

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І.І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

О.Б. Васильєв, Н.С. Васильєва

Методичні вказівки та завдання
до самостійної роботи з спецкурсу
«Основи фінансової математики»
для студентів 3 курсу денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

ОДЕСА
ОНУ
2019

УДК
519.853(075.8)
Е912

Рекомендовано до видання Вченою Радою
ФМФІТ ОНУ імені І.І. Мечникова
Протокол №4 від 06.02.2019

Рецензенты:

В.В. Вербіцький, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
обчислювальної математики Одеського національного університету
імені І.І. Мечникова

М.С. Таїрова, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
обчислювальної математики Одеського національного університету
імені І.І. Мечникова

© О.Б. Васильєв, Н.С. Васильєва 2019
© Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 2019

Зміст

1. Прості проценти, основні формули.....	4
Завдання до самостійної роботи.....	6
2. Складні проценти, основні формули.....	10
Завдання до самостійної роботи.....	12
3. Фінансова еквівалентність. Рівняння вартості	16
Завдання до самостійної роботи.....	16
4. Фінансові ренти (ануїтети).....	19
Завдання до самостійної роботи.....	21
5. Показники фінансової ефективності виробничих інвестицій.....	26
Завдання до самостійної роботи.....	31
Список літератури.....	34

1. Прості проценти, основні формули

Прості проценти обчислюються за формулами:

$$I(t) = Pi \frac{t}{T}; \quad S(t) = P \left(1 + i \frac{t}{T} \right), \quad (1)$$

де i – процентна ставка за період T (найчастіше це рік), P – сума інвестованих грошей (начальний капітал, поточна вартість), I – прибуток (абсолютний процент), S – нарощена сума (майбутня вартість), t – термін інвестування.

Простий дисконт визначається формулою:

$$D(t) = Sd \frac{t}{T}, \quad (2)$$

де d – облікова ставка за період T , t – термін від моменту обліку до дати погашення векселя.

Ставка процентів та облікова ставка пов'язані між собою формулами:

$$i = \frac{d}{1 - d * t/T}, \quad d = \frac{i}{1 + i * t/T}. \quad (3)$$

Операція дисконтування за простими процентами здійснюється так:

а) математичне дисконтування:

$$P = S / \left(1 + i \frac{t}{T} \right), \quad (4)$$

б) банківське дисконтування:

$$P = S - D = S \left(1 - d \frac{t}{T} \right). \quad (5)$$

Інфляцію можна врахувати шляхом коригування річних ставок, тобто заміною процентної нетто-ставки i брутто-ставкою i_r :

$$i_r = i + r + ir \frac{t}{T}, \quad (6)$$

де r - річний темп інфляції.

Для облікової брутто-ставки формула має вигляд

$$d_r = \frac{d + r}{1 + r * t/T}. \quad (7)$$

Приклад 1. Підприємець отримав кредит на 18000 грн., а через 3 місяці повинен повернути 18765 грн. Яка процентна ставка кредиту?

Розв'язання. Скориставшись формулами (1), отримаємо:

$$\frac{i}{4} = \frac{765}{18000} \Rightarrow i = 0.17 (17\%).$$

Приклад 2. Яку суму треба інвестувати зараз на умовах 6% річних, щоб через 7 місяців з моменту інвестування отримати 8000 грн.?

Розв'язання.

$$P = \frac{S}{1 + i * t/T} = \frac{8000}{1 + 0.06 * 7/12} = \frac{8000}{1 + 0.035} \approx 7729.47 \text{ грн.}$$

Приклад 3. Власник дисконтного векселя із завершеною вартістю 3000 грн. і терміном погашення 6 місяців через 2 місяці від моменту отримання продає його банку за 2760 грн. 1) Визначити дисконт і річну облікову ставку банку. 2)

Яку виручку отримав би власник за 2 місяці до терміну погашення за таких же умов обліку?

Розв'язання. 1) Знайдемо величину дисконту:

$$D = S - P = 3000 - 2760 = 240 \text{ грн.}$$

Річна облікова ставка дорівнює:

$$d = \frac{D * T}{S * t} = \frac{240 * 12}{3000 * 4} = 0.24 \quad (24\%)$$

2) Виручка власника дорівнювала би:

$$P = S \left(1 - d \frac{t}{T} \right) = 3000 * \left(1 - 0.24 * \frac{2}{12} \right) = 2880 \text{ грн.}$$

Завдання

1.1. Капітал у 5000 грн. інвестовано на 3 місяці із ставкою 12% річних. Знайти прибуток з капіталу і майбутню вартість позики.

1.1. 150 грн., 5150 грн.

1.2. Сьогодні Ви отримали кредит на 12000 грн., а через 4 місяці повинні повернути 12800 грн. Яка процентна ставка кредиту?

1.2. 20%

1.3. Підприємство взяло позику в банку в сумі 200000 грн. на період з 1 липня до 30 вересня при ставці 24% річних. Яку суму воно повинно буде виплатити у кінці терміну позики? Застосувати точні та комерційні проценти, результати порівняти.

1.3. 211967 грн.; 212133 грн.

1.4. Пенсіонер отримав 20 грн. з суми 500 грн. за 3 місяці. Знайти процентну ставку.

1.4. 16%

1.5. Знайти прибуток з капіталу і загальну суму, якщо $P=8000$ грн.; $i=0.1$; термін кредитування з 18 вересня до кінця року.

1.6. Знайти поточну вартість P , якщо $S=8000$ грн.; $i=0.08$; термін – 5 місяців.

1.7. Яку суму грошей треба інвестувати зараз при 8% річних, щоб через 9 місяців отримати 10000 грн.?

1.7. 9434 грн.

1.8. При купівлі товару покупець може заплатити 850 грн. відразу або 865 грн. через 4 тижні. Якщо він позичить гроші, щоб розрахуватись відразу, яка процентна ставка може бути допустимою для погашення позики?

1.8. 23%

1.9. Банк нараховує 86 грн. за використання 2500 грн. протягом 60 днів. Яка норма прибутковості такої операції?

