Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **« Асимптотичні властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією першого порядку »**

«Asymptotic properties of solutions to stochastic differential equations with interaction of the first order»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Добров Олег Ігорович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Білозерова М.О.

Рецензент: доктор фіз-мат. наук, проф. Євтухов В.М.

Рекомендовано до захисту:	Захищено на засіданні ЕК № ______
Протокол засідання кафедри	Протокол № ____ від «____» ____ р.
№ ___ від «_____» _______ р.	Оцінка _______ / _______ / _______
Завідувач кафедри	Голова ЕК
___________ ______________	___________ _________________

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

Вступ 3

1 Стохастичні диференційні рівняння зі взаємодією. Приклади. Деякі застосування. 4

2 Теорема існування розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. 10

3 Приклади аналітичного опису розв'язків деяких видів стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. 14

4 Зсув-компактність випадкових мір та її звя'зок з поведінкою позв'язків стохастичних дифернціальних рівнянь зі взаємодією. 17

5 Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь зі взаємодією першого порядку без дрейфової частини 22

Висновки 29

Список літератури 30

ВСТУП

Останніми сторіччами істотнийй інтерес викликають дослідження поведінки розв'язків різноманітних хаотичних систем. Зокрема, увагу привертають моделі поведінки частинок у різноманітних потоках, зокрема стохастичних. Поведінка таких об'єктів описується динамічними системами. Поведінка детермінованої системи, на яку діють всілякі так звані "шуми описуються стохастичними диференціальними рівняннями. У багатьох практичних застосуваннях шумами можуть слугувати дія вітру, турбулентні потоки та інший вплив навколишнього середовища, який добре моделюється броунівським рухом.

При розглядв моделей поведінки частинок у потоці виникають ситуації, коли частинки підчас руху чинять істотний вплив одна на одну, а також змінюють закони руху одна одної. У цих випадках коефіціенти відповідних стохастичних диференіальних рівнянь залежать від деяких характеристик позиції інших частинок. Такі стохастичні диференціальні рівняння називаються стохастичними диверенціальним рівняннями зі взаємодією та були введені А.А. Дороговцевим [3]. Отже, тема даної роботи є актуальною. Об'єктом дослідження є деякі класи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. Предметом дослідження є асимптотичні властивості розв'язків таких рівнянь. Метою роботи є вивчення поняття стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, детальние дослідження конкретних моделей з використанням таких рівнянь. Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі вводиться поняття стохастичного диференціального рівняння зі взаємодією та розглядаються деякі моделі із застосуваннням відповідних рівнянь. У другому розділі доводиться теорема існування розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. У третьому розділі розглядяаються найпростіші приклади анализу поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією у залежності від початкові міри. У четвертому розділі розглядається поняття зсув-компактості, яке було введено А.А. Дороговцевим та М.П. Карліковою [5], що є модифікацією поняття стійкості для мірозначних процесів, що відповідають рівнянням зі взаємодією.

РОЗДІЛ 1

СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ. ПРИКЛАДИ. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ.

Нехай $\{w_k; k \geqslant 1\}$ – послідовність незалежних $\mathbb{R}^d$-значних вінеровських процесів, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Процеси $\{w_k; k \geqslant 1\}$ відіграватимуть роль випадкового середовища, в якому рухаються частинки, що утворюють стохастичний потік. Відповідне стохастичне диференціальне рівняння виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} dx(u,t) = a(x(u,t), \mu_t, t)dt + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x(u,t), \mu_t, t)dw_k(t) \\ x(u,0) = u, \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot, t)^{-1} \end{cases} \tag{1.1}$$

Тут μ_0 – певна ймовірнісна міра на $\mathbb{R}^d$, що відіграє роль початкового розподілу маси частинок, $\{x(u,t); t \geqslant 0\}$ – траєкторія частинки, що вийшла з точки $u \in \mathbb{R}^d$, $\mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot, t)^{-1}$ – образ міри μ_0 при відображенні $x(\cdot, t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, інакше кажучи, розподіл маси частинок у час t. Коефіцієнти a та $\{b_k; k \geqslant 1\}$ набувають значення $\mathbb{R}^d$ та $\mathbb{R}^{d\times d}$ відповідно і залежить від $x(u,t)$, тобто від положення що стартувала з u частинки, а також від μ_t, тобто, від певної характеристики становища інших частинок. Рівняння (1.1) формально, і є як зазвичай, скороченим записом відповідного інтегрального рівняння. Перед тим як перейти до розв'язання (1.1), розглянемо деякі окремі випадки та приклади, а також наведемо іншу форму запису для нескінченної суми стохастичних інтегралів у правій частині (1.1).

Приклад 1.1. Детерміноване рівняння для опису руху системи частинок, зі взаємодією. Покладемо в (1.1) все b_k рівними 0, а коефіцієнт a задамо наступним чином:

$$a(r,\mu,t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(r,v)\mu(dv),$$

де f - обмежена безперервна функція на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Нехай міра μ_0 має вигляд

$$\mu_t \sum_{k=1}^{N} p_k \delta_{u_k},$$

де $p_k > 0, k = 1, ..., N, u_k; k = 1,..., N$ - різні елементи $\mathbb{R}^d$. В цьому випадку для довільного t міра μ_t матиме вигляд

$$\mu_t \sum_{k=1}^{N} p_k \delta_{x(u_k,t)}.$$

Тому (1.1) зараз запишеться так:

$$\begin{cases} dx(u,t) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x(u,t),x(u_k,t))dt \\ x(u,0) = u, u \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1.2}$$

Позначимо для $k = 1, ..., N \quad y_k(t) = x(u_k, t)$. Тоді для $y_k, k = 1, ..., N$ виходить звичайна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dy_k(t) = \sum_{j=1}^{N} p_i f(y_k(t),y_i(t))dt \\ y_k(0)u_k, k = 1, ..., N. \end{cases} \tag{1.3}$$

У (1.3) функції y_k можна розглядати як траєкторії частинок, що мають масу p_k та взаємодіючих один з одним (функція f описує взаємодію). З фізичної точки зору (1.3) має недоліки. По-перше, у правій частині немає маси p_k k-ої частинки, по-друге, (1.3) включає тільки парні взаємодії між частинками. Остання обставина легко виправити розглядаючи коефіцієнт a більш складного виду

$$a(r,\mu,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \int \underset{\mathbb{R}^d}{\overset{j}{\cdot\cdot}} \int f_i(r,v_1,...,v_j)\mu(dv_1)...\mu(dv_j)$$

