Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

# Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

**«Існування та поводження деяких розв'язків напів'явних систем диференціальних рівнянь типу Бріо та Буке»**

**« On the existence and asymptotic behavior of the differential equations some solutions systems not solved with respect to the derivatives of the Briot and Bouquet type »**

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»

Д’яченко Анастасія Олегівна

Керівник : канд. фіз.-мат. наук, доц. Самкова Г. Є.

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Шарай Н. В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ___ від _____________2025 р.

Завідувач кафедри

________

______ ______________________
(підпис)(прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №_

протокол № ____ від ________ 2025 р.

Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

__________ ______________________.
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2025

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Питання існування та єдиності розв'язків початкових задач для звичайних диференціальних рівнянь та систем традиційно розглядають у межах двох основних класів:

1. Задачі, для яких виконується хоча б одна з умов класичних теорем про існування та єдиність розв'язку, таких як теорема Пікара-Коші або теорема Коші, тощо.

2. Випадки, коли умови існування та єдиності розв'язку, зазначені у відповідних теоремах, не дотримуються.

Перші дослідження задач першого типу були здійснені математиком Огюстеном Луї Коші (Франція)в першій половині 19-го століття.

Задачі другого типу почали досліджувати в другій половині 19-го століття, зокрема французькі математики Шарль Бріо (учень Жозефа Ліувіля) та Жан Клод Буке (учень Огюстена Коші). В їх дослідженнях було започатковано вивчення рівнянь виду:

$$t\dot{y} = Py + f(t, y) \tag{0.1}$$

де функція $f(t, y)$ є голоморфною в околі точки (0,0) (1858 рік).

Науковці встановили, що окремі класи розв'язків диференціальних рівнянь можна асимптотично апроксимувати в околі особливих точок, де традиційні функціональні ряди стають розбіжними. Математики Шарль Бріо та Жан Клод Буке продемонстрували, що в околиці особливої точки широкий клас диференціальних рівнянь можна звести до сингулярної форми:

$$t^p y' = \phi(t, y) \tag{0.2}$$

де $p$-натуральне число,

а функція $\phi(t, y)$ є голоморфною в точці $(0,0)$ і $\phi(0,0) = 0$ . [16]

У своїх дослідженнях Бріо та Буке встановили достатні умови існування голоморфних розв'язків рівняння (0.2) в особливій точці $t$=0. Крім того, вони детально проаналізували властивості неголоморфних розв'язків, які, тим не менш, задовольняють граничну умову:

$$y(t) \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

У випадку, коли

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\,(0{,}0) = \lambda,$$

були досліджені наступні варіанти:

a) $\lambda \notin \mathbb{Z}_+$ и $Re\,\lambda > 0$,

b) $\lambda \in \mathbb{Z}_+$.

У варіанті (a) вчені довели, що при певних умовах рівняння (0.2) допускає розв'язки, які є голоморфними функціями не лише відносно змінної $t$, але й відносно $t^{\lambda}$., де $\lambda$ — деякий характерний показник. Це означає, що такі розв'язки можна представити у вигляді збіжних степеневих рядів за комбінованими змінними $t$ та $t^{\lambda}$., що значно розширює клас аналітичних функцій, придатних для опису поведінки системи в околі особливої точки.

У випадку (b): для інших типів рівнянь (0.2) Бріо та Буке встановили існування розв'язків із складнішою асимптотичною структурою. Зокрема, вони показали, що в деяких випадках розв'язки можуть бути голоморфними за змінними $t$ та $t\ln t$.. Такі розв'язки вже не можна звести до звичайних степеневих рядів, оскільки вони містять логарифмічні члени, що свідчить про наявність особливостей більш високого рівня складності.

Ці результати мають важливе значення для теорії сингулярних диференціальних рівнянь, оскільки дозволяють класифікувати розв’язки в залежності від їх поведінки в околі особливих точок. Зокрема, було показано, що навіть у випадках, коли стандартні методи аналізу (наприклад, розкладання в ряд Тейлора) не працюють, існують спеціальні асимптотичні підходи, що дозволяють отримувати коректні наближення.

