

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра Оптимального керування та економічної кібернетики

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Диференціальні ігри нападу та на виснаження»

«Differential games of attack and exhaustion»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Євчук Максим Анатолійович

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, доц. Кічмаренко О.Д.
Рецензент: проф. канд. техн. наук, проф. Мороз В.В.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ р.

Завідувач кафедри

_____ Кічмаренко О.Д.
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК № _____
протокол № ____ від _____ р.
Оцінка _____ / ____ / ____
(за національною шкалою, шкалою
ECTS, бали)

Голова ЕК

_____ _____
(підпис) (прізвище,
ініціали)

Одеса – 2022

Зміст

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1 Війна на виснаження та напад	5
1.1. Побудова математичної моделі конфлікту	5
1.2. Постановка задачі у вигляді диференціальної гри	6
1.3. Розв’язання диференціальної гри та аналіз розв’язків	6
РОЗДІЛ 2 Війна на виснаження та напад без можливості або поповнення бойових ресурсів.....	14
2.1. Загальна постановка задачі для конфлікту без поповнення бойових ресурсів	14
2.2. Приклад битва при Банкер-Хілл з платою-вогнева сила	19
2.3. Приклад: Битва при Банкер-Хілл з платою - чисельність військ..	20
ВИСНОВКИ	24
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	25
ДОДАТОК А Код програми побудови траєкторій диференціальної гри	26

Вступ

Теорія ігор - це математична дисципліна, яка надає методи побудови моделей конфліктних ситуацій та методи їх розв'язання.

Конфліктною є ситуація, коли дві або більше сторони зацікавлені у володінні предметом конфлікту та знають всі свої можливі засоби для досягнення своєї мети щодо предмету конфлікту.

Найбільш гострим є конфлікт двох сторін з прямо протилежними інтересами: виграш однієї є програшем іншої. Це конфлікти типу війни. Якщо такий конфлікт розвивається з плином часу, то ситуація гри стає функцією часу та стратегії також стають функціями часу. Подібного роду конфлікти досліджуються в теорії диференціальних ігор.

Теорія диференціальних ігор - математичний напрямок, що виник в середині минулого століття. Поштовхом до вивчення диференціальних ігор послужили задачі з різних практичних областей. Одним з перших цікаві результати в цій галузі отримав Р. Айзекс[1]. Питання існування розв'язків диференціальної гри та питання збіжності розв'язків багатокрокової гри до розв'язків диференціальної В. Флемінг [10,11].

Практичний метод розв'язання деяких диференціальних ігор був запропонований Н. М. Красовським [4] та Черноусько Ф.Л. [8] Дослідженню різних аспектів теорії та розв'язанню конкретних задач присвячено чимало робіт, зокрема [2-7, 9, 12, 13].

Гра задається системою диференціальних рівнянь.

$$z' = f(z, u, v),$$

де $z = (z_1, \dots, z_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in E_u$, $v = (v_1, \dots, v_q) \in E_v$; E_u , E_v - компактні множини в евклідових просторах R_p та R_q відповідно.

Гра вважається завершеною, коли точка z досягає заданої множини $S \subset R$. Окрім того, задається функціонал (плата)

$$J = \int_0^T f_0(z, u, v) dt + V(z(T)),$$

де T - момент першого досягнення точкою z термінальної множини S .

Стратегіями називаються вектор-функції $u(z) \in \Omega_u$, $v(z) \in \Omega_v$, які приймають значення у E_u та E_v , відповідно; Ω_u та Ω_v - деякі простори допустимих функцій.

Розв'язати диференціальну гру означає знайти оптимальні стратегії сторін ($u(z)$, $v(z)$) та відповідні їм розв'язки диференціального рівняння, а також найкраще значення функціоналу (за звичай це плата, яку друга сторона здійснює першій). Тому оптимальність стратегій розуміється як така пара $u(z)$, $v(z)$ при яких перша сторона отримує максимальний гарантований виграш, який для другої сторони є неминучим максимальним допустимим програшем.

Дипломна робота присвячена дослідженню моделі конфлікту типу війни на виснаження або нападу, для якої за допомогою методів теорії диференціальних ігор побудовано розв'язки та траєкторії гри. В роботі розглянуто конфлікти з можливістю поповнення ресурсів та без такої можливості.

Розділ 1. ВІЙНА НА ВИСНАЖЕННЯ ТА НАПАД

1.1 Побудова математичної моделі конфлікту

Нехай дві сторони P і E , які вступили в затяжну війну та в момент часу t запаси озброєння x_1 і x_2 відповідно. Протягом війни кожна зі сторін може обирати, як розподілити свої сили між виснаженням супротивника, (зменшенням темпів його постачання озброєнням) і нападом (безпосереднім введенням озброєння в бойовий конфлікт). Запаси озброєння можна підрахувати. Кожна сторона прагне накопичити їх більше, ніж противник, і різниця становить плату.

Таким чином, рішення обирається між політикою «дальнього прицілу» - «виснаженням» супротивника - та прямолінійною політикою «нападу» на нього. Фактично оптимальні стратегії складаються з низки дискретних рішень. Але ми розглянемо їх як неперервні моделі.

Модель такого конфлікту досліджувалася в [1].

Нехай сторона P у кожен момент часу ділить свої запаси зброї x_1 , на дві частини: виділяє φx_1 , для виснаження противника і $(1 - \varphi)x_1$, залишає для нападу. Тут φ задовольняє умову $0 \leq \varphi \leq 1$. Далі, якщо сторона P не заважає стороні E у виробництві зброї, то E має можливість виробляти його зі швидкістю m_2 . Якщо сторона P втручається, то сторона E втрачає частину цієї швидкості залежно від того, яку величину φx_1 , виділяє P для цілей виснаження.

Тоді

$$\dot{x}_2 = m_2 - c_2(\varphi x_1),$$

де коефіцієнт c_2 можна розглядати як коефіцієнт ефективності озброєння сторона P проти захисту сторони E .

