Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Задача повздовжнього зсуву для півсмуги, що послаблена тріщиною»

«The antiplane problem of the elasticity theory for a semi-strip weakened by a crack»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»

Тиченко Варвара Вікторівна

Керівник к.ф.-м.н., доц. Журавльова З.Ю. ____________
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)
Рецензент к.ф.-м.н., доц. Процеров Ю.С. ____________
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від _____________2024 р.

Завідувач кафедри

________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №_______
протокол № ____ від ________ 2024 р.

Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

__________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2024

Зміст

ВСТУП

Задачі теорії пружності мають важливе значення для різних галузей інженерії, включаючи цивільне будівництво, авіаційну та космічну техніку, а також багатьох інших. Задача повздовжнього зсуву для півсмуги, послабленої тріщиною, є типовою задачею теорії пружності, яка дозволяє отримати важливу інформацію про поведінку матеріалів при наявності дефектів.

Метою даної кваліфікаційної роботи є розв'язання крайової задачі повздовжнього зсуву для півсмуги, що послаблена тріщиною, з використанням методів інтегральних перетворень. У рамках даного дослідження було отримано формули переміщень та напружень, а також побудовано сингулярне рівняння.

Наукова новизна дослідження полягає у використанні інтегральних перетворень для розв'язання конкретної крайової задачі антиплоскої деформації. Це дозволяє отримати точні аналітичні рішення для задачі, що розглядається, і дає можливість більш детально вивчити вплив тріщини на поведінку матеріалу.

Практична значущість роботи полягає в тому, що отримані результати можуть бути використані для прогнозування та оцінки міцності матеріалів з тріщинами, що особливо важливо при проєктуванні та експлуатації конструкцій, які зазнають повздовжнього зсуву.

Методологія дослідження базується на використанні аналітичних методів теорії пружності, зокрема, методів інтегральних перетворень та обернених перетворень Фур'є.

Структура роботи. Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаної літератури. У першому розділі подано постановку задачі, другий розділ присвячено розв'язанню задачі, у третьому та четвертому розділі наведено результати розв'язання.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розв’язати задачу антиплоскої деформації теорії пружності для півсмуги, що послаблена тріщиною.

$$0 < x < \infty, \qquad 0 < y < a$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ w|_{x=0} = 0, \qquad w|_{x\to\infty} \to 0, \qquad \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x\to\infty} \to 0 \\ \left.\tau_{yz}\right|_{y=0} = p(x), \qquad \left.\tau_{yz}\right|_{y=a} = 0 \text{ (або } \downarrow) \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \dfrac{p(x)}{G}, \qquad \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=a} = 0 \\ < w(c,y) >= w(c-0,y) - w(c+0,y) = \chi(y) \\ < \tau_{xz}(c,y) >= \tau_{xz}(c-0,y) - \tau_{xz}(c+0,y) = 0 \text{ (або } \downarrow) \\ < \dfrac{\partial w}{\partial x}(c,y) >= \dfrac{\partial w}{\partial x}(c-0,y) - \dfrac{\partial w}{\partial x}(c+0,y) = 0 \end{cases}$$

Або у термінах переміщення:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ (1.0) \\ w|_{x=0} = 0, \qquad w|_{x\to\infty} \to 0, \qquad \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x\to\infty} \to 0 \ \ (1.1) \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \dfrac{p(x)}{G}, \qquad \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=a} = 0 \ \ (1.2) \\ < w(c,y) \geq w(c-0,y) - w(c+0,y) = \chi(y) \ \ (1.3) \\ < \dfrac{\partial w}{\partial x}(c,y) >= \dfrac{\partial w}{\partial x}(c-0,y) - \dfrac{\partial w}{\partial x}(c+0,y) = 0 \ \ (1.4) \end{cases}$$

Розглядається пружна півсмуга (область $0 < x < \infty,\ 0 < y < a$), що знаходиться в умовах антиплоскої деформації та послаблена тріщиною (область $x = c,\ d_0 < y < d_1$). На грань $y = 0$ діє зсувне навантаження $p(x)$, грань $x = 0$ знаходиться в умовах зчеплення, грань $y = a$ вільна від навантаження.

2. РОЗВ'ЯЗАННЯ

Застосовуємо інтегральне перетворення за узагальненою схемою за змінною x. За даною змінною можна застосувати напівскінченне синус перетворення Фур'є [взято з джерела 1. ст. 143, 18)].

$$w_\lambda(y) = \int_0^\infty w(x,y)\sin(\lambda x)\,dx \quad (2.1)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення:

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty w_\lambda(y)\sin(\lambda x)\,d\lambda, \quad (2.2)$$

Узагальнений метод інтегральних перетворень для частини $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$:

Розбиваємо інтеграл на два по тріщині.

$$\int_0^{+\infty} w''(x,y)\sin(\lambda x)\,dx = \left(\int_0^{c-0} + \int_{c+0}^{+\infty}\right) w''(x,y)\sin(\lambda x)\,dx =$$

Інтегруємо по частинах перший раз.

$$= [w'(x,y)\sin(\lambda x)]|_{x=0}^{x=c-0} + [w'(x,y)\sin(\lambda x)]|_{x=c+0}^{x\to+\infty} - \lambda\left(\int_0^{c-0} + \int_{c+0}^{+\infty}\right) w'(x,y)cos(\lambda x)dx =$$