Анрі Пуанкаре розглядав динамічні системи, описані рівняннями типу, де нелінійна складова мала спеціальну структуру:

$$\phi = Ay + \phi_1(t, y), \tag{0.3}$$

Тут A — стала матриця розмірності n×n, $\phi_1(t, y)$ – голоморфна вектор-функція, яка перетворюється на нуль у початковій точці (0,0). [24]

У роботах А. Пуанкаре основним об'єктом аналізу були розв'язки характеристичного рівняння рівняння, де визначник матриці (A - λE) дорівнює нулю.

Анрі Пуанкаре досліджував критичні характеристики спектра матриці $A$, виділивши такі ключові умови:

a) усі власні значення є різними, причому їхні дійсні частини відрізняються від нуля;
b) для певних цілих $m_i \geq 0$ виконується нерівність $m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n \neq \lambda_1$;

c) у комплексній площині існує гладка крива, яка проходить через початок

Ці результати стали фундаментом для подальших досліджень у теорії біфуркацій, стійкості руху та голоморфної динаміки. Зокрема, вони знайшли застосування в задачах небесної механіки, теорії коливань і сучасній теорії хаосу.

У 1901 році Дж. Бендіксон зняв першу умову.

Суть змін:
Пуанкаре вимагав, щоб усі власні значення матриці системи були різними (умова "a"). Це було потрібно для застосування його методів аналізу. Однак Бендіксон показав, що основні результати залишаються справедливими навіть тоді, коли власні значення збігаються (тобто є кратними).

Як він це зробив?

1. Використав жорданову форму матриці, що дозволило працювати з кратними власними значеннями.

2. Уточнив умови нерезонансності – перевіряв, щоб комбінації власних значень не призводили до особливих "конфліктів" у системі.

Таким чином, Бендіксон поширив застосування теорії Пуанкаре на більш широкий клас систем, де власні значення можуть повторюватися. Це було важливим кроком у розвитку теорії динамічних систем.

У роботах О. М. Ляпунова (1892) при виконанні умови (в) важливу роль відіграє уявна вісь, причому власні значення $\lambda i,\ i = 1, \ldots, n$, розташовані ліворуч від цієї осі. Ляпунов також отримав результати для критичних випадків.

Одним із напрямків досліджень у цій галузі є роботи Н. М. Рапопорта (1974), присвячені вивченню $L$-діагональних систем.

Дослідження задач другого класу також включає вивчення звичайних диференціальних рівнянь та систем, які не розв'язані відносно похідних.

В області дійсних змінних досліджувалися рівняння виду:

$$f\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

в якому функція $f$ є поліноміальним виразом, що залежить від змінної у та її похідних $y'$, $y''$, ..., $y(n)$. Коефіцієнти цього полінома є функціями незалежної змінної t.

Такі рівняння розглядали Fine H.B., Даутов М.А., Муратов Л.М. , Муратов Н.М. і Костін О.В. . За певних припущень було побудовано асимптотичні наближення розв'язків, які, як правило, є степеневими.

Для одновимірного випадку (n=1), за умови неперервності функції f в околі точки $(x_0, y_0, y_0')$, двосторонньо збіжні апроксимації розв'язків були встановлені в роботах Конті Р. , Бабкіна Б.М. та Вітюка О.М.

У рамках скінченновимірного банахового простору розв'язується задача Ко-

ші для напівявного диференціального рівняння:

$$\dot{y} = F(t, y, \dot{y})$$

була проаналізована в роботах Kowalski Z. , Рудакова А.М. і Вітюка О.М.