1.9. 20,9%

1.10. Банк надав позику у сумі 10000 грн. на 2 місяці під 30% річних, 5000 грн. на 4 місяці під 24% річних і 10000 грн. на 8 місяців під 20% річних. Якби у банку була можливість помістити всю суму на 4 місяці, то яку процентну ставку він повинен запросити, щоб отримати той же прибуток?

1.10. 18,8%

1.11. Фермер взяв позику у корпорації терміном на 6 місяців під 9% річних і видав простий вексель із завершеною вартістю 9000 грн. За 2 місяці до дати погашення векселем корпорація продала його банку. а) Яку суму позики отримав фермер? б) Скільки банк сплатив корпорації за вексель, якщо вона хоче мати 10% річного прибутку?

1.11. а) 8612,4 грн.; б) 8852,46 грн.

1.12. Жінка взяла у борг деяку суму грошей на півроку і видала банку дисконтний вексель на суму 8000 грн. Ставка дисконту 10%. а) Знайти дисконт і обчислити виручену суму.
б) Знайти еквівалентну ставку простих процентів.

1.12. а) 400 грн., 7600 грн.; б) 10,53%

1.13. Корпорація отримала від покупця процентний вексель з номіналом 50000 грн. терміном на 8 місяців із ставкою 12% річних. Через 2 місяці, маючи кращі пропозиції щодо інвестування, корпорація облікувала вексель у банку за обліковою ставкою 14%. Яку кількість грошей отримала корпорація від банку?

1.13. 50220 грн.

1.14. Дисконтний вексель строком на 9 місяців має завершену вартість 10000 грн. Вексель облічено банком із ставкою 8%. Знайти дисконт і виручену вартість.

1.14. 600 грн.; 9400 грн.

1.15. При обліку дисконтного векселя номіналом 13000 грн. за 2 місяці до дати погашення банк сплатив його власнику 12700 грн. Визначити облікову ставку, яку застосував банк.

1.15. 13,85%

1.16. Процентний вексель номіналом 14000 грн., терміном 3 місяці і ставкою 18% річних продається із обліковою ставкою 16% річних за 1 місяць до дати погашення. Знайти виручену за вексель суму на момент його обліку.

1.16. 14434,93 грн.

1.17. Процентний вексель номіналом 30000 грн., терміном 1 рік і ставкою 10% річних було продано банку за 5 місяців до дати погашення із обліковою ставкою 9%.

а) Яку суму заплатив банк за вексель?

б) Який прибуток отримає банк на цьому векселі?

1.17. а) 31762,5 грн.; б) 1237,5 грн.

1.18. Корпорація отримала від покупця процентний вексель номіналом 20000 грн., терміном 8 місяців і ставкою 15% річних. По якій обліковій ставці вона має облікувати вексель в банку за 2 місяці до дати його погашення, щоб отримати прибуток не менше 1200 грн.?

1.18. $d \leq 21.82\%$

1.19. Вексель номіналом 3000 грн. виписано 15 серпня із датою погашення 20 грудня. На вексель нараховується 14% річних. Якою буде теперішня вартість векселя, викупленого банком 1 листопада за обліковою ставкою 15% річних?

1.19. 3083,9 грн.

1.20. Підприємство взяло позику в банку на 80000 грн. на період з 1 квітня до 31 серпня при ставці 18% річних. Яку суму воно повинно виплатити по закінченню терміну позики при врахуванні річного темпу інфляції – 5%?

1.20. 87787,3 грн.

1.21. При сталому річному темпі інфляції 6% банк надав кредит 100000 грн. на 7 місяців під 17% річних. Визначити процентну ставку, яка враховує інфляцію та суму платежу, що погашається.

1.21. 23,6%; 113763,8 грн.

1.22. Дисконтний вексель із завершеною вартістю 5000 грн. і сплатою 10 жовтня обліковано в банку 3 серпня за обліковою ставкою 12%. Визначити суму, яку отримав векселедавець на момент обліку, якщо зафіксовано річний темп інфляції – 8%.

1.22. 4813,9 грн.

1.23. При обліку дисконтного векселя номіналом 30000 грн. за 3 місяці до дати погашення банк сплатив його власнику 28700 грн. Визначити облікову нетто-ставку, якщо при обліку було враховано інфляцію на рівні 4% річних.

1.23. 13,5%

2. Складні проценти, основні формули

Нехай P – початковий капітал (поточна або сучасна вартість),

i – річна процентна номінальна ставка,

n – загальний термін інвестування (в роках),

m – кількість нарахувань процентів на рік,

S – нарощена сума (майбутня вартість) на кінець терміну інвестування.

Формула обчислення майбутньої вартості за складними процентами має вигляд:

$$S = P \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mn}, \quad (8)$$

а поточна вартість обчислюється за формулою:

$$P = S \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{-mn}. \quad (9)$$

Річна ефективна та номінальна ставки пов'язані співвідношеннями:

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{m} \right)^m - 1; \quad i = m \cdot \left(\sqrt[m]{1 + i_{ef}} - 1 \right). \quad (10)$$

При постійному річному темпі інфляції ($r = \text{const}$) брутто-ставка з урахуванням інфляції дорівнює:

$$i_r = i + r + i \cdot r, \quad (11)$$

а кінцева сума:

$$S_r = P \left(1 + i_r \right)^n. \quad (12)$$

При змінному річному темпі інфляції ($r \neq \text{const}$) брутто-ставка з урахуванням інфляції дорівнює:

$$i_I = \left(1 + i \right) \cdot \sqrt[n]{I_{\text{inf}}} - 1, \quad (13)$$

а кінцева сума:

$$S_I = P(1 + i_I)^n, \quad (14)$$

де I_{inf} - індекс інфляції за весь період у декілька років.

Для неперервних процентів основні формули мають такий вигляд:

$$S = Pe^{\delta t}, \quad (15)$$

$$P = Se^{-\delta t}, \quad (16)$$

$$i_{ef} = e^{\delta} - 1; \quad \delta = \ln(1 + i_{ef}). \quad (17)$$

Приклад 1. 50000 грн. інвестовано на 3 роки при річній ставці 8%. 1) Обчислити складні проценти, нараховані в кінці терміну. 2) Як зміниться величина прибутку, якщо проценти нараховуються щомісячно?