відповідними обмеженнями на ядра f_j, $j \geqslant 1$ та угодою, що за $j = 0$ доданок має вигляд $f_0(r)$. Після такого ускладнення (1.3) перетвориться на систему звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} dy_k(t) = \sum_{j=1}^{N} \varphi(y_k(t); y_1(t),...,y_N(t))dt \\ y_k(0)u_k, k = 1, ..., N. \end{cases} \tag{1.4}$$

Припускаючи, що функція задовольняє умові Липшица за сукупністю змінних, можна зробити висновок про існування та єдиність рішення (1.4) (або, в окремому випадку (1.3)). Проте вихідне рівняння (1.1) містить інформацію не тільки про рух важких частинок, а й про переміщення частинок, що стартували з довільної точки простору. Тому для повного вирішення (1.1) у цьому випадку до (1.4) потрібно додати ще наступне завдання Коші

$$\begin{cases} dx(u,t) = \varphi(x(u,t); y_1(t),...,y_N(t))dt \\ x(u, 0) = u, u \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1.5}$$

у якій $y_1, ..., y_N$ вважаються вже відомими. Зазначимо, що через єдиність рішення (1.4) та (1.5) при $u = u_k x(u_k, \cdot)$ збігаються з y_k. Розглянемо числові приклади. Нехай $d = 1$,

$$a(r,\mu,t) = \int_{\mathbb{R}} (r - v)\mu(dv) = r - \int_{\mathbb{R}} v\mu(dv).$$

Такий вибір коефіцієнта відповідає ситуації, коли всі частинки відштовхуються від загального центру мас. Нехай

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1.$$

Поступая вищеописаним чином, розглянемо $y_1(t) = x(-1, t)$ та $y_2(t) = x(1, t)$. Для них зараз виходить наступне завдання Коші

$$\begin{cases} dy_1(t) = (y_1(t) - \frac{1}{2}(y_1(t) + y_2(t)))dt, \\ dy_2(t) = (y_2(t) - \frac{1}{2}(y_1(t) + y_2(t)))dt, \\ y_1(0) = -1, y_2(0) = 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

Розв'язанням цього завдання є функції $y_1(t) = -e^t, y_2(t) = e^t$. Тепер, для довільної початкової умови u траєкторія частки, що стартувала з u, описується рівнянням

$$dx(u,t) = x(u,t)dt.$$

Таким чином, зараз $\forall t \geqslant: \forall u \in \mathbb{R} : x(u,t) = ue^t$,

$$\mu_t = \frac{1}{2}\delta_{e^t} + \frac{1}{2}\delta_{-e^t}.$$

Змінюючи початкову міру μ_0 отримаємо інші траєкторії руху частинок. Нехай

$$\mu_0 = p\delta_{-1} + p\delta_1,$$

де $p, q > 0, p + q = 1$.

В цьому випадку замість (1.6) отримуємо

$$\begin{cases} dy_1(t) = (qy_1(t) - qy_2(t))dt, \\ dy_2(t) = (-py_2(t) + py_2(t))dt, \\ y_1(0) = -1, y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Звідси

$$y_1(t) = -2qe^{-t} + (q - p),$$

$$y_2(t) = 2qe^t + (q - p).$$

Отже, $\forall t \geqslant 0 \forall u \in \mathbb{R}$:

$$x(u,t) = (u + q - p)e^t + (p - q).$$

Приклад 1.2. Взаємодіючі частки, що здійснюють броунівський

рух. Нехай у (1.1) коефіцієнт a тотожно дорівнює 0, а коефіцієнти $\{b_k; k \geqslant 1\}$ задані таким чином:

$$b_1(r,\mu,t) = cos(\int_{\mathbb{R}} f(r,u)\mu(du))$$

$$b_2(r,\mu,t) = sin(\int_{\mathbb{R}} f(r,u)\mu(du)), b_k = 0, k > 2.$$

Припустимо, що початковий захід $\mu 0 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. Вступаючи як і в попередньому прикладі, для випадкових процесів $y_1(t) = x(-1,t)$ та $y_2(t) = x(1,t)$ отримаємо завдання Коші для системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} dy_1(t) = cos(\frac{1}{2}f(y_1(t),y_1(t)) + \frac{1}{2}f(y_1(t),y_2(t)))dw_1(t) \\ +sin(\frac{1}{2}f(y_1(t), y_1(t)) + \frac{1}{2}f(y_1(t),y_2(t)))dw_2(t), \\ dy_2(t) = cos(\frac{1}{2}f(y_2(t),y_2(t)) + \frac{1}{2}f(y_2(t),y_1(t)))dw_1(t) \\ +sin(\frac{1}{2}f(y_2(t), y_2(t)) + \frac{1}{2}f(y_2(t),y_1(t)))dw_2(t), \\ y_1(0) = -1, y_2(0) = 1. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Якщо функція f відповідає умові Липшица за сукупністю змінних, то (1.7) має єдине рішення. Тепер рішення вихідного рівняння зводиться до вирішення наступного завдання Коші:

$$\begin{gathered} dx(u,t) = cos(\frac{1}{2}f(x(u,t),y_1(t)) + \frac{1}{2}f(u,t), y_2(t)))dw_1(t) \\ +sin(\frac{1}{2}f(x,t),y_1(t)) + \frac{1}{2}f(x(u,t),y_2(t)))dw_2(t), \\ x(u,0) = u. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Зазначимо такі дві обставини, що стосуються (1.8). По-перше, за наявності f обмеженої похідної x має модифікацію (як випадкове поле, залежить від двох аргументів u і t), що є диффеоморфізм $\mathbb{R}$ на себе при кожному t. Таким чином траєкторії частинок, що стартували з різних точок простору, що не перетинаються. По-друге, при кожному фіксованому і випадковому процес $\{x(u,t), t \geqslant 0\}$ є безперервним мартингалом з характеристикою

$$\langle x(u,\cdot)\rangle_t = t,$$

тобто вінерівським процесом.

Таким чином, у даному прикладі рівняння (1.1) описує систему взаємодіючих частинок (з них дві важкі), що здійснюють броунівський рух кожна.