Сучасні дослідження в галузі теорії диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідних, включають вивчення сингулярних рівнянь та систем як у дійсній, так і в комплексній областях. Аналіз таких систем у дійсній області представлений у працях таких вчених: О. Аширов, Б.М. Бабкін, О.М. Вітюк, Р.Г. Грабовська, Й. Діблік, Г.Є. Самкова, M. Lando, M. Hanke, St. Campbell, R. März, Ю. Каплун, Ю. Каплун, П. Кравцов та інші.

Особливий інтерес становлять системи звичайних диференціальних рівнянь типу Бріо і Буке, що не розв'язані відносно похідних. Такі системи мають вигляд

$$t^s y' = Py + p_1 t + F(t, y, y'), \qquad (0.4)$$

де $t \in (0, t_0]$, $s \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $p_1 \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F: (0, t_0] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – Вектор-функція, яка в околі початку координат (0,0,0) розкладається у збіжний степеневий ряд, причому цей ряд не містить: вільних членів (нульового степеня) та лінійних членів (першого степеня).

Ці системи цікаві через:

1. Сингулярність – множник $t^s$ перед у' створює виродження при ( $t \to 0$ ) , що ускладнює аналіз.

2. Складна нелінійність – $F(t, y, y')$ містить лише члени вищих порядків, що призводить до нетривіальної динаміки (резонанси, біфуркації).

3. Теорія особливих точок – дозволяють досліджувати асимптотику розв'язків біля $t = 0$ , важливу для сингулярних задач.

4. Застосування – виникають у механіці, астрофізиці, біології там, де є різкі зміни (вибухи, катастрофи).

Вони поєднують виродженість, нелінійність і багату асимптотику, що робить їх ключовими для теорії динамічних систем.

Розгляд систем (0.4) було започатковано Самковою Г.Є. у 1992 році (для s=1) і продовжено в низці кваліфікаційних робіт.

Досліджувалося, за яких умов система (0.4) має розв'язки із заданій умові:

$$y_i(t) \to 0, y_i'(t) \to 0, i = \overline{1,n} \text{ при } t \to 0 \text{ або } t \to +0. \qquad (0.5)$$

Задачі (0.4)–(0.5) для s=1 були досліджені в роботах Дімітрієва О., Зозулі Н., Соколової О., Костенко О., Навроцького С., Федик С.,У припущенні,

що $t^s = diag(t^{s_1}, \dots, t^{s_n}), 1 < s_1 < \dots < s_n$

система (0.4) вивчалася в роботах Зик Т., Браславської Т., Брезицького О., Левченко І., Мукан А.

Поряд з аналізом питань існування та кількості розв'язків задач (0.4)-(0.5), які асимптотично збігаються до відрізків степеневих рядів (Федик С.), ключовим напрямом досліджень було вивчення асимптотичної поведінки розв'язків, поданих у формі відрізків нестепеневих рядів. Основні напрямки досліджень:

1. Розклади за степенями $(t, t^{s_1}, \dots, t^{s_n})$ Побудова таких розкладів здійснювалася в працях Зик Т., Левченко І. та Брезицького О.

2. Розклади за степенями $t$ і $\frac{1}{\ln t}$ . Розвивалися в роботах Браславської Т., Мукан А.

3. Розклади за степенями $t$ та $\frac{1}{a\ln(t)+b}$, де $a$, не дорівнює $0, a, b > 0$. Побудова таких розкладів була проведена Дімітрієвим О., Григор'євою В.

4. Розклади за степенями $t$ і $\ln t$. Цей напрямок було започатковано в роботах Костенко О. (для випадку двовимірної систем рівнянь), Зозулі Н. (для випадку n-вимірної системи рівнянь), Навроцького С. і продовжено в роботах Бабілової О., Соколової О., Моісеєнко Б.

До робіт Шляпошникової Ю. дослідження обмежувалися випадками дійсних власних значень. Її праця стала першою, де було вивчено системи з комплексними власними значеннями матриці лінійної частини.

