Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 100–107

УДК 517.977

А. И. Третьяк
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
кафедри оптимального керування та економічної кібернетики ОНУ 19.04.2002 р.

Розглядаються нелінійні нестаціонарні системи оптимального керування з частинними похідними. Оптимальність розуміється в сенсі мінімуму термінального функціонала, причому як початковий, так і кінцевий моменти часу передбачаються фіксованими. Для таких систем автор, продовжуючи дослідження, започатковані в роботі [8], одержує, для визначеного класу нелінійних систем керування з частинними похідними і при визначених припущеннях, нові необхідні умови оптимальності довільного порядку для випадку скалярного керування.

Рассматриваются нелинейные нестационарные системы оптимального управления с частными производными. Оптимальность понимается в смысле минимума терминального функционала, причем как начальный, так и конечный моменты времени предполагаются фиксированными. Для таких систем автор, продолжая исследования, начатые в работе [8], получает, для определенного класса линейных систем управления с частными производными и при определенных предположениях, новые необходимые условия оптимальности произвольного порядка для случая скалярного управления.

The nonlinear nonstationary systems of optimal control with partial derivatives are considered. The optimality is perceived in sense of a minimum of a terminal functional, and both initial, and the final instants are guessed by fixed. For such systems the author, prolonging researches started in paper [8], receives, for the class of nonlinear control systems with partial derivatives and at the definite suppositions new necessary optimality conditions of an arbitrary order for a scalar control case.

Введение. В настоящей работе рассматриваются нелинейные нестационарные системы оптимального управления с частными производными. Оптимальность понимается в смысле минимума терминального функционала (функции конечного состояния системы управления), причем как начальный, так и конечный моменты времени предполагаются фиксированными. Для таких систем известен ряд результатов относительно необходимых условий оптимальности *первого* и *второго* порядков. Используя подход, развитый в работах [4–8], и аппарат хронологического исчисления А. А. Аграчева – Р. В. Гамкрелидзе [1–3], автор получает, для определенного класса нелинейных систем управления с частными производными и при определенных предположениях, необходимые условия оптимальности *произвольного* порядка для случая скалярного управления.

1. Дифференцирования в алгебрах. Пусть Ψ – произвольная действительная алгебра, то есть действительное векторное пространство, в котором определено умножение, удовлетворяющее единственному условию билинейности. Таким образом, алгебра Ψ может быть неассоциативной и не иметь единицы. Через $\Lambda(\Psi)$ обозначим ассоциативную алгебры всех линейных отображений векторного пространства Ψ в себя. Умножение элементов $T_1, T_2 \in \Lambda(\Psi)$ определяется как их композиция: $T_1 T_2 = T_1 \circ T_2 \quad \forall T_1, T_2 \in \Lambda(\Psi)$. Линейное отображение $\delta \in \Lambda(\Psi)$ называется дифференцированием алгебры Ψ, если оно удовлетворяет формальному правилу дифференцирования произведения: $\delta(ab) = (\delta a)b + a(\delta b) \quad \forall a, b \in \Psi$. Множество $\mathrm{Der}(\Psi)$ всех дифференцирований алгебры Ψ образует алгебру Ли с умножением

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1 .$$

2. Однопараметрические семейства функций. Обозначим через $\Phi(G)$ алгебру всех бесконечно дифференцируемых функций, определённых в области $G \subset \mathbf{R}^n$. Через $\Phi^N(G)$ будем обозначать декартово произведение N экземпляров $\Phi(G)$. Пусть $h = \left(h^1, \ldots, h^n\right) \in \mathbf{R}^n$. Обозначим через $\vec{h}$ линейный дифференциальный оператор первого порядка $\vec{h} = \sum_{\alpha=1}^{n} h^\alpha \partial_\alpha$, $\partial_\alpha = \partial / \partial x^\alpha$, $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbf{R}^n$, и положим

$$\|\varphi\|_{s,M} = \max_{x \in M} \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!} \max_{|h|=1} \left|\vec{h}^k \varphi(x)\right| \quad \forall \varphi \in \Phi(G).$$

Здесь $M \subset G$ – компакт, $|h| = \max_{1 \le \alpha \le n} \left|h^\alpha\right|$, а $s \ge 0$ – целое. Очевидно, что с помощью семейства полунорм $\|\cdot\|_{s,M}$ мы превращаем $\Phi(G)$ в пространство Фреше (полное метризуемое локально выпуклое пространство).