Розкриваємо підстановки та інтегруємо по частинах 2 раз.

$$= \Big[\boldsymbol{w'(c-0,y)}\sin(\lambda c) - w'(0,y)\sin(0) + \lim_{\boldsymbol{x\to+\infty}} \boldsymbol{w'(x,y)}\sin(\lambda x) - \boldsymbol{w'(c+0,y)}\sin(\lambda c)\Big] - \lambda\Big\{[w(x,y)cos(\lambda x)]|_{x=0}^{x=c-0} + [w(x,y)cos(\lambda x)]|_{x=c+0}^{x\to+\infty} - -\lambda^2\left(\int_0^{c-0} + \int_{c+0}^{+\infty}\right) w(x,y)\sin(\lambda x)\,dx\Big\} =$$

В квадратних дужках використовуємо умови (1.1) $\left[\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x\to\infty} \to 0\right]$ та (1.4) $\left[\frac{\partial w}{\partial x}(c-0,y) - \frac{\partial w}{\partial x}(c+0,y) = 0\right]$.

Отримали

$$= -\lambda \left\{ \left[w(c-0,y)cos(\lambda c) - \boldsymbol{w(0,y)}cos(0) + \lim_{\boldsymbol{x \to +\infty}} \boldsymbol{w(x,y)}\, cos(\lambda x) \right.\right.$$
$$\left.\left. - w(c+0,y)cos(\lambda c) \right] + \lambda \left(\int_0^{c-0} + \int_{c+0}^{+\infty} \right) w(x,y)\sin(\lambda x)\, dx \right\} =$$

В квадратних дужках використовуємо умови (1.1)$[w|_{x\to\infty} \to 0,\ w|_{x=0} = 0]$. Можемо об'єднати інтеграли.

Отримали

$$= -\lambda \left\{ cos(\lambda c)[w(c-0,y) - w(c+0,y)] + \lambda \int_0^{+\infty} w(x,y)\sin(\lambda x)\, dx \right\} =$$

Спростимо вираз.

$$= -\lambda cos(\lambda c)[\boldsymbol{w(c-0,y) - w(c+0,y)}] - \lambda^2 \int_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} \boldsymbol{w(x,y)\sin(\lambda x)\, dx} =$$

Далі застосуємо крайову умову (1.3) $[w(c-0,y) - w(c+0,y) = \chi(y)]$ та пряме інтегральне перетворення (2.1).

$$= -\lambda cos(\lambda c)\chi(y) - \lambda^2 w_\lambda(y)$$

Отримали:

$$\int_0^{+\infty} w''(x,y)\sin(\lambda x)\, dx = -\lambda cos(\lambda c)\chi(y) - \lambda^2 w_\lambda(y)$$

Перетворення для частини $\boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}$:

Змінюємо порядок інтегрування та диференціювання

$$\int_0^{+\infty} \ddot{w}(x,y)\sin(\lambda x)\, dx = \frac{\partial^2 \left(\int_0^{+\infty} w(x,y)\sin(\lambda x)\, dx \right)}{\partial y^2} = \ddot{w_\lambda}(y)$$

Представити диф. рівняння: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ з урахуванням перетворень можна у вигляді

$$\ddot{w_\lambda}(y) - \lambda^2 w_\lambda(y) = \lambda cos(\lambda c)\chi(y)$$

Застосуємо перетворення (2.1) на крайові умови, що залишились: (1.2) $\left[\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=0}=\frac{p(x)}{G},\ \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=a}=0\right]$.

Змінивши порядок інтегрування та диференціювання отримали

$$w_\lambda^{\cdot}(0)=\frac{p_\lambda}{G},\ \text{ де } p_\lambda=\int\limits_0^\infty p(x)\sin(\lambda x)\,dx\,,\qquad w_\lambda^{\cdot}(a)=0$$

Отримали одновимірну крайову задачу в просторі трансформант:

$$\begin{cases} w_\lambda^{\cdot\cdot}(y)-\lambda^2 w_\lambda(y)=f(y), \qquad 0<y<a \\ w_\lambda^{\cdot}(0)=\dfrac{p_\lambda}{G}, \qquad w_\lambda^{\cdot}(a)=0 \end{cases}$$

$$\text{де } f(y)=\begin{cases}\lambda cos(\lambda c)\chi(y), & y\in(d_0,d_1)\\ 0, & y\notin(d_0,d_1)\end{cases}$$

2.1 РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ПРОСТОРІ ТРАНСФОРМАНТ

$$\begin{cases} w_\lambda^{\cdot\cdot}(y) - \lambda^2 w_\lambda(y) = f(y), \qquad 0 < y < a \\ w_\lambda^{\cdot}(0) = \frac{p_\lambda}{G}, \qquad w_\lambda^{\cdot}(a) = 0 \end{cases}, \qquad (3)$$

$$\text{де } f(y) = \begin{cases} \lambda cos(\lambda c)\chi(y), \;\; y \in (d_0, d_1) \\ 0, \qquad y \notin (d_0, d_1) \end{cases}, \qquad w^{\cdot\cdot} = \frac{d^2 w}{d^2 y}$$