Розв'язання. 1) За формулою (8) при $m=1$ маємо:

$$S = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = 50000 * (1 + 0,08)^3 \approx 62985,6 \text{ грн.};$$

$$I = S - P = 12985,6 \text{ грн.}$$

2) Якщо $m=12$, то:

$$S = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = 50000 * \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{36} \approx 63511,8 \text{ грн.};$$

$$I = S - P = 13511,8 \text{ грн.}$$

Приклад 2. За умовами контракту проценти нараховуються щомісячно зі ставкою 16% річних. Визначити річну ефективність цього контракту.

Розв'язання. За формулою (10) маємо:

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12} - 1 \approx (1.013)^{12} - 1 \approx 0.1723 \text{ (17.23\%)}$$

Завдання

2.1. Знайти нарощену суму і прибуток для кожного з випадків:

а) $P=5000$ грн., $i=0.08$, $m=2$, $n=10$;

б) $P=3000$ грн., $i=0.12$, $m=4$, $n=6$.

2.1. а) 10955,6 грн.; б) 6098,4 грн.

2.2. Знайти поточну вартість для випадків:

а) $S=8000$ грн., річна ставка 8% при піврічному нарахуванні з терміном 5 років;

б) $S=8000$ грн., річна ставка 12% при щоквартальному нарахуванні за 4 роки.

2.2. а) 5404,5 грн.; б) 4985,34 грн.

2.3. У день народження сина батьки поклали в банк 500 грн. на ощадний рахунок під 15% річних. а) Яка сума грошей буде на цьому рахунку в день повноліття сина? б) Яка сума була б на рахунку, якби проценти нараховувались щоквартально? в) Яку суму слід вкласти, щоб отримати в день повноліття 10000 грн.?

2.3. а) 6187,7 грн.; б) 7081,3 грн.; в) 808 грн.

2.4. Фермер отримав позику у сумі 10000 грн. Банк призначив ставку прибутку 8% при щомісячному нарахуванні. Яку суму повинен буде сплатити фермер через 2 роки?

2.4. 11728,88 грн.

2.5. Підприємець поклав 50000 грн. у банк на ощадний рахунок зі ставкою 12% при піврічному нарахуванні. Через два роки він додатково поклав 30000 грн. і водночас ставка зросла до 15% за тих же умов нарощення вкладу. Яка сума грошей буде на рахунку через 5 років після першого внеску?

2.5. 143718,2 грн.

2.6. Яку суму було покладено, якщо через 3 роки на рахунку виявилось 20000 грн.? Процентна ставка 10%.

2.6. 15026,3 грн.

2.7. Яку суму грошей треба внести зараз, щоб накопичити 20000 грн. за 3 роки при ставці 16% із щоквартальним нарахуванням?

2.7. 12492 грн.

2.8. На який термін треба вкласти 5000 грн., щоб при ставці 6% із піврічним нарахуванням сума подвоїлась?

2.8. 11,72 років

2.9. Облігація коштує 2282 грн. і по ній сплачуватиметься 5000 грн. через 10 років. Яка процентна ставка при нарахуванні кожних півроку забезпечить таке зростання?

2.9. 8%

2.10. 5000 грн. інвестується на 5 років по номінальній річній ставці 14% із щомісячним нарахуванням. Яка процентна ставка із щоквартальним нарахуванням накопичить рівну суму за цей самий час?

2.10. 14,16%

2.11. Якою повинна бути річна ставка прибутку, щоб капітал подвоївся за 5 років із щорічним нарахуванням? Як зміниться ця ставка при щомісячному нарахуванні процентів?

2.11. 14,87%; 13,94%

2.12. На який термін треба вкласти 3000 грн., щоб при ставці 8% із щомісячним нарахуванням сума потроїлась?

2.12. 13,78 років

2.13. Основна сума кредиту становить 250000 грн., а сума при погашенні - 400000 грн. Кредит надано на 3 роки. Знайти проценти, що нараховуються за річною ставкою. Знайти проценти, що нараховуються за неперервною процентною ставкою.

2.13. 24,29%; 21,74%

2.14. Вексель терміном на 3 роки має завершену вартість 10000 грн. Ставка процента – 12% при щоквартальному нарахуванні. а) Яку суму треба сплатити за вексель зараз? б) Яку суму треба буде сплатити за вексель через 2 роки?

2.14. а) 7013,8 грн.; б) 8884,9 грн.

2.15. Визначити, що дає більший прибуток у кожному з випадків:

- а) 10% із щорічним нарахуванням чи 9,85% із щомісячним нарахуванням?
- б) 14% із щомісячним нарахуванням чи 13,75% із щоденним (неперервним) нарахуванням?

2.16. Що ви порадите інвестору, який робить вибір між 3 варіантами інвестицій на 1 рік:

- а) 9% річних з оформленням простого векселя;
- б) 8,4% річних з оформленням дисконтного векселя;
- в) 8,8% річних із щомісячним нарахуванням?

2.17. Підприємець може отримати позику за умов:

- а) 24% річних із щомісячним нарахуванням;
 - б) 25% річних при нарахуванні кожних півроку.
- Який варіант вигідніший?

2.18. Підприємець може отримати позику за умов:

- а) отримати кредит на 50000 грн., а повернути через 3 роки – 82000 грн.;
 - б) взяти кредит в банку під 16% річних при щоквартальному нарахуванні.
- Яка пропозиція вигідніша?

2.19. Борг у 10000 грн. зростає до 25200 грн. через 6 років. Якою є величина боргу через 4 роки, якщо проценти нараховуються кожних півроку?

2.19. 18509,3 грн.

2.20. Фінансовий менеджер компанії запропонував Вам інвестувати 500000 грн. у його компанію, пообіцявши повернути 700000 грн. через 2 роки. Банк пропонує свій інвестиційний проект з цінними паперами. На яку ставку прибутковості Ви б погодились, якщо проценти нараховуються: а) 1 раз на рік; б) 2 рази на рік?

