**Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова**

**Институт математики, экономики и механики**

**Кафедра методов математической физики**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К КУРСУ

# «АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АНАЛИЗЕ»

для студентов

специальности 8.04030101 «Прикладная математика»

Одесса – 2015

**Печатается по решению Ученого Совета Института математики, экономики и механики (протокол № 2 от 27 ноября 2014 года).**

Составитель: Ю.С. Процеров, канд. физ. - мат. наук, доцент кафедры методов математической физики

Рецензенты: Н.Д. Вайсфельд, докт. физ. – мат. наук, профессор, заведующая кафедрой методов математической физики

А.Ф. Кривой, докт. физ. – мат. наук, профессор кафедры Высшей математики Одесской национальной морской академии

Данные методические указания посвящены изучению основных методов получения асимптотических оценок интегралов, содержащих большой параметр: метод интегрирования по частям, метод Лапласа, метод стационарной фазы, метод перевала. Указания содержат как большое количество примеров, так и задания для самостоятельной работы студентов.

Методические указания соответствуют программе курса Дополнительные разделы математической физики «Асимптотические методы в анализе», читаемом кафедрой методов математической физики студентам магистрам второго года обучения.

Оглавление



**Асимптотические методы в анализе.**

Асимптотические методы и асимптотический подход к явлениям используется чуть ли не в половине современных исследований по математике, механике, физике и многим другим наукам. В несколько упрощенном виде асимптотическое исследование состоит в отыскании приближенной простой формулы для вычисления сложной функции. Типичным примером асимптотической формулы является формула Стирлинга для вычисления $n!$ для достаточно больших $n$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Асимптотические методы играют большую роль в математической физике, в частности при изучении свойств специальных функций. Многие сильные результаты в теории вероятностей, математической статистике и даже в такой сугубо теоретической дисциплине, как теория чисел, также являются асимптотическими (например, распределение простых чисел).

В настоящем курсе излагаются основы асимптотического анализа. При этом упор делается на нахождение асимптотических оценок интегралов, содержащий большой параметр: метод Лапласа, метод стационарной фазы, метод перевала.

## 1. Простейшие асимптотические оценки.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на некотором множестве $X$ и пусть $a$ предельная точка этого множества.

**Определение.** Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$ то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a.$

Например, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$,

$$\sqrt{x^4-3x^3+x+2}\sim x^2 \text{ при } x\to\infty.$$

**Определение.** Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$ то говорят, что $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a.$

Например, $\sin x=o\left(\sqrt{x}\right)$ при $x\to +0,$

$$\ln x=o\left(x^{-\alpha}\right) \text{ при } x\to +0, \alpha>0,$$

$$\ln x=o\left(x^{\alpha}\right) \text{ при } x\to +\infty, \alpha>0.$$

Наиболее часто данное определение употребляется в случае, когда обе функции являются одновременно или бесконечно малыми при $x\to a$ или бесконечно большими при $x\to a.$ В первом случае говорят, что $f(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $g(x)$, или что $f(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $g(x)$. Во втором – что $g(x)$ есть бесконечно большая более высокого порядка, чем $f(x)$, или что $g(x)$ стремится к бесконечности быстрее, чем $f(x)$.

Из соотношения $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$ следует, что $\forall\varepsilon>0$ существует такая окрестность точки $a$, где $|f(x)|\le\varepsilon\cdot|g(x)|.$

В частности, если $f(x)=o(1)$ при $x\to a$, то $\forall\varepsilon>0$ $|f(x)|<\varepsilon$ в некоторой окрестности точки $a$, то есть $f(x)\to 0$ при $x\to a.$

**Определение.** Если существует постоянная $C>0$ такая, что $|f(x)|\le C\cdot g(x)$ в некоторой окрестности точки $a,$ то говорят, что $f(x)=O(g(x))$ при $x\to a.$

Например, $e^x-1=O(x)$ при $x\to 0$,

$$\sin(x) = O(1) \text{ при любом } x.$$

Отметим, что данное определение не подразумевает наличие пределов у функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a.$

Соотношения вида $f(x) \sim g(x)$, $f(x) = o(g(x))$ и $f(x) = O(g(x))$ называют простейшими асимптотическими формулами или асимптотическими оценками, а символы $o$ и $O$ - символами Ландау.

Обозначения $o(g)$ и $O(g)$ используют также для обозначения классов функций $f$ с соответствующими свойствами. Таким образом, символ $o(g)$ не обязательно означает одну и туже функцию $f$. Так, например, $\ln(1+x^2) = o(x)$ и $x^3 + 2x^2 = o(x)$ при $x \to 0.$ То же самое имеет место и для символа $O(g)$.

Несложно убедиться, что имеют место формулы

$$o(f) + o(f) = o(f),\ o(f) \cdot o(f) = o(f),\ o(o(f)) = o(f)$$

$$O(f) + O(f) = O(f),\ O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g),\ O(O(f)) = O(f)$$

$$O(f) + o(f) = O(f),\ O(o(f)) = o(f),\ o(O(f)) = o(f),$$

где всюду $x \to a.$

Докажем, например, первую формулу. Пусть $g_1(x) = o(f(x)), g_2(x) = o(f(x))$ при $x \to a.$ Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{g_1(x) + g_2(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{f(x)} + \lim_{x \to a} \frac{g_2(x)}{f(x)} = 0,$$

то есть $o(f) + o(f) = o(f)$. Остальные формулы доказываются аналогично.

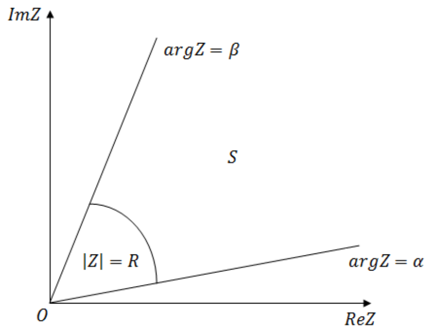

Рис. 1

Для случая функций комплексной переменной $z$ обычно рассматривают бесконечный сектор $S: \alpha \le \arg z \le \beta$ (Рис. 1). Если теперь $z \to \infty$, оставаясь в секторе $S$, то выражение $f(z) = O(g(z))$ означает, что для некоторого значения $R > 0$ существует такое число $K > 0,$ не зависящее от $\arg z,$ что $|f(z)| \le K \cdot |g(z)|$ при $|z| \ge R, z \in S.$

Аналогично определяются символы $o$ и $\sim$.

## 2. Операции над простейшими асимптотическими оценками.

Асимптотические соотношения и отношения порядка можно интегрировать при некоторых очевидных ограничениях, касающихся сходимости интегралов. Приведем простые достаточные условия, при которых это можно делать.

**Теорема.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $a<x<b$. Тогда

1. Если $f(x)\sim g(x)$ при $x\to b$, то $\int\limits_a^x f(t)dt \sim \int\limits_a^x g(t)dt$ при $x\to b$.
2. Если $f(x)=o(g(x))$ при $x\to b$, то $\int\limits_a^x f(t)dt = o\left(\int\limits_a^x g(t)dt\right)$ при $x\to b$.
3. Если $f(x)=O(g(x))$ при $x\to b$, то $\int\limits_a^x f(t)dt = O\left(\int\limits_a^x g(t)dt\right)$ при $x\to b$.

Докажем, например, второе утверждение. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to b}\frac{\int\limits_a^x f(t)dt}{\int\limits_a^x g(t)dt}=\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$ так как $f(x)=o(g(x))$ при $x\to b$, то есть

$$\int\limits_a^x f(t)dt = o\left(\int\limits_a^x g(t)dt\right).$$

Аналогично доказываются остальные утверждения.

Из доказанной теоремы, например, следует, что если функция $f(x)$ интегрируема и $f(x)\sim x^\alpha$ при $x\to+\infty$, то

$$\int\limits_0^x f(t)dt \sim \begin{cases}\ln x, \alpha=-1\\ \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha>-1\end{cases} \quad \text{и} \quad \int\limits_x^\infty f(t)dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ при } x\to+\infty, \alpha<-1.$$

Приведем еще простейшую оценку для сумм.

**Теорема.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонна при $x\ge 0$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^n f(k)=\int\limits_0^n f(x)dx+O(f(n+1))+O(1)$ при $n\to\infty$.

**Доказательство.** Пусть, например, $f(x)$ для определенности возрастает. Тогда

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx \le f(k) \le \int_{k}^{k+1} f(x)dx.$$

Суммируя эти неравенства по $k$ от 1 до $n,$ получим

$$\int_{0}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le \int_{1}^{n+1} f(x)dx, \text{ откуда}$$

$$\int_{0}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=0}^{n} f(k) - f(0) \le \int_{0}^{n} f(x)dx + \int_{n}^{n+1} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx.$$

Тогда $f(0) \le \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_{0}^{n} f(x)dx \le f(0) + \int_{n}^{n+1} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx.$

По теореме о среднем $\int_{n}^{n+1} f(x)dx = f(\xi)\cdot 1 \le f(n+1),$ где $n < \xi < n+1.$

Таким образом $\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_{0}^{n} f(x)dx \le f(n+1) + f(0) - \int_{0}^{1} f(x)dx.$

Так как величина $f(0) - \int_{0}^{1} f(x)dx$ представляет из себя постоянную, то окончательно получаем $\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_{0}^{n} f(x)dx \le O\big(f(n+1)\big) + O(1).$

Используя полученную теорему, несложно показать, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} + O\left(\frac{1}{n+1}\right) + O(1), \text{ откуда } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ при } n \to \infty.$$

**Задания.** Доказать, что при $n \to \infty$

а) $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha > -1$

б) $\sum_{k=2}^{n} \frac{(\ln k)^{\alpha}}{k} \sim \frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha > -1.$

Дифференцирование асимптотических соотношений и отношений порядка допустимо не всегда. Например, если $f(x)=x+\cos x$, то $f(x)\sim x$ при $x\to\infty$. Производная $f'(x)=1-\sin x$ не удовлетворяет соотношению $f'(x)\sim x$, получаемому дифференцированием отношения эквивалентности.

Для того чтобы дифференцирование было возможным, необходимы дополнительные условия. Для действительных переменных эти условия можно сформулировать в терминах монотонности производной. Например, следующим образом:

Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируемая функция и $f(x)\sim x^p$ при $x\to\infty$, где $p\ge 1$. Тогда, если $f'(x)$ неубывающая функция при достаточно больших значениях $x$, то $f'(x)\sim p\cdot x^{p-1}$.

Хотя следует отметить, что условие монотонности $f'(x)$ часто трудно проверить, поскольку она и является той функцией, свойства которой требуется установить.

В комплексной плоскости дифференцирование асимптотических соотношений и отношений порядка обычно допустимо в подобластях области, где они справедливы. Так, для аналитических функций имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ аналитична в области, содержащей сектор $S:\alpha\le\arg z\le\beta$, и

$$f(z)=O\left(z^p\right)\quad (\text{или}\ \ f(z)=o\left(z^p\right))\ \text{при}\ z\to\infty\ \text{в}\ S,$$

где $p$ любое фиксированное число. Тогда

$$f^{(m)}(z)=O\left(z^{p-m}\right)\quad (\text{или}\ \ f^{(m)}(z)=o\left(z^{p-m}\right))\ \ z\to\infty$$

в любом замкнутом секторе $S'$, лежащем строго внутри $S$ и имеющим ту же вершину.

**Доказательство** базируется на интегральной формуле Коши для m-ой производной аналитической функции

$$f^{(m)}(z)=\frac{m!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{m+1}},$$

где L замкнутый контур, охватывающий точку $t=z$.

Пусть сектор $S$ определяется неравенствами $\alpha\le\arg z\le\beta, |z|\ge R$. Рассмотрим сектор $S'$, задаваемый условиями

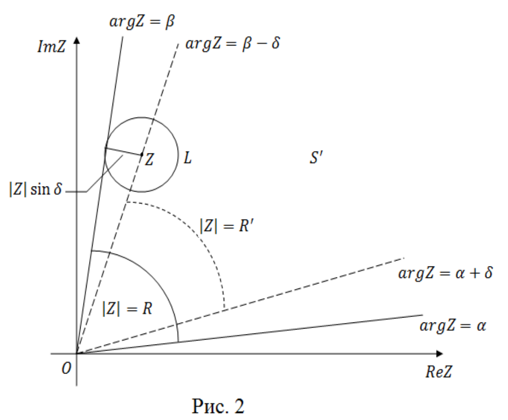

Рис. 2

$\alpha+\delta \le \arg z \le \beta-\delta, |z| \ge R',$ где $\delta$ положительный острый угол и $R' = \dfrac{R}{1-\sin\delta}$.

Выбирая $\delta$ достаточно малым, мы можем добиться, что сектор $S'$ содержится в секторе $S$ (Рис. 2). Возьмем в интегральной формуле Коши путь интегрирования L в виде окружности $|t-z| = |z|\sin\delta.$ Тогда

$$|z|(1-\sin\delta) \le |t| \le |z|(1+\sin\delta) \quad \text{и } t \in S, \text{ если } z \in S'.$$

По условию $f(z) = O(z^p)$, то есть $|f(z)| \le K \cdot |z|^p$ и по интегральной формуле Коши

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \le \frac{m!}{2\pi}\oint_L \frac{K\cdot|t|^p}{(|z|\sin\delta)^{m+1}}|dt| \le \frac{m!}{2\pi}\cdot\frac{K|z|^p(1\pm\sin\delta)^p}{(|z|\sin\delta)^{m+1}}\int_0^{2\pi}|z|\sin\delta d\varphi =$$

$$= \frac{K\cdot m!}{(\sin\delta)^m}|z|^{p-m}(1\pm\sin\delta)^p,$$

где верхний или нижний знаки выбираются соответственно условиям $p \ge 0$ или $p<0.$

В любом случае $f^{(m)}(z)$ имеет порядок $O(z^{p-m}),$ что и требовалось доказать.

## 3. Асимптотические ряды.

Пусть функции $\varphi_n(x), n = 0,1,2,...$ определены на множестве X, имеющем предельную точку $a$ и не обращаются в нуль в некоторой окрестности этой точки.