Змінивши гравців ролями, отримаємо аналогічне рівняння: $\dot{x}_1 = m_1 - c_1(\varphi x_2)$,

Припустимо, що війна буде тривати скінченний час T . Нехай, щодня командуючі сторін P та E відправляють на театр війни відповідно $(1 - \varphi)x_1$ та

$(1 - \psi)x_2$ різниця цих значень виражає перевагу однієї сторони над іншою. Ця різниця і буде платою, яку будемо обчислювати сумарно за весь час тривалості війни

$$\int_0^T [(1 - \psi)x_2 - (1 - \varphi)x_1] dt.$$

1.2. Постановка задачі у вигляді диференціальної гри

Візьмемо T за нову фазову координату. Тоді рівняннями руху будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= m_1 - c_1 \Psi x_2, \\ \dot{x}_2 &= m_2 - c_2 \Psi x_1, \\ \dot{T} &= \dot{x}_3 = -1,\end{aligned}$$

де

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon = (1 - \Psi)x_2 - (1 - \varphi)x_1.$$

Простором гри $\mathcal{E}$ буде октант:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad T \geq 0,$$

а $\mathcal{C}$ є частиною його границі, де $T = 0$; $\mathcal{C}$ допускає таку параметризацію:

$$x_1 = s_1 \geq 0, \quad x_2 = s_2 \geq 0, \quad T = 0;$$

ці співвідношення входять у перелік початкових умов.

Вважаємо, що $c_1 > c_2$.

Також вважаємо, що x_1 та x_2 не можуть бути від'ємними.

1.3. Розв'язання диференціальної гри та аналіз розв'язків

Нехай V - ціна гри, позначимо частинні похідні від V через V_1, V_2, V_T , запишемо основне рівняння диференціальної гри [5]

$$\begin{aligned}\min_{\varphi} \max_{\psi} & |(m_1 - c_1 \psi x_2)V_1 + (m_2 - c_2 \varphi x_1)V_2 - V_T + \\ & + (1 - \psi)x_2 - (1 - \varphi)x_1| = 0.\end{aligned}$$

Запишемо основне рівняння у вигляді

$$S_1 x_1 \bar{\varphi} + S_2 x_2 \bar{\psi} + m_1 V_1 + m_2 V_2 - V_T + x_2 - x_1 = 0.$$

Прийнявши позначення

$$S_1 = 1 - c_2 V_2, \quad S_2 = 1 - c_1 V_1$$

та

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } S_1 > 0, \\ 1, & \text{якщо } S_1 < 0, \end{cases} \quad \bar{\psi} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } S_2 < 0, \\ 1, & \text{якщо } S_2 > 0. \end{cases}$$

Пам'ятаємо, що $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Тепер запишемо рівняння характеристик в регресивній формі:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -m_1 + c_1 \bar{\psi} x_2, \quad \dot{V}_1 = S_1 \bar{\varphi} - 1, \\ \dot{x}_2 &= -m_2 + c_2 \bar{\varphi} x_1, \quad \dot{V}_2 = S_2 \bar{\psi} + 1, \\ \dot{T} &= 1. \end{aligned}$$

Знайдемо інші початкові умови.

Так як $V = 0$ на $\mathcal{C}$ маємо наступне

$$\frac{\partial V}{\partial S_1} = 0 = V_1 \frac{\partial x_1}{\partial S_1} + V_2 \frac{\partial x_2}{\partial S_1} + V_T \frac{\partial T}{\partial S_1} = V_1$$

та аналогічно $V_2 = 0$ на $\mathcal{C}$. Тоді $S_1 = 1$, звідки $\bar{\varphi} = 0$,

і $S_2 = -1$, звідки $\bar{\psi} = 0$.

Таким чином, обидві сторони закінчують війну, застосовуючи всю свою зброю тільки для нападу.

Проінтегруємо рівняння характеристик в регресивній формі, використовуючи знайдені початкові умови та те що $\bar{\varphi} = \bar{\psi} = 0$ на $\mathcal{C}$.

Отримуємо

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1 - m_1 \tau, \quad V_1 = -\tau, \\ x_2 &= s_2 - m_2 \tau, \quad V_2 = \tau. \\ T &= \tau, \end{aligned} \tag{1}$$

Тоді на оптимальних траєкторіях

$$S_1 = 1 - c_2 \tau, \quad S_2 = -1 = c_1 \tau,$$

звідки бачимо, що S_1, S_2 вперше перестають бути додатними, коли $\tau = \frac{1}{c_2}$ та $\tau = \frac{1}{c_1}$. З того, що $c_1 > c_2$, випливає, що S_2 раніше перетворюється в нуль ніж S_1 (рахуємо від кінця). Тому може з'явитися поверхня переключення, якщо

$$\tau = T = \frac{1}{c_1},$$

де $\bar{\psi}$ повинно стрибком змінити своє значення з 0 на 1. Тоді за час $1/c_1$ до кінця війни сторона E різко змінює політику “виснаження” на політику “нападу”.

Позначимо поверхню переключення через $\mathcal{J}_1$. Значення ціни між $\mathcal{C}$ та $\mathcal{J}_1$ визначається інтегралом

$$\begin{aligned} V &= \int_0^T G dt = \int_0^T (x_2 - x_1) dt = \int_0^T [(s_2 - m_2 \tau) - (s_1 - m_1 \tau)] d\tau = \\ &= (s_2 - s_1)T - \frac{1}{2}(m_2 - m_1)T^2. \end{aligned}$$

Для того щоб виразити V через фазові координати, покладемо в лівих рівняннях (1) $\tau = T$ та виключимо s_1, s_2 . Отримаємо

$$V = (x_2 - x_1)T + \frac{1}{2}(m_2 - m_1)T^2 \quad (2)$$

Тепер будемо розглядати $\mathcal{J}_1$ як множину початкових умов точно так, як раніше розглядали $\mathcal{C}$. Підставимо $\tau = \frac{1}{c_1}$ в (1) і використаємо s_1 і s_2 як параметри поверхні $\mathcal{J}_1$. Почнемо новий етап інтегрування з новими параметрами для $\mathcal{J}_1$.