2.20. а) 18,32%; б) 17,55%

2.21. При розробці умов контракту сторони домовились, що кредитна операція матиме прибутковість на рівні 24% річних. Яким повинен бути розмір номінальної ставки при нарахуванні процентів а) кожних півроку; б) щомісячно?

2.21. а) 22,7%; б) 21,7%

2.22. Якою буде майбутня вартість капіталу 30000 грн. через 3 роки при ставці 12% із щорічним нарахуванням? За скільки років капітал подвоїться?

2.22. 42147,84 грн.; 6,12 роки

2.23. При постійному рівні інфляції 5% банк надав підприємству кредит у сумі 200000 грн. на 3 роки під 18% річних. Визначити процентну ставку, яка враховує інфляцію та суму платежу, що погашатиметься.

2.23. 23,9%; 380403 грн.

2.24. Сума позики становить 20000 грн., термін – 3 роки . Річна ставка – 15%. Визначити процентну ставку, яка враховує інфляцію, та суму платежу, що погашатиметься, якщо очікуваний індекс інфляції дорівнює 1,2.

2.24. 22,2%; 36501 грн.

3. Фінансова еквівалентність. Рівняння вартості

Річна процентна ставка i_1 з нарахуванням процентів m_1 разів на рік еквівалентна ставці i_2 з нарахуванням процентів m_2 разів на рік, якщо:

$$\left(1 + \frac{i_1}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{i_2}{m_2}\right)^{m_2}. \quad (18)$$

Якщо маємо суму грошей S_1 у момент часу t_1 та суму S_2 у момент часу t_2 , то для коректного порівняння цих сум їх треба привести до спільного моменту часу t_3 .

Приклад 1. Яка величина процентної ставки із щомісячним нарахуванням буде еквівалентна процентній ставці 8% із щоквартальним нарахуванням?

Розв'язання. Із формули (18) маємо:

$$\left(1 + \frac{x}{12}\right)^{12} = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 \Rightarrow 1 + \frac{x}{12} = \sqrt[12]{1.02^4} \Rightarrow x = 12 * (\sqrt[12]{1.02^4} - 1) \Rightarrow x \approx 0.0795 \text{ (7.95\%)}$$

Приклад 2. Борг розміром 10000 грн. слід сплатити через 3 роки. Знайти еквівалентне значення боргу за ставкою 12% через: а) рік; б) 5 років.

Розв'язання.

$$\text{а) } S_1 = 10000 * (1.12)^{-2} = 7971.94 \text{ грн.}$$

$$\text{б) } S_2 = 10000 * (1.12)^2 = 12544 \text{ грн.}$$

Завдання

3.1. Яка ставка процента при щомісячному нарахуванні еквівалентна ставці 20% з піврічним нарахуванням?

$$3.1. \quad 19,21\%$$

3.2. Обчислити реальну доходність позикової операції, проведеної за складною річною ставкою 20%, та облікової операції, проведеної за складною обліковою

ставкою 16%, за умови нарахування процентів: а) раз у рік; б) раз у півріччя; в) щоквартально.

3.2. а) $i_{\text{еф}}=20\%$, $i_{\text{екв}}=19,05\%$; б) $i_{\text{еф}}=21\%$, $i_{\text{екв}}=18,15\%$;
в) $i_{\text{еф}}=21,55\%$, $i_{\text{екв}}=17,74\%$;

3.3. Ставка банку по депозитах складає 17% річних. Обчислити реальну доходність позикових операцій, якщо проценти нараховуються: а) раз у півріччя; б) щомісячно.

3.3. а) 17,72%; б) 18,39%

3.4. Знайти ефективну ставку, при якій 8000\$ зараз еквівалентні 13480\$ через 5 років.

3.4. 11%

3.5. Знайти номінальну ставку з піврічним нарахуванням, при якій 18000 грн. через 5 років еквівалентні 25000 грн. через 7 років.

3.5. 17,12%

3.6. Борг у сумі 20000 грн. необхідно виплатити через 4 роки. Якщо на борг нараховуються проценти за ставкою 17% річних, знайти еквівалентну величину боргу через: а) 1 рік; б) 5 років.

3.6. а) 12487,4 грн.; б) 23400 грн.

3.7. Підприємець купує обладнання вартістю 36000 грн. Він заплатив 6000 грн. відразу і сплатить 14000 грн. через 3 місяці. Якщо на суму невиплаченого боргу нараховуються прості проценти за ставкою 15% річних, якою повинна бути завершальна виплата через півроку?

3.7. 17767,2 грн.

3.8. Фермер на даний час має борг, який через 4 роки буде становити 8000 грн. Фермер планує сплачувати цей борг так: 2000 грн. через рік, 3000 грн. через 3 роки, а останню сплату зробити через 6 років від даного моменту часу. Якою повинна бути сума останнього внеску, якщо проценти нараховуються за ставкою 10% річних?

3.8. 2466 грн.

3.9. Підприємець може придбати автомобіль за 23000\$ готівкою або заплатити 30000\$ через 2 роки. Підприємець має на рахунку у банку не менше 23000\$ і при цьому банк нараховує 14% річних. а) Яка з пропозицій більш вигідна для підприємця? б) Чи зміняться пріоритети, якщо банк нараховуватиме проценти щоквартально?

3.9 а) перша; б) друга

3.10. Банк має два векселі, підписані підприємцем: один – з датою погашення через 3 роки на 50000 грн. і другий – на 80000 грн. з датою погашення через 5 років. Банк нараховує проценти раз у півріччя за ставкою 18% річних. Якщо підприємець сплатить 30000 грн. зараз, скільки він повинен сплатити через 4 роки, погашаючи весь борг?

3.10. 66962,5 грн.

3.11. Борг потрібно виплатити двома платежами: 700 грн. через рік та 2000 грн. в кінці третього року. Знайти еквівалентну цим виплатам суму одноразового платежу при нарахуванні процентів за ставкою 15% річних: а) сьогодні; б) наприкінці другого року.