**Определение.** Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ называется асимптотической при $x \to a,$ если для любого $n \ge 0$

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a.$$

Примерами асимптотических последовательностей являются следующие последовательности:

1) $\varphi_n(x) = (x-a)^n$ при $x \to a.$

2) $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ при $x \to \infty.$

3) $\varphi_n(x) = x^{n+1}\ln^n x$ при $x \to +0.$

4) $\varphi_n(z)=e^{\lambda_n z}$, где $\lambda_n$ вещественны и $\lambda_{n+1}<\lambda_n$, $z\to\infty$ в секторе

$$\frac{\pi}{2}-\varepsilon\le\arg z\le\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}.$$

Из определения асимптотической последовательности вытекают их следующие очевидные свойства:

1) Любая подпоследовательность асимптотической последовательности является асимптотической последовательностью.

2) Если функция $f(x)\ne 0$ в некоторой окрестности точки $a,$ а $\{\varphi_n(x)\}$ асимптотическая последовательность при $x\to a,$ то и последовательность $\{f(x)\cdot\varphi_n(x)\}$ является асимптотической при $x\to a.$

3) Если $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(x)\}$ асимптотические последовательности при $x\to a,$ то и последовательность $\{\varphi_n(x)\cdot\psi_n(x)\}$ является асимптотической при $x\to a.$

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X$ и $a$ предельная точка этого множества. Пусть далее $\{\varphi_n(x)\}$ асимптотическая последовательность при $x\to a,\ x\in X.$

**Определение.** Будем говорить, что функция $f(x)$ разлагается в асимптотический ряд

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x),\ x\to a, \qquad (1)$$

где $a_n$ постоянные, если при любом целом $N$

$$f(x)-\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n(x)=o(\varphi_N(x)),\ x\to a.$$

Ряд (1) называют асимптотическим разложением функции $f(x)$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$. Данное определение было впервые введено А. Пуанкаре и разложение (1) называют также асимптотическим разложение в смысле Пуанкаре.

Асимптотический ряд (1) можно записать также в эквивалентной форме

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n(x)+o(\varphi_N(x)) \quad \text{или} \quad f(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n(x)+O(\varphi_{N+1}(x)). \quad (2)$$

Первое, отличное от нуля, слагаемое асимптотического разложения называют главным членом асимптотики.

Асимптотический ряд дает нам последовательность асимптотических формул для функции $f(x)$, при этом каждая последующая формула уточняет предыдущую

$f(x)=a_0\varphi_0(x)+o(\varphi_0(x))$, $f(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+o(\varphi_1(x))$ и так далее.

Из определения асимптотического ряда непосредственно вытекает возможность складывать асимптотические ряды и умножать их на константу. Так, если

$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ и $g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_n\varphi_n(x)$ при $x\to a$ и $\alpha$ и $\beta$ постоянные, то

$$\alpha f(x)+\beta g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)\varphi_n(x), x\to a.$$

Покажем, что асимптотическое разложение в смысле Пуанкаре данной функции по данной асимптотической последовательности единственно.

Предположим, что функция $f(x)$ имеет два асимптотических разложения

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \text{ и } f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_n\varphi_n(x)$$

по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ при $x\to a.$

По определению $f(x)-a_0\varphi_0(x)=o(\varphi_0(x))$ и $f(x)-b_0\varphi_0(x)=o(\varphi_0(x))$ при $x\to a.$ Вычитая из первого соотношения второе, получим

$(b_0-a_0)\varphi_0(x)=o(\varphi_0(x))$, откуда $b_0-a_0=o(1)$, так что $b_0=a_0$.

Аналогично доказывается, что $b_1=a_1$ и так далее. Таким образом, разложение единственно.

Из формулы (2) несложно получить формулу для нахождения коэффициентов асимптотического разложения

$$a_n=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k\varphi_k(x)}{\varphi_n(x)}. \qquad (3)$$

С другой стороны две различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение. Например,

$$0\sim 0\cdot x^0+0\cdot x^{-1}+\ldots+0\cdot x^{-n}+\ldots, x\to+\infty$$

$$e^{-x} \sim 0\cdot x^0 + 0\cdot x^{-1} + \ldots + 0\cdot x^{-n} + \ldots, x \to +\infty.$$

Отметим, что в первом примере ряд сходится к функции, которую мы разложили, а во втором примере ряд сходится, но уже к другой функции.

Из определения асимптотического ряда следует, что он может и расходится. Действительно, из (2) следует, что остаточный член ряда $R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x)$ имеет вид $R_N(x) = \varphi_N(x)\varepsilon_N(x), \varepsilon_N(x) = o(1), x \to a,$ но ничего не говорится о поведении $R_N(x)$ при фиксированном $x$ и при $N \to \infty.$ В отличие от сходящихся рядов расходящийся асимптотический ряд позволяет вычислить значение функции $f(x)$ в данной точке $x_0$ лишь с некоторой относительной ошибкой $\varepsilon = \varepsilon(x_0),$ при этом $\lim\limits_{x_0 \to a} \varepsilon(x_0) = 0.$

Однако, начиная с восемнадцатого века расходящиеся асимптотические ряды широко использовались в численных и аналитических расчетах многими математиками, в частности Эйлером, и с их помощью были получены с большой степенью точности значения многих постоянных, например, постоянной Эйлера $\gamma = 0,5772156....$

Таким образом возможны три варианта поведения асимптотического ряда для функции $f(x)$: ряд сходится к $f(x),$ ряд сходится к функции $g(x) \neq f(x)$ и ряд расходится.

**4. Степенные асимптотические ряды и их свойства.**

Среди асимптотических рядов наиболее распространенными являются степенные асимптотические ряды, то есть ряды вида

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \text{ при } x \to 0 \text{ и}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots \text{ при } x \to \infty.$$

Степенные асимптотические ряды обладают следующими свойствами (сформулируем и докажем их для рядов второго вида, для рядов первого вида все аналогично).

**1)** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ разлагаются в асимптотические ряды при $x \to \infty$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n},$$

то и функция $f(x)g(x)$ также разлагается в асимптотический ряд при $x \to \infty$

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}, \text{ где } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Действительно, $f(x)g(x) = \left( \sum_{n=0}^{N} a_n x^{-n} + o\left(x^{-N}\right) \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{N} b_n x^{-n} + o\left(x^{-N}\right) \right) =$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x^{-1} + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^{-2} + \ldots + (a_0 b_N + \ldots + a_N b_0) x^{-N} +$$

$$+ (a_1 b_N + \ldots + a_N b_1) x^{-N-1} + \ldots + a_N b_N x^{-2N} + \left( \sum_{n=0}^{N} a_n x^{-n} \right) \cdot o\left(x^{-N}\right) + \left( \sum_{n=0}^{N} b_n x^{-n} \right) \cdot o\left(x^{-N}\right) +$$

$$+ o\left(x^{-N}\right) \cdot o\left(x^{-N}\right) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^{-n} + o\left(x^{-N}\right).$$

**2)** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ разлагаются в асимптотические ряды при $x \to \infty$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n},$$

то и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также разлагается в асимптотический ряд при $x \to \infty$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{-n}, \text{ если } b_0 \neq 0.$$

Для нахождения коэффициентов $d_n$ поступим следующим образом. Рассмотрим сначала $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_0 + o(1)}{b_0 + o(1)}$. При $x \to \infty$ это выражение стремится к $\dfrac{a_0}{b_0}$, то есть $d_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$.

Далее по формуле (3) находим

$$d_1 = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a_0}{b_0} \right) : \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{a_0 + a_1 x^{-1} + o\left(x^{-1}\right)}{b_0 + b_1 x^{-1} + o\left(x^{-1}\right)} - \frac{a_0}{b_0} \right) \cdot x =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1 + o(1)}{b_0 \left( b_0 + b_1 x^{-1} + o\left(x^{-1}\right) \right)} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} \text{ и так далее.}$$

В силу единственности асимптотическое разложение построено.

**3)** Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq a > 0$ и разлагается в асимптотический ряд

$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ при $x \to \infty$, то, если $a_0 = a_1 = 0$, этот асимптотический ряд можно почленно интегрировать

$$\int_x^{\infty} f(t)\,dt = \int_x^{\infty}\left(\frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \ldots + \frac{a_n}{t^n} + o\left(\frac{1}{t^{n+1}}\right)\right)dt = \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \ldots + \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

при $x \to \infty$.

Данное утверждение вытекает из законности почленного интегрирования конечной суммы и теоремы об интегрировании простейших асимптотических соотношений § 2.

Если $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$, то соответствующие слагаемые не интегрируемы. В этом случае рассматривают функцию $F(x) = f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} \sim \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \ldots$, которую уже можно проинтегрировать и получить асимптотическое разложение

$$\int_x^{\infty} F(t)\,dt = \int_x^{\infty}\left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}\right)dt \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \ldots \text{ при } x \to \infty.$$

Аналогично доказывается формула

$$\int_a^{x} f(t)\,dt \sim A + a_0 x + a_1 \ln x - \frac{a_2}{x} - \frac{a_3}{2x^2} - \ldots \text{ при } x \to \infty, \text{ где } A = -a_0 a - a_1 \ln a.$$

**4)** Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, при $x \geq a > 0$, которая разлагается в асимптотический степенной ряд при $x \to \infty$, то это разложение можно получить формальным почленным дифференцированием асимптотического ряда для $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$, то есть $f'(x) \sim -\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^{-n}$ при $x \to \infty$.

Действительно, пусть $f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} = b_0 + \frac{b_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Тогда

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = f(a) + b_0(x-a) + b_1 \ln\frac{x}{a} + o(1),\ x \to \infty.$$

Поскольку $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$, то $b_0 = 0, b_1 = 0$.

Теперь по предыдущему свойству $f(x) = -\int_x^{\infty} f'(t)\,dt \sim -\int_x^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} b_n t^{-n}\,dt = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n-1} x^{-n+1}$.

В силу единственности асимптотического разложения $-\dfrac{b_n}{n-1}=a_{n-1}$, то есть

$b_n=-(n-1)a_{n-1}$ и $f'(x)\sim -\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{-n}$. Таким образом получен тот ряд, который получается при почленном дифференцировании.

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки $a$, то ее можно разложить в ряд по формуле Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right).$$

Очевидно, что данное разложение является также асимптотическим разложением функции $f(x)$ при $x\to a$. Этот способ получения асимптотических разложений достаточно прост, но, к сожалению, область его применения ограничена.

**Пример.** Для функции

$$f(x)=\frac{x}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$$

найти три первых члена асимптотического разложения при $x\to+\infty$.

Сделаем замену $x=\dfrac{1}{t}$, при которой $t\to 0$, если $x\to+\infty$. Тогда $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{1+t}e^{t}$.

Воспользуемся разложениями

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o\left(t^3\right),\ |t|<\infty \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+o\left(t^3\right),\ |t|<1.$$

Тогда

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o\left(t^3\right)\right)\left(1-t+t^2-t^3+o\left(t^3\right)\right)=1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+o\left(t^3\right).$$

Отсюда $f(x)=1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ при $x\to+\infty$.

Соответствующий асимптотический ряд будет сходящимся при $|x|>1$.

**Задания.** 1) Для интегральных синуса и косинуса

$$si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \quad \text{и} \quad ci(x)=\int_0^x \frac{\cos t-1}{t}dt$$

найти их асимптотические разложения при $x\to 0.$

2) Показать, что $\int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right)^t dt = e\cdot\left(x-\frac{1}{2}\ln x\right)+O(1)$ при $x>1.$

3) Получить асимптотическое разложение при $x\to\infty$ функции

$$F(x)=\int_1^\infty \frac{dt}{t^2(x+\ln t)^{1/3}}.$$

Указание: сделать в интеграле замену $\tau=\frac{\ln t}{x}.$

Рассмотрим еще асимптотические разложения для функций комплексного переменного.

**Теорема.** Если функция $f(z)$ аналитична при $|z|>R$ и разлагается в асимптотический ряд $f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n},\ z\to\infty,$ то для достаточно больших $z$ этот ряд сходится к функции $f(z)$: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n}, |z|>R.$

**Доказательство.** Так как $\lim_{z\to\infty} f(z)=a_0,$ то функция $f(z)$ аналитична в точке $z=\infty$ и разлагается в ряд Лорана $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{-n},$ сходящийся при $R<|z|<\infty.$

Поскольку для любого целого $N\ge 0$ $f(z)=\sum_{n=0}^{N}c_n z^{-n}+O\left(z^{-N-1}\right), z\to\infty,$ то ряд Лорана является асимптотическим рядом для функции $f(z)$ при $z\to\infty.$ В силу единственности асимптотического разложения $c_n=a_n,$ а значит $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n}.$

Из доказанной ранее в § 2 теоремы о дифференцировании асимптотических соотношений для аналитических функций следует, что асимптотическое разложение для $f(z)$ можно дифференцировать сколь угодно раз в любом замкнутом секторе $S'$, лежащем строго внутри первоначального сектора $S:\alpha\le\arg z\le\beta, |z|\ge R$ справедливости разложения и имеющем туже вершину.