Отже, значний обсяг наукових досліджень, присвячених задачам другого класу - зокрема, системам звичайних диференціальних рівнянь, не дозволеним відносно похідних, - створив потужний теоретичний фундамент для аналізу їхніх якісних характеристик, розробки асимптотичних методів та дослідження особливостей поведінки розв'язків.

Особливу актуальність набуває подальше вивчення специфічних систем, що належать до класу рівнянь Бріо та Буке. У представленому дослідженні увага зосереджена на аналізі системи звичайних диференціальних рівнянь типу Бріо та Буке, яка не є розв'язаною відносно похідних та має наступну структуру:

$$\begin{cases} t\dot{y}_1 = p_{11}y_1 + \cdots + p_{1n}y_n + F_1(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n), \\ \dots \\ t\dot{y}_n = p_{n1}y_1 + \cdots + p_{nn}y_n + F_n(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n), \end{cases} \tag{0.6}$$

де $t \in \mathbb{R}$ – незалежна змінна, $y_s = y_s(t)$, $s = \overline{1,n}$ – невідомі функції, $p_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,n}$, $F_q = F_q(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)$, $q = \overline{1,n}$ – голоморфні в точці $(0,0,\dots,0)$ функції, для яких розклад в збіжні степеневі ряди не містить вільних та лінійних членів в околі цієї точки.

Знайдено формальні розв'язки системи у вигляді рядів

$$\begin{cases} y_i = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k = \sum_{m=2}^{\infty} b_{m0}^i t^m + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k, \\ i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{0.7}$$

де $b_{mk}^i$, $m = \overline{2,\infty}$, $k = \overline{0,\infty}$, $i = \overline{1,n}$ – невідомі дійсні коефіцієнти.

Коефіцієнти визначаються з рекурентних систем рівнянь (наведені у роботі). Доведено існування параметричних сімейств розв'язків, залежних від власних значень матриць *P*+*νA*−*νE* та *A*−*E* .

Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків при $t \to +0$. Для системи

$$t\dot{u} = \Lambda u + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^{\varepsilon})^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2}.$$

отриманої після зведення до вигляду, розв'язаного відносно похідної. Також доведено існування розв'язків з певною асимптотикою залежно від знаків власних значень матриці $\Lambda$. Застосовано методи кривих та поверхонь без контакту разом з топологічним принципом Важевського для аналізу поведінки розв'язків у випадках, коли власні значення мають різні знаки або частина їх дорівнює нулю.

# РОЗДІЛ 1

## § 1.1 Деякі означення та важливі теореми.

У цьому розділі подано основні означення та теоретичні положення, необхідні для подальшого дослідження.

**Означення 1.1.** Функція $f = f(x_1, \dots, x_n)$ називається голоморфною в точці $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, якщо в околі цієї точки її можна представити у вигляді збіжного степеневого ряду

$$f(x_1, \dots x_n) = \sum_{m_1+\dots+m_n \geq 0}^{\infty} a_{m_1\dots m_n}(x_1 - x_1^0)^{m_1} \dots (x_n - x_n^0)^{m_n},$$

де $a_{m_1\dots m_n}$ — сталі .

**Теорема 1.1 (про неявну голоморфну функцію)**. Нехай функції $\Phi_k\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \Phi_\mathrm{k} = \Phi_\mathrm{k}(x_1, \dots, x_n, t),\ k = \overline{1,n}$ , задовольняють таким умовам:

1. $\Phi_k,\ k = \overline{1,n}$ , голоморфні в точці $(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0)$;
2. $\Phi_k(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0) = 0,\ k = \overline{1,n}$;
3. $\frac{D(\Phi_1,\dots,\Phi_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0) \neq 0.$

Тоді система

$$\begin{cases} \Phi_k(x_1, \dots, x_n, t) = 0; \\ \qquad k = \overline{1,n}. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок відносно змінних $x_1, \dots, x_n$, причому функції $x_k = x_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, голоморфні в точці $t_0$ і $x_k(t_0) = x_k^0,\ k = \overline{1,n}$.