Ниже мы увидим, что в тех уравнениях с частными производными, которые мы рассматриваем в этой статье, переменные t и x играют совершенно различную роль. Поэтому нас будут особо интересовать однопараметрические семейства φ_t, $t \in \mathbf{R}$ элементов $\Phi(G)$, на которые стандартным образом переносятся все основные конструкции анализа. Именно: *непрерывность* и *дифференцируемость* семейства φ_t, $t \in \mathbf{R}$ элементов $\Phi(G)$ определяется очевидным образом, в силу того что $\Phi(G)$ – линейное топологическое пространство.

Скажем, что семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$ *измеримо*, если измерима скалярная функция $t \mapsto \varphi_t(x) \quad \forall x \in G$.

Говорят, что измеримое семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$ *локально интегрируемо*, если $\int_{t_1}^{t_2} \|\varphi_\tau\|_{s,M} d\tau < \infty \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $s = 0, 1, \ldots$ и $\forall$ компакта $M \subset G$.

Интегралом локально интегрируемого семейства φ_t, $t \in \mathbf{R}$ в заданных пределах от t_1 до t_2 называется функция $x \mapsto \int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau(x) d\tau$, принадлежащая $\Phi(G)$.

Семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$ называется *абсолютно непрерывным*, если существует такое локально интегрируемое семейство ψ_t, $t \in \mathbf{R}$, что $\varphi_t = \varphi_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \psi_\tau d\tau$. Оказывается, что в этом случае $\frac{d\varphi_t}{dt} = \psi_t$ при почти всех $t \in \mathbf{R}$.

Все введённые выше понятия (за исключением абсолютной непрерывности) естественно переносятся и на семейства $\varphi_{\tau_1, \ldots, \tau_m}$, $\tau_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ элементов $\Phi(G)$, зависящих от m параметров $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Кроме того, очевидным образом определяются соответствующие понятия для семейств φ_t, $t \in \mathbf{R}$ элементов $\Phi^N(G)$. Так, например, семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$ элементов $\Phi^N(G)$ называется локально интегрируемым, если локально интегрируемо семейство φ_t^j, $t \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ элементов $\Phi(G)$, а интегралом локально интегрируемого семейства φ_t, $t \in \mathbf{R}$ элементов $\Phi^N(G)$ называется элемент

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau d\tau = \left(\int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau^1 d\tau, \ldots, \int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau^N d\tau \right) \in \Phi^N(G).$$

3. Формальное решение задачи Коши. Отметим, прежде всего, что достаточно рассматривать системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, правая часть которых не содержит пространственного переменного x, то есть системы вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f\left(t, v, \frac{\partial v}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x^n}\right), \ v(t_0, x) = \omega(x), \ x \in G \subset \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

Сведение общей системы дифференциальных уравнений с частными производными к такому виду производится обычным путём – введением дополнительных неизвестных функций и последующим дифференцированием. С системой вида (1) мы и будем иметь дело далее. Правую часть f уравнения (1) будем рассматривать как семейство $f = \{f_t : t \in \mathbf{R}\}$ гладких отображений $f_t = f(t, \cdot) : \mathbf{R}^{(n+1)N} \to \mathbf{R}^N$. Поэтому мы будем записывать уравнение (1) в виде

$$\frac{dz_t}{dt} = f_t(z_t, \partial_1 z_t, \ldots, \partial_n z_t), \ z_{t_0} = \omega \tag{2}$$

и говорить, что абсолютно непрерывное семейство z_t, $t \in J$ является решением (2), если $\frac{dz_t}{dt} = f_t(z_t, \partial_1 z_t, \ldots, \partial_n z_t)$ при почти всех $t \in J$ и $z_{t_0} = \omega$ в $\Phi^N(G')$. Здесь J – интервал вещественной оси, содержащий точку t_0, а G' – подобласть области G, возможно, совпадающая с ней. Наши основные предположения заключаются в том, что $\omega \in \Phi^N(G)$, а семейство f_t, $t \in \mathbf{R}$ разлагается в ряд Маклорена

$$f_t^j(z, \partial_1 z, \ldots, \partial_n z) = \sum_{\alpha^{(0)}, \ldots, \alpha^{(n)}} a_t^{j, \alpha^{(0)}, \ldots, \alpha^{(n)}} (z)^{\alpha(0)} (\partial_1 z)^{\alpha(1)} \ldots (\partial_n z)^{\alpha(n)}, \ j = 1, 2, \ldots, N,$$