Задача (3) є неоднорідною крайовою задачею, тому її розв'язок можна побудувати за формулою

$$w_\lambda = \int_0^a f(\eta) G(y,\eta) d\eta + \frac{p_\lambda}{G} \psi_0(y)$$

Для цього побудуємо функцію Гріна другим способом [за джерелом 2.]

$$G(y,\eta) = \Phi(y,\eta) - \psi_0(y) U_0[\Phi(y,\eta)] - \psi_1(y) U_1[\Phi(y,\eta)]$$

Будуємо фундаментальну базисну систему розв'язків (ФБСР). Відповідно визначенню, ФБСР крайової задачі складають функції $\psi_0(y)$ та $\psi_1(y)$ такі, що

$$\begin{cases} \psi_0'' - \lambda^2 \psi_0 = 0 \\ \psi_0'(0) = 1, \qquad \psi_0'(a) = 0 \end{cases}$$

$$\psi_0(y) = C_{00} \sinh(\lambda y) + C_{01} \cosh(\lambda y)$$

$$\psi_0'(y) = \lambda C_{00} \cosh(\lambda y) + \lambda C_{01} \sinh(\lambda y)$$

$$\psi_0'(0) = \lambda C_{00} \cosh(0) + \lambda C_{01} \sinh(0) = 1$$

$$\rightarrow \; \lambda C_{00} + 0 = 1 \; \rightarrow \; C_{00} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\psi_0'(a) = \cosh(\lambda a) + \lambda C_{01} \sinh(\lambda a) = 0$$

$$\rightarrow \; C_{01} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}$$

Отримали

$$\begin{cases} \psi_1'' - \lambda^2 \psi_1 = 0 \\ \psi_1'(0) = 0, \qquad \psi_1'(a) = 1 \end{cases}$$

$$\psi_1(y) = C_{00} \sinh(\lambda y) + C_{01} \cosh(\lambda y)$$

$$\psi_1'(y) = \lambda C_{00} \cosh(\lambda y) + \lambda C_{01} \sinh(\lambda y)$$

$$\psi_1'(0) = \lambda C_{00} + 0 = 0$$

$$\rightarrow \; C_{00} = 0$$

$$\psi_1'(a) = 0 + \lambda C_{01} \sinh(\lambda a) = 1$$

$$\rightarrow \; C_{01} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sinh(\lambda a)}$$

Отримали

$$\psi_0(y) = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right) \qquad \psi_1(y) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sinh(\lambda a)}\cosh(\lambda y)$$

Для рівняння вигляду $w_{\lambda}^{\cdot\cdot}(y) - \lambda^2 w_\lambda(y)$ фундаментальна функція має вигляд

$$\Phi(y,\eta) = -\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda|y-\eta|}, \qquad \Phi'_y(y,\eta) = \frac{(y-\eta)}{2|y-\eta|}e^{-\lambda|y-\eta|}$$

Знаходимо $\mathrm{U}_0\left[\Phi'_y(\mathrm{y},\eta)\right]$ та $\mathrm{U}_1\left[\Phi'_y(\mathrm{y},\eta)\right]$ підставляючи граничні значення у в $\Phi'_y(\mathrm{y},\eta)$

$$[0 < \eta < a]$$

$$U_0\left[\Phi'_y(y,\eta)\right] = \Phi'_y(0,\eta) = \frac{(0-\eta)}{2|0-\eta|}e^{-\lambda|0-\eta|} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda\eta}$$

$$U_1\left[\Phi'_y(y,\eta)\right] = \Phi'_y(a,\eta) = \frac{(a-\eta)}{2|a-\eta|}e^{-\lambda|a-\eta|} = \frac{1}{2}e^{-\lambda(a-\eta)}$$

Збираємо функцію Гріна

$$G(y,\eta) = \Phi(y,\eta) - \psi_0(y)U_0\left[\Phi'_y(y,\eta)\right] - \psi_1(y)U_1\left[\Phi'_y(y,\eta)\right]$$

$$G(y,\eta) = \left[-\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda|y-\eta|}\right] - \left[\frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]\left[-\frac{1}{2}e^{-\lambda\eta}\right] - \left[\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sinh(\lambda a)}\cosh(\lambda y)\right]\left[\frac{1}{2}e^{-\lambda(a-\eta)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda|y-\eta|} + \frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda\eta}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right) - \frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda(a-\eta)}\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)} =$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\left[-e^{-\lambda|y-\eta|} + e^{-\lambda\eta}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right) - e^{-\lambda(a-\eta)}\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]$$

Повертаємось до розв'язку крайової задачі.

$$w_\lambda = \int_0^a f(\eta)G(y,\eta)d\eta + \frac{p_\lambda}{G}\psi_0(y), \qquad \text{де } f(\eta) = \begin{cases} \lambda cos(\lambda c)\chi(\eta), & \eta \in (d_0,d_1) \\ 0, & \eta \notin (d_0,d_1) \end{cases}$$

$$w_\lambda = \int_{d_0}^{d_1} [\lambda cos(\lambda c)\chi(\eta)] \left[\frac{1}{2\lambda}\left(-e^{-\lambda|y-\eta|} + e^{-\lambda\eta}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - e^{-\lambda(a-\eta)}\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right] d\eta + \frac{p_\lambda}{G}\left[\frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{d_0}^{d_1} \left[cos(\lambda c)\chi(\eta)\left(-e^{-\lambda|y-\eta|} + e^{-\lambda\eta}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - e^{-\lambda(a-\eta)}\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right] d\eta + \frac{p_\lambda}{\lambda G}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)$$

Отримали розв’язок крайової задачі в просторі трансформант.