**5. Интегрирование по частям как метод получения асимптотических разложений.**

Простой и часто эффективный способ вывода асимптотических разложений интегралов, содержащих параметр, состоит в интегрировании по частям. Каждое интегрирование дает новый член разложения, а остаточный член получается явно в виде интеграла, который можно оценить. Особенно часто он применяется для интегралов с переменным верхним или нижним пределами. Однако область применения этого метода ограничена, и сформулировать сколько-нибудь общие теоремы затруднительно. Поэтому рассмотрим этот метод на конкретных примерах.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ и найдем ее асимптотическое разложение при $x \to +\infty.$

Проинтегрируем по частям

$$\int_1^x t^{-1}e^t dt = \begin{bmatrix} u=t^{-1} & du=-t^{-2}dt \\ dv=e^t dt & v=e^t \end{bmatrix} = t^{-1}\,\mathrm{e}^t \,\Big|_1^x + \int_1^x t^{-2}e^t dt = x^{-1}e^x - e + \int_1^x t^{-2}e^t dt .$$

Оценим последний интеграл $\int_1^x t^{-2}e^t dt = \int_1^{x/2} t^{-2}e^t dt + \int_{x/2}^x t^{-2}e^t dt$. Учитывая что

$$\int_1^{x/2} t^{-2}e^t dt < \int_1^{x/2} e^t dt < e^{x/2} \quad \text{и} \quad \int_{x/2}^x t^{-2}e^t dt < \left(\frac{x}{2}\right)^{-2}\int_{x/2}^x e^t dt < 4x^{-2}e^x$$

и то, что величины $-e,\, e^{x/2},\, 4x^{-2}e^x$ имеют порядок $O\left(x^{-2}e^x\right),$ то

$$f(x)=x^{-1}e^x+O\left(x^{-2}e^x\right) \text{ при } x\to\infty.$$

Интегрируя по частям еще раз, аналогично получим

$$f(x)=t^{-1}e^t\,\Big|_1^x + t^{-2}e^t\,\Big|_1^x + 2\int_1^x t^{-3}e^t dt = \left(x^{-1}+x^{-2}\right)e^x - 2e + 2\int_1^x t^{-3}e^t dt =$$

$$=\left(x^{-1}+x^{-2}\right)e^x+O\left(x^{-3}e^x\right).$$

Повторяя этот процесс, получим

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\ldots+\frac{(n-1)!}{x^n}\right)e^x+O\left(x^{-n-1}e^x\right),$$

откуда $e^{-x} f\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\ldots+\frac{\left(n-1\right)!}{x^n}+O\left(x^{-n-1}\right).$

Таким образом, асимптотический ряд имеет вид

$$e^{-x} f\left(x\right)\sim\frac{1}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\ldots+\frac{\left(n-1\right)!}{x^n}+\ldots,\ \mathrm{x}\to\infty.$$

При этом ряд в правой части не сходится ни при одном $x.$ Однако этот ряд можно использовать для вычисления значений $f\left(x\right)$ при достаточно больших $x$ с хорошей степенью точности. Дело в том, что при фиксированном $x$ члены ряда $\frac{n!}{x^{n+1}}$ убывают пока $n$ не становится больше целой части $x$, а потом они неограниченно возрастают. Например, при $x=10$ $\frac{\left[x\right]!}{x^{\left[x\right]+1}}\approx 0{,}36\cdot 10^{-33}$ и значение $f\left(x\right)$ при $x\geq 10$ можно найти с хорошей точностью.

**Пример 2.** Рассмотрим неполную гамма-функцию, определяемою формулой

$$\gamma\left(\alpha,x\right)=\int\limits_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt,\quad \alpha>0.$$

Если разложить показательную функцию в ряд и проинтегрировать

$$\gamma\left(\alpha,x\right)=\int\limits_0^x t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-t\right)^n}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!}\int\limits_0^x t^{n+\alpha-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{n+\alpha}}{\left(n+\alpha\right)n!}$$

Этот ряд сходится при всех $x>0,$ однако он удобен для вычисления $\gamma\left(\alpha,x\right)$ при малых $x,$ но не является асимптотическим рядом при $x\to+\infty.$

Когда $x$ велико лучше рассмотреть дополнительную гамма-функцию

$$\Gamma\left(\alpha,x\right)=\Gamma\left(\alpha\right)-\gamma\left(\alpha,x\right)=\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt-\int\limits_0^{x}t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\int\limits_x^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$$

Проинтегрируем по частям

$$\int\limits_x^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\begin{bmatrix}u=t^{\alpha-1} & du=\left(\alpha-1\right)t^{\alpha-2}dt\\ dv=e^{-t}dt & v=-e^{-t}\end{bmatrix}=-t^{\alpha-1}e^{-t}\Big|_x^{\infty}+\left(\alpha-1\right)\int\limits_x^{\infty}t^{\alpha-2}e^{-t}dt=$$

$$=x^{\alpha-1}e^{-x}+(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1,x)=x^{\alpha-1}e^{-x}+(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-x}+(\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2,x)=$$
$$=\ldots=x^{\alpha-1}e^{-x}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^2}+\ldots+\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{x^{n-1}}\right)+(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n,x).$$

Для сокращения записи воспользуемся свойством гамма-функции $z=\dfrac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)}$. Тогда

$$(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\ldots\frac{\Gamma(\alpha-n+2)}{\Gamma(\alpha-n+1)}=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n+1)}.$$

Таким образом $\Gamma(\alpha,x)=e^{-x}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k+1)}x^{\alpha-k}+\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\Gamma(\alpha-n,x).$

Рассмотрим $\left|\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\Gamma(\alpha-n,x)\right|=\left|\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\right|\cdot\int\limits_x^\infty t^{\alpha-n-1}e^{-t}dt<$

$$<\left|\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\right|\cdot x^{\alpha-n-1}\int\limits_x^\infty e^{-t}dt=\left|\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\right|\cdot x^{\alpha-n-1}e^{-x}.$$

Таким образом n-ый остаточный член ограничен по абсолютной величине (n+1)-м членом ряда. Следовательно, получено асимптотическое разложение для дополнительной гамма-функции

$$\Gamma(\alpha,x)\sim e^{-x}\Gamma(\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\quad \text{при } x\to+\infty.$$

Отсюда асимптотическое разложение для неполной гамма-функции имеет вид

$$\gamma(\alpha,x)\sim\Gamma(\alpha)\left[1-e^{-x}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\right],\quad x\to+\infty.$$

Исследуем на сходимость полученный ряд. Для этого рассмотрим отношение двух последовательных членов ряда

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha-k+1)x^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)x^{\alpha-k}}\right|=\left|\frac{(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha-k)x}\right|=\left|\frac{\alpha-k}{x}\right|\to\infty$$

при $k\to\infty$ и фиксированном $x$. Следовательно ряд расходится. При этом модули членов ряда вначале монотонно убывают (при $k-\alpha<x$ ), а затем (при $k+1-\alpha>x$ ) монотонно возрастают до бесконечности. Такое поведение членов ряда характерно для многих асимптотических рядов, однако это не мешает их использованию для приближенного вычисления значений соответствующих функций.

**Пример 3.** Рассмотрим функцию Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

и найдем ее асимптотическое разложение при $x\to+\infty$.

Сделаем в ней замену переменной $z=\frac{t^2}{2},\, t=\sqrt{2z},\, dt=\frac{dz}{\sqrt{2z}}$. Тогда

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^2/2} e^{-z}\frac{dz}{\sqrt{2z}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2/2} z^{-\frac{1}{2}}e^{-z}dz=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{x^2}{2}\right).$$

Таким образом она свелась к неполной гамма-функции . Воспользовавшись результатом предыдущего примера, получим

$$\Phi(x)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[1-e^{-x^2/2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}-k}\right].$$

Учитывая, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\, \Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)=\left(\frac{1}{2}-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)=\left(\frac{1}{2}-k\right)\cdot(-1)^k\frac{\sqrt{\pi}\,2^k}{(2k-1)!!},$$

получим

$$\Phi(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k-1)x^{2k}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1\cdot 3}{x^5}-...\right)$$

при $x\to+\infty$.

**Задания.** 1) Для функций

$$Si(x)=\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt \quad \text{и} \quad Ci(x)=\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$

получить асимптотические разложения при $x\to\infty$.

2) Получить следующие асимптотические разложения интегралов Френеля при $x\to\infty$

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\sim\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{и} \quad C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt\sim\frac{1}{2}+\frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Указание: воспользоваться тем, что $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

3) Доказать, что

$$\int\limits_0^\pi x^n \sin x dx \sim \frac{\pi^{n+2}}{n^2} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

4) Доказать, что при $\alpha > 0$

$$\int\limits_0^\infty \frac{sin\lambda t}{(1+t)^\alpha}dt = \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty \frac{\cos\lambda t}{(1+t)^\alpha}dt = \frac{\alpha}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

5) Доказать, что при $x \to +\infty$

$$\int\limits_x^\infty e^{-t^2}dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k \cdot x^{2k}}.$$

6) Пусть $\alpha > 0.$ Доказать, что при $x \to +\infty$

$$\int\limits_x^\infty t^{-\alpha}e^{it}dt \sim \frac{ie^{ix}}{x^\alpha}\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(ix)^k}.$$

7) Получить асимптотическое разложение при $x \to +\infty$ интеграла

$$\int\limits_0^x t^\alpha e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \alpha > -1.$$

8) Получить асимптотическое разложение при $x \to +\infty$ интеграла

$$\int\limits_x^\infty t^\alpha e^{-t^\beta}dt, \beta > 0.$$

9) Получить асимптотическое разложение при $x \to +0$ интеграла

$$\int\limits_0^x t^\alpha e^{-\frac{1}{t}}dt.$$

**6. Интегралы Лапласа.**

Одним из общих типов интегралов, к которым применим метод интегрирования по частям, имеет вид

$$F(z)=\int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt,$$

что есть не что иное как преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$.

Относительно функции $\varphi(t)$ предположим, что она интегрируема на любом конечном промежутке и на бесконечности растет не быстрее экспоненты, то есть существует такое $\sigma>0,$ что $\varphi(t)=O\left(e^{\sigma t}\right), t\to+\infty.$ Этот интеграл сходится при $\operatorname{Re} z>\sigma,$ а при $\operatorname{Re} z\ge\sigma_0>\sigma$ сходится равномерно.

Если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывные производные любого порядка, то метод интегрирования по частям нам дает

$$F(z)=\int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt=\begin{bmatrix} u=\varphi(t) & du=\varphi'(t)dt \\ dv=e^{-zt}dt & v=-\frac{1}{z}e^{-zt}\end{bmatrix}=-\frac{\varphi(t)}{z}e^{-zt}\Big|_0^\infty+\frac{1}{z}\int_0^\infty \varphi'(t)e^{-zt}dt=$$

$$=\frac{\varphi(0)}{z}+\frac{1}{z}\int_0^\infty \varphi'(t)e^{-zt}dt=\frac{\varphi(0)}{z}+\frac{\varphi'(0)}{z^2}+\frac{1}{z^2}\int_0^\infty \varphi''(t)e^{-zt}dt=\ldots=$$

$$=\frac{\varphi(0)}{z}+\frac{\varphi'(0)}{z^2}+\ldots+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{z^n}+R_n(z).$$

При этом остаточный член

$$R_n(z)=\frac{1}{z^n}\int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)e^{-zt}dt=\frac{1}{z^n}\int_0^\infty O\left(e^{\sigma t}\right)\cdot e^{-zt}dt=\frac{1}{z^n}O\left(\int_0^\infty e^{-(z-\sigma)t}dt\right)=O\left(\frac{1}{z^n(z-\sigma)}\right).$$

Таким образом имеет место асимптотическое разложение

$$F(z)\sim\sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{z^{k+1}} \quad \text{при } z\to\infty.$$

С другой стороны данное разложение формально можно получить разлагая функцию $\varphi(t)$ в ряд Маклорена $\varphi(t)=\sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k$ с последующим почленным интегрированием

$$\int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k \cdot e^{-zt}dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\int_0^\infty t^k e^{-zt}dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{z^{k+1}},$$

учитывая, что $\int_0^\infty t^k e^{-zt}dt = \frac{\Gamma(k+1)}{z^{k+1}} = \frac{k!}{z^{k+1}}.$

Обоснованием этого формального процесса служит следующая лемма Ватсона, которая широко используется при нахождении асимптотических разложений.

**Лемма Ватсона.** Если $\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}, t \to 0,$ где $\lambda$ и $\mu$ положительные постоянные, то

$$F(z) = \int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt \sim \sum_{k=0}^\infty a_k \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right) z^{-\frac{k+\lambda}{\mu}}$$

при $|z| \to \infty$ в секторе $|\arg z| \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$

**Доказательство.** Для любого целого числа $N$ имеем

$$\int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \int_0^\infty t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1} e^{-zt}dt + R_N(z),$$

где $$R_N(z) = \int_0^\infty \left(\varphi(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}\right)e^{-zt}dt.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^\infty t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1} e^{-zt}dt = \left[t = \frac{\tau}{z}, dt = \frac{d\tau}{z}\right] = z^{-\frac{k+\lambda}{\mu}} \int_0^\infty \tau^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1} e^{-\tau}d\tau = \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right) z^{-\frac{k+\lambda}{\mu}}.$$

Таким образом $\int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right) z^{-\frac{k+\lambda}{\mu}} + R_N(z).$

Покажем, что остаточный член $R_N(z) = O\left(z^{-\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$, то есть функция $z^{\frac{N+\lambda}{\mu}} R_N(z)$ ограничена при $|z| \to \infty$ в секторе $|\arg z| \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$

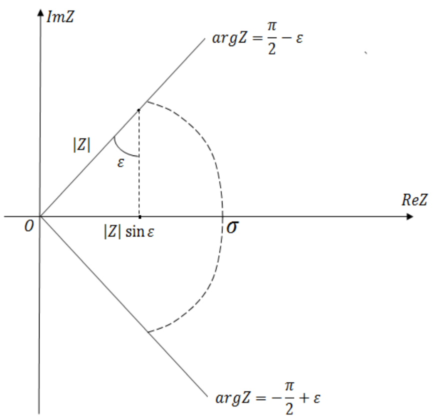

Рис. 3

Для любого целого числа $N$ можно выбрать постоянную $C$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\varphi(t)-\sum_{k=0}^{N-1}a_k t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}\right|\le C\cdot e^{\sigma t}\cdot t^{\frac{N+\lambda}{\mu}-1},\, t\ge 0.$$

Пусть $x=\operatorname{Re} z.$ Тогда при $x>\sigma$

$$\left|R_N(z)\right|\le\int_0^\infty C\cdot e^{\sigma t}t^{\frac{N+\lambda}{\mu}-1}e^{-xt}dt=\frac{C}{(x-\sigma)^{\frac{N+\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\mu}\right).$$

Так как $x\ge|z|\sin\varepsilon,$ то $x>\sigma,$ если $|z|>\dfrac{\sigma}{\sin\varepsilon}$ (Рис. 3). Следовательно, если

$|\arg z|\le\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon$ и $|z|>\dfrac{\sigma}{\sin\varepsilon},$ то $\left|z^{\frac{N+\lambda}{\mu}}R_N(z)\right|\le\dfrac{C|z|^{\frac{N+\lambda}{\mu}}}{(|z|\sin\varepsilon-\sigma)^{\frac{N+\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\dfrac{N+\lambda}{\mu}\right),$ то есть

ограничено при $|z|\to\infty.$ Лемма доказана.

**Замечание 1.** Если функция $\varphi(t)$ разложима в ряд Маклорена, то он будет и ее асимптотическим разложением, а значит будет справедлива и лемма Ватсона, то есть допустимо почленное интегрирование ряда Маклорена.