радиус сходимости которого $R_t \geq R > 0$. Здесь

$$\alpha^{(k)} = \left(\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_N^{(k)}\right),\ (\partial_k z)^{\alpha(k)} = \left(\partial_k z^1\right)^{\alpha_1^{(k)}} \ldots \left(\partial_k z^N\right)^{\alpha_N^{(k)}}.$$

Построим [1] формальное решение задачи Коши (2). С этой целью рассмотрим действительную алгебру Ψ, элементами которой являются формальные степенные ряды с действительными коэффициентами от независимых переменных ε, z^1, …, z^N, …, $\partial^\alpha z^k$, …, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – произвольный мультииндекс с неотрицательными компонентами, $k = 1, 2, \ldots, N$. Например,

$$a = a\left[v_1, \ldots, v_q\right] = \sum_{i_1, \ldots, i_q \ge 0} a_{i_1, \ldots, i_q} (v_1)^{i_1} \cdots (v_q)^{i_q} \in \Psi,$$

где $v_j \in \{\varepsilon, z^1, \ldots, z^N, \ldots, \partial^\alpha z^k, \ldots\}$. Сложение и умножение рядов определяется обычным образом. Произвольное линейное преобразование L алгебры Ψ называется непрерывным, если его можно вносить под знак бесконечной суммы, например,

$$L\left(a\left[v_1, \ldots, v_q\right]\right) = \sum_{i_1, \ldots, i_q \ge 0} a_{i_1, \ldots, i_q} L\left((v_1)^{i_1} \cdots (v_q)^{i_q}\right).$$

Нас будут интересовать непрерывные дифференцирования алгебры Ψ, совокупность которых обозначим через $\mathrm{Der}_c(\Psi)$. Дифференцирование $D \in \mathrm{Der}_c(\Psi)$ однозначно определяется своими значениями на образующих ε, $\partial^\alpha z^k$, в силу правила Лейбница и условия непрерывности. С другой стороны, значения D на образующих могут быть произвольными.

В алгебре Ψ имеются естественные дифференцирования $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathrm{Der}_c(\Psi)$, которые задаются на образующих формулами: $\partial_1 \varepsilon = 0$, $\partial_i\left(\partial^\alpha z^k\right) = \partial^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_n)} z^k$ для любых $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Далее, каждую компоненту правой части уравнения (2) можно рассматривать как элемент алгебры Ψ:

$$f_t^j(z, \partial_1 z, \ldots, \partial_n z) = \sum a_t^{j, \alpha(0), \ldots, \alpha(n)} (z)^{\alpha(0)} (\partial_1 z)^{\alpha(1)} \ldots (\partial_n z)^{\alpha(n)} \in \Psi,\ \forall t \in \mathbf{R},\ j = 1, 2, \ldots, N.$$

Введём однопараметрическое семейство дифференцирований $\vec{f}_t \in \mathrm{Der}_c(\Psi)$, задав его действие на образующих при помощи формул

$$\vec{f}_t \varepsilon = 0,\ \vec{f}_t z^k = f_t^k(z, \partial_1 z, \ldots, \partial_n z),\ \vec{f}_t \partial^\alpha z^k = \partial^\alpha f_t^k(z, \partial_1 z, \ldots, \partial_n z),$$
$$t \in \mathbf{R},\ k = 1, 2, \ldots, N,\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Важнейшим для нас свойством дифференцирований $\vec{f}_t$, $t \in \mathbf{R}$, является то, что все они коммутируют с $\partial_1, \ldots, \partial_n$:

$$\left[\partial_i, \vec{f}_t\right] = \partial_i \circ \vec{f}_t - \vec{f}_t \circ \partial_i \quad \forall t \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Определённое нами семейство дифференцирований $\vec{f}_t$, $t \in \mathbf{R}$ действует на элементы алгебры Ψ следующим образом.