2.2 ОБЕРНЕНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Застосовуємо обернене перетворення $w(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} w_\lambda(y)\sin(\lambda x)\,d\lambda$ (2.2).

$$w(x,y)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{1}{2}\int\limits_{d_0}^{d_1}\left[cos(\lambda c)\chi(\eta)\left(-e^{-\lambda|y-\eta|}+e^{-\lambda\eta}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)-e^{-\lambda(a-\eta)}\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\eta+\frac{p_\lambda}{\lambda G}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]\sin(\lambda x)\,d\lambda=$$

Можна розбити на суму подвійних інтегралів.

$$w(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[\int\limits_{d_0}^{d_1}\left[\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\chi(\eta)\left(-e^{-\lambda|y-\eta|}+e^{-\lambda\eta}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)-e^{-\lambda(a-\eta)}\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\eta+\frac{2}{G}\frac{p_\lambda}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda=$$

Розбиваємо на 2 інтеграли $\int_0^{\infty}\int_{d_0}^{d_1}[\quad]d\eta\,d\lambda\ ma\ \int_0^{\infty}[\quad]d\lambda$

$$w(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{d_0}^{d_1}\left[\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\chi(\eta)\left(-e^{-\lambda|y-\eta|}+e^{-\lambda\eta}\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)-e^{-\lambda(a-\eta)}\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\eta\,d\lambda+\frac{2}{\pi G}\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{p_\lambda}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda$$

Змінюємо порядок інтегрування $\int_{\mathrm{d}_0}^{\mathrm{d}_1}\int_0^{\infty}[\quad]\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\eta$ та розбиваємо його на 3 інтеграли

$$w(x,y)=\frac{-1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}\int_0^{\infty}\left[\chi(\eta)e^{-\lambda|y-\eta|}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\right]d\lambda d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}\int_0^{\infty}\left[\chi(\eta)e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{-1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}\int_0^{\infty}\left[\chi(\eta)e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{2}{\pi G}\int_0^{\infty}\left[\frac{p_\lambda}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda$$

Виносимо з-під інтеграла ті вирази, які не залежать від змінної інтегрування.

$$w(x,y)=\frac{-1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\int_0^{\infty}\left[e^{-\lambda|y-\eta|}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\right]d\lambda d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\int_0^{\infty}\left[e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{-1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\int_0^{\infty}\left[e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{2}{\pi G}\int_0^{\infty}\left[\frac{p_\lambda}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda$$

Скористаємось тригонометричною формулою

$$\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)=\frac{1}{2}\left(\sin\big(\lambda(x+c)\big)+\sin\big(\lambda(x-c)\big)\right)$$

Отримаємо

$$w(x,y) = \frac{-1}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda|y-\eta|}\, sin\big(\lambda(x+c)\big)\right] d\lambda d\eta$$

$$+\frac{-1}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda|y-\eta|}\, sin\big(\lambda(x-c)\big)\right] d\lambda d\eta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\, cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right] d\lambda\, d\eta$$

$$+\frac{-1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\, cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right] d\lambda\, d\eta$$

$$+\frac{2}{\pi G}\int_0^{\infty} \left[\frac{p_\lambda}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right] d\lambda$$

$$\text{Де } p_\lambda = \int_0^{\infty} p(\xi)\sin(\lambda\xi)\, d\xi$$

Перший і другий інтеграли можна спростити скориставшись наступними формулами, де $p = |y-\eta|,\ q = x \pm c,\ \lambda = 0$ [з джерела 3. ст.491.].

$$I_1 + I_2 = \frac{-1}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\left[\frac{(x+c)}{|y-\eta|^2 + (x+c)^2}\right] d\eta$$

$$+\frac{-1}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\left[\frac{(x-c)}{|y-\eta|^2 + (x-c)^2}\right] d\eta$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\left[\frac{(x+c)}{|y-\eta|^2 + (x+c)^2} + \frac{(x-c)}{|y-\eta|^2 + (x-c)^2}\right] d\eta$$

Підсумково отримуємо

$$
\begin{aligned}
w(x,y) = {} & \frac{-1}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\left(\frac{(x+c)}{|y-\eta|^2+(x+c)^2}+\frac{(x-c)}{|y-\eta|^2+(x-c)^2}\right)d\eta \\
& + \frac{1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^\infty \left[e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\, cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right] d\lambda\, d\eta \\
& + \frac{-1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^\infty \left[e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\, cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right] d\lambda\, d\eta \\
& + \frac{2}{\pi G}\int_0^\infty \left[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\, d\xi\right] d\lambda
\end{aligned}
$$