**Замечание 2.** Если мы рассмотрим интеграл более общего вида $\int_0^\infty\varphi(t)e^{-zt^\alpha}dt,\alpha>0,$ то он при помощи замены переменной $\tau=t^\alpha$ мы придем к интегралу $\dfrac{1}{\alpha}\int_0^\infty\varphi\left(\tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)\tau^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-z\tau}d\tau,$ к которому может быть применена лемма Ватсона.

**Пример.** Найдем асимптотическое разложение интеграла

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-x\,sht}dt \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Сведем его к интегралу Лапласа при помощи замены

$$\tau=sht,\ \text{тогда}\ t=arsh\tau=\ln\left(\tau+\sqrt{\tau^2+1}\right),\quad dt=\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}.$$

Получим $F(x)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\tau^2+1}}e^{-x\tau}d\tau.$ Воспользуемся разложением

$$\left(1+\tau^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}\tau^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\tau^4+\ldots,$$ справедливом при $|\tau|<1.$

Тогда по лемме Ватсона $F(x)\sim\int\limits_0^\infty\left(1-\frac{1}{2\cdot 1!}\tau^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\tau^4-\ldots\right)e^{-x\tau}d\tau.$

Учитывая, что $\int\limits_0^\infty \tau^n e^{-x\tau}d\tau=\frac{n!}{x^{n+1}},$ получим

$$F(x)\sim\frac{1}{x}-\frac{1}{2\cdot 1!}\cdot\frac{2!}{x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{x^5}-\ldots=\frac{1}{x}-\frac{1^2}{x^3}+\frac{1^2\cdot 3^2}{x^5}-\ldots \text{ при } x\to\infty.$$

**Задания.** 1) Получить асимптотическое разложение при $x\to\infty$ функции

$$F(x)=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-t}dt}{t+x}.$$

Указание: сделать замену $t=x\tau.$

2) Получить асимптотическое разложение при $x\to\infty$ функции

$$F(x)=\int\limits_0^\infty e^{-xcht}dt.$$

Указание: сделать замену $\tau=cht-1.$

**7. Метод Лапласа.**

Рассмотрим следующее обобщение интеграла Лапласа

$$F(\lambda)=\int\limits_a^b\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt,$$

где $\varphi(t)$ и $p(t)$ достаточно гладкие функции, а $\lambda$ параметр. Нас будет интересовать асимптотика $F(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty.$ Начнем с эвристических соображений, приведших Лапласа к данному методу.

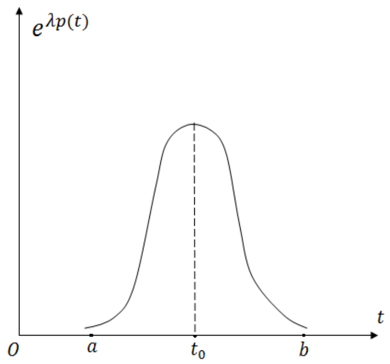

Рис. 4

Пусть максимум функции $p(t)$ достигается в точке $t_0.$ Тогда функция $e^{\lambda p(t)}$ имеет максимум в точке $t_0,$ который тем резче, чем больше $\lambda$ (Рис. 4). Интеграл $F(\lambda)$ можно приближенно заменить интегралом по малой окрестности точки максимума $t_0$ и это приближение будет тем точнее, чем больше $\lambda$. Далее, в этой окрестности функции $\varphi(t)$ и $p(t)$ можно приближенно заменить главными членами их разложений по формуле Тейлора. В результате мы получим интеграл, асимптотика которого легко вычисляется.

Пусть сначала точка максимума $t_0$ совпадает с одним из концов промежутка $[a,b]$, например, $t_0 = a$. Тогда $p'(t_0) < 0$. Заменим

$$F(\lambda) \approx \int_a^{a+\varepsilon} \varphi(t) e^{\lambda p(t)} dt,$$ где $\varepsilon > 0$ малое фиксированное число.

Заменим далее в интеграле $\varphi(t) \approx \varphi(a)$ и $p(t) \approx p(a) + p'(a)(t-a)$. Тогда

$$F(\lambda) \approx \varphi(a) e^{\lambda p(a)} \int_a^{a+\varepsilon} e^{\lambda p'(a)(t-a)} dt.$$

Сделав в интеграле замену переменной $\tau = t - a$, получим

$$F(\lambda) \approx \varphi(a) e^{\lambda p(a)} \int_0^{\varepsilon} e^{\lambda p'(a)\tau} d\tau = \varphi(a) e^{\lambda p(a)} \frac{1}{\lambda p'(a)} e^{\lambda p'(a)\tau} \Big|_0^{\varepsilon} = \frac{\varphi(a)}{\lambda p'(a)} \left( e^{\lambda p'(a)\varepsilon} - 1 \right).$$

Так как $e^{\lambda p'(a)\varepsilon} \to 0$ при $\lambda \to +\infty$, то получаем асимптотическую формулу

$$F(\lambda) \approx -\frac{\varphi(a)}{\lambda p'(a)} e^{\lambda p(a)}, \quad \lambda \to +\infty. \qquad (4)$$

Пусть теперь точка максимума $t_0$ является внутренней точкой промежутка $[a,b]$. Тогда $p'(t_0) = 0$ и $p''(t_0) < 0$. Заменим $\varphi(t) \approx \varphi(t_0)$, $p(t) \approx p(t_0) + \frac{1}{2} p''(t_0)(t-t_0)^2$.

Рассмотрим интеграл (замена $\tau = t - t_0$)

$$F(\lambda) \approx \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \varphi(t) e^{\lambda p(t)} dt \approx \varphi(t_0) e^{\lambda p(t_0)} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} e^{\frac{\lambda}{2} p''(t_0)(t-t_0)^2} dt = \varphi(t_0) e^{\lambda p(t_0)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{\lambda}{2} p''(t_0)\tau^2} d\tau.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $\tau = \dfrac{z}{\sqrt{-\lambda p''(t_0)}}$. Тогда

$$F(\lambda) \approx \frac{\varphi(t_0)}{\sqrt{-\lambda p''(t_0)}} e^{\lambda p(t_0)} \int_{-\varepsilon\sqrt{-\lambda p''(t_0)}}^{\varepsilon\sqrt{-\lambda p''(t_0)}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

При $\lambda \to +\infty$ последний интеграл стремится к интегралу $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$.

Таким образом, мы приходим к асимптотической формуле

$$F(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(t_0)}} \varphi(t_0) e^{\lambda p(t_0)}, \ \lambda \to +\infty. \qquad (5)$$

При получении этих асимптотических формул предположение о том, что только окрестность «пика» функции $e^{\lambda p(t)}$ играет главную роль, использовалось дважды: при замене $\varphi(t)$ и $p(t)$ главными членами их разложений по степеням $t - t_0$ и при замене промежутка интегрирования $(a,b)$ на $(a, a+\varepsilon)$ или $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Приведенные рассуждения не являются строгим доказательством полученных асимптотических формул, а являются наводящими рассуждениями.

Перейдем теперь к строгому обоснованию изложенного метода Лапласа получения асимптотических разложений. Начнем с одной вспомогательной леммы.

**Лемма.** Пусть $\sup\limits_{a<t<b} p(t) = K$ и при некотором $\lambda_0 > 0$ интеграл $F(\lambda) = \int\limits_a^b \varphi(t) e^{\lambda p(t)} dt$

сходится абсолютно $\left|F(\lambda_0)\right| \le \int\limits_a^b \left|\varphi(t)\right| \cdot \left|e^{\lambda_0 p(t)}\right| dt < \infty$.

Тогда имеет место оценка

$$\left|F(\lambda)\right| \le C \cdot \left|e^{\lambda K}\right|, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \ge \lambda_0.$$

**Доказательство.** При $\mathrm{Re}\,\lambda \ge \lambda_0$ имеем $\left(p(t) - K < 0\right)$:

$$\left|F(\lambda)\right| = \left|\int\limits_a^b \varphi(t) \cdot e^{\lambda_0 p(t) + (\lambda - \lambda_0)K + (\lambda - \lambda_0)(p(t) - K)} dt\right| \le$$

$$\le \left|e^{(\lambda - \lambda_0)K}\right| \cdot \int\limits_a^b \left|\varphi(t)\right| \cdot \left|e^{\lambda_0 p(t)}\right| \cdot \left|e^{(\lambda - \lambda_0)(p(t) - K)}\right| dt.$$

Так как $\left|e^{(\lambda - \lambda_0)(p(t) - K)}\right| \le 1$, то $\left|F(\lambda)\right| \le \left|e^{(\lambda - \lambda_0)K}\right| \cdot \int\limits_a^b \left|\varphi(t)\right| \cdot \left|e^{\lambda_0 p(t)}\right| dt \le C \cdot \left|e^{\lambda K}\right|$.

**Теорема 1 (Вклад от граничной точки максимума).**

Пусть $[a,b]$ конечный отрезок и выполнены условия

1) максимум $p(t)$ достигается только в точке $t=a$;

2) $\varphi(t)$ и $p(t)\in C([a,b])$;

3) $\varphi(t)$ и $p(t)\in C^{\infty}$ при t, близких к $a$ и $p'(a)\neq 0.$

Тогда при $\lambda\to\infty, |\arg\lambda|\le\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda^{k+1}},$$

где коэффициенты $c_k$ имеют вид

$$c_k=-M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\Big|_{t=a},\quad M=-\frac{1}{p'(t)}\cdot\frac{d}{dt}.$$

Это разложение можно дифференцировать по $\lambda$ любое число раз. Главный член этого разложения имеет вид (4)

$$F(\lambda)\sim-\frac{\varphi(a)}{\lambda p'(a)}\cdot e^{\lambda p(a)}.$$

**Доказательство.** Возьмем $\varepsilon>0$ такое, что $p'(t)\neq 0$ при $t\in[a,a+\varepsilon]$ и запишем

$$F(\lambda)=\int_a^b\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt=F_1(\lambda)+F_2(\lambda),\text{ где}$$

$$F_1(\lambda)=\int_a^{a+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt,\quad F_2(\lambda)=\int_{a+\varepsilon}^{b}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt.$$

В соответствии с леммой интеграл $F_2(\lambda)$ экспоненциально мал по сравнению с $e^{\lambda p(a)}$

$$|F_2(\lambda)|\le C\cdot\left|e^{\lambda p(a)}\right|.$$

Интеграл $F_1(\lambda)$ проинтегрируем по частям

$$F_1(\lambda)=\int_a^{a+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt=\frac{1}{\lambda}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\cdot d\left(e^{\lambda p(t)}\right)=$$

$$=\frac{\varphi(t)}{\lambda p'(t)}e^{\lambda p(t)}\Big|_a^{a+\varepsilon}-\frac{1}{\lambda}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}dt=$$

$$=\frac{\varphi(t)}{\lambda p'(t)}e^{\lambda p(t)}\Big|_a^{a+\varepsilon}-\frac{1}{\lambda^2}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{1}{p'(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\cdot d\left(e^{\lambda p(t)}\right).$$

Интегрируя по частям точно так же еще раз, получим

$$F_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\varphi(t)}{p'(t)}e^{\lambda p(t)}\Big|_a^{a+\varepsilon}-\frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{p'(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}\Big|_a^{a+\varepsilon}+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p'(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)e^{\lambda p(t)}dt.$$

Введем оператор $M=-\frac{1}{p'(t)}\cdot\frac{d}{dt},$ при этом $M^0$ - единичный оператор. Тогда

$$F_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\cdot M^0\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}\Big|_a^{a+\varepsilon}+\frac{1}{\lambda^2}\cdot M^1\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}\Big|_a^{a+\varepsilon}-$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(M^1\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)e^{\lambda p(t)}dt=\ldots=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\cdot M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}\Big|_a^{a+\varepsilon}-\frac{1}{\lambda^{N+1}}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(M^N\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)e^{\lambda p(t)}dt.$$

Внеинтегральная подстановка при $t=a$ даст $e^{\lambda p(a)}\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{\lambda^{k+1}},$ где $c_k=-M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\Big|_{t=a}$.

Подстановка же при $t=a+\varepsilon$ экспоненциально мала по сравнению с $e^{\lambda p(a)}$.

Последний интеграл в полученной формуле есть $O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}e^{\lambda p(a)}\right).$

Таким образом, мы получили, что

$$F(\lambda)=e^{\lambda p(a)}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{\lambda^{k+1}}+O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)\right).$$

В силу произвольности $N,$ получаем требуемое асимптотическое разложение

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda^{k+1}}.$$

При $k=0$ получаем главный член разложения $F(\lambda)\sim-\dfrac{\varphi(a)}{\lambda p'(a)}e^{\lambda p(a)}.$

Возможность почленного дифференцирования вытекает из того, что дифференцирование $F(\lambda)$ по $\lambda$ приводит к интегралу того же вида.

