

УДК 539.3

В.А. Гришин, канд. физ.-мат. наук, доц., Одес. нац. ун-т им. И.И.Мечникова,
В.А. Гришина, канд. физ.-мат. наук, доц., Одес. нац. политехн. ун-т,
В.В. Реут, канд. физ.-мат. наук, доц., Одес. нац. ун-т им. И.И.Мечникова

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСАДКИ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РЕБРУ КОРОБЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ

В.О. Гришин, В.О. Гришина, В.В.Реут. Дослідження осадки системи штампів, паралельних ребру коробчатої оболонки. Розв'язується задача про вдавнення періодичної системи штампів у вигляді тонких абсолютно твердих включень, паралельних ребрам, у коробчату оболонку прямокутного профілю нескінченної довжини. Задача зводиться до системи інтегральних рівнянь щодо стрибків узагальненої поперечної сили і дотичних напружень, яка не має рішень у класі функцій, що інтегруються. Рішення шукалося в просторі функцій, які мають особливості, що не інтегруються, із застосуванням апарату регуляризації розбіжних інтегралів. Побудовано графіки залежності осадки включення від його довжини і геометричних розмірів перерізу оболонки.

V.A. Grishin, V.A. Grishina, V.V. Reut. Investigation of settlement of a system of press tools parallel to a rib of a boxed shell. The stressed state problem for a fixed shell of right-angled shape and infinite length is handled the shell is supported by two periodic systems of absolutely thin and stiff inclusions located symmetrically at the opposite facts and parallel to the shell ribs. The problem is reduced to the system of integral equations to solve for jumps of the generalized cross force and tangential stresses, which solution from the class of integrable functions doesn't exist. The solution was sought in the space of functions having non-integrable singularities by using a body of divergent integrals regularization. The graphs of the press tool settlement versus the inclusion length and geometric dimensions of the cross-section of the shell are built.

Расчеты коробчатых оболочек, выполненные ранее, основаны на применении метода однородных решений, который эффективен только для частных случаев нагружения. Изложен метод [1], позволяющий получать точные решения для произвольно нагруженной коробчатой оболочки прямоугольного сечения, а также представлены результаты решения задачи о симметричном нагружении такой оболочки нагрузкой постоянной интенсивности, приложенной перпендикулярно срединной плоскости горизонтальных пластин коробчатой оболочки.

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии коробчатой оболочки бесконечной длины прямоугольного профиля при вдавливании в нее периодической системы штампов в виде тонких жестких включений, симметрично расположенных на противоположных гранях (рис. 1).

Нагрузку, действующую на оболочку, будем полагать периодической и симметричной относительно плоскостей симметрии оболочки.

При использовании метода расчета коробчатых оболочек [1] задача сводится к отысканию решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} D\Delta^2 w(x, y) = Z(x, y) \\ \Delta^2 \sigma_x(x, y) = \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) = \partial/\partial x [\Delta + (1 + \nu) \partial^2/\partial y^2] X + \partial/\partial y [\Delta - (1 + \nu) \partial^2/\partial y^2] Y, \end{cases} \quad -a < x < b, x \neq 0, |y| < l$$

удовлетворяющего

— условиям на ребре оболочки

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= \langle \tau_{xy} \rangle = \langle \varphi_{xy} \rangle = \langle M_{xy} \rangle = 0, \\ \langle u \rangle &= -(w_+ + w_-); \langle w \rangle = u_+ + u_-, \\ \langle \sigma_x \rangle &= -h^{-1}[(V_x)_+ + (V_x)_-]; \langle V_x \rangle = h[(\sigma_x)_+ + (\sigma_x)_-];\end{aligned}$$

— условиям симметрии

$$\begin{aligned}V_y &= \varphi_y = v = \tau_{xy} = 0, y = 0, l; -a < x < b, \\ V_x &= \varphi_x = u = \tau_{xy} = 0, x = -a, b; |y| > c;\end{aligned}$$

— условиям на включении

$$u(-a, y) = \varphi_x(-a, y) = 0; w(-a, y) = \delta, |y| \leq c; \quad (1)$$

— условию равновесия включения

$$\int_{-c}^c V_x(-a, y) dy = -\frac{P}{2}. \quad (2)$$

В силу симметрии задачи условия равновесия включения выполняются автоматически для касательных напряжений. Смещение включения δ заранее неизвестно. Здесь использованы следующие обозначения, введенные в [1]:

u, w — перемещения точек пластины в направлении осей x, z , соответственно;

M, V, φ — изгибающий момент, обобщенная поперечная сила и угол наклона пластины;

σ, τ — нормальное и касательные напряжения;

X, Y, Z — нагрузка, действующая в направлении соответствующих осей;

h, ν, E, D — толщина, коэффициент Пуассона, модуль Юнга и цилиндрическая жесткость пластин.