2.3 ФОРМУЛИ НАПРУЖЕНЬ

Використаємо формули $\tau_{xz} = Gw'(x,y),\ \tau_{yz} = Gw^{\cdot}(x,y)$

$$\tau_{xz} = G\left[\frac{-1}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\left(\frac{(x+c)}{|y-\eta|^2+(x+c)^2}+\frac{(x-c)}{|y-\eta|^2+(x-c)^2}\right)_x' d\eta\right.$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\int_0^{\infty}\left[e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]_x' d\lambda\, d\eta$$
$$+\frac{-1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\int_0^{\infty}\left[e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]_x' d\lambda\, d\eta$$
$$+\frac{2}{\pi G}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^{\infty}p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\right]_x' d\lambda\right] =$$

В 1 інтегралі

$$\left(\frac{x+c}{|y-\eta|^2+(x+c)^2}+\frac{x-c}{|y-\eta|^2+(x-c)^2}\right)_x' =$$
$$=\frac{[x+c]_x'[|y-\eta|^2+(x+c)^2]-[x+c][|y-\eta|^2+(x+c)^2]_x'}{(|y-\eta|^2+(x+c)^2)^2}$$
$$+\frac{[x-c]_x'[|y-\eta|^2+(x-c)^2]-[x-c][|y-\eta|^2+(x-c)^2]_x'}{(|y-\eta|^2+(x-c)^2)^2} =$$
$$=\frac{|y-\eta|^2+(x+c)^2-[x+c][2(x+c)]}{(|y-\eta|^2+(x+c)^2)^2}+\frac{|y-\eta|^2+(x-c)^2-[x-c][2(x-c)]}{(|y-\eta|^2+(x-c)^2)^2} =$$
$$=\frac{|y-\eta|^2-(x+c)^2}{(|y-\eta|^2+(x+c)^2)^2}+\frac{|y-\eta|^2-(x-c)^2}{(|y-\eta|^2+(x-c)^2)^2} =$$

$$= \frac{|y-\eta|^2 - (x+c)^2}{(|y-\eta|^2 + (x+c)^2)^2} + \frac{|y-\eta|^2 - (x-c)^2}{(|y-\eta|^2 + (x-c)^2)^2}$$

В 2 інтегралі

$$\left[e^{-\lambda\eta} \sin(\lambda x)\, cos(\lambda c) \cosh(\lambda y) \left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]_x' =$$

$$= e^{-\lambda\eta} cos(\lambda c) \cosh(\lambda y) \left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right) [\sin(\lambda x)]_x' =$$

$$= e^{-\lambda\eta} cos(\lambda c) \cosh(\lambda y) \left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right) [\lambda \cos(\lambda x)]$$

В 3 інтегралі

$$\left[e^{-\lambda(a-\eta)} \sin(\lambda x)\, cos(\lambda c) \frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]_x' = e^{-\lambda(a-\eta)} cos(\lambda c) \frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)} [\sin(\lambda x)]_x' =$$

$$= e^{-\lambda(a-\eta)} cos(\lambda c) \frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)} [\lambda \cos(\lambda x)]$$

В 4 інтегралі

$$\left[\frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) \cosh(\lambda y) \left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right) \int_0^\infty p(\xi) \sin(\lambda \xi)\, d\xi\right]_x'$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cosh(\lambda y) \left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right) \int_0^\infty p(\xi) \sin(\lambda \xi)\, d\xi\, [\sin(\lambda x)]_x' =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cosh(\lambda y) \left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right) \int_0^\infty p(\xi) \sin(\lambda \xi)\, d\xi\, [\lambda \cos(\lambda x)]$$

отримали

$$\tau_{xz} = \frac{-G}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\left(\frac{|y-\eta|^2-(x+c)^2}{(|y-\eta|^2+(x+c)^2)^2}+\frac{|y-\eta|^2-(x-c)^2}{(|y-\eta|^2+(x-c)^2)^2}\right)d\eta$$

$$+\frac{G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}[\chi(\eta)]\int_0^\infty\left[\lambda e^{-\lambda\eta} cos(\lambda c)\cos(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda\, d\eta$$

$$+\frac{-G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}[\chi(\eta)]\int_0^\infty\left[\lambda e^{-\lambda(a-\eta)}\cos(\lambda x)\, cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]d\lambda\, d\eta$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\cos(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\, d\xi\right]d\lambda$$

$$\tau_{yz} = Gw^{\cdot}(x,y)$$

$$\tau_{yz} = G\left[\frac{-1}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\left(\frac{(x+c)}{|y-\eta|^2+(x+c)^2}+\frac{(x-c)}{|y-\eta|^2+(x-c)^2}\right)'_y d\eta\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\int_0^\infty\left[e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\, cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]'_y d\lambda\, d\eta$$

$$+\frac{-1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}[\chi(\eta)]\int_0^\infty\left[e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\, cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]'_y d\lambda\, d\eta$$

$$+\frac{2}{\pi G}\int_0^\infty\left[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\, d\xi\right]'_y d\lambda\right]$$

В 1 інтегралі

$$\left(\frac{x+c}{|y-\eta|^2+(x+c)^2}+\frac{x-c}{|y-\eta|^2+(x-c)^2}\right)'_y=$$

$$=-|y-\eta|\frac{2(x+c)}{((y-\eta)^2+(x+c)^2)^2}-|y-\eta|\frac{2(x-c)}{((y-\eta)^2+(x-c)^2)^2}$$