**Теорема 2 (Вклад от внутренней точки максимума).**

Пусть $[a,b]$ конечный отрезок и выполнены условия

1) максимум $p(t)$ достигается только в точке $t=t_0,\ a<t_0<b;$

2) $\varphi(t)$ и $p(t)\in C([a,b]);$

3) $\varphi(t)$ и $p(t)\in C^{\infty}$ при t, близких к $t_0$ и $p'(t_0)=0,\ p''(t_0)<0.$

Тогда при $\lambda\to\infty, |\arg\lambda|\le\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(t_0)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}},$$

где коэффициенты $c_k$ имеют вид

$$c_k=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!}\cdot\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\varphi(t)\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{t=t_0}.$$

Это разложение можно дифференцировать по $\lambda$ любое число раз. Главный член этого разложения имеет вид (5)

$$F(\lambda)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(t_0)}}\varphi(t_0)e^{\lambda p(t_0)}.$$

**Доказательство.** Запишем интеграл $F(\lambda)$ в виде

$$F(\lambda)=\int_{a}^{t_0-\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt+\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt+\int_{t_0+\varepsilon}^{b}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt.$$

Согласно лемме первый и последний интегралы экспоненциально малы по сравнению с $e^{\lambda p(t_0)}$ и мы ими можем пренебречь. Оставшийся интеграл запишем в виде

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt=e^{\lambda p(t_0)}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda(p(t)-p(t_0))}dt.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной $t=g(y)$, где функция $t=g(y)$ определяется неявно уравнением $p(t)-p(t_0)=-y^2$. В силу условий данной теоремы, по теореме о неявной функции она существует, бесконечно дифференцируема и взаимно-однозначно отображает отрезок $[-\delta,\delta]$ на $[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]$. Тогда

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(t_0)}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(g(y))e^{-\lambda y^2}g'(y)dy=e^{\lambda p(t_0)}\int_{0}^{\delta}f(y)e^{-\lambda y^2}dy,$$

где $\quad f(y)=\varphi(g(y))g'(y)+\varphi(g(-y))g'(-y).$

Рассмотрим интеграл $\int_{0}^{\delta}f(y)e^{-\lambda y^2}dy=\int_{0}^{\infty}f(y)e^{-\lambda y^2}dy-\int_{\delta}^{\infty}f(y)e^{-\lambda y^2}dy.$

Так как $e^{-\lambda y^2}\le e^{-\lambda\delta^2}$ при $y\ge\delta,$ то последний интеграл экспоненциально мал и мы им можем пренебречь. Тогда

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(t_0)}\int_{0}^{\infty}f(y)e^{-\lambda y^2}dy.$$

Разложим функцию $f(y)$ в ряд Маклорена. Так как эта функция четная, то ее производные нечетного порядка в нуле равны нулю и мы получим

$$f(y)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k}}{(2k)!}y^{2k},\ \text{ где }\ a_{2k}=\frac{d^{2k}}{dy^{2k}}\left(\varphi(g(y))g'(y)\right)|_{y=0}\,.$$

Тогда $F(\lambda)\sim 2e^{\lambda p(t_0)}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda y^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k}}{(2k)!}y^{2k}dy.$

Обоснованием законности почленного интегрирования ряда служит лемма Ватсона и замечание 2 к ней. При этом следует учесть, что

$$\int_0^\infty y^{2k}e^{-\lambda y^2}dy=\left[z=\lambda y^2\right]=\frac{1}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}}\int_0^\infty z^{k-\frac{1}{2}}e^{-z}dz=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Тогда

$$F(\lambda)\sim 2e^{\lambda p(t_0)}\sum_{k=0}^\infty\frac{a_{2k}}{(2k)!}\int_0^\infty y^{2k}e^{-\lambda y^2}dy=\mathrm{e}^{\lambda p(t_0)}\sum_{k=0}^\infty\frac{a_{2k}}{(2k)!}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda^{-k-\frac{1}{2}}.$$

Осталось преобразовать выражения для коэффициентов разложения в те $c_k$, которые входят в условия теоремы.

Так как в окрестности точки $t_0$ функции $\varphi(t)$ и $p(t)$ аналитичны, то для малого $\delta>0$ по интегральной формуле Коши для производной аналитической функции

$$a_{2k}=\frac{d^{2k}}{dy^{2k}}\varphi(g(y))g'(y)|_{y=0}=\frac{d^{2k}}{dy^{2k}}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\delta}\frac{\varphi(g(z))g'(z)}{z-y}dz\,|_{y=0}=$$

$$=\frac{(2k)!}{2\pi i}\int_{|z|=\delta}\frac{\varphi(g(z))g'(z)}{z^{2k+1}}dz=\frac{(2k)!}{2\pi i}\int_{|t-t_0|=\varepsilon}\varphi(t)\left(p(t_0)-p(t)\right)^{-k-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{(2k)!}{2\pi i}\int_{|t-t_0|=\varepsilon}\varphi(t)\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}\frac{dt}{(t-t_0)^{2k+1}}=\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\varphi(t)\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}\right)|_{t=t_0}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(t_0)}\sum_{k=0}^\infty c_k\lambda^{-k-\frac{1}{2}},\ \text{где}$$

$$c_k=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!}a_{2k}=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!}\cdot\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\varphi(t)\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}\right)|_{t=t_0}.$$

При $k=0$ получаем главный член асимптотики

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(t_0)}\frac{c_0}{\sqrt{\lambda}},\ \text{где}\ c_0=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\varphi(t_0)\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)|_{t=t_0}.$$

Учитывая, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ и раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\lim_{t\to t_0}\frac{(t-t_0)^2}{p(t_0)-p(t)}}=\sqrt{\lim_{t\to t_0}\frac{2(t-t_0)}{-p'(t)}}=$$

$$=\sqrt{\lim_{t\to t_0}\frac{2}{-p''(t)}}=\sqrt{\frac{2}{-p''(t_0)}}.$$

получим $c_0=\varphi(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-p''(t_0)}}$ и $F(\lambda)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(t_0)}}\varphi(t_0)e^{\lambda p(t_0)}$.

Возможность почленного дифференцирования вытекает из того, что дифференцирование $F(\lambda)$ по $\lambda$ приводит к интегралу того же вида.

**Теорема 3.** Пусть $[a,b]$ конечный отрезок и выполнены условия

1) максимум $p(t)$ достигается только в точке $t=a$;

2) $\varphi(t)$ и $p(t)\in C([a,b])$;

3) $\varphi(t)$ и $p(t)\in C^{\infty}$ при t, близких к $a$ и $p'(a)=0,\ p''(a)<0.$

Тогда при $\lambda\to\infty, |\arg\lambda|\le\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(a)}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^{-\frac{k+1}{2}},$$

где коэффициенты $c_k$ имеют вид $c_k=\dfrac{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\mathrm{k}!}\cdot\dfrac{d^k}{dt^k}\left(\varphi(t)\left(\dfrac{p(a)-p(t)}{(t-a)^2}\right)^{-\frac{k+1}{2}}\right)\Big|_{t=a}.$

Это разложение можно дифференцировать по $\lambda$ любое число раз. Главный член этого разложения имеет вид

$$F(\lambda)\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(a)}}\varphi(a)e^{\lambda p(a)}.$$

Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 2.

Ко всем трем теоремам необходимо сделать следующие замечания.

**Замечание 1.** Теоремы справедливы и для полубесконечного интервала $[a,\infty),$ если при некотором $\lambda_0 > 0$ сходится абсолютно интеграл $\int\limits_a^\infty |\varphi(t)|\left|e^{\lambda_0 p(t)}\right| dt$ и $p(t) \le p(t_0) - \delta, \delta > 0$ вне некоторой окрестности точки максимума $t_0$.

**Замечание 2.** Чтобы получить конечное число членов асимптотического разложения, достаточно потребовать, чтобы функции $\varphi(t)$ и $p(t)$ имели конечное число непрерывных производных в некоторой окрестности точки максимума $t_0$. Отметим, что дифференциальные свойства функций $\varphi(t)$ и $p(t)$ существенны только в окрестности точки максимума.

**Замечание 3.** Если функция $p(t)$ имеет конечное число точек максимума $t_1, t_2, ..., t_n$ на рассматриваемом промежутке, то асимптотика $F(\lambda)$ равна сумме вкладов от каждой из этих точек.

Рассмотрим теперь несколько примеров на применение рассмотренных теорем.

**Пример 1.** Найдем асимптотическое разложение для гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^\infty t^z e^{-t} dt = \int\limits_0^\infty e^{z\ln t} e^{-t} dt \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Если взять $\varphi(t) = e^{-t}$ и $p(t) = \ln t,$ то функция $\ln t$ не имеет точек максимума и метод Лапласа не применим. Поэтому запишем интеграл в виде

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^\infty e^{z\ln t - t} dt.$$

Тогда мы можем взять $\varphi(t) = 1$ и $p(t) = z\ln t - t.$ Так как $p'(t) = \dfrac{z}{t} - 1 = 0$ при $t = z,$ то точка максимума смещается при изменении $z.$ Чтобы этого избежать и можно было применить метод Лапласа, сделаем замену переменной $t = z\tau, dt = zd\tau.$ Тогда

$$\Gamma(z+1) = z\int\limits_0^\infty e^{z\ln(z\tau) - z\tau} d\tau = ze^{z\ln z}\int\limits_0^\infty e^{z(\ln\tau - \tau)} d\tau = \mathrm{z}^{z+1}\int\limits_0^\infty e^{z(\ln\tau - \tau)} d\tau.$$

Теперь уже $\varphi(\tau) = 1, p(\tau) = \ln\tau - \tau.$ Найдем точку максимума функции $p(\tau)$:

$$p'(\tau)=\frac{1}{\tau}-1=0 \text{ при } \tau=\tau_0=1. \text{ При этом } p(1)=-1,\ p''(1)=-1.$$

По теореме 2 находим главный член асимптотики

$$\Gamma(z+1)\sim z^{z+1}\sqrt{\frac{2\pi}{z}}e^{-z}=\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^{z},\ z\to\infty.$$

При $z=n$ получаем известную формулу Стирлинга $\Gamma(n+1)=n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$.

По той же теореме можно подсчитать и следующие члены асимптотического разложения

$$\Gamma(z+1)\sim\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^{z}\left(1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^{2}}+\ldots\right),\ z\to\infty.$$

**Пример 2.** Найдем главный член асимптотического разложения при $x\to\infty$ функции Бесселя мнимого аргумента

$$I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\cdot e^{x\cos\theta}d\theta, \quad \text{где } n\ge 0 \text{ целое.}$$

В этом интеграле $\varphi(\theta)=\cos n\theta$ и $p(\theta)=\cos\theta.$ На промежутке $[0,\pi]$

$$\max p(\theta)=p(0)=1,\ p'(0)=-\sin 0=0,\ p''(0)=-\cos 0=-1.$$

По теореме 3 получаем

$$I_n(x)\sim\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}},\quad x\to\infty, |\arg x|\le\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}.$$

**Пример 3.** Докажем, что $\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{k!}{n^k}\sim\sqrt{\frac{\pi n}{2}}$ при $n\to\infty.$

Воспользуемся интегралом $\int_0^{\infty}t^k e^{-nt}dt=\frac{k!}{n^{k+1}}.$ Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{k!}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k n\int_0^{\infty}t^k e^{-nt}dt=n\int_0^{\infty}e^{-nt}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^k\right)dt=$$

$$=n\int_0^{\infty}e^{-nt}(1+t)^n\,dt=n\int_0^{\infty}e^{n(\ln(1+t)-t)}dt.$$

Здесь $\varphi(t)=1, \mathrm{p}(t)=\ln(1+t)-t.$ Найдем $p'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1=0$ при $t=0.$

При этом $p(0)=0,\ p''(t)=-\dfrac{1}{(1+t)^2}$ и $p''(0)=-1.$

Тогда по теореме 3 главный член асимптотики

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k!}{n^k}=n\int_0^\infty e^{n(\ln(1+t)-t)}dt \sim n\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}=\sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$

Мы рассмотрели применение метода Лапласа для нахождения асимптотики при $\lambda\to\infty$ интегралов вида $F(\lambda)=\int_a^b \varphi(t)e^{\lambda\, p(t)}dt,$ который основывался на том, что основной вклад в асимптотику дает малая окрестность точки максимума функции $p(t)$, а значит и максимума выражения $e^{p(t)}.$ Этот же прием может быть использован и для нахождения асимптотики при $\lambda\to\infty$ интегралов вида $F_1(\lambda)=\int_0^\infty \varphi(t)\left(p_1(t)\right)^\lambda dt,$ которые получаются из предыдущих формальной заменой $p_1(t)=e^{p(t)}$ или $p(t)=\ln p_1(t).$ Мы не будем здесь приводить доказательства соответствующих теорем, а ограничимся только формулировкой окончательных результатов.

**Теорема 4.** Пусть $[a,b]$ конечный отрезок и выполнены условия

1) функции $\varphi(t),\ p_1(t)\in C^\infty$ и $p_1(t)>0;$

2) функция $p_1(t)$ достигает максимума только при $t=a$ и $p_1'(a)\neq 0.$

Тогда при $\lambda\to\infty, |\arg\lambda|\le\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$ справедливо асимптотическое соотношение

$$F_1(\lambda)=\int_a^b \varphi(t)\left(p_1(t)\right)^\lambda dt\sim-\frac{\varphi(a)}{\lambda p_1'(a)}\left(p_1(a)\right)^{\lambda+1}.$$

**Теорема 5.** Пусть $[a,b]$ конечный отрезок и выполнены условия

1) функции $\varphi(t),\ p_1(t)\in C^\infty$ и $p_1(t)>0;$

2) функция $p_1(t)$ достигает максимума только в точке $t=t_0$ и $p_1'(t_0)=0,\ p_1''(t_0)<0.$

Тогда при $\lambda \to \infty, |\arg \lambda| \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ справедливо асимптотическое соотношение

$$F_1(\lambda) = \int_a^b \varphi(t)(p_1(t))^\lambda dt \sim \varepsilon \cdot \varphi(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p_1''(t_0)}}(p_1(t_0))^{\lambda + \frac{1}{2}},$$

где $\varepsilon = 1,$ если $a < t_0 < b$ и $\varepsilon = \frac{1}{2},$ если $t_0 = a$ или $t_0 = b.$

**Пример 4.** Найдем главный член асимптотики при $n \to \infty$ полинома Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\theta\right)^n d\theta, x > 1.$$

В данном случае $\varphi(\theta) = 1,$ а $p_1(\theta) = x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\theta$ достигает максимума при $\theta = \theta_0 = 0.$ При этом

$$p_1(0) = x + \sqrt{x^2 - 1},\ p_1'(0) = -\sqrt{x^2 - 1}\sin 0 = 0,\ p_1''(0) = -\sqrt{x^2 - 1}\cos 0 = -\sqrt{x^2 - 1}.$$

Тогда по теореме 5 получаем

$$P_n(x) \sim \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt{x^2 - 1}}}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n + \frac{1}{2}} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n + \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi n} \cdot \sqrt[4]{x^2 - 1}}.$$

Рассмотрим еще обобщение метода Лапласа для интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t, \lambda) e^{p(t, \lambda)} dt,$$

где функция $\varphi(t, \lambda)$ ограничена при $\lambda \to \infty,$ а функция $p(t, \lambda)$ имеет один максимум в точке $t_0(\lambda),$ которая вообще говоря не является фиксированной, а изменяется вместе с $\lambda.$ Предполагая, что основной вклад в асимптотику дает интеграл по некоторой малой окрестности точки максимума $t_0(\lambda),$ мы можем получить аналог теоремы 2. В частности главный член асимптотики будет иметь вид

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-p''(t_0(\lambda), \lambda)}}\varphi(t_0(\lambda), \lambda) e^{p(t_0(\lambda), \lambda)}, \lambda \to \infty.$$

Однако во многих случаях целесообразней сделать в интеграле замену переменной так, чтобы зафиксировать точку максимума. Мы уже применяли этот прием в примере 1 при получении асимптотики гамма-функции Эйлера. Рассмотрим еще один пример.