Пусть, например,

$$a = a\left[\varepsilon, z^1, \ldots, z^N, \partial_1 z^1, \partial_2 z^1, \ldots, \partial_n z^N\right] \in \Psi.$$

Тогда, очевидно,

$$\vec{f}_t a = \frac{\partial a[\varepsilon, z, ..., \partial_n z]}{\partial z} f_t(z, \partial_1 z, ..., \partial_n z) + \frac{\partial a[\varepsilon, z, ..., \partial_n z]}{\partial(\partial_1 z)} \partial_1 f_t(z, \partial_1 z, ..., \partial_n z) +$$

$$+ \frac{\partial a[\varepsilon, z, ..., \partial_n z]}{\partial(\partial_2 z)} \partial_2 f_t(z, \partial_1 z, ..., \partial_n z) + ... + \frac{\partial a[\varepsilon, z, ..., \partial_n z]}{\partial(\partial_n z)} \partial_n f_t(z, \partial_1 z, ..., \partial_n z).$$

Ниже мы постоянно будем иметь дело с однопараметрическими семействами элементов алгебры Ψ. Мы говорим, что такое семейство a_t измеримо, абсолютно непрерывно и т. д., если все коэффициенты соответствующего формального ряда измеримы, абсолютно непрерывны и т.д. по t. Интегрирование и дифференцирование формальных рядов по t всегда производится почленно.

Пусть $b = b[v_1, ..., v_q] \in \Psi$. Если $a_1, ..., a_q$ – некоторые элементы из Ψ, причём соответствующие степенные ряды не имеют свободного члена, то определена композиция $b = b[a_1, ..., a_q] \in \Psi$. В дальнейшем во всех формулах, где встречается композиция формальных рядов, следует считать, что «внутренние» ряды не имеют свободного члена.

Формальным решением задачи Коши (2) называется такое абсолютно непрерывное однопараметрическое семейство a_t элементов алгебры Ψ, что для почти всех t выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} a_t = \varepsilon f_t(a_t, \partial_1 a_t, ..., \partial_n a_t) \text{ и } a_{t_0} = \omega .$$

Если в степенной ряд, соответствующий некоторому формальному решению задачи Коши, подставить вместо переменных $z^1, ..., z^N, ..., \partial^\alpha z^k, ...$ гладкие функции

$$\omega^1(x), ..., \omega^N(x), ..., \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \omega^k(x), ...$$

и положить $\varepsilon = 1$, то получится некоторый ряд из гладких функций. Ясно, что в том случае, когда такой ряд равномерно сходится, его сумма является решением (не формальным) задачи Коши (2). Ряд

$$F_{t_0, t}(z) = z + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \int_{t_0}^{t} ... \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} \vec{f}_{\tau_m} \circ ... \circ \vec{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(z, \partial z) d\tau_m ... d\tau_1 \tag{3}$$

является [1] формальным решением задачи Коши (2).

Ряд $F_{t_0, t}(z)$ содержит лишь конечное число членов каждой степени, поэтому его «сумма» является вполне определённым элементом алгебры Ψ. Аналогично, ряд

$$P^*_{t_0, t} = \mathrm{Id} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \int_{t_0}^{t} ... \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} \vec{f}_{\tau_m} \circ ... \circ \vec{f}_{\tau_1} d\tau_m ... d\tau_1 = \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \varepsilon \vec{f}_\tau d\tau \tag{4}$$

задаёт непрерывное линейное преобразование алгебры Ψ.

Отметим, что по самому определению $P^*_{t_0, t} \circ \partial_k = \partial_k \circ P^*_{t_0, t}$. Кроме того, $P^*_{t_0, t} z = F_{t_0, t}(z)$. Важный факт состоит в том, что ряд $P^*_{t_0, t}$ обладает следующим мультипликативным свойством:

$$P^*_{t_0,\,t}(ab) = P^*_{t_0,\,t}(a)P^*_{t_0,\,t}(b) \quad \forall a,b \in \Psi .$$

Из этого мультипликативного свойства и вытекает, что ряд $F_{t_0,\,t}(z)$ является формальным решением задачи Коши.

Если в формальный ряд $F_{t_0,\,t}(z)$ подставить вместо $z^1, \ldots, z^N, \ldots, \partial^\alpha z^k, \ldots$ гладкие функции $\omega^1(x), \ldots, \omega^N(x), \ldots, \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\omega^k(x), \ldots$ и положить $\varepsilon = 1$, то получим ряд, состоящий из гладких вектор-функций

$$F_{t_0,\,t}(\omega) = \omega + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} \vec{f}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \vec{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(\omega, \partial\omega)\, d\tau_m \ldots d\tau_1 . \tag{5}$$