Перейдемо тепер до іншої форми опису нескінченної суми стохастичних інтегралів, що виникають за формального запису (1.1). Припустимо спочатку, що вінеровські процеси $\{w_k; k \geqslant 1\}$ одновимірні. Розглянемо простір $L_2(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ квадратично інтегрованих у міру Лебега λ_d функцій на $\mathbb{R}^d$. Це речове сепарабельний гільбертовий простір. Нехай $\{e_k; k \geqslant 1\}$ – ортонормований базис у $L_2(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$. Для борелівського $\Delta \subset \mathbb{R}^d \times [0; +\infty)$, що має кінцевий захід Лебега, за теоремою Фубіні для багатьох $t \in [0; +\infty)$ переріз

$$\Delta_t = \{u \in \mathbb{R}^d : (u,t) \in \Delta\}$$

таке, що $\mathbb{I}\Delta_t \in L_2(\mathbb{R}^d$. Розглянемо розкладання $\mathbb{I}\Delta_t$ у базисі $\{e_k; k \geqslant 1\}$:

$$\mathbb{I}\Delta_t = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cdot e_k.$$

У цьому розкладі $\{f_k; k \geqslant 1\}$ – вимірні функції такі, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_k^2(t)dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}\Delta_t(u)\lambda_d(du)dt =$$

$$\lambda_{d+1}(\Delta) < +\infty.$$

РОЗДІЛ 2

ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ.

Означення 2.1. Розв'язанням задачі Коші (сильним рішенням), що відповідає заданим коефіцієнтам a і b і початковою мірою μ_0 називається випадкове $\mathbb{R}^d$ -значне поле $x(u,t), u \in \mathbb{R}^d, t \in [0;+\infty)$ таке, що

1) при кожному $t \geqslant 0$ звуження x на інтервал $[0;t] \in \mathcal{B}_d \otimes \mathcal{B}_{[0;t]} \otimes \mathcal{F}_t$ вимірним (тут $\mathcal{B}_d$ і $\mathcal{B}_{[0;t]}$ - борелівські σ-алгебри в $\mathbb{R}^d$ і $[0;t]$ відповідно),
2) при фіксованому $u \in \mathbb{R}^d$ з ймовірністю 1 за кожного $t \geqslant 0$ справедливий інтегральний аналог (1.1)
3) з ймовірністю 1 виконано умову Коші $x(u,0) = u$ для всіх $u \in \mathbb{R}^d$

Наступна теорема містить достатні умови для існування та єдиності рішення (1.1)

$$\begin{cases} dx(u,t) = a(x(u,t),\mu_t,t)dt + \int_{\mathbb{R}^d} b(x(u,t),\mu_t,t,q)W(dt,dq) \\ x(u,0) = u, \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Пусть коефіцієнти a і b в (2.1) удовлетворяють наступномій умові Липшица щодо просторової і мерозначної змінних*

$$\exists C > 0 : \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d, \nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M} : \forall_t \geqslant 0 :$$

$$||a(u_1,\nu_1,t) - a(u_2,\nu_2,t)||+$$
$$+(\int_{\mathbb{R}^d} ||b(u_1,\nu_1,t,q) - b(u_2,\nu_2,t,q)||^2 dq)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant C(||u_1 - u_2|| + \gamma(\nu_1,\nu_2)).$$

Крім того, нехай функції a і b безперервні за змінними x, μ і t (у *нормі простору L_2 на $\mathbb{R}^d$.*

Тоді (2.1) *має рішення, визначене* $[0;+\infty)$, *яке єдине.*

Доведення. Скористаємося методом послідовних наближень. Визначимо $x_0(u,t) = u$ для всіх $u \in \mathbb{R}^d, t \geqslant 0$. Відповідно μ_t^0 виявиться тотожно рівної μ_0. Розглянемо тепер рівняння

$$x_1(u,t) = u + \int_0^t a(x_1(u,s),\mu_s^0,s)ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(x_1(u,s),\mu_s^0,s,q)W(ds,dq).$$

Перевіримо, що x_1 має вимірну u,t модифікацію. Для $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d$ розглянемо

$$||x_1(u_1,t) - x_1(u_2,t)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant ||u_1 - u_2||^2 + 3(\int_0^t ||a(x_1(u_1,s),\mu_0,s) - a(x_1(u_2,s),\mu_0,s)||ds)^2 +$$

$$+3|| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (b(x_1(u_1,s),\mu_0,s,q) - b(x_1(u_2,s),\mu_0,s,q))W(ds,dq)||^2.$$

Отже,

$$M \sup_{[0;T]} ||x_1(u_1,s) - x_1(u_2,s)||^2 \leqslant C_1 ||u_1 - u_2||^2. \tag{2.2}$$

Тому x_1 має безперервну за сукупністю змінних модифікацію в силу теореми Колмогорова. Розглянемо тепер $\mu_t^1 = \mu_0 \circ x_1(\cdot,t)^{-1}, t \geqslant 0$. μ_t^1 – випадковий міра при кожному $t \geqslant 0$. Визначимо тепер x_2 як рішення рівняння

$$x_2(u,t) = u + \int_0^t a(x_2(u,s),\mu_s^1,s)ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(x_2(u,s),\mu_s^1,s,q)W(ds,dq).$$

Поступаючи аналогічним чином, отримаємо послідовність випадкових процесів $\{x_n, \mu^n; n \geqslant 1\}$ таких, що за кожного $n \geqslant 1$

$$\mu_t^1 = \mu_0 \circ x_1(\cdot,t)^{-1}, t \geqslant 0,$$

$$dx_{n+1}(u,t) = a(x_{n+1}(u,t),\mu_t^n,t)dt+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^d} b(x_{n+1}(u,t),\mu_t^n,t,q)W(ds,dq).$$

Перевіримо коректність такої побудови, тобто. що за кожного $n \geqslant 1 x_n$ виміряємо по сукупності змінних, а також що рівняння для x_{n+1} дозволено єдиним чином. І тому доведемо з допомогою методу математичної індукції таку оцінку. При кожному $n \geqslant 1$

$$M \sup_{[0;T]} ||x_n(u_1,s) - x_n(u_2,s)||^2 \leqslant C_2||u_1 - u_2||^2. \tag{2.3}$$

Припустимо, що це справедливо для деякого n. За припущенням x_n має модифікацію, безперервну за сукупністю змінних із ймовірністю 1. Отже, випадковий мірозначний процес $\{\mu_t^n,t \in [0;T]\}$ є безперервним з ймовірністю 1. Тому коефіцієнти рівняння для x_{n+1} задовольняють умові Ліпшиця у відповідній нормі та вимірні. Отже, x_{n+1} визначено єдиним чином. Тепер справедливість (2.3) виходить стандартно за допомогою леми Гронуолла–Беллмана.