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n), k = \overline{1,n}, \\ \qquad y_k(x_0) = y_k^0, k = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1.1}$$

де $f_k\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$, а $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ – деякі дійсні константи.

**Теорема 1.2 (Коші).** Нехай дано систему (1.1), де функції $f_k$, $k = \overline{1,n}$, розкладаються в степеневі ряди, що збігаються в області

$|x - x_0| < \rho,\ |y_k - y_k^0| < r,\ k = \overline{1,n},$

$\rho = const,\ r = const,\ \rho > 0,\ r > 0.$

Тоді існує єдиний голоморфний розв'язок задачі Коші (1.1) з початковими умовами

$$y_k(x_0) = y_k^0,\ \ k = \overline{1,n}.$$

Цей розв'язок можна представити у вигляді степеневих рядів

$$y_k = y_k^0 + \sum_{s=1}^{\infty} C_s^{(k)}(x - x_0)^s,\ \ k = \overline{1,n},$$

що збігаються в області

$$|x - x_0| \le \rho_1 < \rho,$$

де

$$\rho_1 = \rho'\left(1 - e^{\frac{-r'}{(1+n)\rho' M}}\right),\ 0 < r' < r,\ 0 < \rho' < \rho,$$

$C_s^{(k)},\ k = \overline{1,n},$ – дійсні константи, а $M$ визначається з умови

$|f_k(x, y_1, \dots, y_n)| \le M$ при $|x - x_0| \le \rho',\ |y_k - y_k^0| \le r',\ k = \overline{1,n}.$

Нехай $f = f(x, y_1, \dots, y_n), f \in C(D)$, $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ $D$ – область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Зафіксуємо точку $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in D$і задамо множину

$$V = \left\{(x, y_1, \dots, y_n) \in D\colon |x - x_0| \le a, |y_k - y_k^0| \le b, k = \overline{1,n}, a > 0, b > 0\right\}.$$

Із неперервності $f$ на компактній множині $V$ випливає, що існує така константа $M \geq 0$, для якої виконується умова.

$$\max_V \|f(x, y_1, \dots, y_n)\| = M$$

**Означення 1.2.** Функція

$$f = f(x,y), f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R},\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

задовольняє умову Ліпшіца по змінній $y$ на множині $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , якщо знайдеться така стала $L > 0$, що для всіх $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ виконується нерівність:

“$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$”

Позначається $f \in Lip_y(D; L)$.

**Теорема 1.3 (Пікара–Коші про існування та єдиність розв’язку задачі Коші).** Нехай для функцій $f_k,\ k = 1, \dots, n$ в задачі Коші (1.1) виконуються такі умови:

1. $f_k \in C(V),\ k = \overline{1,n}$;
2. $f_k \in Lip_y(V; L),\ k = \overline{1,n}$.

Тоді задача Коші (1.1) має єдиний розв’язок на відрізку $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, де

$$h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right).$$

(тут розглядаються випадки, коли $M > 0$)

**Теорема 1.4 (Критерій сумісності Кронекера - Капеллі).** Система лінійних рівнянь $AX = B$ має розв’язок тоді й тільки тоді, коли ранг основної матриці A збігається з рангом розшиерної (A | B) (rang A = rang(A | B)).

**Означення 1.3** Власні значення $\lambda$ матриці $A$ — це корені характеристичного рівняння:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

де $I$ — одинична матриця порядку $n$, а det— визначник матриці.

*Примітка*:

Відповідні ненульові вектори v називаються власними векторами матриці $A$, що відповідають власному значенню $\lambda$.

