Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Задача поздовжнього зсуву для складеної смуги»

«The anti-plane elasticity problem for a folded strip»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»

Верещак Кирило Геннадійович

Керівник канд. фіз.-мат. наук, доцент, Процеров Ю.С.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)
Рецензент канд. фіз.-мат. наук,доцент, Журавльова З.Ю
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ___ від _____________2025 р.

Завідувач кафедри

________- ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №_______

протокол № ____ від ________ 2025 р.

Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

_________ _ ____________________ _
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2025

ЗМІСТ

ВСТУП

З розвитком новітніх технологій і матеріалознавства усе більше застосування знаходять композитні матеріали, багатошарові конструкції та інженерні системи, утворені з елементів із різними фізико-механічними властивостями. Такі структури використовуються в авіабудуванні, машинобудуванні, суднобудуванні, біомедичній інженерії та інших сферах, де потрібні висока міцність, надійність і здатність витримувати складні навантаження при зменшенні ваги конструкції. У зв’язку з цим зростає потреба у точному математичному моделюванні напружено-деформованого стану таких тіл, особливо в умовах неоднорідності матеріалів і складної геометрії.

Однією з важливих теоретичних задач у цій галузі є задача повздовжнього зсуву для складеної смуги, яка складається з двох частин, виготовлених з різних матеріалів, що характеризуються різними модулями зсуву. Така модель є суттєвою при аналізі поведінки композитних матеріалів, тонких плівок, клеєних шарів, а також стиків у багатошарових конструкціях, де спільна робота елементів у межовому стані суттєво впливає на загальну міцність системи.

Метою цієї роботи є побудова розв’язку задачі про повздовжній зсув двокомпонентної смуги за дії дотичних навантажень, прикладених до її меж, з урахуванням граничних умов та умов ідеального механічного контакту між частинами тіла. Для цього розглядається відповідна математична модель, що базується на рівнянні Лапласа, яке описує поведінку переміщень у кожній з частин смуги. Застосування напівнескінченного косинус-перетворення Фур’є дозволяє звести задачу до системи звичайних диференціальних рівнянь, які потім розв’язуються з використанням фундаментальних функцій і методу Крамера.

У роботі детально розглядаються побудова аналітичного розв’язку, трансформація крайових умов, умови сполучення та відповідні перетворення, що забезпечують коректне формулювання та розв’язання задачі. Особливу увагу приділено обґрунтуванню вибраного методу, його застосовності та точності, що дозволяє отримати надійні результати для практичного використання.

Отримані результати можуть бути використані в інженерних розрахунках складних механічних систем, а також слугувати основою для подальших досліджень, пов’язаних із нелінійними, термомеханічними або динамічними ефектами у багатошарових та композитних структурах. Таким чином, дана робота має як теоретичну, так і практичну цінність у галузі прикладної механіки та композитного моделювання.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

2.1 Постановка задачі

Задача повздовжнього зсуву для складеної смуги. Розглянемо тіло, яке складається з двох частин $-a < x < 0, 0 < y < \infty$ та $0 < x < a, 0 < y < \infty$, які мають різні модулі зсуву: G_1 та G_2 відповідно. Це тіло знаходиться в умовах повздовжнього зсуву під дією дотичних навантажень $P_1(x)$ та $P_2(x)$ прикладених до грані $y = 0$.

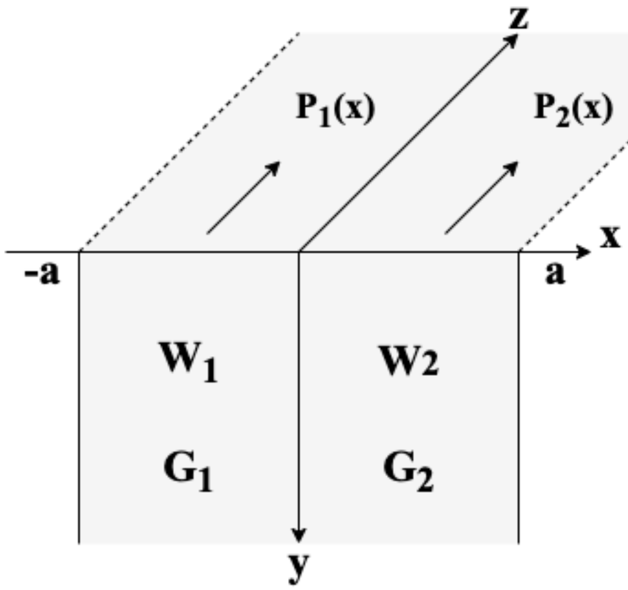


Рис. 2.1.1

Рис. 1.1, демонструє задачу у трьох вимірній системі координат.

Позначимо через $W_1(x, y) : W_2(x, y)$ переміщення точок тіла вздовж осі Oz. Вони мусять задовольняти рівняння Лапласа

$$\begin{gathered}\Delta W_1(x, y) = 0, -a < x < 0, 0 < y < \infty, \\ \Delta W_2(x, y) = 0, 0 < x < a, 0 < y < \infty.\end{gathered} \quad (2.1)$$

Припустимо, що границі тіла $x = \pm a$ нерухомо закріплені. Отже маємо крайові умови для переміщень

$$W_1|_{x=-a} = 0, 0 < y < \infty,$$

$$W_2|_{x=a} = 0, 0 < y < \infty \qquad (2.2)$$

та для напружень

$$G_1 \frac{\partial W_1}{dy}\bigg|_{y=0} = -P_1(x), -a < x < 0,$$
$$G_2 \frac{\partial W_2}{dy}\bigg|_{y=0} = -P_2(x), 0 < x < a. \qquad (2.3)$$

Сюди слід додати умови спадання переміщень та напружень коли $y \to \infty$. Та умови сполучення частин тіла, які відповідають ідеальному механічному контакту - рівності переміщень та напружень:

$$W_1|_{x=-0} = W_2|_{x=+0},$$
$$G_1 \frac{\partial W_1}{\partial x}\bigg|_{x=-0} = G_2 \frac{\partial W_2}{\partial x}\bigg|_{x=+0}. \qquad (2.4)$$

2.2 Переведення задачі у простір трансформант

У задачі доцільно використовувати напівнескінченне косинусне перетворення Фур'є по змінній y, оскільки область нескінченна в цьому напрямку, задані граничні умови Неймана при $y = 0$ та спадання при $y \to \infty$, а умови при $x \pm a$ залишаються незмінними та обробляються вже після перетворення. Отже косинус перетворення Фур'є:

$$W_{ja}(x) = \int_0^\infty w_j(x, y) \cos(\alpha y) dy, j = 1,2 \qquad (2.5)$$

з формулою обернень:

$$w_j(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty W_{j\alpha}(x) \cos(\alpha y) d\alpha, j = 1,2. \qquad (2.6)$$

Якщо його застосувати до рівнянь (1), то отримаємо звичайні диференціальні рівняння. Спочатку застосуємо це перетворення до рівняння Лапласа. Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $\cos(\alpha y)$ та проінтегруємо по y у межах від 0 до ∞:

$$W_{1a}(x) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \cos\,(\alpha y) dy = 0. \quad (2.7)$$

Розбиваємо інтеграл, що стоїть у лівій частині рівності на 2 доданки

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \cos(\alpha y)\, dy = \\ = \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos(\alpha y) dy + \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos(\alpha y) dy \quad (2.8)$$

У першому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos(\alpha y)\, dy = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty w(x, y) \cos(\alpha y)\, dy = \\ = \frac{d^2}{dx^2} W_a(x) = W''_\alpha(x) \quad (2.9)$$