В 2 інтегралі

$$\left[e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]'_y=$$

$$=e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\left[\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]'_y=$$

$$=e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\left[\frac{\sinh(\lambda y)}{\cancel{\cosh(\lambda y)}}\cancel{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\cosh(\lambda y)\right]'_y=$$

$$=e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\left[\lambda\cosh(\lambda y)-\lambda\frac{\sinh(\lambda y)\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right]$$

В 3 інтегралі

$$\left[e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]'_y=$$

$$=e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\frac{1}{\sinh(\lambda a)}\;[\cosh(\lambda y)]'_y=$$

$$=e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\frac{1}{\sinh(\lambda a)}\;[\lambda\sinh(\lambda y)]$$

В 4 інтегралі

$$\left[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\right]'_y=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\left[\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]'_y=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\left[\frac{\sinh(\lambda y)}{\cancel{\cosh(\lambda y)}}\cancel{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\cosh(\lambda y)\right]'_y=$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) \int_0^\infty p(\xi) \sin(\lambda \xi)\, d\xi \left[\lambda \cosh(\lambda y) - \lambda \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)} \sinh(\lambda y)\right]$$

$$\tau_{yz} = \frac{G}{\pi} \int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta) |y - \eta| \left(\frac{x + c}{((y - \eta)^2 + (x + c)^2)^2} + \frac{x - c}{((y - \eta)^2 + (x - c)^2)^2} \right) d\eta$$
$$+ \frac{G}{\pi} \int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta) \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \eta} \sin(\lambda x)\, cos(\lambda c) \left[\cosh(\lambda y)\right.$$
$$\left. - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)} \sinh(\lambda y)\right] d\lambda\, d\eta$$
$$+ \frac{-G}{\pi} \int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta) \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda(a-\eta)} \sin(\lambda x)\, cos(\lambda c) \frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\, d\lambda\, d\eta$$
$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(\lambda x) \left[\cosh(\lambda y) - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)} \sinh(\lambda y)\right] \int_0^\infty p(\xi) \sin(\lambda \xi)\, d\xi\, d\lambda$$

2.4 СИНГУЛЯРНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

Запишимо сингулярне інтегральне рівняння для відшукання функції стрибка $\chi(\eta)$ задовольнивши крайову умову на берегах тріщини $\tau_{xz}(c-0,y)=0,\ d_0<y<d_1$

$$\tau_{xz}(\mathrm{c},y)=\frac{-G}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\left(\frac{|y-\eta|^2-4c^2}{(|y-\eta|^2+4c^2)^2}+\frac{1}{|y-\eta|^2}\right)d\eta$$
$$+\frac{G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}[\chi(\eta)]\int_0^\infty\left[\lambda e^{-\lambda\eta}\cos^2(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{-G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}[\chi(\eta)]\int_0^\infty\left[\lambda e^{-\lambda(a-\eta)}\cos^2(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\right]d\lambda$$
$$=0$$

Звідки

$$\frac{G}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1}\chi(\eta)\left(\frac{|y-\eta|^2-4c^2}{(|y-\eta|^2+4c^2)^2}+\frac{1}{|y-\eta|^2}\right)d\eta$$
$$+\frac{-G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}[\chi(\eta)]\int_0^\infty\left[\lambda e^{-\lambda\eta}\cos^2(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1}[\chi(\eta)]\int_0^\infty\left[\lambda e^{-\lambda(a-\eta)}\cos^2(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]d\lambda\,d\eta$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\right]d\lambda$$

Отримали сингулярне рівняння з особливістю в $y=\eta$, яке можна розв’язати методом ортогональних поліномів [за джерелом 4.].

3. РЕЗУЛЬТАТИ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Формула переміщення

$$w(x,y) = \frac{-1}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\left(\frac{(x+c)}{|y-\eta|^2+(x+c)^2}+\frac{(x-c)}{|y-\eta|^2+(x-c)^2}\right)d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^{\infty}\left[e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{-1}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^{\infty}\left[e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{2}{\pi G}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^{\infty} p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\right]d\lambda$$

Формула напружень

$$\tau_{xz} = \frac{-G}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\left(\frac{|y-\eta|^2-(x+c)^2}{(|y-\eta|^2+(x+c)^2)^2}+\frac{|y-\eta|^2-(x-c)^2}{(|y-\eta|^2+(x-c)^2)^2}\right)d\eta$$
$$+\frac{G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} [\chi(\eta)]\int_0^{\infty}\left[\lambda e^{-\lambda\eta}cos(\lambda c)\cos(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{-G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} [\chi(\eta)]\int_0^{\infty}\left[\lambda e^{-\lambda(a-\eta)}\cos(\lambda x)\,cos(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos(\lambda x)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)}-\frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^{\infty} p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\right]d\lambda$$

Формула напружень

$$\tau_{yz} = \frac{G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)|y-\eta|\left(\frac{x+c}{((y-\eta)^2+(x+c)^2)^2} + \frac{x-c}{((y-\eta)^2+(x-c)^2)^2}\right)d\eta$$
$$+\frac{G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\eta}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\left[\cosh(\lambda y) - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\sinh(\lambda y)\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{-G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda(a-\eta)}\sin(\lambda x)\,cos(\lambda c)\frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\,d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(\lambda x)\left[\cosh(\lambda y) - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\sinh(\lambda y)\right]\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\,d\lambda$$