3.11. а) 1923,7 грн.; б) 2544,1 грн.

3.12. Борг, який через 3 роки після утворення досягне 18000 грн., потрібно погасити двома рівними виплатами в кінці другого та четвертого років. Визначити величину цих виплат, якщо проценти нараховуються кожні півроку за ставкою 24% річних.

3.12. 8773,7 грн.

3.13. Борг у сумі 30000 грн. погашається через 2 роки і в сумі 50000 грн. – через 4 роки. Якщо на борг проценти нараховуються за ставкою 12% річних, через скільки років обидва платежі замінить виплата: а) 70000 грн.; б) 80000 грн.?

3.13. а) 2,02 роки; б) 3,2 роки

3.14. Борг потрібно виплатити двома платежами: 8000 грн. – через 2 роки та 12000 грн. через 5 років. За процентною ставкою 22% річних знайти час, коли заміна обох виплат однією виплатою розміром 21400 грн. буде еквівалентною.

3.14. 3,92 роки

4. Фінансові ренти (ануїтети)

Нехай:

- R або W – постійний розмір періодичного внеску (або платежу) ренти;
- p - кількість платежів ренти за рік;
- m - кількість нарахувань процентів за рік;
- n - термін ренти, тобто час від початку 1-го періоду ренти до кінця останнього;
- i - процентна ставка за 1 конверсійний період ренти.

Формули для розрахунку майбутньої (FV) та поточної (PV) вартості простої ренти ($p=m$) постнумерандо мають вигляд:

$$\begin{aligned}FV &= R * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R * s(n, i); \\PV &= R * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = R * a(n, i).\end{aligned}\tag{19}$$

Значення коефіцієнтів нарощення та дисконтування одиничної ренти беруть із спеціальної фінансової таблиці.

Формули для розрахунку майбутньої (FV_0) та поточної (PV_0) вартості простої ренти ($p=m$) пренумерандо мають вигляд:

$$\begin{aligned}FV_0 &= R * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i); \\PV_0 &= R * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} * (1+i).\end{aligned}\tag{20}$$

Формули для розрахунку майбутньої (FV) та поточної (PV) вартості загальної ренти ($p \neq m$) постнумерандо мають вигляд:

$$\begin{aligned}
FV &= W * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}; \\
PV &= W * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}.
\end{aligned}
\tag{21}$$

Формули для розрахунку майбутньої (FV_0) та поточної (PV_0) вартості загальної ренти ($p \neq m$) пренумерандо мають вигляд:

$$\begin{aligned}
FV_0 &= W * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1} * (1+i)^{\frac{m}{p}}; \\
PV_0 &= W * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1} * (1+i)^{\frac{m}{p}}.
\end{aligned}
\tag{22}$$

Термін простої ренти постнумерандо знаходимо за формулами:

$$n = \ln\left(1 + \frac{i * FV}{R}\right) / \ln(1+i) = -\ln\left(1 - \frac{i * PV}{R}\right) / \ln(1+i).
\tag{23}$$

Приклад 1. Знайти майбутню та поточну вартість **зведеної** ренти з виплатами по 500 грн. на початку кожного кварталу при щоквартальному нарахуванні процентів за ставкою 8% річних. Термін ренти - 4 роки.

Розв'язання: $R=500$; $n=4*4=16$; $i=0.08/4=0.02$;

$$\begin{aligned}
FV_0 &= R * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i) = 500 * \frac{(1+0.02)^{16} - 1}{0.02} * (1+0.02) = 9506.6 \text{ грн.}; \\
PV_0 &= R * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} * (1+i) = 500 * \frac{1 - (1+0.02)^{-16}}{0.02} * (1+0.02) = 6924.6 \text{ грн.}
\end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти майбутню та поточну вартість ренти з семи виплат по 1000 грн. в кінці кожного кварталу при щомісячному нарахуванні процентів за ставкою 12% річних.

Розв’язання: $p=4$; $m=12$; $W=1000$; $n=7*3=21$ (місяць); $i=0.12/12=0.01$;

$$FV = W * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1} = 1000 * \frac{(1+0.01)^{21} - 1}{(1+0.01)^3 - 1} \approx 1000 * \frac{0.232392}{0.030301} \approx 7669.45 \text{ грн.};$$

$$PV = W * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1} = 1000 * \frac{1 - (1+0.01)^{-21}}{(1+0.01)^3 - 1} \approx 1000 * \frac{0.18857}{0.030301} \approx 6223.2 \text{ грн.}.$$

Завдання

4.1. Знайти майбутню вартість фінансової ренти для кожного з випадків:

- Квартальний внесок становить 300 грн., проценти нараховуються щоквартально за ставкою 16% річних. Термін ренти - 3 роки.
- Місячний внесок 80 грн., проценти нараховуються щоквартально за ставкою 20% річних. Термін ренти - 2 роки.
- Річний внесок 1000 грн., проценти нараховуються кожних півроку за ставкою 18% річних. Термін ренти - 5 років.

4.2. Знайти поточну вартість фінансової ренти для кожного з випадків:

- Піврічний внесок 400 грн., проценти нараховуються кожних півроку за ставкою 14% річних. Термін ренти - 5 років.
- Квартальний внесок становить 3000 грн., проценти нараховуються за ставкою 17% річних. Термін ренти - 4 роки.
- Річний внесок 500 грн., проценти нараховуються кожних півроку за ставкою 18% річних. Термін ренти - 6 років.

4.3. Обчислити величину щорічних виплат зведеної ренти терміном 5 років, теперішня вартість якої - 120000 грн. Процентна ставка – 14% річних.

4.3. 30661,26 грн.

4.4. Знайти поточне та нарощене значення ренти з виплатами 300 грн. у кінці кожного року при щоквартальному нарахуванні процентів за ставкою 16% річних. Термін ренти – 4 роки.

4.4. 823,2 грн.; 1541,84 грн.