Введем неизвестные функции

$$\chi(y) = V_x(-a, y); \mu(y) = \tau_{xy}(-a, y),$$

которые отличаются от нуля в силу (1) только на включении $|y| \leq c$, и применим обобщенный метод интегральных преобразований [2]. В результате получаем задачу в трансформантах, аналогичную задаче о нагружении оболочки без включений [1] нагрузками $\chi(y)$ и $\mu(y)$ такими, что выполняются условия (1), (2). Трансформанты нагрузок $f_p^\pm(x)$ выражены через трансформанты неизвестных функций

$$f_p^-(x) = -D^{-1} \chi_\alpha G_\alpha(x, -a), \quad f_p^+(x) = -\mu_\alpha \alpha R_2^+ G_\alpha(x, -a), \quad (3)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина краевой задачи $L^2 u(x) = 0, u' = u''' = 0, x = -a, b$;

$$\alpha = \pi h l^{-1}.$$

Если обозначить через $\mathbf{A}$ матрицу коэффициентов, а через $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}$ — векторы скачков и правых частей системы граничных условий [1], то последнюю можно переписать в виде

$$\mathbf{A}\mathbf{F} = \mu_\alpha \mathbf{H}_\mu + \chi_\alpha \mathbf{H}_\chi, \quad (4)$$

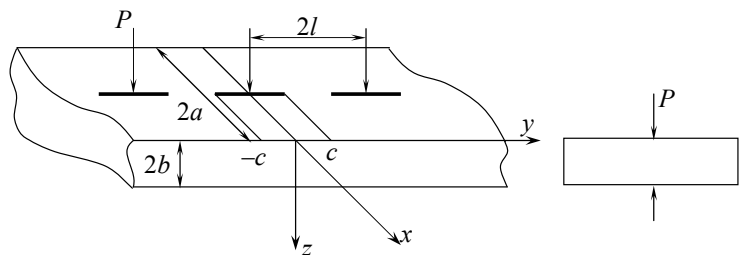


Рис. 1. Схема нагружения оболочки прямоугольного профиля периодической системой штампов в виде тонких жестких включений: a, b — геометрические размеры прямоугольного профиля; $2a$ — длина включения; $2l$ — расстояние между серединами включений; P — сосредоточенная сила, приложенная к середине включения

где векторы $\mathbf{H}_\mu$ и $\mathbf{H}_\chi$ получаются в результате применения функционалов $H_j^\pm (j=0,3)$ к частным решениям (3),

$$\mathbf{H}_\mu = \|0, 0, \alpha \mathbf{H}_3^+ R_2^+ G_\alpha(x, -a), -\alpha \mathbf{H}_3^+ R_2^+ G_\alpha(x, -a)\|^T,$$

$$\mathbf{H}_\chi = \|D^{-1} \mathbf{H}_3^- G_\alpha(x, -a), D^{-1} \mathbf{H}_o^- G_\alpha(x, -a), 0, 0\|^T.$$

Решение системы (4) в силу ее линейности может быть представлено в виде

$$\mathbf{F} = \mu_\alpha \mathbf{F}_\mu + \chi_\alpha \mathbf{F}_\chi,$$

где $\mathbf{F}_\mu = (f_{o\mu}^+, f_{3\mu}^+, f_{o\mu}^-, f_{3\mu}^-)$; $\mathbf{F}_\chi = (f_{o\chi}^+, f_{3\chi}^+, f_{o\chi}^-, f_{3\chi}^-)$.

Это позволяет выписать решение задачи через трансформанты неизвестных функций

$$f_\alpha^\pm(x) = -\mu_\alpha k_\mu^\pm(\alpha, x) - \chi_\alpha k_\chi^\pm(\alpha, x),$$

где $k_\mu^+(\alpha, x) = \alpha R_2^+ G_\alpha(x, -a) - f_{3\mu}^+ T_0^+ G_\alpha + f_{o\mu}^+ T_3^+ G_\alpha$;

$$k_\mu^-(\alpha, x) = -f_{3\mu}^- T_0^- G_\alpha + f_{o\mu}^- T_3^- G_\alpha;$$

$$k_\chi^+(\alpha, x) = -f_{3\chi}^+ T_0^+ G_\alpha + f_{o\chi}^+ T_3^+ G_\alpha;$$

$$k_\chi^-(\alpha, x) = D^{-1} G_\alpha(x, -a) - f_{3\chi}^- T_0^- G_\alpha + f_{o\chi}^- T_3^- G_\alpha.$$