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad T = \frac{1}{c_1}$$

де s_i вже інші. З правих рівнянь (1) отримаємо, що на τ_1

$$V_1 = -\frac{1}{c_1}, \quad V_2 = \frac{1}{c_1}.$$

Інтегруючи рівняння характеристик в регресивній формі з цими початковими умовами, прийнемо, що $\varphi = 0$, $\psi = 1$.

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
x_1 &= s_1 + (c_1 s_2 - m_1)\tau - \frac{1}{2}c_1 m_2 \tau^2, \\
x_2 &= s_2 - m_2 \tau, \\
T &= \frac{1}{c_1} + \tau,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$V_1 = -\frac{1}{c_1} - \tau, \quad V_2 = \frac{1}{c_1} + \tau + \frac{1}{2}c_1 \tau^2.$$

Тут τ , так само як і s_i , було заново обрано на $\mathbf{J}_1$ і не співпадає з тим, яке було обране при першому інтегруванні. Тепер

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \frac{c_2}{c_1} - c_2 \tau - \frac{1}{2}c_1 c_2 \tau^2, \\
S_2 &= c_1 \tau.
\end{aligned}$$

Тут $S_2 > 0$ та $\tau > 0$, що й підтверджує вибір $\bar{\psi} = 1$, також тут $S_1 > 0$ і коли $\tau > 0$. Тому $\bar{\varphi} = 0$ для малих τ , але лише поки $S_1 > 0$.

Рівняння $S_1 = 0$ має один додатній корінь:

$$\tau_2 = \frac{1}{c_1} \left[-1 + \sqrt{\frac{2c_1}{c_2} - 1} \right]$$

Якщо припустимо, що це значення визначає другу поверхню переходу і що керування в подальшому не змінюються, то отримаємо оптимальні стратегії для випадку коли x_1 та x_2 не перетворюються в 0.

Отже, за час $\frac{1}{c_1}$ до кінця війни сторона E переходить від “виснаження” до “нападу”, а сторона P робить це раніше, за час $\frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{2c_1}{c_2} - 1}$ до завершення війни. Останнє значення відповідає новій

поверхні переходу, яку позначимо як $\mathbf{J}_2$, на ній $T = \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{2c_1}{c_2} - 1}$.

Знайдемо тепер V між $\mathbf{J}_1$ і $\mathbf{J}_2$.

Скористаємося наступним способом: візьмемо V_1 та V_2 з (3), та замінимо τ значенням $T - \frac{1}{c_1}$, а потім отримаємо V_T з основного рівняння. Інтегруючи отримані рівняння, знаходимо V з точністю до сталої, яку можна визначити за допомогою значення V на J_1 .

В результаті маємо

$$V = \frac{x_2}{2c_1} - \frac{m_2}{6c_1^2} + \left(\frac{m_2}{2c_2} - x_1 \right) T + \frac{1}{2} (c_1 x_2 - m_1) T^2 - \frac{c_1 m_2 T^3}{6}.$$

З іншої сторони поверхні J_2 функція G дорівнює нулю, а V більше вже не змінюється - вона визначається останньою формулою при

$$T = \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{2c_1}{c_2} - 1}.$$

Якщо продовжити розв'язувати з іншої сторони поверхні, J_2 то можна переконатися, що S_1 та S_2 більше не змінюють знаки, а, отже оптимальні стратегії у цій області побудовані. Залишилося врахувати в розв'язку, що $x_i \geq 0$. Спочатку розглянемо частини границі простору $\mathcal{E}$, де $x_i = 0$, як двовимірні підігри. Коли ціна цих підігор буде відома в $\mathcal{E}$, можна побудувати нові оптимальні траєкторії, які повинні зливатися зі старими.

Отже нехай $\mathcal{C}_1$ -множина, де

$$x_1 = 0, x_2 = s_2 \geq 0, T = s_3 \geq 0,$$

що належить границі простору $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}_2$ а визначається тими ж самими рівняннями, але з заміною індекса 1 індексом 2 і навпаки.

Якщо тепер стан партії описується точкою x , яка лежить на $\mathcal{C}_1$, то це означає, що у сторони P немає озброєння ($x_1=0$) й було б безрозсудно стороною E витрачати на “виснаження” більше ресурсів, аніж потрібно для того, щоб зберегти x_1 рівним нулю. На практиці це виглядало б безглуздо, якби сторона E просто б витрачала озброєння на “виснаження”, замість того, щоб використовувати його для “атаки”, й таким чином програвала би у платі. Але в

теорії, де гра розглядається як суто математична задача, потрібно встановити, які ψ , підпорядковані заданим обмеженням, необхідні, щоб утримати x всередині меж простору $\mathcal{E}$.

Розглянемо частину підмножини $\mathcal{C}_1$ або $\mathcal{C}_2$, яка лежить між $\mathcal{E}$ та $\mathcal{J}_1$; в цій області як відомо $\bar{\varphi} = \bar{\psi} = 0$. З рівнянь руху випливає, що $x_1 > 0, x_2 > 0$ (тобто кількість озброєння зростає, якщо відсутнє “виснаження”).

В цих точках оптимальні траєкторії одразу ж покидають $\mathcal{C}_1$ та $\mathcal{C}_2$ й йдуть до $\mathcal{E}$.