Розглянемо для $n \geqslant 1, t \in [0;T]$

$$M \sup_{[0;t]} ||x_{n+1}(u,s) - x_n(u_2,s)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_0^t M \sup_{[0;s]} ||x_{n+1}(u) - x_n(u)||^2 ds+$$

$$+C_2 \int_0^t \{M \sup_{[0;s]} ||x_{n+1}(u,s) - x_n(u,s)||^2 + M \sup_{[0;s]} \gamma(\mu^n,\mu^{n-1})^2\} ds$$

В силу леми Гронуолла-Беллмана

$$M \sup_{[0;t]} ||x_{n+1}(u,s) - x_n(u_2,s)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int_0^t M \sup_{[0;s]} \gamma(\mu_\tau^n, \mu_\tau^{n-1})^2 ds.$$

Відмітимо, що

$$\gamma(\mu_\tau^n, \mu_\tau^{n-1}) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(||x_n(u,t) - x_{n-1}(u,t)||)\mu_0(du),$$

де через φ позначено функцію

$$\varphi(r) = \frac{r}{1+r}, r \geqslant 0.$$

Тому

$$M \sup_{[0;t]} \gamma(\mu_s^n, \mu_s^{n-1})^2 \leqslant$$

$$\leqslant M \sup_{[0;s]} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(||x_n(u,t) - x_{n-1}(u,t)||)\mu_0(du) \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant M \sup_{[0;s]} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(||x_n(u,t) - x_{n-1}(u,t)||)^2 \mu_0(du) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} M \sup_{[0;s]} \varphi(||x_n(u,t) - x_{n-1}(u,t)||)^2 \mu_0(du) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} M \sup_{[0;s]} ||x_n(u,t) - x_{n-1}(u,t)||^2 \mu_0(du) \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int_0^t M \sup_{[0;s]} \gamma(\mu_\tau^{n-1}, \mu_\tau^{n-2})^2 ds.$$

Тепер перевірка збіжності x_n та μ^n при $n \to \infty$ до єдиного рішення вихідного рівняння завершується стандартним чином. Теорему доведено. □

Лема 2.2. *Нехай x та $\{y_n; n \geqslant 1\}$ – розв'язання задачі Коші, що відповідають заходам μ_0 та $\{\nu_n; n \geqslant 1\}$. Якщо $\nu^n \to \mu_0, n \to \infty$ у $\mathfrak{M}$, то* $\forall u \in: \mathbb{R}^d$

$$M \sup_{[0;T]} -y_n(u,t)||^2 \to 0, n \to \infty,$$

$$M \sup_{[0;T]} \gamma(\mu_t, \nu_t^n) \to 0, n \to \infty$$

.

РОЗДІЛ 3

ПРИКЛАДИ АНАЛІТИЧНОГО ОПИСУ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ВИДІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ.

Приклад 3.1. Нехай коефіцієнти рівняння (2.1) влаштовані так

$$a(r,\mu,s) = \int_{\mathbb{R}^d} a_1(v)\mu(dv),$$
$$b(r,\mu,s,q) = b_0(q).$$

При цьому функція a_1 обмежена та задовольняє умові Липшиця. Тоді за кожного $u \in \mathbb{R}^d d\{x(u,t); t \in [0;T]\}$ - дифузійний випадковий процес. Справді, розглянемо нову функцію

$$g(r) = \int_{\mathbb{R}^d} a_1(v + r)\mu_0(dv).$$

Тоді для довільного $u \in \mathbb{R}^d$ процес $x(u,\cdot)$ можна записати у вигляді

$$x(u,t) = u + \int_0^t y(s)ds + m(t),$$

де випадковий процес

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}^d} a_1(x(v,t))\mu_0(dv)$$

та мартингал

$$m(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b_0(q)W(dq,dt)$$

одні й самі для всіх u. Тому

$$x(u,t) = u + \int_0^t g(x(u,s) - u)ds + m(t). \tag{3.1}$$

Легко бачити, що m є вінеровським процесом $\mathbb{R}^d$ з коваріаційною матрицею

$$\int_{\mathbb{R}^d} b_0^*(q) b_0(q) dq.$$

Отже, згідно (3.1), $x(u,\cdot)$ - дифузійний (і тим самим марківський) процес у $\mathbb{R}^d$. Зазначимо, що зараз марковським буде також процес, що описує рух будь-якого кінцевого набору частинок $\{(x(u_1,t),...,x(u_n,t)); t \in [0;T]\}$.

Приклад 3.2.

$$dx(u,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x(u,t) - x(v,t))\mu_0(dv)dw(t),$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1,$$

у якому φ – парна функція, що дорівнює 0 у точці 0. Для $x(-1,t)$ та $x(1,t)$ отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} dx(-1,t) = \dfrac{1}{2}\varphi(x(-1,t) - x(1,t))dw(t), \\ dx(1,t) = \dfrac{1}{2}\varphi(x(1,t) - x(-1,t))dw(t), \\ x(-1,0) = -1, x(1,0) = 1, \end{cases}$$

з якої випливає, з урахуванням парності функції φ, що

$$d(x(1,t) - x(-1,t)) = 0$$

Тому

$$x(1,t) = x(-1,t) + 2, t \geqslant 0$$

Таким чином

$$x(1,t) = \frac{1}{2}\varphi(2)w(t) + 1,$$

$$x(-1,t) = \frac{1}{2}\varphi(2)w(t) - 1,$$

Розглянемо тепер $x(0,t)$:

$$dx(0,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x(0,t) - x(1,t)) +$$

$$+\varphi(x(0,t)-x(-1,t))]dw(t)=$$
$$=\frac{1}{2}[\varphi(x(0,t)-1-\frac{1}{2}\varphi(2)w(t))+$$
$$+\varphi(x(0,t)+1-\frac{1}{2}\varphi(2)w(t))]dw(t).$$

Позначимо $\psi(a)=\frac{1}{2}\varphi(a-1)+\frac{1}{2}\varphi(a+1), a\in\mathbb{R}$, а також покладемо далі $\varphi(2)=2$.

Тоді
$$dx(0,t)=\psi(x(0,t)-w(t))dw(t),$$
$$x(0,0)=0.$$

Покажемо, що $\{x(0,t);t\geqslant 0\}$ не є марковським процесом. Позначимо далі $z(t)=x(0,t), t\geqslant 0, \mathcal{F}_t^z=\sigma(z(s);s\leqslant t), \mathcal{F}_t^w=\sigma(w(s);s\leqslant t)$. За побудовою $\mathcal{F}_t^z\subset\mathcal{F}_t^w$ за кожного $t\geqslant 0$. Доведемо зворотне включення. Справді, за кожному $t>0$:

$$\psi(z(s)-w(s))^2ds=P-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(z\frac{t(k+1)}{n}\right)-z\left(\frac{tk}{n}\right)\right]^2$$

. Отже, $\psi(z(t)-w(t))$ вимірна щодо $\mathcal{F}_t^z$ випадкова величина. C з урахуванням відокремленості від 0 отримуємо, що

$$w(t)=\int_0^t\frac{1}{\psi(z(s)-w(s))}dz(s)$$

є $\mathcal{F}_t^z$ вимірною випадковою величиною. Таким чином, $\mathcal{F}_t^z=\mathcal{F}_t^w, t\geqslant 0$.

