta x^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta, \quad (2.28)$$

компоненти малого зміщення мають вигляд:

$$D^\mu - D'^\mu = (K_{\alpha\beta}^\mu - K_{\beta\alpha}^\mu) dx^\beta \delta x^\alpha \equiv 2S_{\alpha\beta}^\mu dx^\beta \delta x^\alpha, \quad (2.29)$$

де величина

$$S_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}(K_{\alpha\beta}^\mu - K_{\beta\alpha}^\mu) \quad (2.30)$$

є тензором. Ця величина називається **тензором скруту**.

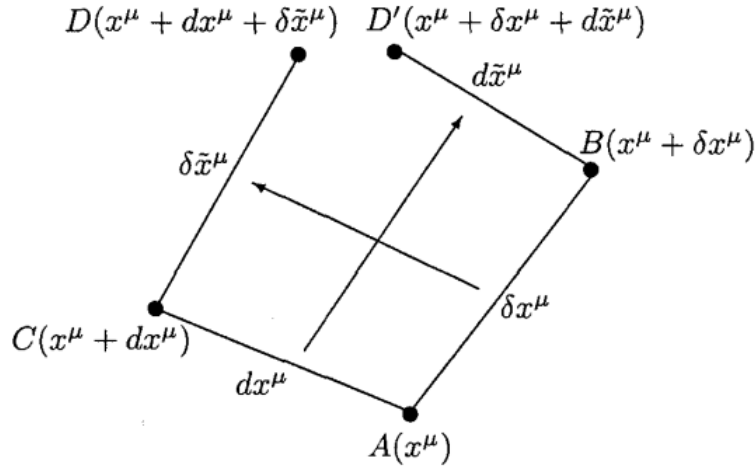


Рис. 2.2.: Геометричний сенс тензора скруту

Як показано на Рис. 2.2., тензор скруту відповідає за порушення правила паралелограма.

Таким чином, афінна зв'язність $\Gamma_{\alpha\beta\mu}$ в лінійних просторах разом з символами Крістоффеля $\{\alpha\beta\mu\}$ містить також тензор скруту $S_{\alpha\beta}^\nu$ і тензор неметричності $Q_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \{\alpha\beta\mu\} + S_{\mu\alpha\beta} - S_{\mu\beta\alpha} - S_{\alpha\beta\mu} - \frac{1}{2}(Q_{\mu\alpha\beta} - Q_{\mu\beta\alpha} + Q_{\alpha\beta\mu}). \quad (2.31)$$

Як показав Схоутен [2], різні гладкі лінійні простори, для яких при перенесенні на нескінченно близьку відстань dx^i вектори перетворюються в відповідності з $\delta A_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma dx^\beta$ або $\delta B^\alpha = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha B^\mu dx^\nu$, характеризується не

більш, ніж трьома тензорами III рангу: тензором неметричності $Q_{\alpha\beta\gamma}$ та двома тензорами скруту (різними для ко- и контраваріантних векторів). В таких просторах при перенесенні на нескінченно близьку відстань не тільки по-різному змінюються напрями ко- и контраваріантних векторів, але й змінюються довжини векторів. Оскільки кожний з перерахованих тензорів III рангу може бути нульовим, виродженим (прямим добутком вектора на тензор II рангу) або довірним, всього матимемо $3^3 = 27$ різних типів лінійних просторів. Зокрема, коли всі три тензори дорівнюють нулю, тобто коли афінна зв'язність представляє собою символи Крістоффеля

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \{\alpha\beta\mu\}, \quad (2.32)$$

геометрія, що описує простір, називається **рімановою**, а самий простір – **рімановим**.

Отже, Якщо задати (g_{ij}, Γ_{ij}^h) , тоді тензор $Q_{mki} = g_{ki;m}$ визначається однозначно за метрикою і зв'язністю. Тобто для визначення тензора неметричності необхідні обидва об'єкти: і метрика, і зв'язність.

Також, якщо задати (g_{ij}, Γ_{ij}^h) , тоді тензорне поле S_{km}^i яке антисиметричне за нижніми двома індексами, визначається однозначно за зв'язністю.

Таким чином, за заданою метрикою і афінною зв'язністю побудовано два тензорних поля: тензор скруту і тензор неметричності.

Неважко підрахувати число незалежних компонент в зв'язності, і тензорів скруту і неметричності:

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma] = n^3, \quad [S_{\alpha\beta}^\gamma] = \frac{n^2(n-1)}{2}, \quad [Q_{\alpha\beta\gamma}] = \frac{n^2(n+1)}{2} \quad (2.33)$$

Звідси випливає, що сумарна кількість незалежних компонент тензорів скруту і неметричності дорівнює кількості компонент афінної зв'язності.