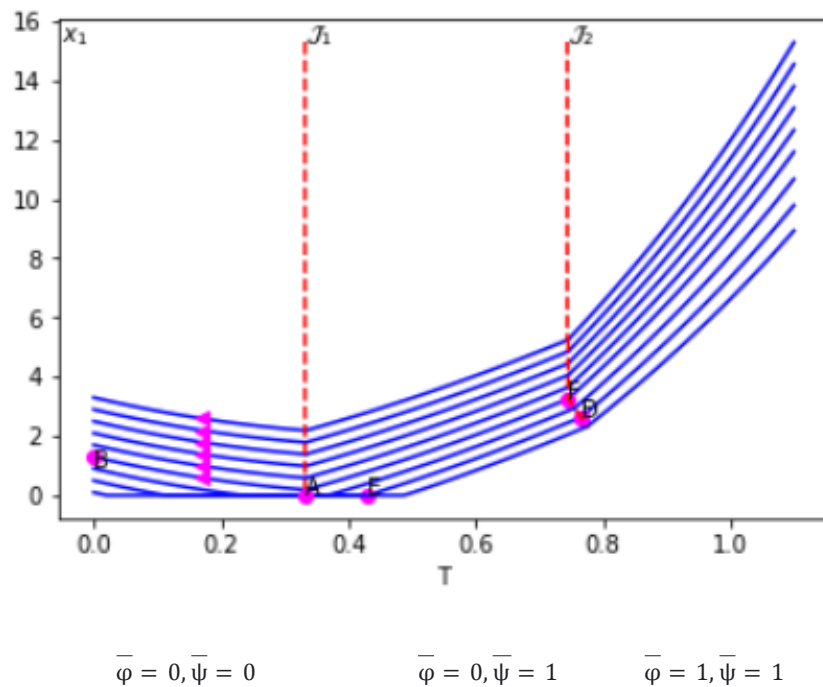


Рис.1.1.Оптимальні траєкторії в січній простору $\mathcal{E}$ для деякого сталого достатньо великого x_2 .

На рис. 1.1. зображено січну простору $\mathcal{E}$ для деякого сталого великого x_2 , та оптимальні траєкторії (траєкторії побудовані програмно як розв’язки диференціального рівняння для x_1 , коли x_2 - стала та $x_2=100$, $c_1=3$, $m_1=10$, див. Додаток А).

Траєкторії, знайдені для області між $\mathcal{C}$ та $\mathcal{J}_1$, розміщуються вище дуги AB .

Якщо по траєкториям, що розміщуються нижче AB , пройти назад (τ зростає), то досягаємо $\mathcal{C}_1$ в одній з точок відрізка OA .

Але в точках множини $\mathcal{C}_1$, розміщених по іншу сторону від $\mathcal{J}_1$ (де $\psi = 1$), може статися, що x_1 залишиться рівним нулю протягом певного часу (як наприклад траєкторія $DEAB$).

Значення x_1 може бути нульовим тільки якщо:

$$x_2 \geq m_1/c_1$$

Якщо остання нерівність виконується і $x_1 = 0$, то сторона E замість керування

$\psi = \bar{\psi} = 1$ повинна застосувати $\psi = \frac{m_1}{c_1 x_2}$ доти, поки (x_1, x_2) не досягне

$\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{C}_1$ (точка A на рис. 1.1).

Побудуємо траєкторії рівняння характеристик в регресивній формі з початковими умовами

$$x_1 = 0, \quad x_2 - s_2 \geq \frac{m_1}{c_1}, \quad t - s_3 \geq \frac{1}{c_1}.$$

які задані на частині множини $\mathcal{C}_1$. Підставляючи ці величини у $V_2 = T$,

$$V_T = -\frac{m_1}{c_1} = x_2 + m_2 T.$$

отримуємо інші початкові умови. Визначимо значення V_I : з основного рівняння

при $\varphi = 0$, $\psi = 1$: $V_1 = -\frac{1}{c_1}$.

Рівняння характеристик в регресивній формі з цими початковими умовами вже проінтегровані раніше. S_2 залишається додатнім, а S_I змінює знак, але не на $\mathcal{J}_2$. Виявляється, що частина цієї площини повинна бути замінена криволінійною поверхнею.

На рис.1.1. нові траєкторії представлені траєкторією AF та тими, що нижче неї (наприклад ED). Нижче від точки F пряма J_2 повинна бути замінена дугою, що намальована пунктиром і на якій S_i змінює знак.

Що означає така зміна поверхні переключення J_2 ? Обидва гравці при достатньо великому T починають партію й використовують озброєння для “виснаження”. Потім в певний для кожного гравця момент відбувається повне переключення на “напад”. Ці моменти залежать суттєво від початкових C_i , коли кількість озброєння x_1, x_2 (а швидкості його виробництва m_1 і m_2 вже не мають значення). Криволінійна частина J_2 означає, що сторона P добивається кращої плати, переключаючись із стратегії “виснаження” на стратегію “нападу” раніше, ніж гра досягне J_2 , в момент, який залежить від x_1 і x_2 , тобто “якщо в подальшому мої атакуючі зусилля будуть зведені до нуля внаслідок знищення моїх сил, то мені краще здійснити напад раніше”.

Розділ 2. ВІЙНА НА ВИСНАЖЕННЯ ТА НАПАД БЕЗ МОЖЛИВОСТІ ПОПОВНЕННЯ БОЙОВИХ РЕСУРСІВ

2.1. Загальна постановка задачі для конфлікту без поповнення бойових ресурсів

В цьому розділі перейдемо у практичну площину застосування розглянутої теорії у минулому розділі теорії.

Проаналізуємо реальну битву, коли дві сторони зближаються одна з одною і їх головним питанням буде у оптимальний момент потрібно розпочати стрільбу. У силу технічного розвитку та зміни характеру ведення війни сучасні війни ставлять дещо інше питання, але деякі елементи не змінилися навіть із плином часу. Так у битві на Банкер-Хілл стикаються дві армії з обмеженим боезапасом і постає наступна задача: потрібно якомога краще розподілити свій вогневий потенціал при тому, що на великій відстані вірогідність попадання досить мала і зростає по мірі наближення супротивників. Якщо намагатися знайти подібну модель у сучасній війні, то з великою впевненістю контр-батарейна стрільбу можна назвати найкращим прикладом, адже швидкість перезаряджання та швидкість реагування супротивника рідко дає можливість зробити більше одного залпу, тобто ситуація аналогічна кремнієвій зброї коли для перезарядки потрібно дуже багато часу й та лінія що тільки, що виконала постріл поглинається бойовим розрахунком на досить тривалий час.