4.5. Дехто вносить у кінці кожного місяця по 100 грн. з прибутком, що визначається ставкою 12% річних при щомісячному нарахуванні процентів.
а) Яка сума грошей буде через 2 роки? б) Якими повинні бути щомісячні внески, щоб накопичити суму в 5000 грн. за такий же період?

4.5. а) 2697,35 грн.; б) 185,3 грн.

4.6. Компанія планує вкласти гроші в обладнання, термін роботи якого до його повного фізичного зносу – 5 років. Очікується, що нове устаткування після щорічної сплати податків приносить прибуток у сумі 10000 грн. щорічно. Також очікується, що ця сума забезпечить приріст із ставкою 10% при щорічному нарахуванні. Скільки коштує обладнання?

4.6. 37907,9 грн.

4.7. Фермер купує машину і сплачуватиме по 500 \$ у кінці кожного кварталу протягом 5 років. Угода про продаж включає щоквартальне нарахування процентів за ставкою 12% річних. Яку суму мав сплатити фермер за автомобіль зараз?

4.7. 7438,74 \$

4.8. Батьки майбутнього студента бажають створити для нього фонд, який сплачуватиме йому по 1000 грн. у кінці кожного місяця протягом 4 років. Яку суму вони повинні внести зараз, якщо розраховують на ставку 9% річних при щомісячному нарахуванні процентів? Яким повинен бути вклад, якщо виплати студенту будуть робити на початку місяця?

4.8. 40185 грн.; 40486,2 грн.

4.9. Закладна на 70000 грн. повинна бути погашена щомісячними виплатами протягом 8 років. Ставка – 18% річних при щомісячному нарахуванні процентів. Перша виплата відбудеться через рік після підписання закладної. Знайти величину щомісячного внеску.

4.9. 1722,84 грн.

4.10. Знайти майбутню та поточну вартість фінансової ренти, що складається з 6 виплат по 800 грн. кожна, зроблених на початку кожного півріччя і на які нараховуються щомісячно проценти за ставкою 24% річних.

4.10. $FV=7425.87$ грн.; $PV=3640.33$ грн.

4.11. Дехто сплачує по 800 грн. на початку кожного місяця на свій рахунок у банк протягом 3 років. Внески дають 8% річних з піврічним нарахуванням. Знайти майбутню та поточну вартість цієї ренти.

4.11. $FV=32577,1$ грн.; $PV=25746,2$ грн.

4.12. Підприємець бажає накопичити 100000 грн. протягом 5 років. Для цього він робить щомісячні внески у фонд зі ставкою 16% річних з щоквартальним нарахуванням. Знайти суму щомісячного внеску, якщо сплата здійснюється на початку кожного місяця.

4.12. 1090,4 грн.

4.13. Крамар вважає, що через 3 роки йому знадобиться новий холодильник вартістю 6000 грн. Якою повинна бути сума внеску в кінці кожного кварталу, якщо ставка – 8% річних при щоквартальному нарахуванні процентів протягом 3 років?

4.13. 447,36 грн.

4.14. Підприємець придбав обладнання і заплатив за нього 30000 грн. Залишок вартості він сплачуватиме протягом 3 років рівними внесками в кінці місяця по 1000 грн. Якщо гроші приносять прибуток 12% річних при щомісячному нарахуванні, то яка вартість обладнання?

4.14. 60108 грн.

4.15. На слуханнях у суді виявилось, що підприємець недоплачував податків у сумі 800 грн. щомісячно. Податкова інспекція хоче утримати невиплачені за останні 2 роки податки разом з процентами (2% щомісячно). Яку суму повинен заплатити підприємець?

4.15. 24337,5 грн.

4.16. Знайти майбутню та поточну вартість зведеної ренти з виплатами по 90 грн. на початку кожного місяця при щоквартальному нарахуванні процентів за ставкою 18% річних. Термін ренти - 5 років.

4.16. 8723,15 грн.; 3617 грн.

4.17. При придбанні житла необхідно внести початкову суму в 300000 грн. і сплачувати щомісячно 8000 грн. протягом наступних 6 років. Яка вартість житла на день покупки, якщо проценти нараховуються за ставкою 20% річних?

4.17. 647550 грн.

4.18. Компанія отримала кредит і буде погашати його, сплачуючи по 20000 грн. щомісячно. Перший внесок треба здійснити через 2 роки, а останній – через 5 років від дати укладання угоди. Яку суму кредиту отримала компанія в день укладання угоди, якщо проценти нараховуються щомісячно за ставкою 18% річних?

4.18. 400988 грн.

4.19. Провівши вдосконалення технологічного процесу, підприємство протягом 5 наступних років планує щорічне збільшення прибутку на 100000 грн. Ці гроші воно збирається вкласти під 13% річних, бажаючи через 5 років накопичити суму на закупівлю нового обладнання. Яку суму грошей підприємство зможе вкласти в нове обладнання через 5 років?

4.19. 648027 грн.

4.20. Покупець запропонував два варіанти розрахунків при купівлі будинку: 1) 60000\$ зараз і потім по 10000\$ протягом 5 років; 2) 90000\$ зараз і по 3000\$ протягом 5 років. Який варіант вигідніший продавцю при річній ставці процента а) 10%; б) 5% ?

4.20. а) Другий; б) Перший

4.21. Вам пропонують здати в оренду приміщення на 4 роки і вибрати один з двох варіантів оплати оренди: а) 12000 грн. у кінці кожного року; б) 58000 грн. у кінці чотирирічного періоду. Який варіант кращий для Вас, якщо банк пропонує 12% річних по вкладах?