Зауважимо, що доданки з метрикою і тензором неметричності в (2.31) мають однаковий порядок індексів і знаків, а доданки зі скрутом при такому самому порядку індексів відрізняються знаками. Таким чином, для того, щоб на многовиді M задати афінну геометрію, необхідно і достатньо задати три тензорних поля: **метрику, скрут і неметричність**. Відзначимо

ще раз, що всі три об'єкта можна задати незалежним чином, і в різних математичних і фізичних моделях їх потрібно розглядати як незалежні змінні.

$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$, знаходимо, що коваріантна похідна від оберненого метричного тензору метрики,

$$\nabla_{\alpha}g^{\beta\gamma} = -Q_{\alpha}^{\beta\gamma}, \quad -Q_{\alpha}^{\beta\gamma} := g^{\beta\delta}g^{\gamma\epsilon}Q_{\alpha\delta\epsilon}$$

Відрізняється знаком від (2.9). Якщо тензор неметричності відмінний від нуля, то операції підйому і опускання індексів не комутує з коваріантним диференціюванням.

Можна сказати, що для задання афінної геометрії на многовиді необхідно задати метрику і афінну зв'язність.

РОЗДІЛ 3

ДЕФЕКТ ЗВ'ЯЗНОСТІ. ТЕНЗОР РІМАНА ЗАГАЛЬНОЇ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

3.1 Дефект зв'язності

Означення 3.1. Дефектом зв'язності називається різниця між коефіцієнтами паралельного перенесення довільної зв'язності та зв'язності Леві - Чевіти. Використовуючи (2.31) , більш детально дефект зв'язності набуває вигляду

$$D_{klm} = {}'\Gamma_{klm} - \Gamma_{klm}, \quad (3.1)$$

де ${}'\Gamma_{klm}$ - коефіцієнти паралельного перенесення довільної зв'язності, а Γ_{klm} - коефіцієнти зв'язності Леві - Чевіти. Виразимо ${}'\Gamma_{klm}$ через метричний тензор, маємо:

$${}'\Gamma_{klm} = g^{kn} {}'\Gamma_{nlm}, \quad {}'\Gamma_{klm} = \Gamma_{klm} + D_{klm}, \quad D_{klm} = s_{klm} + q_{klm},$$

Запишемо стандартний спосіб обчислення символу Крістоффеля в рімановій геометрії, через компоненти метричного тензора g_{mn} та їхні частинні похідні.

$$\Gamma_{np}^k = \frac{1}{2}g^{km} \left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{np}}{\partial x^m} \right),$$

Тензор скруту та тензор неметричності з (2.32) мають вигляд:

$$s_{klm} = S_{klm} + S_{lmk} - S_{mkl}, \quad q_{mkl} = \frac{1}{2}(Q_{klm} - Q_{lmk} + Q_{mkl}),$$

Тензор скруту S_{lkm} визначається як антисиметрична частина зв'язності:

$$S_{lkm} = \frac{1}{2}(\Gamma_{lkm} - \Gamma_{lmk}),$$

Підставляючи визначення у початкове рівняння дефекту зв'язності отримаємо детальний вигляд дефекту зв'язності:

$$D_{klm} = S_{klm} - S_{lkm} + S_{mkl} + \frac{1}{2}(Q_{klm} + Q_{lkm} - Q_{mkl}) \quad (3.2)$$

Загальний вигляд тензора Рімана з урахуванням дефекту зв'язності (3.2):

$${}'R_{ijk}^h = \frac{\partial {}'\Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial {}'\Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + {}'\Gamma_{ik}^\alpha {}'\Gamma_{\alpha j}^h - {}'\Gamma_{ij}^\alpha {}'\Gamma_{\alpha k}^h; \quad (3.3)$$

З (3.1), виражаємо ${}'\Gamma_{ij}^h$. Маємо:

$${}'\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + D_{ij}^h$$

Підставляючи в (3.3) виражений через дефект зв'язності ${}'\Gamma_{ij}^h$, отримаємо розгорнуту формулу тензора Рімана:

$$\begin{aligned} {}'R_{ijk}^h = & \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} + \frac{\partial D_{ik}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} - \frac{\partial D_{ij}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - \Gamma_{ik}^\alpha D_{\alpha j}^h + D_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h + D_{ik}^\alpha D_{\alpha j}^h - \\ & - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h - D_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h - \Gamma_{ij}^\alpha D_{\alpha k}^h - D_{ij}^\alpha D_{\alpha k}^h \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned} {}'R_{ijk}^h = & R_{ijk}^h + \frac{\partial D_{ik}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial D_{ij}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - \Gamma_{ik}^\alpha D_{\alpha j}^h + D_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h + D_{ik}^\alpha D_{\alpha j}^h - \\ & - D_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h - \Gamma_{ij}^\alpha D_{\alpha k}^h - D_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h - D_{i\alpha}^h \Gamma_{kj}^\alpha + D_{i\alpha}^h D_{kj}^\alpha \end{aligned}$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} {}'R_{ijk}^h = & R_{ijk}^h + D_{ik,j}^h - \frac{\partial D_{ij}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\alpha D_{\alpha j}^h + D_{ik}^\alpha D_{\alpha j}^h - D_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h - D_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h + \\ & D_{i\alpha}^h D_{kj}^\alpha \end{aligned}$$

У результаті отримаємо загальний вигляд тензора Рімана з урахуванням дефекту зв'язності:

$${}'R_{ijk}^h = R_{ijk}^h + D_{ik,j}^h - D_{ij,k}^h + D_{ik}^\alpha D_{\alpha j}^h - D_{ij}^\alpha D_{\alpha k}^h \quad (3.4)$$

Ці формули детально описують вплив дефекту зв'язності на тензор Рімана, включаючи додаткові компоненти та похідні дефекту зв'язності, що впливають на геометричні властивості простору.

Узагальнений тензор Річчі, виражений через компоненту тензора Рімана $'R_{i\alpha k}^\alpha$, має вигляд

$$'R_{ik}^\alpha = 'R_{i\alpha k}^\alpha$$

Покажемо антисиметричну властивість узагальненого тензора Річчі, що зв'язує компоненти $'R_{ij\alpha}^\alpha$ та $'R_{ik}^\alpha$

$$'R_{ij\alpha}^\alpha = - 'R_{ik}^\alpha$$

З урахуванням дефекту зв'язності, отримаємо додаткові доданки:

$$'R_{i\alpha k}^\alpha = 'R_{ik} + D_{ik\alpha}^\alpha - D_{i\alpha k}^h + D_{ik}^\alpha D_{\alpha\beta}^\beta - D_{i\beta}^\alpha D_{\alpha\beta}^\beta \quad (3.5)$$

Підкреслимо, що $'R_{\alpha j k}^\alpha$ не є нульовим, що вказує на присутність дефектів зв'язності.

$$'R_{\alpha j k}^\alpha \neq 0$$

Таким чином, отримаємо узагальнений тензор Річчі, який включає ефекти дефектів зв'язності. Вони дозволяють враховувати додаткові геометричні властивості, що виникають.

У рімановій геометрії, тензор кривини Рімана визначається як

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h;$$

та слід тензора Рімана по індексу α є нульовим

$$R_{\alpha j h}^\alpha = 0;$$

Це типовий результат для ріманових многовидів, де метрика визначає зв'язність без додаткових умов на неметричність або скрут.

Це означає, що у рімановій геометрії слід тензора Рімана по індексу альфа завжди нульовий, що є наслідком симетрії та властивостей зв'язності Крістоффеля.

Згортаючи по h_i отримаємо:

$${}^{\prime}R_{\alpha jk}^{\alpha} = D_{\alpha k,j}^{\alpha} - D_{\alpha j,k}^{\alpha} \neq 0 \text{ - ротор вектора } D_{\alpha k}^{\alpha}$$

На відміну від ріманової геометрії, ця формула показує, що у загальних випадках, коли є дефект зв'язності (у теоріях з неметричністю та скрутом), розгортка тензора кривини по індексу α дає ненульовий результат. Це вказує на наявність додаткових структур (неметричність, скрут), що впливають на геометрію простору.

Отже, в нерімановій геометрії в загальному випадку згортка тензора Рімана по верхньому і першому нижньому індексу є ненульовою і дорівнює ротору вектора $D_{\alpha k}^{\alpha}$.

У класичній рімановій геометрії тензор кривини Рімана згортається до нуля через властивості метрики та зв'язності Крістоффеля. Проте у більш загальних теоріях, що включають неметричність і скрут, згорнутий тензор кривини може бути ненульовим, що відображає складнішу геометричну структуру простору. Це важливо для розуміння фізичних теорій, які виходять за межі загальної теорії відносності і включають додаткові компоненти у зв'язності.

РОЗДІЛ 4

ПРИКЛАДИ АФФІНИХ ЗВ'ЯЗНОСТЕЙ

Розглянемо окремі випадки афінних геометрій.