У загальному вигляді такий варіант постановки задачі можна назвати дуеллю, від найпростішої пістолетної, до випадку коли маємо безперервний вогонь з автоматичної зброї.

Розглянемо випадок коли конфліктуючі сторони це бойові підрозділи, які несуть втрати від вогню противника.

Моделлю цієї гри будуть наступні рівняння руху:

$$\dot{x}_1 = -x_2 c_2 p_2(T) \psi,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 c_1 p_1(T) \psi,$$

$$\dot{m}_1 = -c_1 \varphi,$$

$$\dot{m}_2 = -c_2 \psi,$$

$$\dot{T} = -1, \quad 0 \leq \varphi, \psi \leq 1.$$

Зауважимо, що сторони не мають можливості поновлювати свої ресурси на відміну від моделі (1). Тут x_1 та x_2 - кількість солдат двох армій, що зближаються та стріляють один в одного. Час, через який вони зустрінуться, позначимо через T , ймовірність ураження p_1 та p_2 це спадні функції від T . Величини m_i - середня кількість боєприпасів на бійця в обох арміях, а c_i - максимальна швидкість ведення вогню. Кожна сторона має обрати будь-яку швидкість стрільби, яка не перевищує вище зазначену; прийнявши долю цієї швидкості за керування, отримуємо третє і четверте рівняння руху.

Загальна кількість пострілів, виконаних за одиницю часу армією 2 (тобто максимізуючим плату гравцем E), дорівнює $x_2 c_2 \psi$. Усереднюючи, можемо припустити, що доля $p_2(T)$ цих пострілів досягає цілі; ця величина і буде швидкістю скорочення особового складу армії, що описується першим рівнянням; друге отримуємо симетрично.

Гра закінчується тоді, коли армії знаходяться вже настільки близько одна від іншої, що описана вище фаза зближення вже не відображає суть (інші види ближнього бою, які описуються іншими рівняннями). При правильному виборі часу відліку цей момент настає, коли $T=0$, що ми й приймемо за визначення $\mathcal{E}$. Множина $\mathcal{E}$ тут являє собою область, з п'ятьма невід'ємними фазовими координатами.

Загальна кількість пострілів армії це $m_i \dot{x}_i$, а швидкість пострілів дорівнює $\dot{m}_i \dot{x}_i + m_i \ddot{x}_i$. Доданок $m_i \ddot{x}_i$ - це зміна швидкості стрільби, яка пов'язана зі зменшенням кількості стрільців (в моделі цим доданком нехтуємо через те, що це число повинно бути дуже малим у порівнянні з другим доданком). Доданок

$\dot{m}_i x_i$ — це швидкість яка змінюється через зменшення боєприпасів. Цей доданок можна врахувати в моделі, виділивши $\dot{m}_i$ та $\dot{x}_i$ тоді рівняння руху будуть більш громіздкими.

Найкращий графік стрільби (стратегія) залежить від того, що обрано у вигляді плати. Один варіант - взяти у вигляді плати різницю виживших бійців. Це означає, що

$$H = x_2 - x_1. \quad (1)$$

Потрібно відзначити, що обране рішення буде відображати наш вибір. Оскільки вираз (1) ставить у якості цілі максимізацію лише переваги в людях, то для оптимізації кожна сторона, очевидно, забажає використати усі свої боєприпаси, якщо для цього звісно вистачить часу (T).

Для виправлення нереальності такого аналізу потрібно використовувати у якості плати збережений надлишок вогневої сили, тобто прийняти

$$H = m_2 x_2 - m_1 x_1. \quad (2)$$

Якщо важливо отримати перевагу в людях та вогневій силі, то у якості H можна використовувати лінійну комбінацію (1) та (2). Але вагові коефіцієнти потрібно обирати на основі здорового глузду, що й визначає цінність рішення.

Може статися ситуація коли армія 1 захищає від зазіхання армії 2 такий життєво важливий об'єкт, що для його захисту варто пожертвувати своїми бійцями. Тоді обидві сторони будуть цікавитися кількістю особового складу або вогневої сили, якої буде достатньо для зламу оборони і найкращим вибором для H буде x_2 чи $m_2 x_2$.

Маємо лише один строго логічний шлях для обрання плати. Розглянемо зіткнення двох армій, яке станеться після їх зближення і проаналізуємо його як окрему гру. Очікувано, що її ціною буде функція від x_i та m_i , які служать для цієї гри початковими даними. Цю функцію від чотирьох аргументів і потрібно прийняти за H у вихідній грі.

Нехай H залежить тільки від x_i , як наприклад, у формулі (1). Зауважимо, що коли ми відкинемо третє та четверте рівняння з рівнянь руху, то отримуємо самостійну гру з фазовими координатами x_1, x_2, T . Її розв'язками буде $\bar{\varphi} = \bar{\psi} = 1$ оскільки зрозуміло, що найкращим способом дій для гравців у всі моменти часу буде максимальна швидкість стрільби.

Але якщо наша ціль стоїть у тому, щоб знайти найкращий спосіб використання граничної кількості боєприпасів, то вона втрачається. Таким чином, роль вищевказаних рівнянь у тому, щоб зберегти постановку задачі.

Розв'яжемо обидва випадки плати (1) та (2). Для спрощення задачі будемо ігнорувати обмеження на x_i . Звідси випливає, що кількість солдатів може стати від'ємною, і це не так абсурдно, як здається на перший погляд. По-перше, досить вірогідно, що ні одна зі сторін не буде повністю знищена; дійсно раціональні обмеження на фазові координати повинні виключати таку можливість. По-друге, велика ймовірність, що отриманий розв'язок буде частиною повного розв'язку. Для того, щоб його продовжити, достатньо лише додати нову компоненту до $\mathcal{E}$, на якій відповідна змінна буде дорівнювати нулю. Наприклад, додамо $\mathcal{C}_1$ де $x_1 = 0$ (та при цьому $x_2 > 0$; інші фазові координати невід'ємні). Підрозв'язок в $\mathcal{C}_1$ тривіальний: розбита армія 1 (P) не може вести вогонь, звідси E також не стане стріляти; тоді $\bar{\varphi} = \bar{\psi} = 0$ і знайти V на $\mathcal{C}_1$ просто. Використаємо його в якості H та побудуємо регресивні оптимальні траєкторії, які виходять з $\mathcal{C}_1$ у $\mathcal{E}$. Розв'язок отримаємо з'єднанням траєкторій цього типу з траєкторіями, які відповідають розв'язкам задач без обмежень на x_i .