Такой ряд называется хронологическим рядом задачи Коши (2). Ряд (5) сходится в случае, когда ω является аналитической функцией [1]. В этом случае решение задачи Коши (2) записывается в виде

$$z_t(x) = F_{t_0,t}(\omega(x)) = \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \vec{f}_\tau d\tau \omega(x). \tag{6}$$

Используя методику работы [2], получаем следующую важнейшую формулу вариации постоянной:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \left(\vec{f}_\tau + \vec{g}_\tau\right) d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \left(\operatorname{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{\tau} \vec{f}_\theta d\theta \right) \vec{g}_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \vec{f}_\tau d\tau = \\ &= \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \left(\overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{\tau} \operatorname{ad} \vec{f}_\theta d\theta \right) \vec{g}_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \vec{f}_\tau d\tau , \end{aligned} \tag{7}$$

где $\left(\operatorname{Ad} P^*\right)Q^* = P^* \circ Q^* \circ P^{*^{-1}}$, $\left(\operatorname{ad}\vec{F}\right)\vec{G} = \left[\vec{F}, \vec{G}\right] = \vec{F} \circ \vec{G} - \vec{G} \circ \vec{F}$.

4. Простейшие необходимые условия оптимальности. Рассмотрим систему управления вида

$$\begin{gathered} \frac{dz_t}{dt} = f_t(z_t, \partial_1 z_t, \ldots, \partial_n z_t) + u(t) g_t(z_t, \partial_1 z_t, \ldots, \partial_n z_t), \\ z_{t_0} = \omega, \; t_0 \le t \le T, \; x \in [a,b] \subset \mathbf{R}^n, \end{gathered} \tag{8}$$

где g_t удовлетворяет тем же условиям, что и f_t.

Допустимыми управлениями являются измеримые ограниченные функции $u = u(t)$, $t \in [t_0, T]$, со значениями во множестве $U = [-1, 1]$.

Задача оптимального управления заключается в минимизации терминального критерия качества

$$K[u] = \langle c, z_T(b) \rangle = \sum_{i=1}^{N} c^i z_T^i(b),$$

где $c = \left(c^1, \ldots, c^N\right) \in \mathbf{R}^N$ – заданный вектор.

Зафиксируем некоторый процесс

$$u=\tilde{u}(t),\ z=\tilde{z}_t(x),\ \ t\in[t_0,T],\ x\in[a,b]. \tag{9}$$

Сначала рассмотрим допустимое возмущённое управление вида

$$u(t,\varepsilon)=\tilde{u}(t)+\Delta u(t,\varepsilon),\ t\in[t_0,T],$$

где $\Delta u(t,\varepsilon)=\varepsilon v$, v – скаляр, не зависящий от t, $\varepsilon>0$ – малый параметр, и соответствующую возмущённую траекторию

$$z_t(x;\varepsilon)=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\left(\vec{f}_\tau+u(\tau,\varepsilon)\vec{g}_\tau\right)d\tau\omega(x),\ \ t\in[t_0,T],\ x\in[a,b]. \tag{10}$$

Используя (7), получаем из (10) представление

$$z_T(b;\varepsilon)=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{T}\varepsilon v\vec{h}_t dt\tilde{z}_T(b),$$

где

$$\tilde{z}_T(b)=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{T}\left(\vec{f}_t+\tilde{u}(t)\vec{g}_t\right)dt\omega(x),\ \ \vec{h}_t=\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\operatorname{ad}\vec{f}_\tau d\tau\right)\vec{g}_t.$$

Тогда будем иметь

$$\Delta K[\tilde{u}]=K[u;\varepsilon]-K[\tilde{u}]=\left\langle c,z_T(b;\varepsilon)-\tilde{z}_T(b)\right\rangle=$$

$$=\left\langle c,\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{T}\varepsilon v\vec{h}_t dt-\mathrm{Id}\right)\tilde{z}_T(b)\right\rangle=\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j v^j\left\langle c,D_j\tilde{z}_T(b)\right\rangle+o\left(\varepsilon^k\right),\ \varepsilon\to 0,$$

где

$$D_j=\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{j-1}}\vec{f}_{t_j}\circ\ldots\circ\vec{f}_{t_1}dt_j\ldots dt_1.$$

Предположим теперь, что (9) – оптимальный процесс. Тогда $\Delta K[\tilde{u}]\ge 0$ при достаточно малых $\varepsilon>0$. Следовательно, если $\left\langle c,D_j\tilde{z}_T(b)\right\rangle=0\ \forall j\le k-1$, то неравенство $\varepsilon^k v^k\left\langle c,D_k\tilde{z}_T(b)\right\rangle+o\left(\varepsilon^k\right)\ge 0$ справедливо при всех достаточно малых $\varepsilon>0$. Поэтому $v^k\left\langle c,D_k\tilde{z}_T(b)\right\rangle\ge 0\ \forall v\in\mathbf{R}$. Таким образом, приходим к следующему необходимому условию оптимальности произвольного порядка.