**Пример 5.** Найдем главный член асимптотики при $\nu \to \infty$ функции Макдональда (функции Бесселя мнимого аргумента второго рода)

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t - xcht}dt, \text{ где } x > 0.$$

Если следовать стандартной схеме метода Лапласа: $\varphi(t) = e^{-xcht}$, $p(t) = t$, то функция $p(t)$ не имеет максимума. Если же мы возьмем $\varphi(t,\nu) = 1$, $p(t,\nu) = \nu t - xcht$, то точка максимума находится из уравнения $p'(t,\nu) = \nu - x\,sht = 0$, то есть $sht = \frac{\nu}{x}$, откуда

$t_0(\nu) = arsh\frac{\nu}{x} = \ln\left(\frac{\nu}{x} + \sqrt{\frac{\nu^2}{x^2} + 1}\right) \approx \ln\frac{2\nu}{x}$, так как $\nu$ велико.

Чтобы зафиксировать точку максимума сделаем замену переменной $t = \tau + \ln\frac{2\nu}{x}$. Тогда

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\nu\tau + \nu\ln\frac{2\nu}{x} - xch\left(\tau + \ln\frac{2\nu}{x}\right)\right)d\tau.$$

Учитывая, что $\exp\left(\nu\tau + \nu\ln\frac{2\nu}{x}\right) = e^{\nu\tau}\left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu$, а

$$ch\left(\tau + \ln\frac{2\nu}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(\tau + \ln\frac{2\nu}{x}\right) + \exp\left(-\tau - \ln\frac{2\nu}{x}\right)\right) =$$

$= \frac{1}{2}\left(e^\tau\frac{2\nu}{x} + e^{-\tau}\frac{x}{2\nu}\right) = \frac{\nu}{x}e^\tau + \frac{x}{4\nu}e^{-\tau}$, получим

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu}e^{-\tau}\right)\cdot e^{\nu\left(\tau - e^\tau\right)}d\tau.$$

Здесь уже $\varphi(\tau,\nu) = \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu}e^{-\tau}\right) \to 1$ при $\nu \to \infty$, а $p(\tau) = \tau - e^\tau$ имеет

единственную точку максимума $p'(\tau) = 1 - e^\tau = 0$ при $\tau = 0$. При этом $p(0) = -1$, а $p''(\tau) = -e^\tau$ и $p''(0) = -1$.

Тогда согласно приведенной выше формуле главный член асимптотики имеет вид

$$K_\nu(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{-\nu(-1)}} \cdot e^{-\nu}\left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu = \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \cdot e^{-\nu}\left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu, \nu \to \infty.$$

**Задания.** 1) Найти главный член асимптотики при $n \to +\infty$ функции

$$F(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

2) Найти главный член асимптотики при $n \to +\infty$ функции

$$F(n) = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx.$$

3) Найти главный член асимптотики при $n \to +\infty$ функции

$$F(n) = \int_0^1 e^x x^n \left(1 + x^2\right)^{-n} dx.$$

4) Найти главный член асимптотики при $x \to +\infty$ и фиксированном $\nu$ функции

$$F_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-\nu t - x\, sht} dt.$$

5) Найти главный член асимптотики при $x \to +\infty$ и фиксированном $\nu$ функции

Макдональда $\quad K_\nu(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t - xcht} dt.$

6) Найти главный член асимптотики при $x \to +\infty$ функции

$$F(x) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{t} - xt\right) dt.$$

## 8. Метод стационарной фазы.

Рассмотрим нахождение асимптотических разложений интегралов Фурье

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda p(t)} dt,$$

где $p(t)$ вещественнозначная функция, называемая фазовой функцией, а $\lambda$ большой положительный параметр. Функция $\varphi(t)$ может принимать комплексные значения.

Интеграл $F(\lambda)$ будет мал при больших $\lambda$ за счет быстрой осцилляции экспоненты $e^{i\lambda p(t)}$, так как колебания будут компенсировать друг друга.

Наиболее общим результатом для таких интегралов является известная из анализа

**Теорема Римана-Лебега.** Если $\varphi(t) \in L_1(-\infty,\infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt = o(1) \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

Никакой более точной информации о скорости убывания интеграла при этих условиях получить нельзя.

Поведение подынтегральной функции в рассматриваемом здесь случае резко отличается от поведения подынтегральной функции предыдущего параграфа. Если там она имела $\delta$ -образный вид и была сосредоточена вблизи точки максимума функции $p(t)$, то здесь $\left|e^{i\lambda p(t)}\right| = 1$ и значения функции как бы равномерно распределены по отрезку.

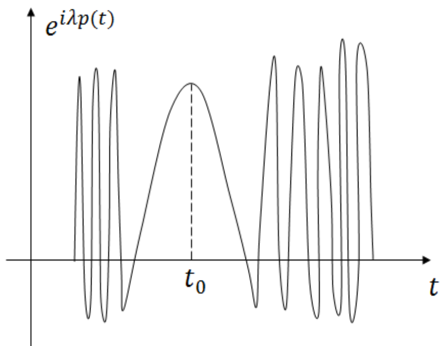

Рис. 5

Тем не менее, и в этом случае основной вклад в асимптотику интеграла $F(\lambda)$ вносят стационарные, то есть критические точки фазовой функции $p(t)$, так как вблизи них осцилляция замедляется (Рис. 5). Отсюда происходит и название метода – метод стационарной фазы. Отметим еще, что в отличие от интегралов Лапласа для интегралов Фурье гладкость функций $\varphi(t)$ и $p(t)$ существенна на всем промежутке интегрирования.

В случае, когда фазовая функция не имеет стационарных точек, асимптотика интеграла $F(\lambda)$ находится при помощи интегрирования по частям.

**Теорема 1.** Пусть $[a,b]$ конечный промежуток и выполнены условия

1) $\varphi(t) \in C^{N+1}([a,b])$, $p(t) \in C^{N+2}([a,b])$;

2) $p'(t) \neq 0$ на $[a,b]$.

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda p(t)} dt = \sum_{k=0}^{N} (i\lambda)^{-k-1} M^k \left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\Big|_a^b + o\left(\lambda^{-N}\right), \text{ где } M = -\frac{1}{p'(t)}\frac{d}{dt}.$$

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda)=(i\lambda)^{-1}\left(\frac{\varphi(b)}{p'(b)}e^{i\lambda p(b)}-\frac{\varphi(a)}{p'(a)}e^{i\lambda p(a)}\right)+O\left(\lambda^{-2}\right).$$

**Доказательство.** Интегрирование по частям дает

$$F(\lambda)=\int_a^b\varphi(t)e^{i\lambda p(t)}dt=\frac{1}{i\lambda}\int_a^b\frac{\varphi(t)}{p'(t)}d\left(e^{i\lambda p(t)}\right)=\frac{1}{i\lambda}\frac{\varphi(t)}{p'(t)}e^{i\lambda p(t)}\Big|_a^b-$$

$$-\frac{1}{i\lambda}\int_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{i\lambda p(t)}dt=(i\lambda)^{-1}\frac{\varphi(t)}{p'(t)}e^{i\lambda p(t)}\Big|_a^b-(i\lambda)^{-2}\int_a^b\frac{1}{p'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)d\left(e^{i\lambda p(t)}\right)=$$

$$=(i\lambda)^{-1}M^0\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{i\lambda p(t)}\Big|_a^b+(i\lambda)^{-2}\int_a^b M^1\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)d\left(e^{i\lambda p(t)}\right).$$

Повторяя далее процедуру интегрирования по частям, получим

$$F(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}(i\lambda)^{-k-1}M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\Big|_a^b+R_{N+1},\ \text{где}$$

$$R_{N+1}=-(i\lambda)^{-N-1}\int_a^b\frac{d}{dt}\left(M^N\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)e^{i\lambda p(t)}dt.$$

Так как $\left|R_{N+1}\right|\le\lambda^{-N-1}\int_a^b\left|\frac{d}{dt}\left(M^N\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)\right|dt\le C_N\lambda^{-N-1}=o\left(\lambda^{-N}\right),$

то теорема доказана.

**Замечание 1.** Если потребовать, чтобы $\varphi(t)$ и $p(t)$ были бесконечно дифференцируемыми на промежутке $[a,b]$, то вместо конечной суммы получим асимптотический ряд.

**Замечание 2.** Если промежуток интегрирования $[0,\infty)$, выполнены условия теоремы и при $0\le k\le N$: $\frac{d}{dt}M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\in L_1[0,\infty)$ и $M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)=o(1),\ t\to+\infty,$ тогда

$$F(\lambda)=\int_0^\infty\varphi(t)e^{i\lambda p(t)}dt=-\sum_{k=0}^{N}(i\lambda)^{-k-1}M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\Big|_{t=0}+o\left(\lambda^{-N}\right),\ \lambda\to+\infty.$$

Стоит обратить внимание на полное сходство полученных асимптотических формул для интегралов Фурье и Лапласа: они получаются друг из друга формальной заменой $\lambda \leftrightarrow i\lambda.$

Рассмотрим теперь случай, когда фазовая функция $p(t)$ имеет на промежутке $[a,b]$ единственную стационарную точку $t_0 : p'(t_0)=0,$ которая является невырожденной, то есть $p''(t_0)\neq 0.$ Тогда основной вклад в асимптотику дает интеграл по малой окрестности этой точки. Общее асимптотическое разложение достаточно громоздко и строится по схеме теоремы 2 метода Лапласа, хотя и отличается более сложными оценками. Поэтому ограничимся только выражением для главного члена асимптотики

$$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|p''(t_0)\right|}}\cdot\exp\left(i\lambda p(t_0)+\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} p''(t_0)\right)\left(\varphi(t_0)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right),\ \lambda\to+\infty. \quad (6)$$

Если стационарная точка совпадает с одним из концов промежутка, то в формуле (6) перед корнем появится множитель $\frac{1}{2}.$

В общем случае в асимптотике интеграла $F(\lambda)$ следует учитывать вклады, как от всех стационарных точек, так и от концов промежутка.

В заключение рассмотрим еще случай, когда стационарная точка $t_0=a$ является вырожденной. Пусть, например, $p'(a)=p''(a)=0,$ а $p'''(a)\neq 0.$ Тогда имеет место формула

$$F(\lambda)=\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda\left|p'''(a)\right|}}\exp\left(i\lambda p(a)+\frac{i\pi}{6}\operatorname{sgn} p'''(a)\right)\left(\varphi(a)+O\left(\lambda^{-\frac{1}{3}}\right)\right),\ \lambda\to+\infty. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь несколько примеров на применение метода стационарной фазы.

**Пример 1.** Найдем главный член асимптотики при $x\to+\infty$ функции Бесселя целого индекса $n\geq 0$

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta.$$

Запишем интеграл в виде

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^{\pi}e^{i(x\sin\theta-n\theta)}d\theta=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^{\pi}e^{-in\theta}\cdot e^{ix\sin\theta}d\theta.$$

В данном случае $\varphi(\theta)=e^{-in\theta},\ p(\theta)=\sin\theta.$ Находим

$p'(\theta)=\cos\theta=0$ при $\theta=\theta_0=\dfrac{\pi}{2}.$ Тогда $\varphi(\theta_0)=e^{-in\frac{\pi}{2}}$, $p(\theta_0)=1,$

$p''(\theta_0)=-\sin\theta_0=-1.$ По формуле (6) находим

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x\cdot 1}}\cdot\mathrm{Re}\left(e^{ix-i\frac{\pi}{4}}\cdot\left(e^{-in\frac{\pi}{2}}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right).$$

Учитывая, что вклады от концов промежутка $\varphi=0$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ имеют порядок $O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, окончательно получим

$$J_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi n}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Пример 2.** Рассмотрим теперь функцию Бесселя вещественного индекса $\nu,$ которая имеет интегральное представление

$$J_\nu(\nu x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\nu(\theta-x\sin\theta)d\theta-\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu(t+x\,\mathrm{sh}\,t)}dt$$

и найдем главный член ее асимптотики при $\nu\to\infty$ и фиксированном $x>1.$

Первое слагаемое запишем в виде $\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Re}\displaystyle\int_0^\pi e^{i\nu(\theta-x\sin\theta)}d\theta$ и возьмем

$\varphi(\theta)=1,$ $p(\theta)=\theta-x\sin\theta.$ Тогда $p'(\theta)=1-x\cos\theta=0,$ если

$\theta=\theta_0=\arccos\dfrac{1}{x}\in(0,\pi).$ При этом

$$p(\theta_0)=\arccos\frac{1}{x}-x\sin\left(\arccos\frac{1}{x}\right)=\arccos\frac{1}{x}-x\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\arccos\frac{1}{x}-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\arccos\frac{1}{x}-\sqrt{x^2-1}.$$

Найдем теперь $p''(\theta_0)=x\sin\theta_0=x\sin\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2-1}.$

Согласно формуле (6)

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\pi e^{i\nu(\theta-x\sin\theta)}d\theta=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu\sqrt{x^2-1}}}\,\mathrm{Re}\,e^{i\left(\nu\arccos\frac{1}{x}-\nu\sqrt{x^2-1}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\nu\arccos\frac{1}{x}-\nu\sqrt{x^2-1}+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right).$$

Второе слагаемое в выражении для $J_\nu(\nu x)$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{\nu}\right)$, так как

$$\left|\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu(t+x\operatorname{sh}t)}dt\right|\le\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu t}dt=\frac{1}{\pi\nu}.$$

Таким образом

$$J_\nu(\nu x)=\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\nu\arccos\frac{1}{x}-\nu\sqrt{x^2-1}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

**Пример 3.** Найдем главный член асимптотики при $\nu\to\infty$ функции

$$J_\nu(\nu)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\nu(\theta-\sin\theta)d\theta-\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu(t+\operatorname{sh}t)}dt.$$

Второе слагаемое, как было показано в предыдущем примере, имеет порядок $O\left(\frac{1}{\nu}\right)$.