Другий інтегруємо по частинам, враховуючи задані крайові умови за змінною $G_1 \frac{\partial W_1}{\partial y}\Big|_{y=0} = -P_1(x)$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos\,(\alpha y) dy = \cos\,(\alpha y) \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=0}^{y\to\infty} + a \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y} \sin\,(\alpha y) dy \quad (2.9)$$

Перепишемо $G_1 \frac{\partial W_1}{\partial y}\Big|_{y=0} = -P_1(x)$, як $\frac{\partial W_1}{\partial y}\Big|_{y=0} = -P_1(x)G_1^{-1}$, тоді отримаємо $P_1(x)G_1^{-1} + a\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y}\sin(\alpha y)dy$. Знайдемо $\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y}\sin(\alpha y)\,dy$. Цю частину також знайдемо по частинам

$$\sin(\alpha y)\,w(x,y)\Big|_{y=0}^{y\to\infty} - \alpha\int_0^\infty w(x,y)cos(\alpha y)dy =$$

$$= -\alpha\int_0^\infty w(x,y)cos(\alpha y)dy = -\alpha W_{1\alpha}(x) \quad (2.10)$$

Маємо $\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos(\alpha y)dy = P_1(x)G_1^{-1} - a^2 W_{1\alpha}(x)$. Тоді отримаємо рівняння Лапласа у просторі трансформант

$$\begin{gathered} W_{1\alpha}''(x) - \alpha^2 W_{1\alpha}(x) = -G_1^{-1}P_1(x), -a < x < 0, \\ W_{2\alpha}''(x) - \alpha^2 W_{2\alpha}(x) = -G_2^{-1}P_2(x), 0 < x < a. \end{gathered} \quad (2.11)$$

Далі застосуємо інтегральне перетворення до крайових умов,

$$\begin{gathered} \int_0^\infty W_1(x,y)\cos(\alpha y)\,dy\Big|_{x=-a} = W_{1\alpha}(-a) = 0, \\ \int_0^\infty W_2(x,y)\cos(\alpha y)\,dy\Big|_{x=a} = W_{2\alpha}(a) = 0, \end{gathered} \quad (2.12)$$

для умов сполучення переміщень:

$$W_1|_{x=-0} = W_2|_{x=+0} \quad (2.13)$$

та для умов сполучення напружень:

$$G_1 \frac{\partial W_1}{\partial x}\bigg|_{x=-0} = G_2 \frac{\partial W_2}{\partial x}\bigg|_{x=+0} \tag{2.14}$$

Оскільки напруження записуються через похідну, то знайдемо:

$$\begin{gathered}\int_0^\infty G_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} \cos(\alpha y)\, dy = \int_0^\infty G_2 \frac{\partial W_2}{\partial x} \cos(\alpha y)\, dy \\ G_1 \frac{d}{dx} \int_0^\infty W_1(x, y) \cos(\alpha y)\, dy = G_2 \frac{d}{dx} \int_0^\infty W_2(x, y) \cos(\alpha y)\, dy\end{gathered} \tag{2.15}$$

Та отримаємо крайові умови та умови сполучення:

$$\begin{gathered}G_1 W'_{1\alpha}(-0) = G_2 W'_{2\alpha}(+0), \\ W_{1\alpha}(-0) = W_{2\alpha}(+0), \\ W_{1\alpha}(-a) = 0, \\ W_{2\alpha}(a) = 0.\end{gathered} \tag{2.16}$$

2.3 Розв'язок у просторі транформант

Пара рівнянь

$$\begin{gathered}W''_{1\alpha}(x) - \alpha^2 W_{1\alpha}(x) = 0, \\ W''_{2\alpha}(x) - \alpha^2 W_{2\alpha}(x) = 0\end{gathered} \tag{2.17}$$

є лінійними однорідними диференціальними рівняннями другого порядку з постійними коефіцієнтами. Їх загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{gathered}W_{1\alpha}(x) = A_1 sh(\alpha x) + B_1 ch(\alpha x), \\ W_{2\alpha}(x) = A_2 sh(\alpha x) + B_2 ch(\alpha x).\end{gathered} \tag{2.18}$$

Для отримання часткових рішень неоднорідних рівнянь використаємо фундаментальну функцію рівняння $W_\alpha'' - \alpha^2 W_\alpha(x) = 0$

$$\Phi_\alpha(x,\xi) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|x-\xi|}, \text{де } \alpha > 0. \qquad (2.19)$$

Тоді розв'язки неоднорідних рівнянь

$$W_{1\alpha}(x) = A_1 sh(\alpha x) + B_1 ch(\alpha x) - G_1^{-1} \int_{-a}^{0} -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|x-\xi|} P_1(\xi) d\xi,$$
$$-a < x < 0 \qquad (2.20)$$
$$W_{2\alpha}(x) = A_2 sh(\alpha x) + B_2 ch(\alpha x) - G_2^{-1} \int_{0}^{a} -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|x-\xi|} P_2(\xi) d\xi,$$
$$0 < x < a \qquad (2.21)$$

Стали величини A_1, A_2, B_1, B_2 знаходимо з залишився крайових умов (6) та умов сполучення (7)

$$\begin{gathered} W_{1\alpha}(-a) = 0, \\ W_{2\alpha}(a) = 0, \\ W_{1\alpha}(-0) = W_{2\alpha}(+0), \\ G_1 W_{1\alpha}'(-0) = G_2 W_{2\alpha}'(+0). \end{gathered} \qquad (2.22)$$

Підставимо крайові значення x, а саме $-a$ та a у крайові умови відповідно

$$\begin{gathered} -A_1 sh(\alpha a) + B_1 ch(\alpha a) + G_1^{-1} \frac{1}{2\alpha} \int_{-a}^{0} e^{-\alpha|-a-\xi|} P_1(\xi) d\xi = 0, \\ A_2 sh(\alpha a) + B_2 ch(\alpha a) + G_2^{-1} \frac{1}{2\alpha} \int_{0}^{a} e^{-\alpha|a-\xi|} P_2(\xi) d\xi = 0. \end{gathered} \qquad (2.23)$$

далі застосуємо рівність умов сполучення. Для сполучення переміщень підставимо ± 0 у відповідні функції у просторі трансформант:

$$W_{1\alpha}(-0) = B_1 + G_1^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{-a}^{0} e^{\alpha\xi}P_1(\xi)d\xi,$$
$$W_{2\alpha}(+0) = B_2 + G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{a} e^{-\alpha\xi}P_2(\xi)d\xi. \qquad (2.23)$$

Згідно умови дорівняємо їх, отримавши наступну рівність:

$$B_1 + \frac{1}{2\alpha}G_1^{-1}\int_{-a}^{0} e^{\alpha\xi}P_1(\xi)d\xi = B_2 + \frac{1}{2\alpha}G_2^{-1}\int_{0}^{a} e^{-\alpha\xi}P_2(\xi)d\xi \quad (2.24)$$

Наступним кроком обчислимо умову рівності напружень на стику двух напружень, для цього необхідно обчислити значення функцій W_{1a}' та W_{2a}' у точках -0 та $+0$ відповідно та помножити обидві функції на відповідні їх модулі зсуву G_1 та G_2, тобто

$$G_1 W_{1a}'(-0) = G_2 W_{2a}'(+0) \qquad (2.25)$$

Спочатку позначимо $W_{1a}'(x)$ та $W_{2a}'(x)$ як:

$$W_{1a}'(x) = A_1\frac{d}{dx}\mathrm{sh}(\alpha x) + B_1\frac{d}{dx}\mathrm{ch}(\alpha x) - G_1^{-1}\frac{d}{dx}\int_{-a}^{0}\Phi_\alpha(x,\xi)P_1(\xi)d\xi,$$
$$-a < x < 0, \qquad (2.26)$$
$$W_{2a}'(x) = A_2\frac{d}{dx}\mathrm{sh}(\alpha x) + B_2\frac{d}{dx}\mathrm{ch}(\alpha x) - G_2^{-1}\frac{d}{dx}\int_{0}^{a}\Phi_\alpha(x,\xi)P_2(\xi)d\xi,$$
$$0 < x < a. \qquad (2.27)$$

Похідні від $\frac{d}{dx}\mathrm{sh}(\alpha x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$ та $\frac{d}{dx}\mathrm{ch}(\alpha x) = s\mathrm{h}(\alpha x)$, а для фундаментальної функції це $\frac{d}{dx}\Phi_\alpha(x,\xi) = sgn(x-\xi)e^{-\alpha|x-\xi|}$. Оскільки проміжки значень ξ змінюються залежно від проміжку інтегрування, то отримаємо дві похідні фундаментальної функції для W'_{1a} та W'_{2a} відповідно.