Означення 4.1. [5] Прагнучи об'єднати гравітацію з електромагнетизмом Г. Вейль розглянув тензор неметричності спеціального виду

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = W_{\alpha}g_{\beta\gamma}, \quad (4.1)$$

де W_{α} - форма Вейля, яка ототожнюється з електромагнітним потенціалом, (при умові, що скрут тотожно дорівнює нулю). Будемо говорити, що **геометрія Рімана-Картана-Вейля** на многовиді визначається, якщо задана метрика, скрут і неметричність спеціального виду (4.1). Якщо тензор неметричності тотожно дорівнює нулю, а метрика і скрут нетривіальні, то будемо говорити, що на многовиді задана **геометрія Рімана-Картана**. В цьому випадку з рівняння (2.31) випливає, що афінна зв'язність однозначно визначається метрикою і скрутом:

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \{\alpha\beta\mu\} + S_{\mu\alpha\beta} - S_{\mu\beta\alpha} - S_{\alpha\beta\mu} \quad (4.2)$$

Так як коваріантна похідна від метрики тотожно дорівнює нулю, зв'язність називається **метричною**.

$$\nabla_{\alpha}g_{\beta\gamma} = \partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}g_{\beta\delta} = 0. \quad (4.3)$$

Данна рівність забезпечує коммутативність коваріантного диференціювання з опусканням і підніманням індексів. Рівність називається **умовою метричності**. Умову метричності (4.3) ще називають еквівалентною $\nabla_{\alpha}g^{\beta\gamma} = 0$ як наслідок рівняння $\nabla_{\alpha}g^{\beta\gamma} = -Q_{\alpha}^{\beta\gamma}$, $-Q_{\alpha}^{\beta\gamma} := g^{\beta\delta}g^{\gamma\epsilon}Q_{\alpha\delta\epsilon}$.

Якщо тензор скруту дорівнює нулю, тобто $S_{im}^k = 0$, а неметричність має вигляд (4.1), то будемо говорити, що задана **геометрія Рімана-Вейля**. Вираз для афінної зв'язності, у геометрії Рімана-Вейля, можна записати у

вигляді:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}((\partial_\alpha + W_\alpha)g_{\beta\gamma} + (\partial_\beta + W_\beta)g_{\gamma\alpha} - (\partial_\gamma + W_\gamma)g_{\alpha\beta}). \quad (4.4)$$

Зауважимо, що афінна зв'язності симетрична по двом першим індексам.

У разі коли і тензор неметричності, і тензор скруту тотожно дорівнюють нулю, а метрика нетривіальна і додатно визначена, то кажуть, що на многовиді задана **геометрія Рімана**. У цьому випадку метрична зв'язність також симетрична по двом першим індексам і однозначно визначається метрикою:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}((\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}). \quad (4.5)$$

Таку зв'язність називають зв'язністю Леві-Чивіти або символами Крістоффеля. Зауважимо, що невиродженність матриці потрідно для визначення метрики. За означенням для символів Крістоффеля видно, що ці умови необхідні щоб метрика визначала зв'язність Леві-Чивіти. Геометрія називається псевдорімановою, якщо метрика не є додатно визначеною. При цьому, для зв'язності попередні назви, зберігаються .

Зауваження 4.1. На многовиді з заданною афінною геометрією загального вигляду існує дві зв'язності: афінна зв'язність та зв'язність Леві-Чивіти (оскільки задана метрика). Геометричні об'єкти, побудовані за допомогою зв'язності Леві-Чивіти, позначаються знаком тільди - .

Приклад 4.1. Можливості зв'язності Леві-Чивіти має наочний геометричний зміст для двовимірних поверхонь, ізометрично вкладених в тривимірний евклідів простір. Розглянемо два, дотичних до поверхні, вектора X_x і Y_y в близьких точках x і y . Леві-Чивита [4] запропонував вважати вектор Y_y паралельним вектору X_x , при умові що його проекція в евклідовому просторі на дотичну площину в точці x паралельно вектору X_x . Така зв'язність узгоджена з метрикою, індукованої вкладенням, та значення її скруту дорівнює нулю.

У рімановій геометрії коваріантна похідна описується компонентами

зв'язності, які мають два нижніх індекси та один верхній

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} := \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\delta} g^{\gamma\delta} \quad (4.6)$$

і тому є однаковою для двох метрик, які відрізняються постійним множником.

Символи Крістоффеля симетричні щодо престановки перших двох індексів. Ця властивість виконується лише в голономному базисі. У неголономному базисі ця симетрія порушується. Згідно з формулами для символів Крістоффеля (4.5) та умовою метричності (4.3) маємо рівність (4.2).