Для отыскания неизвестных функций $\chi(y)$ и $\mu(y)$ воспользуемся условиями (2). При обращении трансформант $w_\alpha(x)$ и $v_\alpha(x)$ для выделения слабосходящихся частей ядер воспользуемся схемой работы [3], известными формулами для тригонометрических рядов [4] и суммами рядов:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} &= -\ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{2n}}{n\pi^{2n}} (x/2)^{2n}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3} &= \frac{x^2}{2} \ln|x| - S_3 - \frac{3}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4S_{2n}(x/2)^{2n+2}}{n(2n+1)(2n+2)\pi^{2n}}; \\ S_n &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}. \end{aligned}$$

В результате приходим к системе интегральных уравнений

$$\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (y-\eta)^2 \ln|y-\eta| & 0 \\ 0 & -\ln|y-\eta| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\eta) \\ \mu(\eta) \end{bmatrix} d\eta + \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} K_{11}K_{12} \\ K_{21}K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\eta) \\ \mu(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \begin{bmatrix} \delta_\chi(y) \\ \delta_\mu(y) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $K_{ij}(y, \eta)$ — бесконечно дифференцируемые функции:

$$\begin{aligned} K_{11}(y, \eta) &= -\frac{2S_3 l^3}{\pi^2} + \left(\ln \frac{\pi}{l} - \frac{3}{2} \right) (y-\eta)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{2n}(y-\eta)^{2n+2}}{(2l)^{2n} n(n+1)(2n+1)} + \\ &\quad + \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} k_{11}(\alpha) \cos \alpha y \cos \alpha \eta + \frac{\pi}{2l} D w_o(-a); \\ K_{12} &= \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} k_{12}(\alpha) \cos \alpha y \sin \alpha \eta; \quad K_{21} = \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} k_{21}(\alpha) \sin \alpha y \cos \alpha \eta; \\ K_{22} &= \ln \frac{l}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{2n}(y-\eta)^{2n}}{(2l)^{2n} n} + \sum_{n=1}^{\infty} k_{22}(\alpha) \sin \alpha y \sin \alpha \eta, \end{aligned}$$

а коэффициенты $k_{ij}(\alpha)$ выражаются как

$$\begin{aligned}
k_{11}(\alpha) &= 4 \left\{ \left[-\frac{a+b}{2\alpha} LG_{\alpha}(-a, b) + G_{\alpha}(-a, b) \right] e^{-\alpha(a+b)} + D[f_{0\chi}^{-} w_{\alpha 3} - f_{3\chi}^{-} w_{\alpha 0}] \right\}, \\
k_{12}(\alpha) &= 4D[f_{0\mu}^{-} w_{\alpha 3} - f_{3\mu}^{-} w_{\alpha 0}]; \quad k_{21}(\alpha) = -2\gamma^{-1} E[f_{0\chi}^{+} v_{\alpha 3} - f_{3\chi}^{+} v_{\alpha 0}], \\
k_{22}(\alpha) &= -(3-\nu)^{-1} \{ [4 - (1+\nu)\alpha(a+b)] LG_{\alpha}(-a, b) + 2(1+\nu)\alpha^2 G_{\alpha}(-a, b) \} - \\
&\quad - 2\gamma^{-1} E[f_{0\mu}^{+} v_{\alpha 3} - f_{3\mu}^{+} v_{\alpha 0}], \\
\delta_{\chi}(y) &= 4\pi D[\delta - w_q(-a, y)]; \quad \delta_{\mu}(y) = \pi E \gamma^{-1} v_q(-a, y); \quad \gamma = (1+\nu)(3-\nu), \\
w_{\alpha j} &= T_j^{-}[G_{\alpha}(-a, t)]; \quad v_{\alpha j} = (-\alpha^3 E)^{-1} R_2^{+} T_j^{+}[G_{\alpha}(-a, t)]; \quad j = 0, 3.
\end{aligned}$$

Как было показано ранее [5...7], первое из интегральных уравнений (5) не имеет решения в классе интегрируемых функций, и его решение следует искать в пространстве функций, имеющих неинтегрируемые особенности вида $(1-y^2)^{-3/2}$, с применением аппарата регуляризации расходящихся интегралов.