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}\Phi_\alpha(x,\xi) = (+1)e^{-\alpha|x-\xi|}, -a < \xi < 0,\\ \frac{d}{dx}\Phi_\alpha(x,\xi) = (-1)e^{-\alpha|x-\xi|}, 0 < \xi < a.\end{gathered} \tag{2.28}$$

Підставимо знайдену похідну фундаментальної функції та значення $x = \pm 0$

$$\begin{gathered}W'_{1a}(-0) = A_1\alpha - G_1^{-1}\frac{1}{2}\int_{-a}^{0}(+1)e^{\alpha\xi}P_1(\xi)d\xi,\\ W'_{2a}(+0) = A_2\alpha - G_2^{-1}\frac{1}{2}\int_{0}^{a}(-1)e^{-\alpha\xi}P_2(\xi)d\xi\end{gathered} \tag{2.29}$$

та дорівняємо обидва рівняння разом з модулями зсуву G_1 та G_2

$$\begin{gathered}G_1\left(A_1\alpha - G_1^{-1}\frac{1}{2}\int_{-a}^{0}e^{\alpha\xi}P_1(\xi)d\xi\right) =\\ = G_2\left(A_2\alpha + G_2^{-1}\frac{1}{2}\int_{0}^{a}e^{-\alpha\xi}P_2(\xi)d\xi\right).\end{gathered} \tag{2.30}$$

Отримаємо рівності для умови сполучення напружень:

$$\begin{gathered}B_1 + G_1^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{-a}^{0}e^{-\alpha|-0-\xi|}P_1(\xi)d\xi =\\ = B_2 + G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{a}e^{-\alpha|+0-\xi|}P_2(\xi)d\xi\end{gathered} \tag{2.31}$$

та умови сполучення напружень

$$A_1 \alpha G_1 - \frac{1}{2}\int_{-a}^{0} e^{\alpha\xi} P_1(\xi)d\xi = A_2 \alpha G_2 + \frac{1}{2}\int_{0}^{a} e^{-\alpha\xi} P_2(\xi)d\xi. \quad (2.32)$$

Виразимо частину умов сполучення через A_2 та B_2 та отримаємо:

$$A_2 = A_1 G_1 G_2^{-1} - G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{-a}^{0} e^{\alpha\xi} P_1(\xi)d\xi - G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{a} e^{-\alpha\xi} P_2(\xi)d\xi$$
$$B_2 = B_1 + G_1^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{-a}^{0} e^{\alpha\xi} P_1(\xi)d\xi - G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{a} e^{-\alpha\xi} P_2(\xi)d\xi \quad (2.33)$$

Позначимо інтеграли через I_1та I_2:

$$I_1 = \frac{1}{2\alpha}\int_{-a}^{0} e^{\alpha\xi} P_1(\xi)d\xi,$$
$$I_2 = \frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{a} e^{-\alpha\xi} P_2(\xi)d\xi \quad (2.34)$$

та перепишемо рівності:

$$A_2 = G_2^{-1}(A_1 G_1 - I_1 - I_2) = A_1 G_1 G_2^{-1} - G_2^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2$$
$$B_2 = B_1 + G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2 \quad (2.35)$$

Далі підставимо A_2 та B_2 виражені через A_1 та B_1 відповідно в крайові умови

$$-A_1 sh(\alpha a) + B_1 ch(\alpha a) + G_1^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{-a}^{0} e^{-\alpha|-a-\xi|} P_1(\xi)d\xi = 0$$
$$(A_1 G_1 G_2^{-1} - G_2^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2) sh(\alpha a) + (B_1 + G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2) ch(\alpha a)$$
$$+ G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{a} e^{-\alpha|a-\xi|} P_2(\xi)d\xi = 0 \quad (2.36)$$

Вирішимо цю систему за правилом Крамера. Позначимо останні доданки з інтегралами через C та D

$$
\begin{aligned}
C &= G_1^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{-a}^{0} e^{-\alpha|-a-\xi|}P_1(\xi)d\xi,\\
D &= G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{a} e^{-\alpha|a-\xi|}P_2(\xi)d\xi.
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Тоді отримаємо

$$
\begin{aligned}
&-A_1 sh(\alpha a) + B_1 ch(\alpha a) + C = 0\\
&A_1 G_1 G_2^{-1} sh(\alpha a) + B_1 ch(\alpha a) =\\
&\qquad = G_2^{-1} I_1 sh(\alpha a) + G_2^{-1} I_2 sh(\alpha a) - G_1^{-1} I_1 ch(\alpha a) + G_2^{-1} I_2 ch(\alpha a) - D
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Розкриємо доданки та залишимо зліва тільки доданки з невідомими коефіцієнтами

$$
\begin{aligned}
&-A_1 sh(\alpha a) + B_1 ch(\alpha a) = -C\\
&A_1 G_1 G_2^{-1} sh(\alpha a) + B_1 ch(\alpha a) =\\
&\qquad = G_2^{-1} I_1 sh(\alpha a) + G_2^{-1} I_2 sh(\alpha a) - G_1^{-1} I_1 ch(\alpha a) + G_2^{-1} I_2 ch(\alpha a) - D
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Отримаємо систему 2×2 та вирішимо її методом Крамера

$$
\begin{cases}
-sh(\alpha a)A_1 + ch(\alpha a)B_1 = -C,\\
G_1 G_2^{-1} sh(\alpha a)A_1 + ch(\alpha a)B_1 =\\
= G_2^{-1} I_1 sh(\alpha a) + G_2^{-1} I_2 sh(\alpha a) - G_1^{-1} I_1 ch(\alpha a) + G_2^{-1} I_2 ch(\alpha a) - D
\end{cases}
\tag{2.40}
$$

Позначимо матрицю коефіцієнтів

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}\right], \tag{2.41}$$

де $a_{11} = -sh(\alpha a)$, $a_{12} = ch(\alpha a)$, $a_{21} = G_1 G_2^{-1} sh(\alpha a)$, $a_{22} = ch(\alpha a)$, $c_1 = -C$ $c_2 = G_2^{-1} sh(\alpha a)(I_1 + I_2) - ch(\alpha a)(G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2) - D$.