Це доводить наступну теорему

Теорема 4.1. *Для того, щоб символи Крістоффеля в деякій системі координат дорівнювали нулю, необхідно і достатньо, щоб компоненти метрики в цій системі координат були постійні.*

Через те, що символи Крістоффеля не належать до тензорних величин, то вони можуть бути нетривіальні в іншій системі координат.

Приклад 4.2. В евклідовому просторі в декартовій системі координат символи Крістоффеля дорівнюють нулю. Проте, в сферичній або циліндричній системах координат вони мають ненульові значення.

Означення 4.2. Якщо тензори неметричності і скруту тотожно дорівнюють нулю, і в околі будь-якої точки існує система координат, де метрика представлена одиничною діагональною матрицею, а символи Крістоффеля дорівнюють нулю, то геометрія називається локально евклідовою (або псевдоевклідовою, якщо деякі з одиниць, входить в метрику з від'ємним знаком). Відповідна система координат називається декартовою.

Приклад 4.3. Розглянемо двовимірний тор, що вкладений в тривимірний евклідів простір. Якщо припустити, що скрут і неметричність при цьому дорівнюють нулю, а метрика - індукована вкладенням, то тензор кривини тора дорівнює нулю. Отже, тор є нетривіальним локально евклідовим многовидом.

ВИСНОВКИ

Афінна геометрія на многовиді задається, коли задані досить гладка метрика та афінна зв'язність, тобто три об'єкти (M, g, Γ) . У загальному випадку, метрика і афінна зв'язність є незалежними геометричними об'єктами. Це призводить до того, що при побудові моделей вони розглядаються як незалежні поля з різною фізичною інтерпретацією. Наприклад, у фізиці метрика описує гравітаційну взаємодію, тоді як фізичний зміст афінної зв'язності залишається незрозумілим через залежність від конкретної моделі. Вивчення відповідних моделей ускладнене з математичної точки зору і досі не досліджене достатньо добре.

У неріманових просторах з'являється **дефект зв'язності**, що збільшує кількість суттєвих компонент тензора Рімана. У цій роботі досліджується залежність між афінною зв'язністю та компонентами тензора Рімана в умовах неріманових просторів.

Таким чином, для того, щоб на многовиді M задати афінну геометрію, необхідно і достатньо задати три тензорних поля: **метрику, скрут і неметричність**. Відзначимо ще раз, що всі три об'єкта можна задати незалежним чином, і в різних математичних і фізичних моделях їх потрібно розглядати як незалежні змінні.

Якщо задати (g_{ij}, Γ_{ij}^h) , тоді тензор $Q_{mkl} = g_{kl;m}$ визначається однозначно за метрикою і зв'язністю. Тобто для визначення тензора неметричності необхідні обидва об'єкти: і метрика, і зв'язність.

Якщо задати (g_{ij}, Γ_{ij}^h) , тоді тензорне поле S_{km}^l яке антисиметричне за нижніми двома індексами, визначається однозначно за зв'язністю.

У результаті, за заданою метрикою і афінною зв'язністю побудовано два тензорних поля: тензор скруту і тензор неметричності.

В нерімановій геометрії в загальному випадку згортка тензора Рімана по верхньому і першому нижньому індексу **є ненульовою** і дорівнює ротору вектора $D_{\alpha k}^{\alpha}$, а отже збільшується кількість суттєвих компонент тензора Рімана на відміну від ріманової геометрії.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Schouten J. A.: Tensor Analysis for Physicists, Second Edition — P.: Dover Publications, 2011. — 320 с.
2. Schouten J. A.: Ricci-Calculus: An Introduction To Tensor Analysis And Its Geometrical Applications — P.: Springer; Softcover reprint of the original 1st ed, 2013. — 540 с.
3. Кузаконь В. М.: Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти / Кузаконь В. М., Кириченко В. Ф., Пришляк О. О. — Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування., 2013. — 506 с.
4. James I. M.: Differential Geometry and Topology / James I. M. — P.: Springer; 2013. — 752 с.
5. Weyl H.: The Theory Of Groups And Quantum Mechanics / Weyl H., Robertson H. P. — P.: Kessinger Publishing, 2010. — 448 с.
6. Ivey Thomas A.: Cartan for beginners : differential geometry via moving frames and exterior differential systems / Ivey Thomas A., Landsberg, J. M. — P.: Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2016. — 453 с.
7. Fecko M.: Differential Geometry and Lie Groups for Physicists / Fecko M., P.: Cambridge University Press, 2011. — 714 с.
8. Joel W. Robbin.: Introduction to Differential Geometry / Joel W. Robbin, Dietmar A. Salamon, — P.: Springer Studium Mathematik, 2022. — 432 с.