РОЗДІЛ 4

ЗСУВ-КОМПАКТНІСТЬ ВИПАДКОВИХ МІР ТА ЇЇ ЗВЯ'ЗОК З ПОВЕДІНКОЮ ПОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ.

Цей розділ присвячений модифікації поняття стійкості для мірозначних процесів, що відповідають рівнянням із взаємодією. Необхідність у такій модифікації можна побачити, зауваживши, що за умов, що забезпечують стійкість розв'язків звичайних стохастичних диференціальних рівнянь, мірозначне рішення зі зростанням часу стає близьким до випадкової δ-функції, тобто, вся маса зосереджується в одній точці, що випадково рухається у просторі. Для опису менш тривіальної граничної поведінки нам знадобляться нові визначення.

Означення 4.1. Безліч мір$\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{M}_n$ називається зсув-компактним, якщо для кожного про $\alpha \in \mathfrak{A}$ існує вектор $u_\alpha \in \mathbb{R}^d$ такий, що безліч мір $\{\mu_\alpha - u_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ компактно в $\mathfrak{M}_n$ (тут $\mu_\alpha - u_\alpha$ – зсув міри μ_α на вектор u_α).

Лема 4.2. *Нехай сімейство мір $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{M}_n$ та сімейство векторів $\{u_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathbb{R}^d$ такі, що сімейство $\{\mu_\alpha - u_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ компактно у $\mathfrak{M}_n$. Припустимо, що для множини векторів $\{v_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ справедлива нерівність*

Означення 4.3. Вектор u називається центром ймовірнісної міри μ на $\mathbb{R}^d$, якщо

$$\gamma(\delta_u,\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{||u-v||}{1+||u-v||} u(du) =$$

$$\min_{p\in\mathbb{R}^d} \gamma(\delta_p,\mu).$$

Лема 4.4. *Нехай сімейство $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ зсув-компактно $\mathfrak{M}_0$. Тоді сімейство $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ (c_α – центр міри μ_α) компактно в $\mathfrak{M}_0$.*

Доведення. Розглянемо набір векторів $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$, разом з яким $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ задовольняє означенням 4.1. Тоді

$$\varepsilon(r) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mu_\alpha(\{u : ||u - u_\alpha|| > r\}) \to 0, r \to \infty.$$

Зазначимо, що, згідно з визначенням центру,

$\forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall r > 0 :$

$$\gamma(\delta_{c_\alpha},\mu_\alpha) \leqslant \frac{r}{r+1}(1 - \varepsilon(r)) + \varepsilon(r).$$

З іншого боку, для довільного такого, що $||v - u_\alpha|| \geqslant a \cdot r$, де $a > 1$ справедливо

$$\gamma(\delta_v,\mu_\alpha) \geqslant \frac{(a-1)r}{1+(a-1)r}(1 - \varepsilon(r)).$$

Отже, вибравши r_1, r_2 та а так, щоб

$$\frac{(a-1)r_2}{1+(a-1)r_2}(1 - \varepsilon(r_2)) > \frac{r_1}{1+r_1}(1 - \epsilon(r_1)) + \varepsilon(r_1),$$

отримаємо, що

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} ||u_\alpha - c_\alpha|| \leqslant a \cdot r_2.$$

Звідси з урахуванням леми 4.2 отримуємо необхідне затвердження. □

Наступний приклад показує, що поняття зрушення-компактності корисне при обговоренні рівнянь із взаємодією.

Приклад 4.1. Нехай $d = 1$. Розглянемо рівняння

$$\begin{cases} dx(u,t) = \pi dt - \int_{\mathbb{R}} \operatorname{arctg}(x(u,t) - v)\mu_t(dv)dt \\ x(u,0) = u, \mu_t = \mu \circ x(\cdot,t)^{-1}. \end{cases}$$

Для довільної міри $\mu \in \mathfrak{M}$, це рівняння має єдине рішення. Очевидно, що

$$\forall u \in \mathbb{R} : \quad x(u,t) \to +\infty, t \to +\infty.$$

Тому сімейство мір $\{\mu_t; t \geqslant 0\}$ не може бути передкомпактним в $\mathfrak{M}$. Зауважимо, однак, що для довільних $u_1 < u_2$

$$d(x(u_1,t)-x(u_2,t))^2 = 2(x(u_1,t)-$$

$$-x(u_2,t))\int \mathbb{R}[\operatorname{arctg}(x(u_2,t)-v)-\operatorname{arctg}(x(u_1,t)-v)]\mu_0(dv)dt \leqslant 0.$$

Отже, відстань між $x(u_1,t)$ та $x(u_2,t)$ з часом не зростає. Покладемо для кожного $u \in \mathbb{R}$

$$f(u) = \lim_{t\to+\infty}(x(u,t)-x(0,t)).$$

Тоді заходи $\mu_t - x(0,t)$ слабо сходяться при $t \to +\infty$ до міри

$$\nu = \mu_0 \circ f^{-1}.$$

Розглянемо тепер випадкові міри.

Означення 4.5. Безліч випадкових мір $\{\mu_\alpha;\alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{M}_n$ називається зсув-компактним, якщо для кожного $\alpha \in \mathfrak{A}$ випадковий вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ такий, що сімейство $\{\mu_\alpha - u_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо компактне у $\mathfrak{M}_n$

Оскільки мірозначні процеси, пов'язані з рівняннями із взаємодією, влаштовані як образи мір при випадкових відображеннях, то корисною буде наступна лема.

Лема 4.6. *Припустимо, що сімейство випадкових мір $\{\mu_\alpha;\alpha \in \mathfrak{A}\}$, побудовано так*

$$\mu_\alpha = \mu_0 \circ x_\alpha^{-1}, \alpha \in \mathfrak{A}$$

а випадкові відображення x_α задовольняють умові

$\exists A > 0 \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall u, \quad v \in \mathbb{R}^d :$

$$M||x_\alpha(u) - x_\alpha(v)||^{n+1} \geqslant A||u-v||^{n+1}.$$

Тоді для $\mu_0 \in \mathfrak{M}_{n+1}$ сімейство $\{\mu_\alpha;\alpha \in \mathfrak{A}\}$ зсув-компактно в $\mathfrak{M}_n$.