Використовуючи у якості плати вогневу силу (2), також будемо ігнорувати вимоги додатності значень m_i . Це не мало би сенсу при $H = x_2 - x_1$, але в цьому випадку це допустимо по тим же причинам, що й у першому випадку.

Дуже складно уявити, щоб одна зі сторін використала всі свої патрони для досягнення найкращої плати, яка залежить від їх залишку.

Випишемо основне рівняння диференціальної гри:

$$A_1 \bar{\varphi} + A_2 \bar{\psi} - V_T = 0,$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= -c_1(x_1 p_1 V_2 + V_3) \\ A_2 &= -c_2(x_2 p_2 V_1 + V_4) \end{aligned}$$

та

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} 1, & \text{при } A_1 < 0, \\ 0, & \text{при } A_1 > 0, \end{cases} \quad \bar{\psi} = \begin{cases} 1, & \text{при } A_2 > 0, \\ 0, & \text{при } A_2 < 0, \end{cases}$$

Рівняння характеристик мають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 c_2 p_2 \bar{\psi}, \\ \dot{x}_2 &= x_1 c_1 p_1 \bar{\varphi}, \\ \dot{m}_1 &= c_1 \bar{\varphi}, \\ \dot{m}_2 &= c_2 \bar{\psi}, \\ \dot{T} &= 1, \\ \dot{V}_1 &= -c_1 p_1 V_2 \bar{\varphi}, \\ \dot{V}_2 &= -c_2 p_2 V_1 \bar{\psi}, \\ \dot{V}_3 &= 0, \\ \dot{V}_4 &= 0, \\ \dot{V}_5 &= -c_1 p_1 V_2 \bar{\varphi} - c_2 p_2 V_1 \bar{\psi}. \end{aligned}$$

2.2. Приклад битва при Банкер-Хілл з платою-вогнева сила.

Візьмемо

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1, \quad m_1 = s_3, \quad T = 0, \\ x_2 &= s_2, \quad m_2 = s_4, \end{aligned}$$

з (2) отримуємо $H = s_2 s_4 - s_1 s_3$ та доповнимо початкові умови співвідношенням $V_i = \frac{\partial H}{\partial s_i}$ й отримаємо

$$\begin{aligned} V_1 &= -s_3, \\ V_2 &= s_4, \\ V_3 &= -s_1, \\ V_4 &= s_2. \end{aligned}$$

з цього маємо

$$\begin{aligned} A_1 &= c_1 s_1 [s_4 p_1(0) - 1], \\ A_2 &= c_2 s_2 [-s_3 p_2(0) - 1]. \end{aligned}$$

Це означає повний вогонь або його повна відсутність - в залежності від знаку в квадратних дужках.

Наприклад, сторона P перед завершенням відкриває повний вогонь ($\bar{\psi} = 1$), якщо $m_2 > \frac{1}{p_1(0)}$, або взагалі не стріляє в іншому випадку. Отже, використовується така швидкість стрільби, щоб на момент завершення мати $m_2 = \frac{1}{p_1}$, тобто кожний солдат ворога (сторони E) має кількість боєприпасів, щоб знешкодити рівного одного бійця. Така особливість моделі, коли сторони економлять боєприпаси: кожна сторона витрачає їх так, щоб мати максимальну перевагу в кінці, тому практична реалізація цієї моделі - рідкісний випадок. Якщо ($\bar{\psi} = 1$), то боротьба закінчується повним вогнем.

Вздовж траєкторії керування приймають проміжні значення, всюди повинні виконуватися умови $A_1 = A_2 = 0$. Тоді з основного рівняння випливає, що $V_T = 0$. Похідні за часом цих трьох величин також перетворюються на нуль.

З рівнянь $\dot{A}_1 = 0$, $\dot{A}_2 = 0$, $\dot{V}_T = 0$, тобто:

$$\begin{aligned} c_2 p_1 p_2 \hat{\psi} (x_1 V_1 - x_2 V_2) + p'_1 x_1 V_2 &= 0, \\ c_1 p_1 p_2 \hat{\phi} (x_2 V_2 - x_1 V_1) + p'_2 x_2 V_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$c_2 p'_1 x_1 V_2 \hat{\varphi} + c_2 p'_2 x_2 V_1 \hat{\psi} = 0.$$

можна виразити $\hat{\varphi}$ і $\hat{\psi}$ як функції фазових координат.

Підставивши далі $\hat{\varphi}$ і $\hat{\psi}$ в ліві частини рівнянь характеристик, отримаємо систему диференціальних рівнянь для фазових координат.

2.3. Приклад: Битва при Банкер-Хілл з платою - чисельність військ

Тепер розглянемо ту саму ситуацію, але у якості плати візьмемо кількість особового складу у кінці гри. Вибір у вигляді плати переваги в людях в момент завершення бою ($H = x_2 - x_1$) застосуємо до тих випадків, коли події, які настануть після зближення, не залежать від кількості боєприпасів.

Припустимо, що одна сторона має достатньо боєприпасів для ведення вогню з максимальною швидкістю, так що завжди $\bar{\psi} = 1$. Тоді задача зводиться до найкращого розподілення обмеженого запасу боєкомплекту лише одного з супротивників, і тому буде грою з одним гравцем.

Маємо задачу з одним управлінням φ . Фазову координату m_2 можемо не розглядати.