Невідомі A_1 та B_1 знаходяться як

$$A_1 = \frac{\det(M_1)}{\det(M)}, B_1 = \frac{\det(M_2)}{\det(M)}. \tag{2.42}$$

Знайдемо необхідні для розрахунку матриці, позначимо їх як

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

та за формулами знайдемо визначники цих матриць:

$$\begin{gathered} \det(M) = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21}) = \\ = -sh(\alpha a)ch(\alpha a) - sh(\alpha a)ch(\alpha a)G_1 G_2^{-1}, \end{gathered} \tag{2.44}$$

$$\det(M_1) = (c_1 \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot c_2) = \tag{2.45}$$

$$= -Cch(\alpha a) - ch(\alpha a)(G_2^{-1} sh(\alpha a)(I_1 + I_2) - ch(\alpha a)(G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2) - D),$$

$$\begin{gathered} \det(M_2) = (a_{11} \cdot c_2) - (c_1 \cdot a_{21}) = \\ = -sh(\alpha a)(G_2^{-1} sh(\alpha a)(I_1 + I_2) - \\ -ch(\alpha a)(G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2) - D) + CG_1 G_2^{-1} sh(\alpha a). \end{gathered} \tag{2.46}$$

Підставимо ці визначники у () та спростимо ці рівності розділивши чисельник та знаменник A_1 на $-ch(\alpha a)$ та на $-sh(\alpha a)$ у B_1

$$A_1 = \frac{C + G_2^{-1} sh(\alpha a)(I_1 + I_2) - ch(\alpha a)(G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2) - D}{sh(\alpha a)(1 + G_1 G_2^{-1})}$$
$$(2.47)$$
$$B_1 = \frac{G_2^{-1} sh(\alpha a)(I_1 + I_2) - ch(\alpha a)(G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2) - D - C G_1 G_2^{-1}}{ch(\alpha a)(1 + G_1 G_2^{-1})}$$

Коефіцієнти A_2 та B_2 отримаємо через $A_2 = A_1 G_1 G_2^{-1} - G_2^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2$ та $B_2 = = B_1 + G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2$, тобто

$$A_2 = \left(\frac{C + G_2^{-1} sh(\alpha a)(I_1 + I_2) - ch(\alpha a)(G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2) - D}{sh(\alpha a)(1 + G_1 G_2^{-1})} \right) G_1 G_2^{-1} -$$
$$- G_2^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2, \qquad (2.48)$$
$$B_2 = \frac{G_2^{-1} sh(\alpha a)(I_1 + I_2) - ch(\alpha a)(G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2) - D - C G_1 G_2^{-1}}{ch(\alpha a)(1 + G_1 G_2^{-1})} +$$
$$+ G_1^{-1} I_1 - G_2^{-1} I_2.$$

Розв’язок задачі, тобто функції переміщень $W_1(x, y)$ та $W_2(x, y)$, знаходяться по формулі оберненого перетворення Фур’є (2.6)

$$w_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(A_1 sh(\alpha x) + B_1 ch(\alpha x) \right. \qquad (2.49)$$
$$\left. + G_1^{-1} \frac{1}{2\alpha} \int_{-a}^{0} e^{-\alpha|x-\xi|} P_1(\xi) d\xi \right) \cos(\alpha y) d\alpha\,, -a < x < 0,$$

$$w_2(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\Big(A_2 sh(\alpha x) + B_2 ch(\alpha x) \qquad (2.50)$$
$$+ G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_0^{a} e^{-\alpha|x-\xi|}P_2(\xi)d\xi\Big)\cos(\alpha y)d\alpha\,, 0 < x < a.$$

2.4 Аналіз результатів

Заключним етапом цієї роботи застосуємо обернене інтегральне перетворення Фур'є. Для розрахунку візьмемо проміжок $x \in [-1, 1]$ та ідентичні за модулем зсуву матеріали: $G_1 = G_2 = 1000$. Навантаження буде однаковим для обох матеріалів та не буде залежати від x, тобто $P_1(x) \equiv P_2(x) \equiv 1$. Спочатку обчислимо I_1, I_2, C, D

$$I_1 = \frac{1}{2\alpha}\int_{-1}^{0} e^{\alpha\xi}P_1(\xi)d\xi = \frac{1-e^{-\alpha}}{2\alpha^2},$$
$$I_2 = \frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{1} e^{-\alpha\xi}P_2(\xi)d\xi = \frac{1-e^{-\alpha}}{2\alpha^2}, \qquad (2.51)$$
$$C = G_1^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{-1}^{0} e^{-\alpha|-1-\xi|}P_1(\xi)d\xi = G_1^{-1}\frac{1-e^{-\alpha}}{2\alpha^2},$$
$$D = G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{1} e^{-\alpha|1-\xi|}P_2(\xi)d\xi = G_2^{-1}\frac{1-e^{-\alpha}}{2\alpha^2}.$$

Підставивши ці значення у коефіцієнти A_1, A_2, B_1, B_2 отримаємо

$$A_1 = \frac{1-e^{-\alpha}}{2000\alpha^2}, A_2 = -\frac{1-e^{-\alpha}}{2000\alpha^2}$$

$$B_1 = \frac{1-e^{-\alpha}}{2000\alpha^2}\cdot\frac{\sinh(\alpha)-1}{\cosh(\alpha)}, B_2 = \frac{1-e^{-\alpha}}{2000\alpha^2}\cdot\frac{\sinh(\alpha)-1}{\cosh(\alpha)}$$

$$-G_1^{-1}\int_{-1}^{0} -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|}(1)d\xi =$$

$$= G_1^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{-1}^{0} e^{-\alpha|x-\xi|}d\xi = G_1^{-1}\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha(x+1)}-2}{2\alpha^2}$$

$$-G_2^{-1}\int_0^1 -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|}(1)d\xi =$$

$$= G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha|x-\xi|}d\xi = G_2^{-1}\frac{e^{-\alpha x}+e^{-\alpha(1-x)}-2}{2\alpha^2}$$

Тоді функції у просторі трансформант

$$W_{1\alpha}(x) = A_1 sh(\alpha x) + B_1 ch(\alpha x) - G_1^{-1}\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha(x+1)}-2}{2\alpha^2},$$

$-1 < x < 0,$

$$W_{2\alpha}(x) = A_2 sh(\alpha x) + B_2 ch(\alpha x) - G_2^{-1}\frac{e^{-\alpha x}+e^{-\alpha(1-x)}-2}{2\alpha^2},$$

$0 < x < 1.$

Застосуємо обернене перетворення Фур'є та отримаємо функції переміщень на проміжку $x \in [-1,1]$ для обох матеріалів коли $G_1 = G_2 = 1000$ та $P_1(x) \equiv P_2(x) \equiv 1$

$$w_1(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(A_1 \mathrm{sh}(\alpha x) + B_1 \mathrm{ch}(\alpha x) - G_1^{-1}\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha(x+1)}-2}{2\alpha^2}\right) cos\alpha y d\alpha,$$
$$-1 < x < 0,$$

$$w_2(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(A_2 \mathrm{sh}(\alpha x) + B_2 \mathrm{ch}(\alpha x) - G_2^{-1}\frac{e^{-\alpha x}+e^{-\alpha(1-x)}-2}{2\alpha^2}\right) cos\alpha y d\alpha,$$
$$0 < x < 1.$$

Також обчислимо для випадку протилежних напружень, тобто $P_1(x) \equiv -P_2(x) \equiv 1$. Для розрахунку візьмемо проміжок $x \in [-1, 1]$ та ідентичні за модулем зсуву матеріали: $G_1 = G_2 = 1000$. Спочатку обчислимо I_1, I_2, C, D

$$I_1 = \frac{1}{2\alpha}\int_{-1}^{0} e^{\alpha\xi} P_1(\xi)d\xi = \frac{1-e^{-\alpha}}{2\alpha^2},$$

$$I_2 = \frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{1} e^{-\alpha\xi} P_2(\xi)d\xi = \frac{1-e^{-\alpha}}{2\alpha^2},$$

$$C = G_1^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{-1}^{0} e^{-\alpha|-1-\xi|} P_1(\xi)d\xi = G_1^{-1}\frac{1-e^{-\alpha}}{2\alpha^2},$$

$$D = G_2^{-1}\frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{1} e^{-\alpha|1-\xi|} P_2(\xi)d\xi = G_2^{-1}\frac{1-e^{-\alpha}}{2\alpha^2}.$$