Доведення. За умовою

$$M\int_{\mathbb{R}^d} ||x_\alpha(u) - x_\alpha(0)||\mu 0(du) \leqslant$$

$$\leqslant A^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} ||u||^{n+1} \mu_0(du) \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Тому майже напевно визначено наступний інтеграл

$$m_\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} x_\alpha(u) \mu_0(du).$$

Для довільного L>0

$$P\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} ||x_\alpha(u) - m_\alpha||^{n+1} \mu_0(du) > L \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{L} M \int_{\mathbb{R}^d} \int ||x_\alpha(u) - x_\alpha(v)||^{n+1} \mu_0(du) \mu_0(dv) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{L} \int_{\mathbb{R}^d} \int ||u - v||^{n+1} \mu_0(du) \mu_0(dv).$$

Зазначимо, що останній інтеграл є кінцевим. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $L > 0$ таке, що

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} ||u||^{n+1} (\mu_\alpha - m_\alpha)(du) > L \right\} < \varepsilon.$$

Покладемо

$$K_\varepsilon = \{\nu \in \mathfrak{M}_n : \int_{\mathbb{R}^d} ||u||^n \mathbb{I}_{\{||u|| > c\}} \nu(du) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L_\varepsilon}{c} \quad \forall c > 0\}.$$

K_ε компакт в $\mathfrak{M}_n$.При цьому для кожного $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$P\{\mu_\alpha - m_\alpha \in K_\varepsilon\} = P\{ \int_{\mathbb{R}^d} ||x_\alpha(u) - m_\alpha||^n \cdot$$

$$\cdot \mathbb{I}_{\{||x_\alpha(u) - m_\alpha|| > c\}} \mu_0(du) \leqslant \frac{L_\varepsilon}{c} \quad \forall c >\} \geqslant$$

$$\geqslant P\{ \int_{\mathbb{R}^d} ||x_\alpha(u) - m_\alpha||^{n+1} \mu_0(du) \leqslant L_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon.$$

Отже, сімейство розподілів $\mu_\alpha - m_\alpha; \alpha \in A$ щільно, а тим самим, відносно компактно $\mathfrak{M}_n$. Лемма доведена. $\square$

Наступна теорема є прикладом використання наведеного вище твердження для рівнянь із взаємодією. Розглянемо рівняння

$$dx(u,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x(u,t)-v)\mu_t(dv)dt + b(x(u,t),\mu_t)dw(t),$$

$$\mu_t = \mu + 0 \circ x(\cdot,t)^{-1}, t \geqslant 0, x(u,0) = u, u \in \mathbb{R}^d,$$

з одномірним, для простоти, винеровским процесом w.

Теорема 2. *Припустимо, що $\mu_0 \in \mathfrak{M}_{2n+2}$, φ задовольняє умові $(u-v, \varphi(u)-\varphi(v)) \leqslant -\alpha||u-v||^2, u,v \in \mathbb{R}^d$, b задовольняє умові Липшица по x і μ з постійною B, та*

$$\alpha - \frac{1}{2}B^2(2n+1) \geqslant 0.$$

Тоді безліч $\{\mu_t; t \geqslant 0\}$ зсув-компактно в $\mathfrak{M}_{2n}$.

Доведення. Для довільних $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d$

$$M||x(u_1,t)-x(u_2,t)||^{2n+2} = ||u_1-u_2||^{2n+2}+$$

$$+\int_0^t (2n+2)||x(u_1,s)-x(u_2,s)||^{2n} \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x(u_1,s)-v)-$$

$$-\varphi(x(u_2,s)-v), x(u_1,s)-x(u_2,s))\mu_s(dv)ds+$$

$$+2(n+1)n\int_0^t ||x(u_1,s)-x(u_2,s)||^{2n-2}(x(u_1,s)-x(u_2,s)$$

$$b(x(u_1,s),\mu_s)-b(x(u_2,s),\mu_s))^2ds+$$

$$+(n+1)\int_0^t ||x(u_1,s)-x(u_2,s)||^{2n}||b(x(u_1,s),\mu_s)-b(x(u_2,s),\mu_s)||^2ds \leqslant$$

$$\leqslant ||u_1-u_2||^{2n+2}+(-\alpha(2n+2)+B^2n(n+1))\int_0^t M||x(u_1,s)-x(u_2,s)||^{2n+2}ds \leqslant$$

$$\leqslant ||u_1-u_2||^{2n+2}.$$

Тепер затвердження теореми випливає з леми 4.6. □

РОЗДІЛ 5

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ БЕЗ ДРЕЙФОВОЇ ЧАСТИНИ

Розглянемо одновимірне стохастичне диференціальне рівняння зі взаємодією

$$\begin{cases} dx(u,t) = \sigma(x(u,t),\mu_t)dw(t) \\ x(u,0) = u, u \in \mathbb{R} \\ \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}, t \geqslant 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Такі рівняння та керовані ними стохастичні потоки були введені А.А. Дороговцевим [3]. Виявляється, що властивості розв'язків таких рівнянь відрізняються від відповідних властивостей розв'язків звичайних стохастичних диференціальних рівнянь. Тому представляє інтерес порівняння їх асимптотичної поведінки з поведінкою дифузійних процесів. У роботі [**?**] отримано аналог закону повторного логарифма для траєкторій (5.1).

Нехай $\mathfrak{M}_1$ — простір усіх імовірнісних мір на $\mathbb{R}$, що мають перший момент із Метрика Вассерштейна. Розглянемо рівняння (5.1) з $\sigma : \mathbb{R} \times \mathfrak{M}_1 \to R$, що задовольняє глобальну умову Ліпшиця, і $\mu_0 \in \mathfrak{M}_1$. За таких умов існує єдиний сильний розв'язок (5.1) такий, що x — потік гомеоморфізмів. Наступний результат показує, що для рівняння без дрейфу (5.1) траєкторії різних частинок залишаються недалеко одна від одної на нескінченності.