Первое же слагаемое запишем в виде $\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\pi e^{i\nu(\theta-\sin\theta)}d\theta.$ Возьмем $\varphi(\theta)=1,\ p(\theta)=\theta-\sin\theta.$ Тогда $p'(\theta)=1-\cos\theta=0,$ если $\theta=\theta_0=0.$ При этом $p(\theta_0)=0,\ p''(\theta_0)=\sin\theta_0=0,$ а $p'''(\theta_0)=\cos\theta_0=1.$ Тогда согласно формуле (7)

$$J_\nu(\nu)=\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{6}{\nu\cdot1}}\mathrm{Re}\,e^{i\left(\nu\cdot0+\frac{\pi}{6}\right)}\left(1+O\left(\nu^{-\frac{1}{3}}\right)\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\pi}\sqrt[3]{\frac{6}{\nu}}\cos\frac{\pi}{6}\left(1+O\left(\nu^{-\frac{1}{3}}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{6\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}}+O\left(\nu^{-\frac{2}{3}}\right).$$

**Задания.** 1) Найти главный член асимптотики при $\lambda\to+\infty$ функции

$$F(\lambda)=\int_0^1 e^{i\lambda t^3}dt.$$

2) Найти главный член асимптотики при $\lambda\to+\infty$ функции

$$F(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\lambda(t-\sin t)\,dt.$$

3) Найти главный член асимптотики при $x\to+\infty$ и фиксированном $\nu$ функции

$$F_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{i(\nu t-x\sin t)}dt.$$

## 9. Метод перевала.

Метод перевала предназначен для нахождения асимптотики при $\lambda\to+\infty$ контурных интегралов Лапласа вида

$$F(\lambda)=\int_C\varphi(z)e^{\lambda p(z)}dz,$$

где $C$ кривая в комплексной плоскости с концами $a$ и $b,$ а функции $\varphi(z)$ и $p(z)$ аналитичны в некоторой окрестности этой кривой.

Как и в методе Лапласа можно предположить, что при больших значениях параметра $\lambda$ величина интеграла $F(\lambda)$ определяется тем участком пути интегрирования $C,$ на котором $\left|e^{\lambda p(z)}\right|=e^{\lambda\operatorname{Re}p(z)},$ то есть $\operatorname{Re}p(z)$ велика по сравнению со значениями на остальной части контура $C,$ а $\arg e^{p(z)}=\operatorname{Im}p(z)$ остается постоянной, чтобы обеспечить отсутствие нежелательных быстрых осцилляций подынтегральной функции. При этом интеграл оценивается тем легче, чем меньше этот участок и чем круче меняется величина $\operatorname{Re}p(z).$ Так как по теореме Коши при деформировании контура интегрирования $C$ в области аналитичности, величина интеграла не меняется (она зависит только от начальной и конечной точек $a$ и $b$), то контур интегрирования $C$ мы можем продеформировать в наиболее удобный для нас путь $\tilde{C}$, чтобы он проходил через нужные точки и в нужном направлении.

**Определение.** Точка $z_0$ называется точкой перевала или седловой точкой функции $p(z),$ если $p'(z_0)=0.$

Порядок точки перевала равен $n\geq1,$ если $p'(z_0)=p''(z_0)=\ldots=p^{(n)}(z_0)=0,$ а $p^{(n+1)}(z_0)\neq0.$ Точка перевала называется простой, если $n=1,$ то есть $p''(z_0)\neq0.$

Величину $\operatorname{Re}p(z_0)$ называют высотой точки перевала.

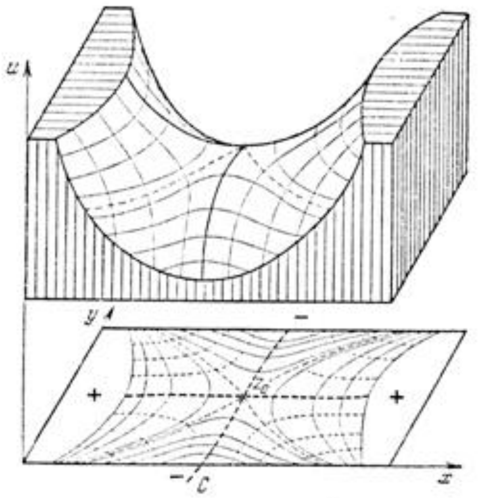

Рис. 6

Чтобы уяснить вопрос геометрически, положим $z = x + iy,\ p(z) = u(x,y) + iv(x,y).$ Рассмотрим поверхность $S$ в пространстве $(x, y, u).$ Так как функция $u(x,y)$ гармоническая, то она не может иметь точек максимума и минимума, но тогда поверхность $S$ не имеет пиков или впадин. Точки, в которых $p'(z_0) = 0,$ будут для нее точками перевала (Рис. 6).

Как уже говорилось, наиболее удобный для оценки интеграла путь интегрирования $\tilde{C}$, по крайней мере, на участке, имеющем наибольшее значение для оценки интеграла, должен проходить в направлении наиболее быстрого изменения функции $u = \operatorname{Re} p(z).$ Это направление, как известно, определяется направлением вектора $gradu = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right).$

Пусть $gradu \neq 0.$ Так как для аналитической функции $p(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ имеет место $gradu \cdot gradv = 0,$ то $gradv = 0$ и направление вектора $gradu$ определяет кривую $\operatorname{Im} p(z) = v(x,y) = const.$ Таким образом, путь $\tilde{C}$, по крайней мере на участке, наиболее существенном для оценки интеграла, должен совпадать с линией уровня $v(x,y) = const.$

Далее, путь $\tilde{C}$ должен содержать точку $z_0,$ в которой $u(x,y)$ достигает наибольшего значения среди значений этой функции на $\tilde{C}$. Покажем, что $p'(z_0) = 0,$ то есть точка линии $v(x,y) = const,$ на которой $\operatorname{Re} p(z) = u(x,y)$ достигает наибольшего значения, является точкой перевала.

В самом деле, в точке $z_0$ производная от $u(x,y)$ вдоль линии $\tilde{C}$ должна быть равна нулю: $\frac{\partial u}{\partial s}\big|_{z_0} = 0,$ а так как $v(x,y) = const$ на линии $\tilde{C}$, то $\frac{\partial v}{\partial s} \equiv 0,$ а потому

$$p'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial s} + i\frac{\partial v}{\partial s} = 0.$$

Итак, при применении метода перевала путь интегрирования $C$ следует продеформировать в путь $\tilde{C}$, проходящий через точку перевала $z_0$ и в окрестности этой точки идущий вдоль линии уровня $v(x,y) = const.$

Форма поверхности $S$ может быть отражена на плоскости $(x, y)$ при помощи линий уровня, на которых $u(x, y) = const.$ Линии уровня, проходящие через точку перевала, разделяют ближайший к ней кусок поверхности $S$ на долины, лежащие ниже точки перевала, и возвышенности, лежащие выше точки перевала.

Линии, на которых $v(x, y) = const,$ образуют ортогональные траектории к линиям уровня, и поэтому они являются образами на плоскости $(x, y)$ кривых наибыстрейшего спуска или наибыстрейшего подъема на поверхности $S.$

Если точка перевала $z_0$ имеет порядок $n-1(n \geq 2),$ то тогда в окрестности этой точки разложение функции $p(z)$ в ряд Тейлора имеет вид

$$p(z) = p(z_0) + c_n (z - z_0)^n + O\left((z - z_0)^{n+1}\right), \text{ где } c_n \neq 0.$$

Положим здесь $z - z_0 = re^{i\psi}$ и $c_n = \rho e^{i\alpha}.$ Тогда

$$p(z) - p(z_0) = r^n \rho \cos(n\psi + \alpha) + i\, r^n \rho \sin(n\psi + \alpha) + O\left(r^{n+1}\right).$$

Отсюда $\operatorname{Re}\left(p(z) - p(z_0)\right) = u - u_0 = r^n \rho \cos(n\psi + \alpha) + O\left(r^{n+1}\right).$

Линиям уровня $u = u_0$ соответствуют значения $\psi,$ приближенно равные нулям $\cos(n\psi + \alpha).$ Таким образом из точки $z_0$ выходит $2n$ линий уровня $\psi_k = \dfrac{\pi}{2n}(2k-1) - \dfrac{\alpha}{n}, k = 1, \ldots, 2n.$ Эти линии разбивают окрестность точки $z_0$ на $2n$ секторов, внутри которых функция $\operatorname{Re}\left(p(z) - p(z_0)\right)$ сохраняет знак и меняет его при переходе от сектора к сектору. Поверхность $S$ делится этими линиями на $n$ долин, лежащих ниже точки перевала, и $n$ возвышенностей, лежащих выше точки перевала.

Аналогично, линии $v = v_0$ определяют $2n$ значений $\psi_k = \dfrac{\pi k}{n} - \dfrac{\alpha}{n},$ которые определяют линии наибыстрейшего спуска и наибыстрейшего подъема. Они являются биссектрисами соответствующих секторов.

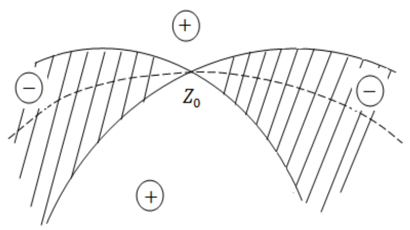

Рис. 7

Таким образом, путь интегрирования $\tilde{C}$ надо выбирать вдоль одной из линий наибыстрейшего спуска в секторах, где $\operatorname{Re}\left(p(z) - p(z_0)\right) < 0.$

Для случая, когда точка перевала является простой, мы имеем четыре сектора, изображенных на рис. 7. Среди них два отрицательных (они заштрихованы на рисунке), где $\mathrm{Re}\left(p(z)-p(z_0)\right)<0,$ и два положительных, где $\mathrm{Re}\left(p(z)-p(z_0)\right)>0.$ Линия наибыстрейшего спуска проходит через отрицательные сектора через точку $z_0$.

Направление касательной к этой линии в точке $z_0$ определяется углами $\psi_1=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$ и $\psi_1+\pi.$ Выбор угла определяется заданием направления интегрирования вдоль линии наибыстрейшего спуска. При этом $c_2=\dfrac{1}{2}p''(z_0)$ и $\alpha=\arg p''(z_0).$

Если поверхность $S$ имеет несколько точек перевала, то обычно следует выбирать в качестве $\tilde{C}$ путь, проходящий через наиболее крутой из перевалов. Впрочем, вопрос о выборе точки перевала в общем виде решается далеко не просто и его приходится рассматривать отдельно в каждом конкретном случае. В частности, если имеется несколько точек перевала, то асимптотика интеграла $F(\lambda)$ состоит из суммы вкладов всех этих точек.

Отметим важное обстоятельство, обеспечивающее эффективность применения метода перевала: так как вдоль линии $\tilde{C}$ в окрестности почки перевала имеем $\mathrm{Im}\,p(z)=const,$ то оценка интеграла $F(\lambda)$ сводится к оценке интеграла от действительной функции, которая может быть проведена по методу Лапласа.

**Теорема 1.** Пусть функции $\varphi(z)$ и $p(z)$ аналитичны в некоторой области, содержащей контур $C.$ Пусть максимум $\mathrm{Re}\,p(z)$ достигается только в начальной точке $z=a$ контура $C$ и $p'(a)\neq 0.$ Тогда при $\lambda\to+\infty$

$$F(\lambda)=\int_C \varphi(z)e^{\lambda p(z)}d\,z\sim e^{\lambda p(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda^{k+1}},$$

где $$c_k=-M^k\left(\frac{\varphi(z)}{p'(z)}\right)\Big|_{z=a},\quad M=-\frac{1}{p'(z)}\cdot\frac{d}{dz}.$$

Это разложение можно дифференцировать по $\lambda$ любое число раз. Главный член этого разложения имеет вид

$$F(\lambda)=-e^{\lambda p(a)}\frac{1}{\lambda p'(a)}\left(\varphi(a)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

**Доказательство.** В данном случае точка максимума $z=a$ не является точкой перевала. Представим путь интегрирования $C$ в виде $C_0\bigcup C_1,$ где малая дуга, содержащая точку $a$ и такая, что на ней $p'(z)\neq 0.$ На кривой $C_1$ в силу условий теоремы $\operatorname{Re} p(z) < \operatorname{Re} p(a) - h,$ где $h > 0.$ Тогда интеграл по $C_1$ будет иметь порядок $O\left(e^{\lambda(p(a)-h)}\right),$ то есть экспоненциально мал по сравнению с $e^{\lambda \operatorname{Re} p(a)}$ и мы им можем пренебречь. Это утверждение доказывается совершенно аналогично лемме из метода Лапласа. На кривой $C_0$ введем натуральный параметр $s$ и запишем уравнение этой кривой в виде $z = z(s), \alpha \le s \le \beta.$ Тогда интеграл по $C_0$ примет вид $\int_\alpha^\beta \varphi(z(s)) e^{\lambda p(z(s))} z'(s) ds.$ Интегрируя его по частям, как это было проделано при доказательстве теоремы 1 метода Лапласа, получим требуемую асимптотическую формулу.

**Теорема 2.** Пусть функции $\varphi(z)$ и $p(z)$ аналитичны в некоторой области, содержащей контур $C.$ Пусть максимум $\operatorname{Re} p(z)$ достигается в единственной точке $z_0,$ которая является внутренней точкой контура $C$ и простой точкой перевала: $p'(z_0) = 0,\ p''(z_0) \ne 0.$ Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) e^{\lambda p(z)} dz \sim e^{\lambda p(z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Это разложение можно дифференцировать по $\lambda$ любое число раз. Главный член этого разложения имеет вид

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(z_0)}} e^{\lambda p(z_0)} \left( \varphi(z_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Выбор ветви корня в этом выражении следующий: $\arg\sqrt{-p''(z_0)}$ равен углу между положительным направлением касательной к кривой интегрирования в точке $z_0$ и положительным направлением вещественной оси.