Підставивши ці значення у коефіцієнти A_1, A_2, B_1, B_2 отримаємо

$$A_1 = \frac{-ch(\alpha) + 1 + e^{-\alpha}ch(\alpha) - e^{-\alpha}}{2000\alpha^2 sh(\alpha)},$$

$$B_1 = \frac{-1 + e^{-\alpha}}{2000\alpha^2},$$

$$A_2 = \frac{-ch(\alpha) + 1 + e^{-\alpha}ch(\alpha) - e^{-\alpha}}{2000\alpha^2 sh(\alpha)},$$

$$B_2 = \frac{1 - e^{-\alpha}}{2000\alpha^2}.$$

$$-G_1^{-1}\int_{-1}^{0} -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|x-\xi|}(1)d\xi = G_1^{-1}\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha(x+1)} - 2}{2\alpha^2},$$

$$-G_2^{-1}\int_{0}^{1} -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|x-\xi|}(-1)d\xi = -G_2^{-1}\frac{e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(1-x)} - 2}{2\alpha^2}.$$

Тоді функції у просторі трансформант:

$$W_{1\alpha}(x) = A_1 sh(\alpha x) + B_1 ch(\alpha x) - G_1^{-1}\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha(x+1)} - 2}{2\alpha^2},$$

$$-1 < x < 0,$$

$$W_{2\alpha}(x) = A_2 sh(\alpha x) + B_2 ch(\alpha x) + G_2^{-1} \frac{e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(1-x)} - 2}{2\alpha^2},$$
$$0 < x < 1.$$

Застосуємо обернене перетворення Фур'є та отримаємо функції переміщень на проміжку $x \in [-1,1]$ для обох матеріалів у випадку $G_1 = G_2 = 1000$ та $P_1(x) \equiv -P_2(x) \equiv 1$

$$w_1(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(A_1 \text{sh}(\alpha x) + B_1 \text{ch}(\alpha x) - G_1^{-1} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha(x+1)} - 2}{2\alpha^2}\right) cos\alpha y d\alpha, -1 < x < 0$$
$$w_2(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(A_2 \text{sh}(\alpha x) + B_2 \text{ch}(\alpha x) + G_2^{-1} \frac{e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(1-x)} - 2}{2\alpha^2}\right) cos\alpha y d\alpha, 0 < x < 1$$

Для обчислення конкретних значень переміщень у точках скористаємося чисельними методами для обох випадків $P_1(x) \equiv P_2(x) \equiv 1$ та $P_1(x) \equiv -P_2(x) \equiv 1$. Результати покладемо у таблицю та проілюструємо за допомогою теплової карти.

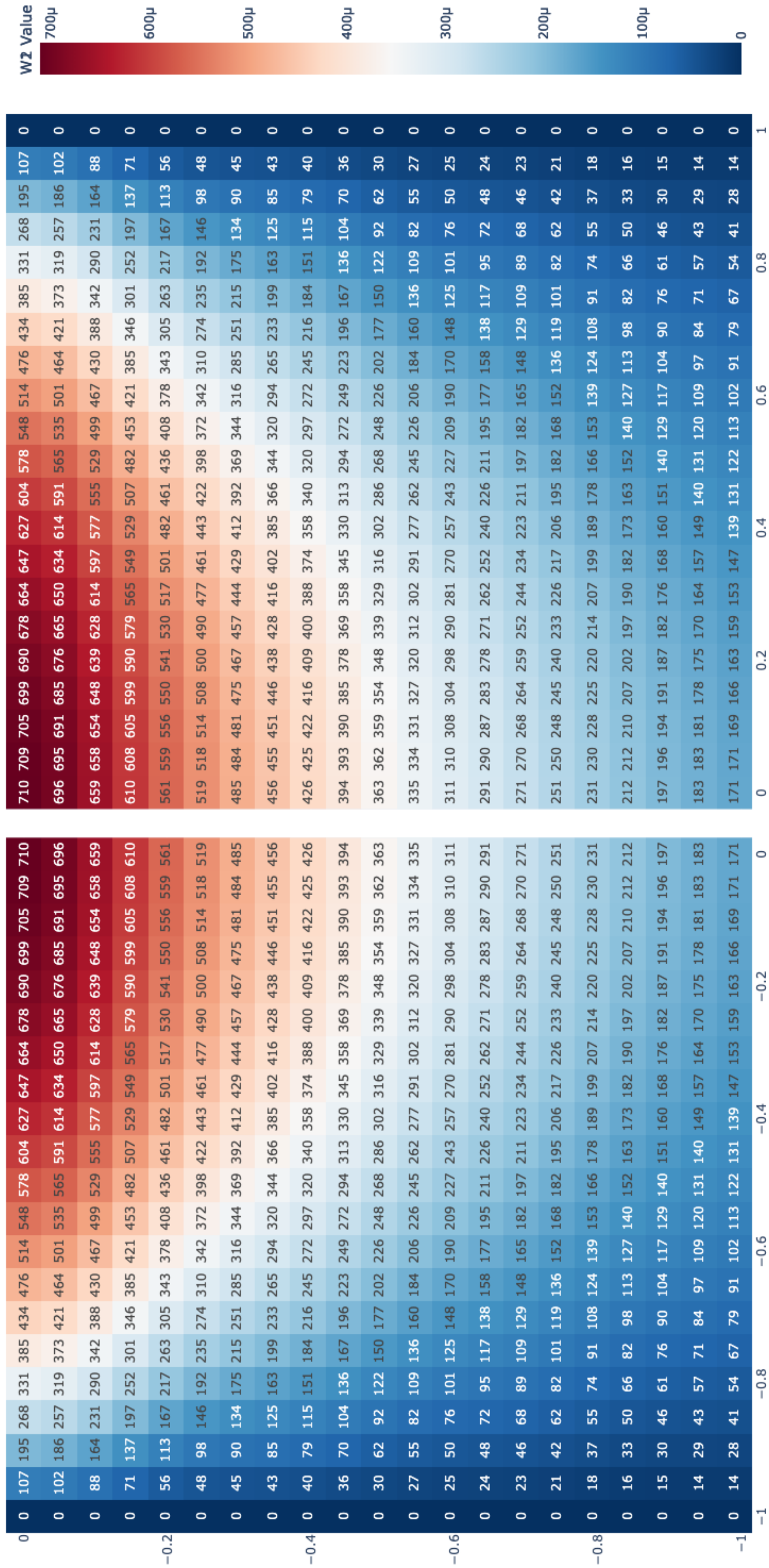

W2 Value
700μ
600μ
500μ
400μ
300μ
200μ
100μ
0
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Рис. 2.4.1