Теорема 1. *Пусть* (9) *– оптимальный процесс. Если при некотором* $k\in\mathbf{N}$ *выполнены равенства*

$$\left\langle c,D_j\tilde{z}_T(b)\right\rangle=0\ \forall j\le k-1,$$

то

$$v^k\left\langle c,D_k\tilde{z}_T(b)\right\rangle\ge 0\ \forall v\in\mathbf{R}.$$

Если k чётно, то утверждение теоремы 1 можно записать в следующем эквивалентном виде: $\left\langle c,D_k\tilde{z}_T(b)\right\rangle\ge 0$.

Далее, пусть теперь оптимальное управление является константой, то есть $\tilde{u}(t)=u_0$ $\forall t\in[t_0,T]$. Рассмотрим отдельно два случая: $|u_0|=1$ и $|u_0|<1$. В первом случае при $u_0=1$ мы имеем $v<0$, а при $u_0=-1$ должно быть $v>0$. Во втором случае величина v может принимать значения обоих знаков. Поэтому теорема 1 приводит к следующим двум результатам:

Теорема 2. *Пусть* (9) – *оптимальный процесс, причём оптимальное управление является константой* u_0, *такой, что* $|u_0|=1$. *Если при некотором* $k\in\mathbf{N}$ *выполнены равенства* $\langle c, D_j\tilde{z}_T(b)\rangle=0$ $\forall j\le k-1$, *то* $(-u_0)^k\langle c, D_k\tilde{z}_T(b)\rangle\ge 0$.

Теорема 3. *Пусть* (9) – *оптимальный процесс, причём оптимальное управление является константой* u_0, *такой, что* $|u_0|<1$. *Если при некотором* $k\in\mathbf{N}$ *выполнены равенства* $\langle c, D_j\tilde{z}_T(b)\rangle=0$ $\forall j\le 2k-2$, *то* $\langle c, D_{2k-1}\tilde{z}_T(b)\rangle=0$, $\langle c, D_{2k}\tilde{z}_T(b)\rangle\ge 0$.

Заключение. Таким образом, в работе установлены новые необходимые условия оптимальности произвольного порядка скалярного управления для задачи терминального управления, описываемой системой нелинейных нестационарных уравнений с частными производными. Общий случай векторного управления в таких задачах автор намерен рассмотреть в дальнейших публикациях.

1. **Аграчев А. А., Вахрамеев С. А.** Хронологические ряды и теорема Коши – Ковалевской. // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.– 1981.– Т. 12.– С. 165–189.
2. **Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.** Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Мат. сб.– 1978.– Т. 107 (149), № 4 (12).– С. 467–532.
3. **Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.** Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.– 1980.– Т. 11.– С. 135–176.
4. **Третьяк А. И.** Локальные аппроксимации высокого порядка гладких управляемых систем и некоторые их приложения // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Анализ-4 / ВИНИТИ, 1994.– Т. 7.– С. 103–142.
5. **Третьяк А. И.** Локальные аппроксимации высокого порядка гладких управляемых систем // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Анализ-7 / ВИНИТИ, 1994.– Т. 16.– С. 43–138.
6. **Третьяк А. И.** Достаточные условия локальной управляемости и необходимые условия оптимальности высокого порядка. Дифференциально–геометрический подход // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Динамические системы-4 / ВИНИТИ, 1995.– Т. 24.– С. 5–198.
7. **Третьяк А. И.** Локальные аппроксимации высокого порядка гладких управляемых систем и поточечные условия оптимальности высокого порядка // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Динамические системы-8 / ВИНИТИ, 1996.– Т. 28.– С. 78–112.
8. **Tretyak A. I.** Chronological calculus, high-order necessary conditions for optimality, and perturbation methods // J. Dynam. and Control Syst.– 1998.– V. 4, No. 1.– P. 77–126.

Получено 14.10.2002 г.