**Доказательство.** Продеформируем путь интегрирования $C$ в кривую $\tilde{C} = C_1 \bigcup C_0 \bigcup C_2,$ где $C_0$ малая дуга, проходящая через точку перевала $z_0$ вдоль линии наибыстрейшего спуска. На кривых $C_1$ и $C_2$ $\operatorname{Re} p(z) < \operatorname{Re} p(z_0) - \mathrm{h},$ где $h > 0.$ Интегралы по этим кривым экспоненциально малы и мы ими можем пренебречь. Таким образом $F(\lambda) \sim \int_{C_0} \varphi(z) e^{\lambda p(z)} dz = e^{i\lambda \operatorname{Im} p(z_0)} \int_{C_0} \varphi(z) e^{\lambda \operatorname{Re} p(z)} dz.$

На кривой $C_0$ введем натуральный параметр $s$ и запишем уравнение этой кривой в виде $z = z(s), \alpha \le s \le \beta.$ Тогда интеграл по $C_0$ примет вид

$$F(\lambda) \sim e^{i\lambda \operatorname{Im} p(z_0)} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(z(s)) e^{\lambda \operatorname{Re} p(z(s))} z'(s) ds.$$

Таким образом, задача свелась к оценке интеграла, к которому можно применить теорему 2 метода Лапласа. Повторяя рассуждения этой теоремы, получим приведенную в условии асимптотическую формулу, а также выражения для коэффициентов $c_k$.

**Замечание.** Если точка перевала $z_0$ будет граничной точкой контура интегрирования $C$, например, $z_0 = a$, то утверждение теоремы остается в силе, но в выражении асимптотического разложения появится множитель $\frac{1}{2}$.

Проиллюстрируем рассмотренный метод перевала несколькими примерами.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию Ханкеля первого рода (цилиндрическая функция третьего рода), которая может быть представлена контурным интегралом

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_C e^{ix\sin z - i\nu z} dz,$$

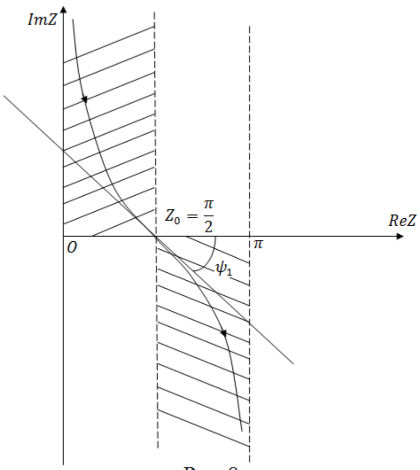

Рис. 8

где контур интегрирования $C$ на комплексной плоскости $z$ переходит из полуполосы $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z > 0$ в полуполосу $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z < 0$ через точку $z_0 = \frac{\pi}{2}$ (Рис. 8). Найдем ее асимптотику при $x \to +\infty$.

В данном случае $\varphi(z) = e^{-i\nu z}$, $p(z) = i\sin z$.

Найдем $p'(z) = i\cos z$. В полосе $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ имеется один нуль $z_0 = \frac{\pi}{2}$. Так как $p''(z) = -i\sin z$ и $p''(z_0) = -i$, то $z_0 = \frac{\pi}{2}$ есть седловая точка первого порядка.

При этом $p(z_0) = i$ и $\operatorname{Re} p(z_0) = 0$. Найдем

$$\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Re}(i\sin(x+iy)) = \operatorname{Re}(i(\sin x \cos iy + \cos x \sin iy)) =$$

$$= \operatorname{Re}(i(\sin x\, chy + i\cos x\, shy)) = \operatorname{Re}(i\sin x\, chy - \cos x\, shy) = -\cos x\, shy.$$

Тогда $\operatorname{Re} p(z) - \operatorname{Re} p(z_0) = -\cos x sh y < 0$ в заштрихованных на рис. 8 полосах (это долины) и путь интегрирования должен проходить через них. Направление наибольшего спуска совпадает с биссектрисами отрицательных секторов, то есть образует угол $\psi_1 = -\frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси $Ox.$ Тогда по теореме 2 главный член асимптотики имеет вид

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x|i|}}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{ix}\left(e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Если мы теперь рассмотрим функцию Ханкеля второго рода

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_C e^{ix\sin z - i\nu z}dz,$$

которая отличается только контуром интегрирования: он переходит из полуполосы $-\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Re} z < -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z < 0$ в полуполосу $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0$ через точку $z_0 = -\frac{\pi}{2}$ (Рис. 9), то совершенно аналогично получим

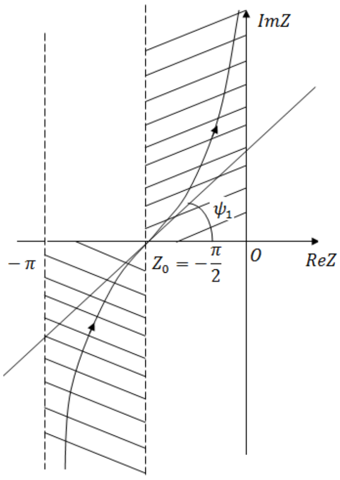

Рис. 9

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Если теперь учесть связь функций Ханкеля с функциями Бесселя и Неймана

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x),$$

то несложно получить асимптотику и этих функций при $x \to +\infty$

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \nu\frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$N_\nu(x)=\frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}-H_\nu^{(2)}(x)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)}-e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

**Пример 2.** Рассмотрим интегральное представление полиномов Лежандра

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}}dt,\ 0<\theta<\pi$$

и получим асимптотическое выражение для них для больших значений индекса $n$.

Рассмотрим аналитическое продолжение подынтегральной функции на комплексную плоскость $z=x+iy$

$$W(z)=\frac{e^{i\lambda z}}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}},\ \text{где}\ \lambda=n+\frac{1}{2}.$$

Функция $W(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0.$ Тогда интеграл от нее по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в верхней полуплоскости, равен нулю.

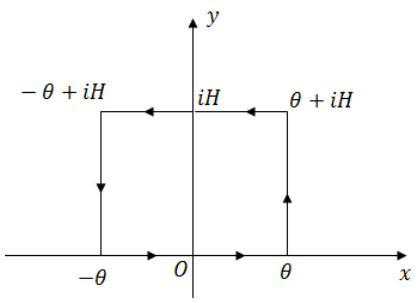

Рис. 10

Возьмем замкнутый контур $C,$ состоящий из отрезка $-\theta<x<\theta,\ y=0$ действительной оси, двух вертикальных отрезков $x=\pm\theta,\ 0<y<H,$ параллельных мнимой оси и замыкающего горизонтального отрезка $-\theta<x<\theta,\ y=iH$ (Рис. 10). Получаем равенство

$$\int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}}+\int\limits_{\theta}^{\theta+iH}\frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}}+\int\limits_{\theta+iH}^{-\theta+iH}\frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}}+\int\limits_{-\theta+iH}^{-\theta}\frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}}=0.$$

Перейдем в нем к пределу при $H\to\infty.$ Во втором интеграле сделаем замену переменной $t=\theta+iy,$ а в четвертом интеграле замену переменной $t=-\theta+iy.$ Тогда

$$\int\limits_{\theta}^{\theta+iH}\frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}}=\int\limits_{0}^{H}\frac{e^{i\lambda(\theta+iy)}idy}{\sqrt{\cos(\theta+iy)-\cos\theta}}\to ie^{i\lambda\theta}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda y}dy}{\sqrt{\cos(\theta+iy)-\cos\theta}}$$

$$\int_{-\theta+iH}^{-\theta}\frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}}=\int_{H}^{0}\frac{e^{i\lambda(-\theta+iy)}idy}{\sqrt{\cos(-\theta+iy)-\cos\theta}}\to -ie^{-i\lambda\theta}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda y}dy}{\sqrt{\cos(-\theta+iy)-\cos\theta}}$$

Третий интеграл $\int_{\theta+iH}^{-\theta+iH}\frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}}\to 0$ при $H\to\infty,$ так как на этом отрезке величина

$|W(z)|=\frac{e^{-\lambda H}}{\left|\sqrt{\cos(x+iH)-\cos\theta}\right|}$ экспоненциально стремится к нулю при $H\to\infty.$

В результате получаем

$$\int_{-\theta}^{\theta}\frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}}=I_1+I_2,\text{ где}$$

$$I_1=ie^{-i\lambda\theta}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda y}dy}{\sqrt{\cos(\theta-iy)-\cos\theta}},\ I_2=-ie^{i\lambda\theta}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda y}dy}{\sqrt{\cos(\theta+iy)-\cos\theta}}.$$

Применим метод перевала к интегралу $I_1$. Положим в нем $y=t^2,$ тогда

$$I_1=2ie^{-i\lambda\theta}\int_{0}^{\infty}\frac{t}{\sqrt{\cos(\theta-it^2)-\cos\theta}}e^{-\lambda t^2}dt.$$

Функция $p(t)=-t^2$ достигает своего максимума в граничной точке $t_0=0.$ При этом $p(0)=0,\ p'(0)=0,\ p''(0)\neq 0.$ Рассмотрим

$$\varphi(t)=\frac{t}{\sqrt{\cos(\theta-it^2)-\cos\theta}}=\frac{t}{\sqrt{\cos\theta\cos it^2+\sin\theta\sin it^2-\cos\theta}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\cos\theta\cdot\frac{\cos it^2}{t^2}+\sin\theta\cdot\frac{\sin it^2}{t^2}}}.$$

Так как при $t\to 0$: $\frac{\cos it^2}{t^2}\to 0,$ а $\frac{\sin it^2}{t^2}\to i,$ то

$$\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{i\sin\theta}}=\frac{1}{\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\theta}}=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

Тогда согласно замечания к теореме 2 получим

$$I_1=\frac{1}{2}\cdot 2ie^{-i\lambda\theta}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda(-2)}}\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)=i\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-i\lambda\theta}\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Совершенно аналогично находим, что

$$I_2=-i\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{i\lambda\theta}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Таким образом

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}(I_1+I_2)=\frac{i}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda\sin\theta}}\left(e^{-i\left(\lambda\theta+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{i\left(\lambda\theta+\frac{\pi}{4}\right)}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi\lambda\sin\theta}}\left(\sin\left(\lambda\theta+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Учитывая, что $\lambda=n+\frac{1}{2}$ окончательно получим

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\sqrt{\pi(2n+1)\sin\theta}}\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), n\to\infty.$$

**Задания.** 1) Получить главный член асимптотики функции Ханкеля $H_\nu^{(2)}(x)$ при $x\to\infty$ из примера 1.

2) Доказать, что

$$\int_0^\infty \exp\left(\lambda\left(x+ix-x^3\right)\right)dx\sim e^{-i\frac{\pi}{16}}2^{-\frac{1}{3}}3^{-\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}\exp\left(2^{\frac{7}{4}}3^{-\frac{3}{2}}e^{i\frac{3\pi}{8}}\lambda\right), \lambda\to+\infty.$$

Указания: здесь имеется две точки перевала $z_{1,2}=\pm 2^{\frac{1}{4}}3^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ и асимптотика интеграла равна вкладу от точки $z_1$.

3) Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\left(1+x^2\right)^{-\lambda} dx \sim \sqrt{\frac{\pi(1-c)}{\lambda}}e^{-\lambda c}\left(2c\right)^{-\lambda},\ \lambda \to +\infty, c=\sqrt{2}-1.$$

Указания: здесь имеется две точки перевала $z_{1,2}=i\left(-1\pm\sqrt{2}\right)$ и асимптотика интеграла равна вкладу от точки $z_1$.

4) Доказать, что

$$\int_{-1}^{\infty} e^{ix}\left(x^3+3x-2i\right)^{-n} dx \sim 2e\left(\frac{i}{4}\right)^n\sqrt{\frac{\pi}{3n}}, n\to\infty, n>0 \text{ целое.}$$

Указания: здесь имеется две точки перевала $z_{1,2}=\pm i$ и асимптотика интеграла равна вкладу от точки $z_2$.

**Ответы к заданиям.**

4.1 $si(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\quad ci(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

4.3 $F(x)\sim x^{-\frac{1}{3}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3k-2)}{(3x)^k}, x\to\infty.$

5.1 $Si(x)\sim\frac{\cos x}{x}\left(1-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-\ldots\right)+\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1!}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-\ldots\right), x\to\infty$

$$Ci(x)\sim-\frac{\sin x}{x}\left(1-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-\ldots\right)+\frac{\cos x}{x}\left(\frac{1!}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-\ldots\right), x\to\infty$$

5.7 $\int_0^x t^\alpha e^{-\frac{t^2}{2}}dt\sim\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left[1-\frac{1}{2}x^{2\alpha+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}-k\right)x^k}\right], x\to+\infty$.

5.8 $\int_x^{\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}dt\sim\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)x^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\mathrm{e}^{-x^\beta}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^{-k}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}+1-k\right)}, x\to+\infty.$

5.9 $\int_0^x t^{\alpha} e^{-\frac{1}{t}} dt \sim \frac{x^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2+k)}{x^k}, x \to +0.$

6.1 $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{t+x} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, x \to \infty.$

6.2 $F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xcht} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \mathrm{e}^{-x} \left(1 - \frac{1^2}{1!(8x)} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!(8x)^2} - \dots\right), x \to \infty.$

7.1 $F(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \mathrm{n} \to +\infty.$

7.2 $F(n) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}, n \to +\infty.$

7.3 $F(n) = \int_0^1 e^x x^n (1+x^2)^{-n} \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{e}{2^n}, n \to +\infty.$

7.4 $F_{\nu}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\nu t - x sht} dt \sim \frac{1}{x}, x \to +\infty.$

7.5 $K_{\nu}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t - xcht} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot \mathrm{e}^{-x}, x \to +\infty.$

7.6 $F(x) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{t} - xt\right) dt \sim \sqrt{\pi} x^{-\frac{3}{4}} \mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}, x \to +\infty.$

8.1 $F(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda t^3} dt \sim \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \lambda^{-\frac{1}{3}}, \lambda \to +\infty.$

8.2 $F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \lambda (t - \sin t) dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi 6^{\frac{2}{3}}} \lambda^{-\frac{1}{3}}, \lambda \to +\infty.$

8.3 $F_{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i(\nu t - x \sin t)} dt \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(\frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x\right)}, x \to +\infty.$

**Литература**


1. Де Брейн Н.Г., Асимптотические методы в анализе. М.: Ил, 1961.- 247 с.
2. Ильин А.М., Данилин А.Р., Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009.- 248 с.
3. Копсон Э., Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.- 160 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967.- 688 с.
5. Олвер Ф., Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.- 376 с.
6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н., Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970.- 304 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.- 736 с.
8. Федорюк М.В., Метод перевала. М.: Наука, 1977.- 368 с.
9. Федорюк М.В., Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.- 544 с.