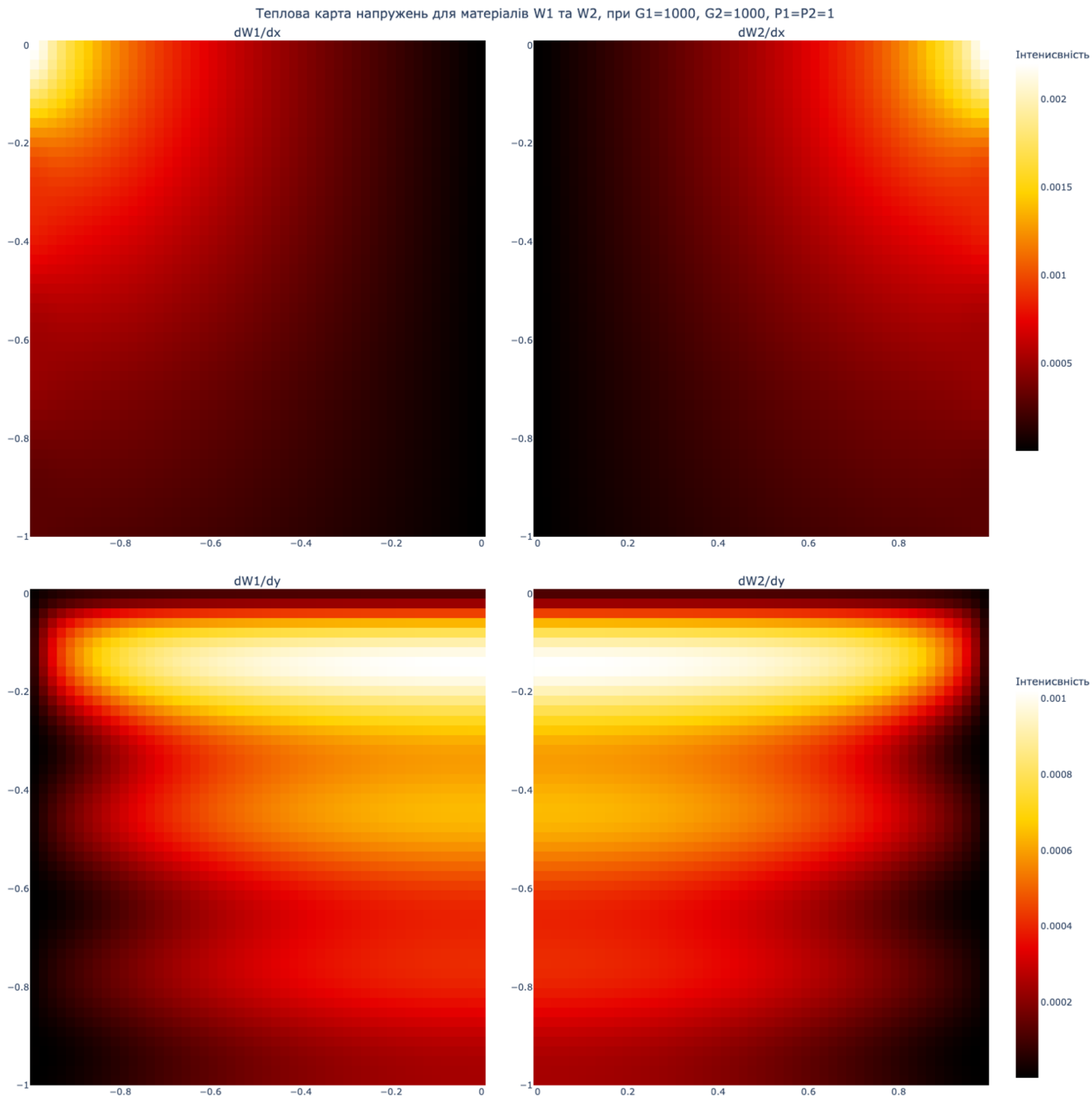


Рис. 2.4.2

Рис 2.4.1 демонструє інтенсивність переміщень у випадку двох однакових тіл з однаковим модулем зсуву та однаковим одностороннім навантаженням. Найбільші значення перепадають на центр, тобто на найбільш віддалені точки від крайових умов, де матеріал нерухомо закріплено.

Рис 2.4.2 показує інтенсивність напружень $\frac{dW}{dx}$ та $\frac{dW}{dy}$ у першому та другому рядку відповідно. Найбільші напруження по $\frac{dW}{dx}$ біля місць де ці матеріали нерухомо закріплені, а напруження $\frac{dW}{dy}$ спадає при $y \to \infty$.