4.21. Другий (57352<58000)

4.22. Замінити ренту терміном 4 роки з виплатами по 250 грн. у кінці кожного місяця та нарахуванням процентів по півріччях за ставкою 14% річних простою рентою з піврічними виплатами.

$$4.22. \quad FV=15832 \text{ грн.}; \quad R=1543.17 \text{ грн.}$$

4.23. Підприємство отримало кредит на 500000 грн. Визначити термін погашення боргу, якщо борг амортизується щомісячними виплатами по 25000 грн. за процентною ставкою 6% річних.

$$4.23. \quad 21,12 \text{ місяця}$$

4.24. Сім'я бажає накопичити 200000 грн. на покупку автомобіля, вкладаючи щорічно в банк 30000 грн. Річна ставка банку – 16%. Як довго триватиме накопичення?

$$4.24. \quad 4,89 \text{ року}$$

5. Показники фінансової ефективності виробничих інвестицій

Фінансовий аналіз виробничих інвестицій полягає в основному в вимірі кінцевих фінансових результатів інвестицій (їх прибутковості для інвестора). Таке завдання виникає як на етапі попереднього аналізу проекту, так і при розробці бізнес-плану. Негативний висновок дає підставу відмовитися від подальшого, більш поглибленого вивчення проекту. Без розрахунку показників фінансової ефективності інвестицій неможливо здійснити порівняння альтернативних проектів.

Суть всіх методів оцінки базується на наступній простій схемі: вихідні інвестиції C_0 при реалізації будь-якого проекту генерують грошовий потік $CF_1, CF_2, \dots, CF_n$. Інвестиції визнаються ефективними, якщо цей потік достатній для:

1. повернення вихідної суми капіталовкладень;
2. забезпечення необхідної віддачі на вкладений капітал.

В даний час у світовій практиці найбільш поширені такі дисконтовані показники фінансової ефективності інвестицій:

1. NPV (Net Present Value) - чиста сучасна вартість
2. IRR (Internal Rate of Return) - внутрішня норма (ставка) прибутковості
3. PI (Profitability Index) - індекс рентабельності
4. DPP (DPM) (Discounted Payback Period (Method)) - дисконтований термін окупності.

При розрахунку цих показників усі вигоди і витрати за проектом приводяться до одного, базового моменту часу (як правило, це дата початку реалізації проекту або дата початку виробництва продукції).

Усі перераховані показники використовуються в двох варіантах: 1) для визначення фінансової ефективності незалежних інвестиційних проектів (абсолютний аналіз), коли робиться висновок, прийняти аналізований проект або відхилити; 2) для визначення фінансової ефективності альтернативних проектів (порівняльний аналіз).

Чиста сучасна вартість проекту - NPV

Найбільш поширена формула для розрахунку цього показника має вигляд:

$$NPV = -C_0 + \sum_{s=1}^n \frac{B_s - C_s}{(1+i)^s} = -C_0 + \sum_{s=1}^n \frac{CF_s}{(1+i)^s} \quad (24)$$

де чисті вигоди поточного періоду проекту дорівнюють: $CF_s = B_s - C_s$, $s \in \overline{1, n}$,

B_s – s -й рік очікуваний грошовий дохід, а C_s – s -й рік очікувані грошові витрати.

Якщо доходи від проекту надходять рівномірно протягом всього конверсійного періоду, то застосовується більш точна формула:

$$NPV = -C_0 + \sqrt{1+i} \sum_{s=1}^n \frac{CF_s}{(1+i)^s} \quad (25)$$

Абсолютний аналіз проекту за допомогою даного показника:

- $NPV > 0$ – проект рекомендується до реалізації за даним показником.
- $NPV < 0$ – проект не рекомендується до реалізації за даним показником.
- $NPV = 0$ – потрібно досліджувати інші показники і альтернативні можливості. Якщо значення інших показників влаштовують інвестора і у нього немає більш дохідних альтернативних варіантів, то проект рекомендується до реалізації (у цьому разі грошові кошти інвестора будуть захищені від ерозії капіталу внаслідок інфляції).

Порівняльний аналіз за даним показником: з кількох альтернативних проектів вибирається проект з **максимальним** значенням NPV .

Внутрішня норма прибутковості проекту – IRR

Розглянемо рівняння:

$$NPV(i) = -C_0 + \sum_{s=1}^n \frac{B_s - C_s}{(1+i)^s} = -C_0 + \sum_{s=1}^n \frac{CF_s}{(1+i)^s} = 0 \quad (26)$$

Якщо це рівняння вирішити щодо змінної i , то додатний корінь цього рівняння i_0 й буде внутрішньою нормою прибутковості $IRR = i_0$.

Абсолютний аналіз по IRR:

- $IRR > CC$ (Cost of Capital) - тоді за даним показником проект рекомендується до виконання;
- $IRR < CC$ - проект реалізовувати не рекомендується;
- $IRR = CC$ - потрібні подальші дослідження.
-

Відносний (порівняльний) аналіз: чим більше значення IRR, тим краще.

Для **довільного** грошового потоку за проектом показник IRR можна приблизно знайти за наступною формулою лінійної інтерполяції:

$$IRR \approx i_1 + \frac{NPV_1}{NPV_1 + |NPV_2|} (i_2 - i_1), \quad (27)$$

де:

i_1 – ставка дисконтування, при якій $NPV(i_1) = NPV_1 > 0$, а i_2 – ставка, при якій $NPV(i_2) = NPV_2 < 0$.

Чим **менше** інтервал інтерполяції

$$(i_1; i_2)$$

тим **більш точним** буде значення IRR!

Для **рентного** потоку грошей лінійна інтерполяція здійснюється за формулами (33).

Індекс рентабельності проекту - PI

Визначається як наступне відношення:

$$PI = \frac{\sum_{s=1}^n \frac{B_s - C_s}{(1+i)^s}}{C_0} = 1 + \frac{NPV}{C_0}. \quad (28)$$

Абсолютний аналіз:

- якщо $PI > 1$, то проект рекомендується до реалізації;
- якщо $PI < 1$, то проект не рекомендується до реалізації;
- якщо $PI = 1$, то потрібні подальші дослідження.

Порівняльний аналіз: чим більше значення PI, тим краще.

Дисконтований термін окупності проекту – DPP

DPP - це кількість періодів, за які загальна приведена вартість за проектом дорівнює обсягу початкових капіталовкладень в нього. У загальному випадку найбільш точна формула для розрахунку цього показника має вигляд:

$$DPP = (m-1) + \frac{C_0 - \sum_{s=1}^{m-1} \frac{CF_s}{(1+i)^s}}{\frac{CF_m}{(1+i)^m}} \quad (29)$$

де $CF_s = B_s - C_s$, m - номер періоду, в якому відбувається повне погашення початкових інвестицій.