Сингулярне рівняння

$$\frac{G}{2\pi}\int_{d_0}^{d_1} \chi(\eta)\left(\frac{|y-\eta|^2-4c^2}{(|y-\eta|^2+4c^2)^2} + \frac{1}{|y-\eta|^2}\right)d\eta$$
$$+\frac{-G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} [\chi(\eta)]\int_0^\infty \left[\lambda e^{-\lambda\eta}\cos^2(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\right]d\lambda\,d\eta$$
$$+\frac{G}{\pi}\int_{d_0}^{d_1} [\chi(\eta)]\int_0^\infty \left[\lambda e^{-\lambda(a-\eta)}\cos^2(\lambda c)\frac{\cosh(\lambda y)}{\sinh(\lambda a)}\right]d\lambda\,d\eta$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\cos(\lambda c)\cosh(\lambda y)\left(\frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda y)} - \frac{\cosh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a)}\right)\int_0^\infty p(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi\right]d\lambda$$

4. ГРАФІЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для побудови графіків було використано мову програмування R та програму RGui.

Функції розглядалися на смужці $X \times Y = [0; 25] \times [0; 10]$ із модулем зсуву $G = 1/5$, функція $p(x) = \sin(x)$, $\chi(y) = 0$.

4.1 Графіки функції $w(x, y)$

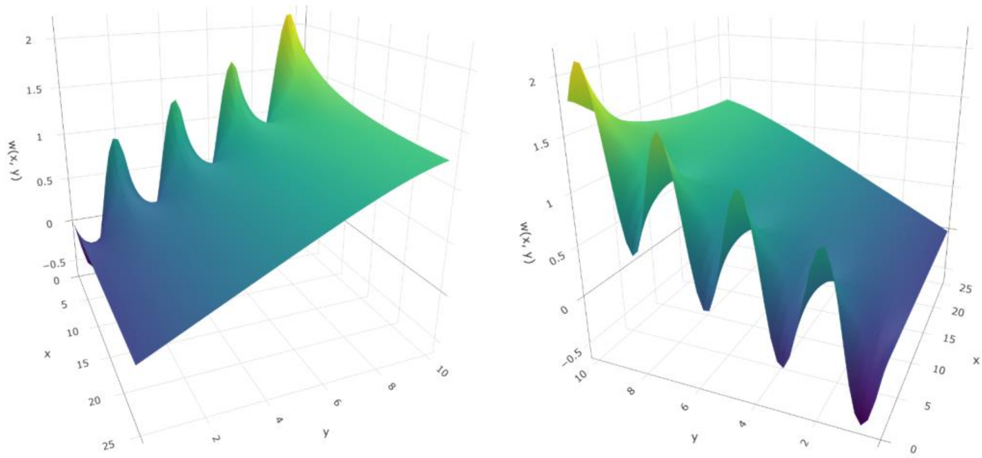

Рисунок 1. Загальний вигляд графіку $w(x, y)$ з різних ракурсів.

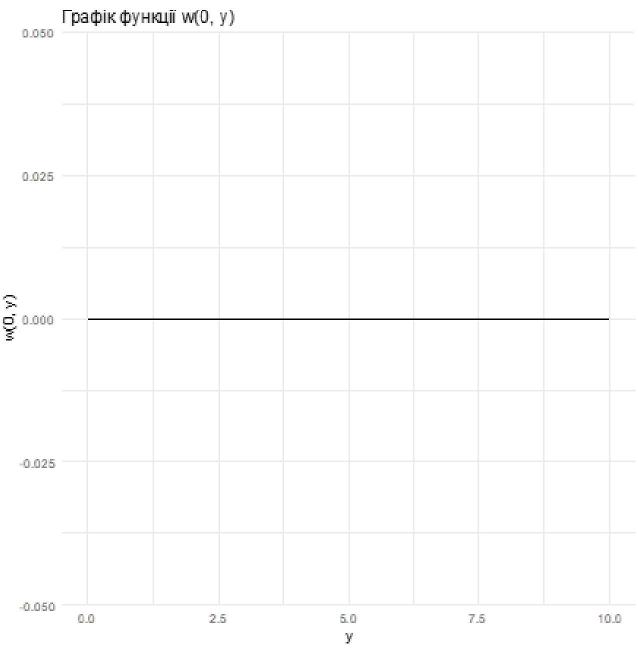

Рисунок 2. $w(0, y)$

На рис. 2 видно виконання крайової умови $w|_{x=0} = 0,\ 0 < y < 10$ та, ймовірно, $w|_{x\to\infty} \to 0$.