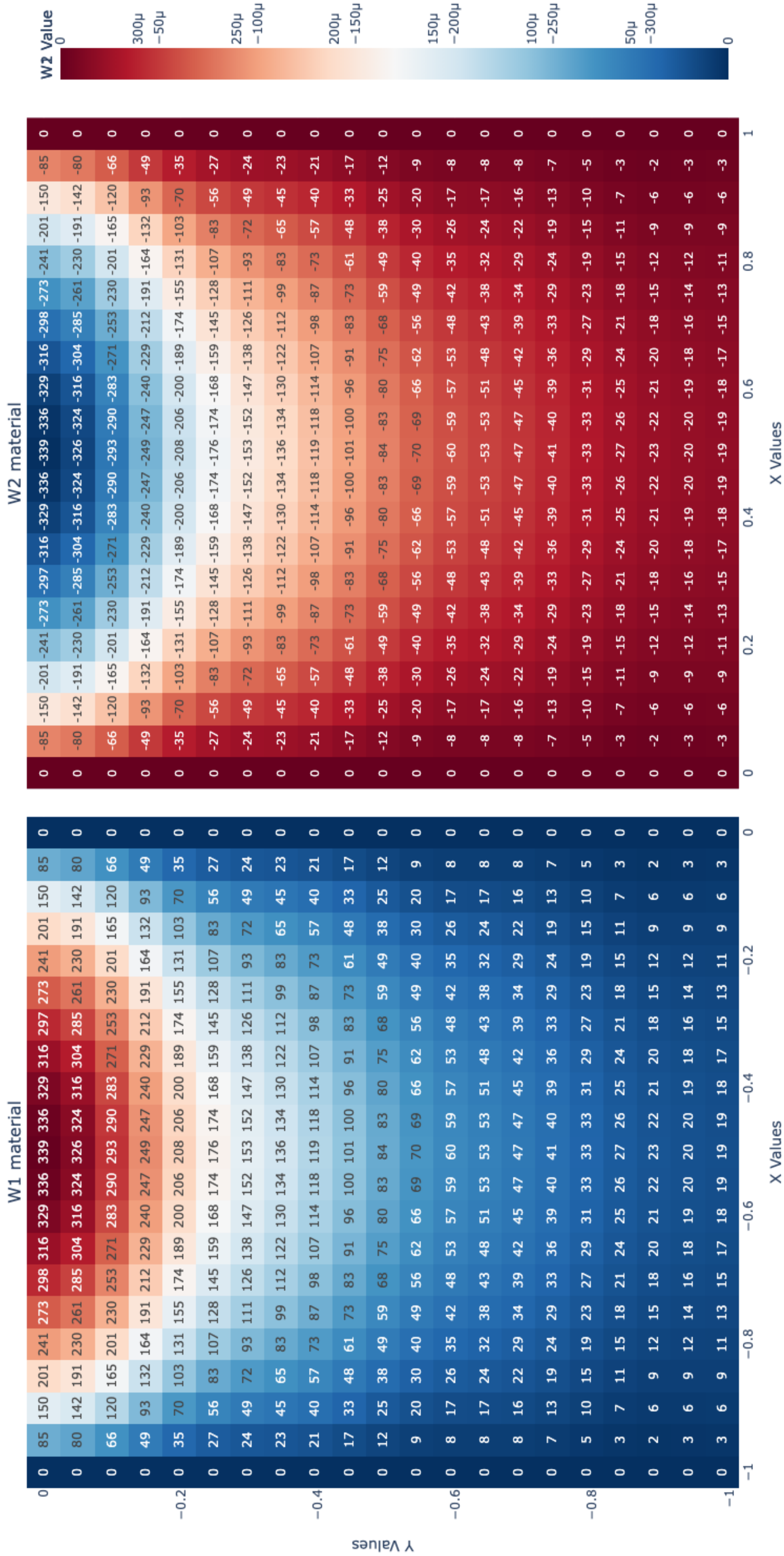


Рис. 2.4.3

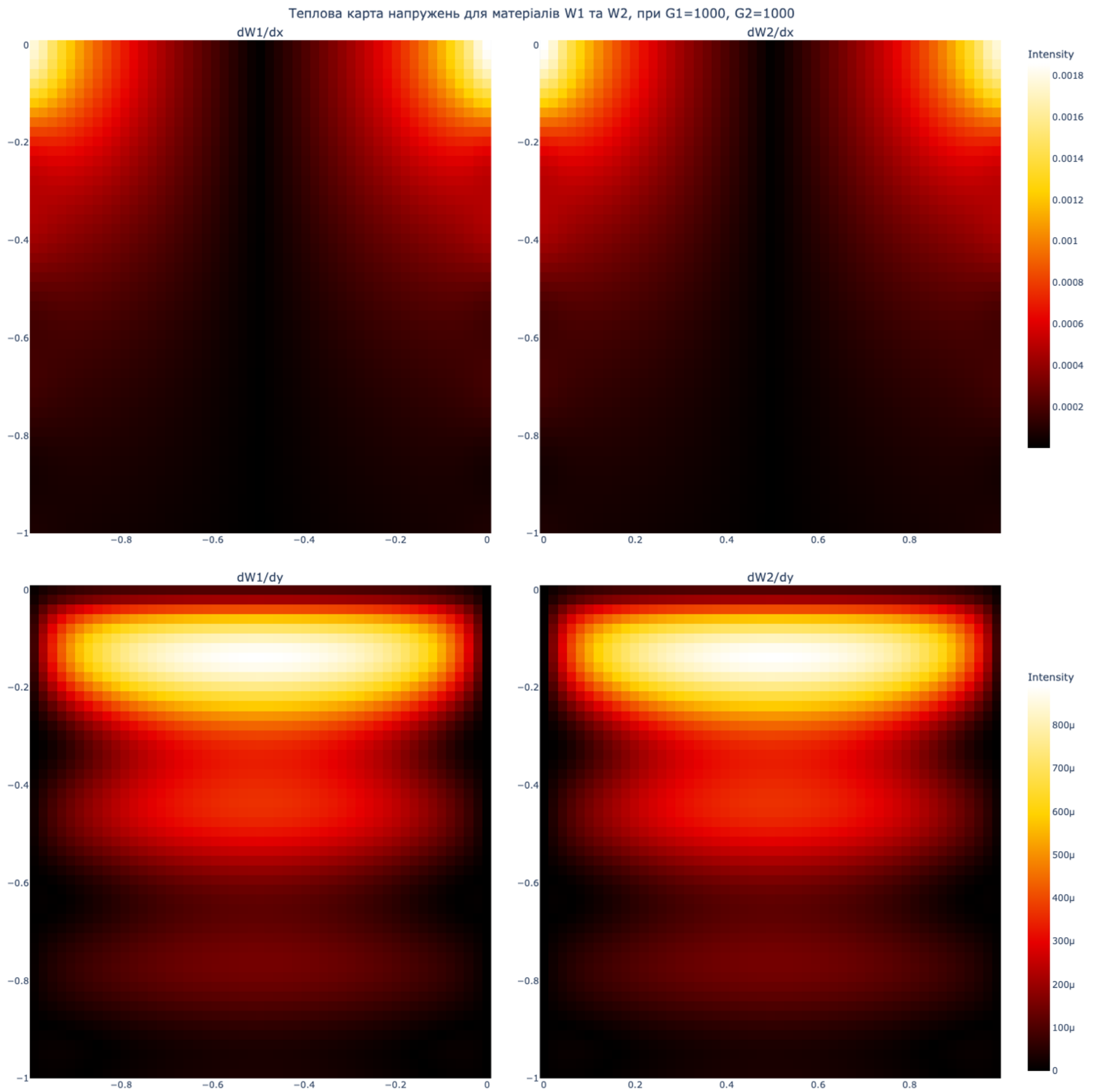
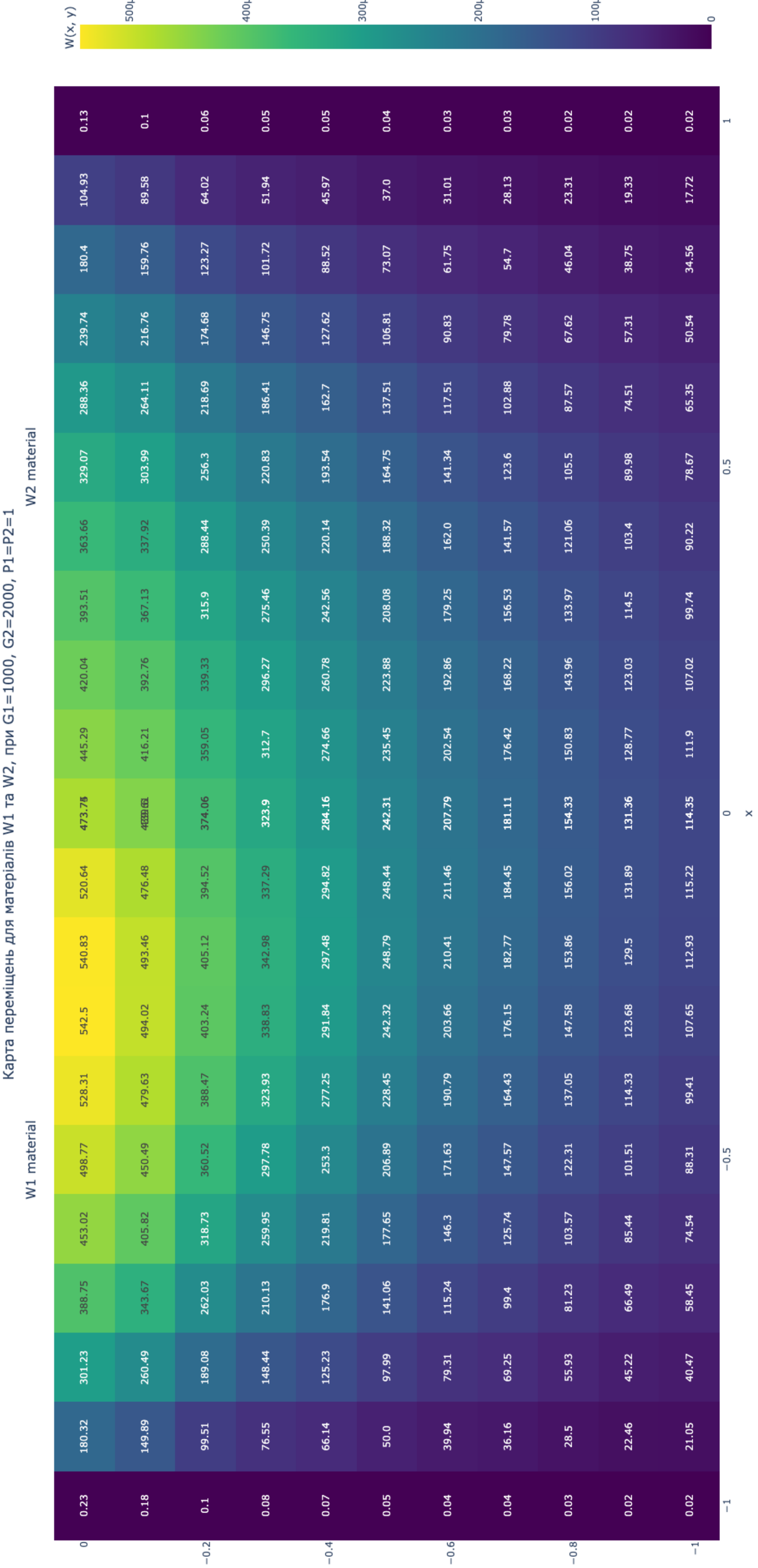


Рис. 2.4.4

Рис 2.4.3 демонструє інтенсивність переміщень у випадку двох однакових тіл з однаковим модулем зсуву але протилежним навантаженням. Переміщення вже будуть з різними знаками, однак оскільки матеріали однакові то за модулем ці переміщення все одно будуть рівними.