Лема 5.1. *Для всіх* $u, v \in \mathbb{R}$ *існує*

$$\lim_{t\to\infty}(x(u,t) - x(v,t))$$

Доведення. Зафіксуйте $u > v \in \mathbb{R}$. Тоді за теоремою 18.4 з [8],

$$x(u,t) - x(v,t) = u - v + \int_0^t (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))dw(s) =$$

$$= u - v + w_{u,v}\left(\int_0^t (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))^2 ds\right)$$

для деякого вінерського процесу $w_{u,v}$. Оскільки $x(u,t) - x(v,t) > 0$ для всіх $t \geqslant 0$ і

$$\int_0^t (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))^2 ds$$

є безперервним випадковим процесом,

$$\int_0^\infty (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))^2 ds \leqslant \tau_{u,v} < +\infty.$$

Тут $\tau_{u,v}$ – це час першого удару $-(u-v)$ за допомогою $w_{u,v}$. Отже, з ймовірністю 1

$$\lim_{t\to\infty}(x(u,t) - x(v,t)) = w_{u,v}\left(\int_0^\infty (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))^2 ds\right).$$

Доведення завершено. □

Звичайно, різниця $x(u,t) - x(v,t)$ є мартингалом, який не змінює знак. Отже, за загальною теорією він має межу на нескінченності. Але ми представляємо прямий доказ, оскільки нам потрібна точна формула для характеристик $x(u,t) - x(v,t)$. Наслідком цієї леми є те, що закон повторного логарифма виконується (або ні) для всіх $u \in \mathbb{R}$ одночасно. Дійсно, оскільки $x(u,\cdot) - x(v,\cdot)$ обмежена,

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{x(u,t)}{\sqrt{2t\ln t}} - \frac{x(v,t)}{\sqrt{2t\ln t}}\right) = 0.$$

Отже, ми можемо отримати закон повторного логарифма лише для деякого фіксованого u, наприклад, $u = 0$. Позначимо $z(u,t) = x(u,t) - x(0,t)$. Нам потрібен наступний результат.

Лема 5.2. *Нехай $\beta > 0$ — додатне число. Потім*

$$\overline{\lim}_{|u|\to\infty} \frac{\sup_{t\geqslant 0}|z(u,t)|}{1+|u|^{1+\beta}} < \infty. \tag{5.2}$$

Доведення. Розглянемо тільки $u > 0$, доказ для $u < 0$ бути схожим. Розглянемо деякі послідовність $\uparrow +\infty$. Ми маємо

$$z(u_n, t) = u_n + w_{u_n,0}\left(\int_0^t \sigma^2(x(u,s),\mu_s)ds\right).$$

Отже,

$$P\{\sup_{t\geqslant 0} z(u_n,t) > u_n^{1+\beta}\} \leqslant P\{\sup_{0\geqslant s\geqslant \tau_{u_n,0}} w_{u_n,0}(s) > u_n^{1+\beta} - u_n\} =$$

$$= \frac{u_n}{u_n^{1+\beta}} = u_n^{-\beta}.$$

Поставимо $u_n = n^{2/\beta}$. Тоді маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\sup_{t\geqslant 0} z(u_n,t) > u_n^{1+\beta}\} < +\infty,$$

і за лемою Бореля–Кантеллі з ймовірністю 1 існує $N \in \mathbb{N}$ такий, що

$$\sup_{t\geqslant 0} z(u_n,t) > u_n^{1+\beta} \quad \forall n \geqslant N.$$

Оскільки x є гомеоморфізмом, для $u > u_N, u \in [u_n, u_{n+1}]$,

$$\sup_{t\geqslant 0} z(u,t) < \sup_{t\geqslant 0} z(u_{n+},t) < 2^{\frac{2}{\beta}+2} u^{1+\beta},$$

тому виконується (5.2) Доведення завершено. □

Розглянемо тепер рівняння (5.1) з $\sigma(u,\mu) = \int_{\mathbb{R}} b(u-v)\mu(dv)$ для деякої дійсної функції b. Потім рівння (5.1) набуває вигляду

$$\begin{cases} dx(u,t) = \int_{\mathbb{R}} b(x(u,t) - x(v,t))\mu_0(dv)dw(t) \\ x(u,0) = u. \end{cases} \tag{5.3}$$

Тепер взаємодія частинок у випадковому середовищі залежить від відстаней між ними їх. Рівняння (5.3) можна розглядати як стохастичний аналог моделі Курамото для взаємодіючі осцилятори.

Теорема 3. *Нехай коефіцієнти* (5.3) *задовольняють наступним умовам:*

1) b *— глобальний Ліпшиц з деякою константою* L

2) $\sup_{(-\infty;0]} b < +\infty; \inf_{[0;\infty)} b > -\infty,$

3) $\mu_0 \in \mathfrak{M}_{1+\alpha}$ *для деяких* $\alpha > 0$.

Потім

$$P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} \in D\right\} = P\left\{\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} \in -D\right\} = 1,$$

де $D = \{|u| : u \in [\inf_{[0;+\infty)} b; \sup_{(-\infty;0]} b]\}$.

Доведення. Для кожного $u \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\zeta_u = \lim_{t\to\infty} z(u,t).$$

Для кожного $u \in \mathbb{R}$ ця межа існує майже скрізь. Тепер нехай S — (зліченна) множина всі раціональні числа і всі атоми міри μ_0. Тоді, з ймовірністю 1,

$$z(u,t) \to \zeta_u, t \to \infty \quad \forall u \in S.$$

хай

$$\xi_u = \begin{cases} \zeta_u, u \in S \\ \lim_{S\ni v\to u-\zeta_v}, u \notin S \end{cases}$$

(межа існує, оскільки ζ_v не спадає). ξ_u також не спадна, і вона неперервна за винятком зліченної кількості стрибків. отже,

$$\mu_0\{u : \xi_u \neq \zeta_u\} = 0,$$

і

$$\mu_0\{u : z(u,t) \to \xi_u, t \to \infty\} = 1.$$

Щодо доведення леми 5.1, то маємо

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} (b(z(u,s) - z(v,s)) - b(-z(v,s)))\mu_0(dv) \right)^2 ds < \infty. \tag{5.4}$$

Застосовуючи лему 5.2 з $\beta = \alpha$, маємо для всіх $s \geqslant 0$

$$|b(z(u,s) - z(v,s)) - b(-z(v,s))| \leqslant L|z(u,s)| \leqslant LC(\omega)(1 + |u|^{1+\alpha}).$$

Таким чином, за теоремою Лебега,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} (b(z(u,s) - z(v,s)) - b(-z(v,s)))\mu_0(dv) \to \\ &\to \int_{\mathbb{R}} (\xi_u - \xi_v) - b(-\xi_v))\mu_0, \quad s \to \infty(dv) \end{aligned} \tag{5.5}$$

З (5.4) і (5.5) маємо, з імовірністю 1,

$$\int_{\mathbb{R}} (\xi_u - \xi_v)\mu_0(dv) = \int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv), u \in \mathbb{R}.$$

Тепер нехай $\uparrow +\infty, n \to \infty$. Застосування леми Фату до функцій $b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mathbb{I}_{\{v<u_n\}}$ (які обмежені знизу константою за умовою 2) теореми), маємо

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim}_{n\to\infty} (b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mathbb{I}_{\{v<u_n\}})\mu_0(dv) \leqslant$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{u_n} (b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mu_0(dv) \int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) -$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_{u_n}^{+\infty} (b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mu_0(dv) - \int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv)$$

(ми використано лему 5.2 та умову $mu_0 \in M_{1+\alpha}$).