Рівняння руху отримаємо з попередніх рівнянь підстановкою $\psi = 1$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 c_2 p_2(T), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 c_1 p_1(T) \varphi, \\ \dot{x}_3 &= \dot{m}_1 = -c_1 \varphi, \\ \dot{T} &= -1.\end{aligned}$$

Основне рівняння має вигляд

$$\begin{aligned}A\bar{\varphi} - c_2 x_2 p_2 V_1 - V_T &= 0, \\ A &= -c_1 (x_1 p_1 V_2 + V_3) \\ \bar{\varphi} &= \begin{cases} 1 & \text{при } A < 0, \\ 0 & \text{при } A > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Рівняння характеристик отримаємо з попередніх рівнянь, якщо приймемо $\bar{\psi} = 1$.

Також знадобиться $\dot{A} = -c_1 M$, де $M = c_2 p_1 p_2 (x_2 V_2 - x_1 V_1) + x_1 V_2 p'_1$.

Якщо сторона P має достатньо боєприпасів, щоб продовжувати стрільбу до кінця, його оптимальна стратегія, полягає у тому щоб стріляти в повну силу $\bar{\varphi} = 1$, при цьому кількість боєприпасів, така, що її можна використати до моменту $T = 0$.

Якщо

$$x_1 = s_1,$$

$$x_2 = s_2,$$

$$m_1 = 0,$$

$$T = s,$$

то маємо ситуацію, коли сторона P використає всі свої боєприпаси m_1 до завершення бою.

З того, що $m_1 = 0$, маємо $\varphi = 0$, а x_1 і x_2 знайдемо з

$$\dot{x}_1 = x_2 c_2 p_2 (s - t),$$

$$\dot{x}_2 = 0,$$

з $x_i = s_i$ при $t = s$

$H = x_2 - x_1$ при $t = 1$.

Отже,

$$x_1 = s_1 - c_2 s_2 \int_{s-t}^t p_2(u) du,$$

$$x_2 = s_2$$

і

$$H = s_2 \left(1 - c_2 \int_0^s p_2(u) du \right) - s_1.$$

Знайдемо

$$V_1 = \frac{\partial H}{\partial s_1} = -1,$$

$$V_2 = 1 + c_2 \int_0^s p_2(u) du,$$

$$V_T = s_2 c_2 p_2(s).$$

Підставляючи початкові умови в основне рівняння, отримаємо $A\bar{\varphi} = 0$.

При $\bar{\varphi} > 0$ маємо, що $A = 0$ і $V_3 = -s_1 p_1(s) \left[1 + c_2 \int_0^s p_2(u) du \right] < 0$.

Знайдемо

$$M = c_2 p_1(s) p_2(s) \left[s_2 \left(1 + c_2 \int_0^s p_2(u) du \right) + s_1 \right] + s_1 \left(1 + c_2 \int_0^s p_2(u) du \right) p_1'(s).$$

Обчисливши цю функцію, знайдемо, де $M > 0$, і отримаємо стан, де сторона P оптимально закінчує стрільбу.

Якщо $s = 0$, тоді

$$M = c_2 p_1(0) p_2(0) s_1 \left[\frac{s_2}{s_1} - J \right],$$

де

$$J = - \frac{p_1'(0)}{c_2 p_1(0) p_2(0)} - 1,$$

й розв'язок суттєво залежить від знаку J .

Якщо $J < 0$, то для малих s (поблизу закінчення) $M > 0$ й сторона P повинна витратити всі свої боєприпаси раніше.

Значення $J > 0$, коли $s_2/s_1 > J$ і в деяких випадках з малим s , тоді сторона P повинна відкрити вогонь раніше, якщо його сили менші, аніж сили сторони E , та навпаки пізніше, якщо його сили більші. Нерівність $J > 0$, означає, що влучність вогню стороною P швидко зменшується з ростом відстані, коли супротивники знаходяться близько один до одного, а c_2 — швидкість вогню сторони E — мала.

Аналіз ситуації

$$\begin{aligned}
 x_1 &= s_1, \\
 x_2 &= s_2, \\
 x_3 &= m_1 = c_1 s, \\
 T &= s.
 \end{aligned}$$

проводиться так само, як і для ситуації з $m_1 = 0$.

Використаємо рівняння

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 c_2 p_2(s - t), \\
 \dot{x}_2 &= x_1 c_1 p_1(s - t),
 \end{aligned}$$

Далі процедура повністю повторюється.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= s_1, \\
 x_2 &= s_2, \\
 x_3 &= m_1 = c_1 s, \\
 T &= s.
 \end{aligned}$$

На оптимальних траєкторіях повинна виконуватися нерівність:

$$\frac{x_2}{x_1} < - \frac{p'_1(0)}{c_2 p_1(0) p_2(0)} - 1.$$

Висновки

Отже, в роботі досліджена модель конфлікту типу війни на виснаження або нападу, яка зводиться до постановки задачі у формі диференціальної гри. Далі із застосуванням методів теорії диференціальних ігор побудовано розв'язки та траєкторії гри. Загальна постановка передбачає можливість поповнення ресурсів, але конкретні обставини можуть виключити поповнення бойових ресурсів. Тому в роботі розглянуто ще і такий вид конфлікту, причому з двома видами плати: вогнева сила і чисельність військ. Для всіх розглянутих задач визначено оптимальні стратегії гравців та моменти переключень від стратегії виснаження супротивника до стратегії нападу.