На Рис 2.4.4 видно, що оскільки напруження є протилежними ($P_1(x) \equiv -P_2(x) \equiv 1$), то окрім напружень $\frac{dW}{dx}$, що виникають у точках закріплення матеріалу, також додаються напруження у місці з'єднання, де $x \approx \pm 0$.



Карта переміщень для матеріалів W1 та W2, при G1=1000, G2=2000, P1=P2=1
W1 material
W2 material
W(x, y)
x
y

Рис. 2.4.5

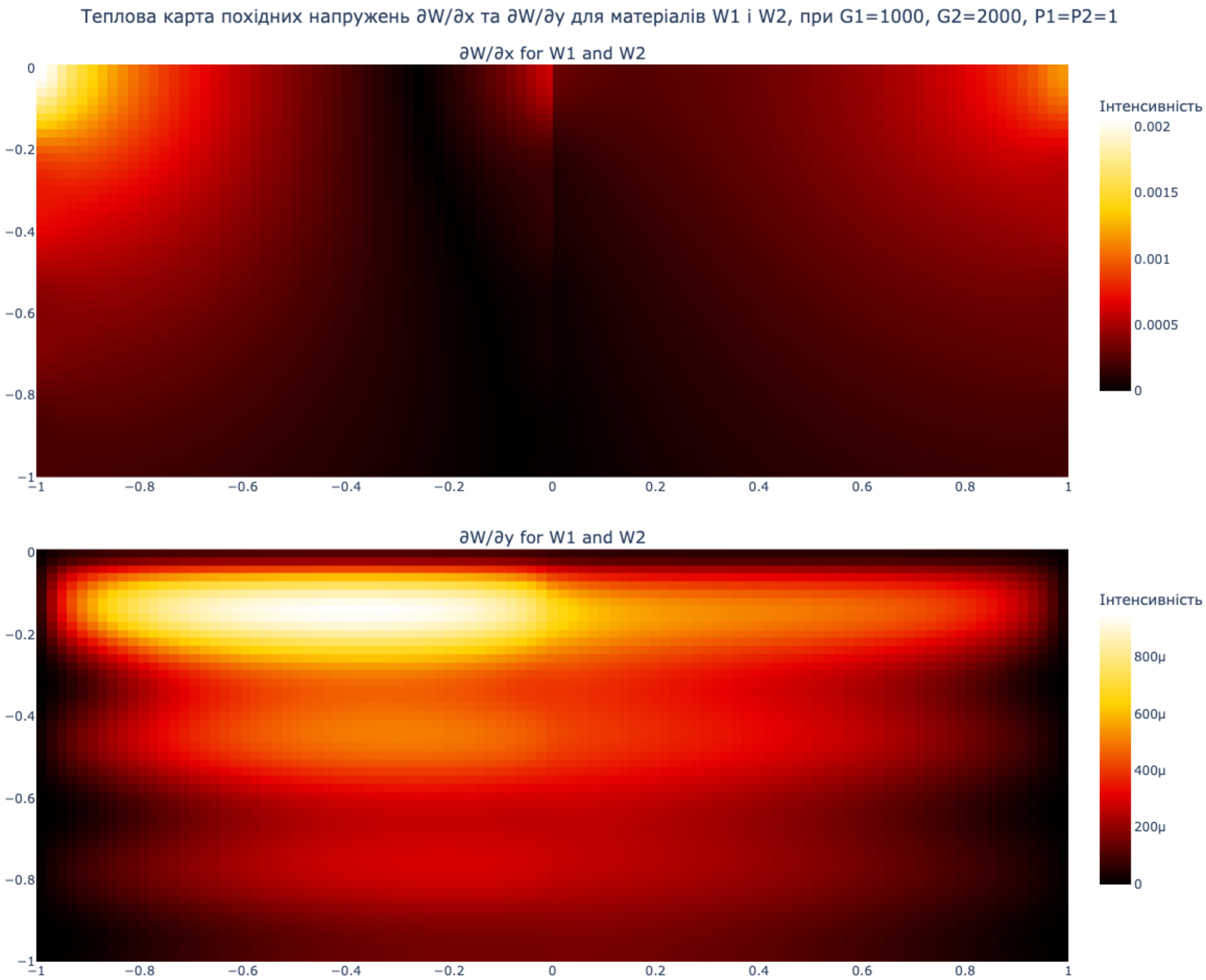


Рис. 2.4.6

Та розглянемо ще один випадок, коли зліва матеріал м'який, нехай $G_1 = 1000$, а справа жорсткіше, $G_1 = 2000$. Тоді карта переміщень (Рис.2.4.5) для першого матеріалу буде виглядати так що закріплено з обох боків та найбільші значення будуть у центрі. Переміщення матеріалу справа будуть значно меншими та найбільші значення будуть біля місця з'єднання. Щодо напруження (Рис 2.4.6), то для обох матеріалів додається напруження у точках їх з'єднання, де $x \approx \pm 0$. Для другого матеріалу напруження у цих точках буде менше, ніж для першого.

ВИСНОВКИ

У даній кваліфікаційній роботі було розглянуто задачу повздовжнього зсуву для складеної смуги, яка складається з двох матеріалів з різними модулями зсуву. Побудовано аналітичну модель задачі, що ґрунтується на рівнянні Лапласа та враховує граничні умови, умови ідеального механічного контакту між частинами тіла, а також поведінку напружень і переміщень на межах області. Для зведення задачі до системи звичайних диференціальних рівнянь було застосовано напівнескінченне косинусне перетворення Фур'є. Це дало змогу значно спростити її розв'язання та знайти точний аналітичний опис процесу деформації складеної структури. Розв'язок було побудовано у просторі трансформант із подальшим оберненим перетворенням для повернення до фізичного простору. Після отримання загального формального розв'язку виконано дослідження кількох характерних випадків: із симетричними та асиметричними навантаженнями, однаковими та різними фізичними параметрами матеріалів. Проведено чисельні розрахунки та побудовано графічні візуалізації у вигляді теплових карт, що відображають розподіл переміщень і напружень у різних конфігураціях. Аналіз показав, що найбільші переміщення та напруження виникають у центральних ділянках і поблизу межі контакту між матеріалами, причому їх характер суттєво залежить від жорсткості компонентів та характеру прикладених навантажень. Отримані результати підтверджують доцільність використання обраного математичного підходу для моделювання композитних систем, а також демонструють потенціал цього методу для подальшого застосування у задачах з урахуванням складніших фізичних ефектів, таких як нелінійність, температурні впливи або динаміка. Робота має як теоретичну, так і практичну значущість у галузі прикладної математики та механіки багатошарових структур.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика» / Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут. – Одеса : Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 194 с.
2. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень». Одеса: Астропринт, 2005, 184 с.
3. Nowacki W. Teoria sprezystosci. Warszawa. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. 1970, 872 p.
4. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables / M. Abramowitz, I. Stegun — U.S. Department of Commerce, Natianal Bureau of Standards, 1964. — 1082 p.