4.2 Графіки функції $\tau_{xz}(x, y)$

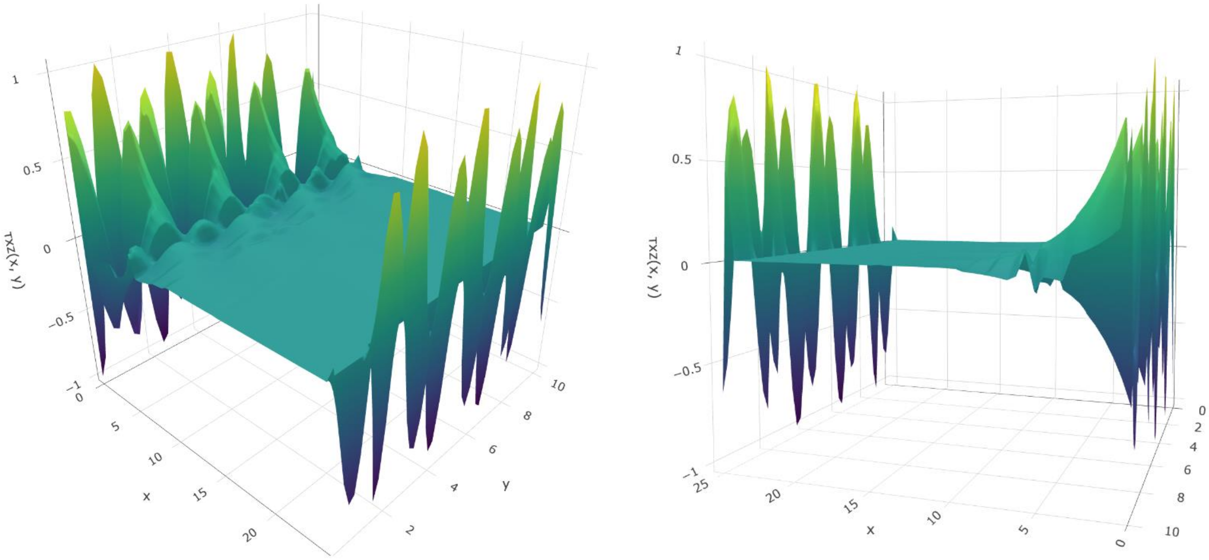

Рисунок 2. Загальний вигляд графіку $\tau_{xz}(x, y)$

4.3 Графіки функції $\tau_{yz}(x, y)$

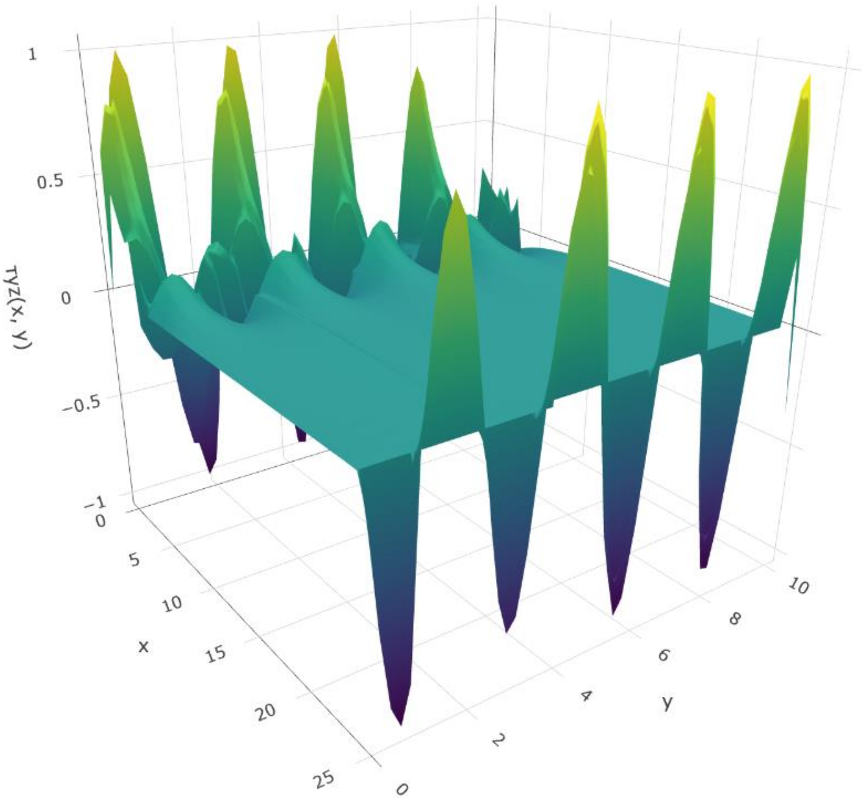

Рисунок 3. Загальний вигляд графіку $\tau_{yz}(x, y)$

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі була розв’язана задача повздовжнього зсуву для півсмуги, що послаблена тріщиною, за допомогою методу інтегрального перетворення Фур’є та застосування функції Гріна. А розв’язання задачі зведено до розв’язання сингулярного інтегрального рівняння.

Отримано аналітичні вирази для переміщень та напружень. Також були побудовані графіки переміщень та напружень для випадку без стрибку переміщень на берегах тріщини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г. Я. Навчальний посібник з курсу “Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень” : для студ. техн. спец. ВНЗ / Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд. – Одеса : Астропринт, 2005 . – 183 с.
2. Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю., Реут В.В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги // Монографія. Одеса, Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2019. – 160 с.
3. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of integrals, series, and products, 6th edition. Academic Press, 2000. 1163 p.
4. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів : навч. посіб. для студ. вузів, які навч. за напрямами підготовки “Прикладна математика”, “Механіка” / Г. Я. Попов [та ін.]. – Одеса : Астропринт, 2010 . – 115 с.