Список літератури

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. - М.: Мир, 1967. - 479 с.
2. Вильямс Дж. Совершенный стратег, или букварь по теории стратегических игр. - М.: Советское радио, 1960.
3. Дрэшер М. Стратегические игры. Теория и приложения. - М.: Советское радио, 1964.
4. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. - М.:Наука, 1970. - 420 с.
5. Крушевский А. В. Теория игр. – К.: Вища школа.— 1977. – 216 с.
6. Льюис Р.Д., Райфа Х. Игры и решение. Введение и критический обзор. / Пер. с англ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. - 642 с.
7. Теория игр: учебник / Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. / 2-е издание. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012 — 432 с.
8. Черноусько Ф.Л, Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска.-М: Наука, 1978,-270 с.
9. Faruqi F.A. Differential Game Theory with Applications to Missiles and Autonomous Systems Guidance. Aerospace Series. - N.-Y.: Wiley. - 2017. ISBN 978-1-119-16847-8.
10. Fleming W. H. The convergence problem for differential games. // J. Math. Anal. and Appl. - 1961. - V. 3. - PP. 102-116.
11. Fleming W. H. The convergence problem for differential games, II // Adv. in game theory, Ann. of Math. Studies. - 1964. - PP. 175-195.
12. Leong C. K., Huang W. A stochastic differential game of capitalism. // Journal of Mathematical Economics. - 2010. - Vol.46 (4). - P. 552. doi:10.1016/j.jmateco.2010.03.007. S2CID 5025474.
13. Pontani M., Conway B.A. Optimal Interception of Evasive Missile Warheads: Numerical Solution of the Differential Game. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. - 2008. - V. 31 (4). - PP. 1111–1122. doi:10.2514/1.30893.

ДОДАТОК А

Код програми побудови траєкторій диференціальної гри

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

m1 = 10
m2 = 1
c1 = 3
c2 = 1
phi = 0
pse = 0
flag = 0
x2 = 100

def x1(t, l1, l2):
    if phi == 0:
        return (m1 - c1 * pse * m2) * t * t / 2 + l1 * t + l2
    else:
        a = c1 * c2 * phi * pse
        return -(m1 - c1 * m2 * pse) / a \
            + l1 * np.exp(np.sqrt(a) * t) + \
            l2 * np.exp(-np.sqrt(a) * t)

X1_min = -1
X12_min = -1
X1_max = -1

t1 = 1 / c1
t2L = []
t2LX = []
I = 0

```

```
prev_start=0
```

```
def draw(L12):
```

```
    cross_z = False
```

```
    shift = 0.01
```

```
    global phi, pse, X1_min, X1_max, X12_min, I, flag, prev_start
```

```
    phi = 0
```

```
    pse = 0
```

```
    t2 = t1 * np.sqrt(2 * c1 / c2 - 1)
```

```
    T1 = np.linspace(0, t1)
```

```
    L11 = -5
```

```
    # L12=10
```

```
    X = x1(T1, L11, L12)
```

```
    if len(X[X <= 0]) != 0:
```

```
        cross_z = True
```

```
        I += 1
```

```
    X[X < 0] = 0
```

```
    plt.plot(T1, X, 'blue')
```

```
    if (X1_min > X.min()) | (X1_min == -1):
```

```
        X1_min = X.min()
```

```
    if cross_z:
```

```
        t2 += shift * I
```

```
    if not cross_z:
```

```
        plt.plot(T1[len(T1)//2], x1(T1[len(T1)//2], L11, L12), '<', color='magenta')
```

```
    T2 = np.linspace(t1, t2)
```

```

L21 = 6
L22 = x1(t1, L11, L12)
pse = 1
X = x1(T2 - t1, L21, L22)

f_p_t=0
if cross_z:
    f_p_t=(T2)[np.argmin(abs(X))]

X[X <= 0] = 0

plt.plot(T2, X, 'blue')

# arrows
# if not cross_z:
    # plt.plot(T2[len(T2)//2]-0.02,x1(T2[len(T2)//2]-t1,L21,L22),'<',color='magenta')

# T3=np.linspace(t2,1.3)
T3 = np.linspace(t2, 1.1)
x_p = x1(t2 - t1, L21, L22)
phi = 1
L32 = -10
L31 = (x_p
      + (m1 - c1 * m2 * pse) / (c1 * c2 * phi * pse)
      - L32 * np.exp(-np.sqrt(c1 * c2 * phi * pse) * t2)) / np.exp(np.sqrt(c1 * c2 * pse * phi) * t2)

X = x1(T3, L31, L32)
X[X < 0] = 0
plt.plot(T3, X, 'blue')

t2L.append(t2)
t2LX.append(x1(t2, L31, L32))

```

```

if (X1_max < X.max()) | (X1_max == -1):
    X1_max = X.max()
if (X12_min > X.min()) | (X12_min == -1):
    X12_min = X.min()

phi = 0

if flag==0 and cross_z:
    plt.plot(t2L[-2],t2LX[-2],'o',color='magenta')
    plt.annotate("F", (t2L[-2],t2LX[-2]))

    plt.plot(T1[0],prev_start,'o',color='magenta')
    plt.annotate("B", (T1[0],x1(T1[0],L11,L12)))

if flag==1:
    plt.plot(t2L[-1],t2LX[-1],'o',color='magenta')
    plt.annotate("D", (t2L[-1],t2LX[-1]))

    plt.plot(f_p_t,x1(f_p_t-t1,L21,L22),'o',color='magenta')
    plt.annotate("E", (f_p_t,x1(f_p_t-t1,L21,L22)))

    plt.plot(t2L[-1],t2LX[-1],'o',color='magenta')
    plt.annotate("F", (t2L[-1],t2LX[-1]))

if cross_z:
    flag+=1

pse=0
prev_start = x1(T1[0], L11, L12)

# draw(10)

```

```

for L12 in np.arange(3.3, 0, -0.4):
    draw(L12)

plt.plot([t1, t1], [X1_max, X1_min], 'r--')
plt.plot([t2L[0], t2L[0]], [X1_max, t2LX[0]], 'r--')
plt.plot(t2L, t2LX, 'r--')
plt.xlabel('T')
plt.ylabel('$I_1$')
plt.title("$\\frac{1}{c_1} = $" + str(1 / c1))

plt.plot(t1, X1_min, 'o', color='magenta')
plt.annotate("A", (t1, X1_min))

plt.annotate("$\\mathcal{J}_{1}$", (t1, X1_max))
plt.annotate("$\\mathcal{J}_{2}$", (t2L[0], X1_max))
plt.annotate("$x_{1}$", (-0.05, X1_max))

plt.savefig("plot")
plt.show()

```