Порівняльний аналіз за показником DPP : чим **менше** значення показника, тим краще!

Формули показників ефективності інвестиційного проекту для рентного потоку платежів:

$$1) NPV = R \cdot a(n, i) - C_0; \quad R > 0 - const; \quad (30)$$

$$a(n, i) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i};$$

$$2) PI = \frac{R \cdot a(n, i)}{C_0} = 1 + \frac{NPV}{C_0}; \quad (31)$$

$$3) DPP = -\frac{\ln\left(1 - \frac{C_0 \cdot i}{R}\right)}{\ln(1+i)}; \quad (32)$$

$$4) IRR \approx i_l + \frac{a - a_l}{a_{\hat{a}} - a_l} (i_{\hat{a}} - i_l),$$

$$\text{де } a = \frac{C_0}{R}; \quad a_l > a > a_{\hat{a}}; \quad i_l < IRR < i_{\hat{a}}. \quad (33)$$

У даному випадку **лінійна інтерполяція** здійснюється за значеннями коефіцієнтів дисконтування одиничної ренти із спеціальної фінансової таблиці.

Приклад. Підприємство інвестує 360000 грн. у нове оснащення, яке, як очікується, протягом наступних 5 років скоротить витрати праці на 100000 грн. щорічно. Визначити значення показників NPV, PI, DPP для цього проекту.

Розв’язання:

$$NPV = R \cdot a(n, i) - C_0 = 100000 \cdot a(5, 0.1) - 360000 = 379100 - 360000 = 19100 \text{ грн.};$$

$$PI = 1 + \frac{NPV}{C_0} = 1 + \frac{19100}{360000} \approx 1.053 > 1;$$

$$DPP = -\frac{\ln\left(1 - \frac{C_0 \cdot i}{R}\right)}{\ln(1+i)} = -\frac{\ln 0.64}{\ln 1.1} \approx 4.68 \text{ років}.$$

Завдання

6.1. Компанія бажає модернізувати своє обладнання, щоб зменшити витрати на працю. Для цього можна придбати один з двох верстатів. Перший верстат коштує 70000 грн. і економить 16000 грн. щорічно протягом 7 років. Другий коштує 90000 грн. і економить 19000 грн. щорічно. Через 7 років верстати вже не мають ліквідаційної вартості і повинні бути замінені. Якщо гроші приносять прибуток у розмірі 8% річних, то який з верстатів купити вигідніше?

$$6.1. \quad NPV_1 = 13296 \text{ грн.}; \quad NPV_2 = 8914 \text{ грн.}$$

6.2. Підприємство інвестує 200000 грн. у нове оснащення, котре, як очікується, щорічно протягом наступних 4 років скоротить витрати праці на 80000 грн. Визначити NPV даного проекту, якщо гроші приносять прибуток у розмірі 10% річних. Визначити також IRR, DPP проекту.

6.2. $NPV = 53589$ грн.; $IRR = 21.8\%$; $DPP = 3.02$ роки

6.3. Початкові інвестиції – 330000 грн., ставка приведення – 10%. Доходи по проекту розподіляються за роками таким чином: за перший рік – 150000 грн., за другий – 120000 грн., за третій – 100000 грн., за четвертий – 80000 грн. Визначити NPV даного проекту.

6.3. $NPV = 35310$ грн.

6.4. Початкові інвестиції – 330000 грн., ставка приведення – 10%. Доходи по проекту розподіляються за роками таким чином: за перший рік – 30000 грн., за другий – 60000 грн., за третій – 140000 грн., за четвертий – 290000 грн. Визначити NPV даного проекту.

6.4. $NPV = 50120$ грн.

6.5. Проект з початковими інвестиціями в 150000 грн. забезпечує чисті грошові надходження розміром 50000 грн. щорічно протягом 4 років. Визначити IRR проекту.

6.5. $IRR = 12,6 \%$

6.6. Визначити IRR проекту, розрахованого на 3 роки, якщо він вимагає початкових інвестицій в обсязі 100000 грн. та забезпечуватиме чисті грошові надходження розміром 30000 грн., 40000 грн., 70000 грн.

6.6. $IRR = 16,23 \%$

6.7. Визначити IRR проекту, розрахованого на 4 роки, якщо він вимагає початкових інвестицій в обсязі 200000 грн. та забезпечуватиме чисті грошові надходження розміром 50000 грн., 80000 грн., 70000 грн., 60000 грн.

6.7. $IRR = 11,17 \%$

6.8. Початкові інвестиції – 400000 грн., ставка приведення – 10%. Доходи по проекту розподіляються за роками таким чином: за перший рік – 170000

грн., за другий – 140000 грн., за третій – 130000 грн., за четвертий – 120000 грн. Визначити дисконтний термін окупності даного проекту.

6.8. $DPP = 3.4$ роки

Список літератури

1. У. Ф. Шарп и др. Инвестиции. – М.: ИНФРА – М, 1999. – 1028 с.
2. Ф. Дж. Фабоцци. Управление инвестициями. – М.: ИНФРА – М, 2000. – 932 с.
3. В.И.Малыхин. Финансовая математика. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 247 с.
4. В.В.Капитоненко. Инвестиции и хеджирование. – М.: ПРИОР, 2001. – 240 с.
5. С.С. Клименко , В.М. Мацкул. Опорний конспект лекцій за курсом «Фінансова математика». - Одеса: ОНЕУ, 2007. – 102 с.
6. С.С. Клименко, В.М. Мацкул, Н.Л. Воропай. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з курсу «Фінансова математика». – Одеса: ОНЕУ, 2005. – 43 с.
7. Савчук В.П.и др. Анализ и разработка ИП. - К., «Абсолют – В», 1999 г. – 304 с.
8. Т.Б. Кублікова, В.К. Кубліков. Інвестиції на ринку цінних паперів. – Одеса: ОРІДУ НАДУ, 2006. – 428 с.