Для решения системы (5) воспользуемся методом ортогональных многочленов [2] и будем искать решение в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода для $\mu(y)$ и специального вида многочленов $\pi_k(y)$ [6] для $\chi(y)$

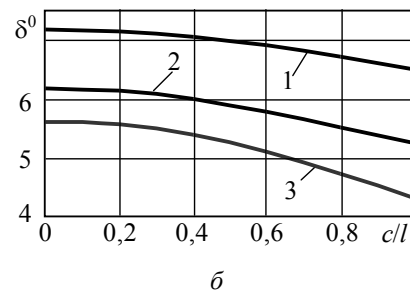
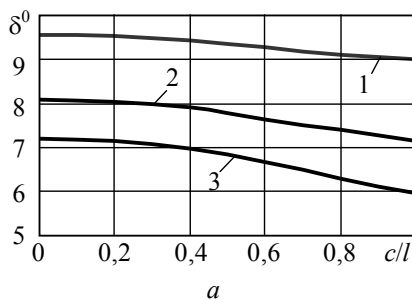
$$\begin{aligned}
\mu(s) &= \delta (1-s^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{2m+1} T_{2m+1}(s); \\
\chi(s) &= \delta \sum_{m=0}^{\infty} \chi_{2m} \pi_{2m}(s).
\end{aligned}$$

Использование спектральных соотношений [2, 6]

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (t-\tau)^2 \ln |t-\tau| \pi_{2n}(\tau) d\tau &= 2\pi P_{2n}(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \\
\int_{-1}^1 \frac{T_{2l+1}(s)}{\sqrt{1-s^2}} \ln \frac{1}{|y-s|} ds &= \pi(2l+1)^{-1} T_{2l+1}(y), \quad -1 \leq t \leq 1,
\end{aligned}$$

позволяет получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения $\{\chi_{2k}, \mu_{2k+1}\}$ при $\delta = 1$. Проведены расчеты для оболочки, нагруженной силами P , приложенными к серединам включений. Условие равновесия (2) с учетом линейной зависимости осадки от нагрузки позволяет определить величину осадки $\delta = P(2\pi\chi)^{-1}$.

Вычислены значения безразмерного аналога осадки δ^0 , связанного с физическим соотношением $\delta = \delta^0 P / Eh$. Расчеты проводены для ряда значений a/b и l/a при $\nu = 0,3; h/a = 0,01$. При этом система линейных алгебраических уравнений решена методом редукции с сохранением пяти членов разложения, обеспечивающим точность не менее трех значащих цифр. Представлены графики значений безразмерного аналога осадки δ^0 в зависимости от длины включения для различных соотношений размеров поперечного сечения a/b (рис. 2).



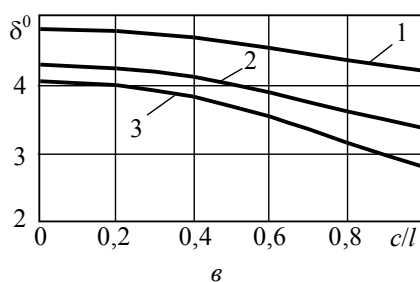


Рис. 2. Зависимость безразмерного аналога осадки δ^0 от отношения c/l длины включений к расстоянию между ними для $a/b = 0,25$ (а); 1 (б); 4 (в); кривые 1, 2, 3 соответствуют $l/a = 0,8$; 1; 1,2

Отметим, что при $c \rightarrow 0$ значения осадки совпадают со значениями прогиба под точкой приложения сосредоточенной силы в задаче о нагружении оболочки периодической системой сосредоточенных сил. При c/l , близких к единице, сходимость метода редукции существенно ухудшается. Экстраполированные по графику значения осадок при $c \rightarrow l$ стремятся к значениям прогибов в задаче о нагружении оболочки равномерно распределенной нагрузкой по линии $x = -a$ интенсивностью $q = P/2l$.

Литература

1. Гришин В.А. Расчет коробчатых оболочек прямоугольного сечения / Гришин В.А., Реут В.В., Попов Г.Я. // Приклад. математика и механика. — 1990. — Т.54, вып. 4. — С. 605 — 612.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. — М.: Наука, 1982. — 342 с.
3. Онищук О.В. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями / Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. // Приклад. математика и механика. — 1986. — Т.50, вып. 2. — С. 293 — 302.
4. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. — М.: Наука, 1981. — 800 с.
5. Григорюк Э.И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Григорюк Э.И., Толкачев В.М. — М.: Машиностроение, 1980. — 411 с.
6. Онищук О.В. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями / Онищук О.В., Попов Г.Я. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 4. — С. 141 — 150.
7. Попов Г.Я. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами / Попов Г.Я., Толкачев В.М. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 4. — С. 192 — 206.

Поступила в редакцию 11 мая 2004 г.