Тепер ми маємо

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mathbb{I}_{\{v<u_n\}} \geqslant \inf_{z\geqslant 0} b(z),$$

і, таким чином,

$$\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) \geqslant \inf_{[0;+\infty)} b. \tag{5.6}$$

Аналогічно,

$$\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) \leqslant \sup_{(-\infty;0]} b. \tag{5.7}$$

Тепер, повертаючись до процесу x, ми маємо для деякого вінерівського процесу w_0,

$$x(0,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} b(-z(v,s))\mu_0(dv)dw(s) =$$

$$w_0 = \left(\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} b(-z(v,s))\mu_0(dv)\right)^2 ds\right)$$

Позначимо

$$T(t) = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} b(-z(v,s))\mu_0(dv)\right)^2 ds.$$

Потім

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} b(-z(v,s))\mu_0(dv)\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv)\right)^2.$$

Якщо $T(t) \to \infty, t \to \infty$,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{w_0(T(t))}{\sqrt{2T(t)\ln T(t)}} \cdot \sqrt{\lim_{t\to\infty} \frac{T(t)}{t}} =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv)\right|.$$

інакше,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{w_0(T(\infty))}{\sqrt{2t\ln t}} = 0 = \left|\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv)\right|.$$

Аналогічно,

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = -\left|\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv)\right|.$$

Разом з (5.6) та (5.7) це доводить теорему. □

Наслідок. За умов теореми, якщо b таке, що

$$u(b(u) - b(0)) \geqslant 0 (\leqslant 0), u \in \mathbb{R},$$

потім

$$P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = |b(0)|\right\} = P\left\{\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = -|b(0)|\right\} = 1.$$

Хай

Приклад 5.1.

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_{\frac{\pi}{2}},$$

$$b(u) = 1 + \cos u + \sin u \mathbb{I}_{\{u\geqslant 0\}}.$$

Потім

$$dx(0,t) = (\frac{1}{2}b(0) + \frac{1}{2}b(x(0,t) - x(\frac{\pi}{2},t)))dw(t)$$

$$dx(\frac{\pi}{2},t) = (\frac{1}{2}b(0) + \frac{1}{2}b(x(\frac{\pi}{2},t) - x(0,t)))dw(t)$$

Тепер

$$dz(\frac{\pi}{2},t) = \frac{1}{2}\sin z(\frac{\pi}{2},t)dw(t).$$

Межа

$$\xi_{\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to\infty} z(\frac{\pi}{2},t),$$

приймає тільки значення 0 і π. Завдяки симетрії,

$$P(\xi_{\frac{\pi}{2}} = 0) = P(\xi_{\frac{\pi}{2}} = \pi) = \frac{1}{2}$$

$$P\left\{\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) = 2\right\} = P\left\{\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) = 1\right\} = \frac{1}{2}.$$

Отже, маємо

$$P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = 2\right\} = P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = 1\right\} = \frac{1}{2}.$$

ВИСНОВКИ

Об'єктом дослідження є деякі класи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. Метою роботи є вивчення поняття стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, детальние дослідження конкретних моделей з використанням таких рівнянь.

Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі введено поняття стохастичного диференціального рівняння зі взаємодією. Крім того, розглянуто детерміноване рівняння для опису руху систем зі взаємодією. Наведено приклад одномірного випадку таких рівнянь,що моделює рух двох частинок, які відштовхуються одна від одної. Виявляється, що у цьому випадку можна знайти розв'язок такого рівняння у явному вигляді. У другому розділі доводиться теорема існування розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. У третьому розділі розглядяаються найпростіші приклади анализу поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією у залежності від початкові міри. У четвертому розділі розглядається поняття зсув-компактості, яке було введено А.А. Дороговцевим та М.П. Карліковою [5], що є модифікацією поняття стійкості для мірозначних процесів, що відповідають рівнянням із взаємодією. Необхідність у такій модифікації можна побачити, зауваживши, що за умов, що забезпечують стійкість розв'язків звичайних стохастичних диференціальних рівнянь, мірозначний розв'язок зі зростанням часу стає близьким до випадкової δ-функції, тобто, вся маса зосереджується в одній точці, що випадково рухається у просторі. У п'ятому розділі розглянуто одновимірне стохастичне диференціальне рівняння зі взаємодією, що не має дрейфової частини. Для одиничних траєкторій наведено результат, подібний до закону повтореного логарифму вінерівського процесу. Наведено конкретний приклад, який моделює застосування відповідного результату.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Коралов Л. Б., Синай Я. Г. Теория вероятностей и случайные процессы / Пер. с англ. Э. В. Переходцевой; под ред. Б. М. Гуревича. — М.: МЦНМО, 2013. — 408 с.
2. В. П. Леонов, А. Н. Ширяев, К технике вычисления семинвариантов, Теория вероятн. и ее примен., 1959, том 4, выпуск 3, 342–355
3. Dorogovtsev A. A. Stochastic flows with interactions and measure-valued processes. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, v.63, p. 3963-3977
4. A. A. Dorogovtsev, Measure-valued Markov processes and stochastic flows on abstract spaces, Stoch. Rep. 76 (2004), no.5, 395–407.
5. Dorogovtsev A.A., Karlikova M.P. Long-time behavior of measure-valued processes corresponded to stochastic flows with interaction. Theory of stochastic processes, 2004
6. G. L. Kuliniˇc, On the law of iterated logarithm for one-dimensional diffusion processes, Teor. Veroyat. Primen. 29 (1984), 544–547.
7. L. Caramellino, Strassen's law of the iterated logarithm for diffusion processes for small time, Stoch. Process. Their Appl. 74 (1998), 1-19.
8. O. Kallenberg *Foundations of Modern Probability*, 2nd ed. Springer Series in Statistics, 2002.
9. M. P. Karlikova, On a weak solution of an equation for an evolutionary flow with interaction, Ukr. Math. J. 57 (2005), no. 7, 1055–1065
10. S. H. Strogatz, From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. Bifurcations, patterns and symmetry, Phys. D 143 (2000), no. 1-4, 1-20.