**Означення 1.4** Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь виду:

$$y' = f(x, y).$$

Нехай $D$ – деяка область, $\partial$D - її границя. Точка $M_0(x_0, y_0) \in \partial D$ називається точкою виходу з області (входу в область) при зменшенні $x$, якщо існує $\varepsilon > 0$ , таке що інтегральна крива, яка проходить через точку$M_0$ , задовольняє умову:

$$P\big(x, y(x)\big) \in D \text{ при } x_0 < x < x_0 + \varepsilon \; (x_0 - \varepsilon \subset x < x_0)$$

Точка виходу(входу) називається точкою строгого виходу(строгого входу), якщо:

$$P\big(x, y(x)\big) \epsilon \overline{D} = D \cup \partial D \text{ при } x_0 - \varepsilon_2 \le x \le x_0 \; (x_0 \le x \le x_0 + \varepsilon_2)$$

Для деякого малого $\varepsilon_2 > 0$. Тоді о кривій будемо говорити, що вона входить чи відповідно виходить з області $D$ при зменшенні $x$ через точку $M_0$. Множину точок виходу з області $D \subset R^{n+1}$ при спаданні $x$ зазначим через$D^e$, строгого виходу як $D^{se}$. [23]

**Означення 1.5** Множина $B$ є ретрактом для множини $A$, якщо існує неперервне відображення (яке називається ретракцією) $A$ в $B$, таке, що точки $B$ нерухомі.

Задамо $G \subset D \cup D^{se}$ и $S \subset G \cap D^{se}$ .

**Означення 1.6 (Топологічний принцип Важевського).** Якщо для системи

$y' = f(x, y); y, f \epsilon R^n, x \epsilon R$

$D^e = D^{se}$ та існує така множина $S$, яка є ретрактом для $D^{se}$, але не для $G$, то на $G \backslash S$ знайдеться така точка, через яку проходить інтегральна крива початкової системи, яка залищається в $D$ при спаданні на максимальном інтервалі свого існування. [23]

### § 1.2 Постановка задачі

Розглянемо систему $n$ диференціальних рівнянь типу Бріо та Буке, які не розв'язані відносно похідних, вигляду

$$\begin{cases} t\dfrac{dy_1}{dt} = p_{11}y_1 + \cdots + p_{1n}y_n + p_{1,n+1}t \; + F_1(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, t); \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots \\ t\dfrac{dy_n}{dt} = p_{n1}y_1 + \cdots + p_{nn}y_n + p_{n,n+1}t + F_n(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, t), \end{cases} \tag{1.2}$$

де $p_{ij} \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n+1}\ \ F_s = F_s(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, t),\ s = \overline{1,n},$ — голоморфні в точці $t = y_1 = \cdots = y_n = \dot{y}_1 = \cdots = \dot{y}_n = 0$ функції, розклад яких в околі цієї точки в збіжні степеневі ряди не містить вільних та лінійних членів.

Визначимо умови для яких систему (1.2) можна привести до системи, що не містить лінійних членів по змінній $t$. Далі запишемо нові невизначені функції $Y_s = Y_s(t),\ s = \overline{1,n},$ які пов'язані зі старими рівністю

$Y_s = y_s - p_s t,\ s = \overline{1,n},$

де $p_s,\ s = \overline{1,n}$ – деякі дійсні константи. Підставивши $Y_1, \dots, Y_n$ в (1.2), отримаємо

$$t\frac{dY_s}{dt} = p_{s1}Y_1 + \cdots + p_{sn}Y_n + p_{s,n+1}t + F_s\big(Y_1, \dots, Y_n, \dot{Y}_1, \dots, \dot{Y}_n, t\big), s = \overline{1,n},$$

$$t\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \cdots + p_{sn}y_n + \big(p_s + p_{s,n+1} - p_{s1}p_1 - \cdots - p_{sn}p_n\big)t$$
$$+ F_s(y_1 - p_1 t, \dots, y_n - p_n t, \dot{y}_1 - p_1, \dots, \dot{y}_n - p_n, t), s = \overline{1,n},.$$

Прирівняємо до нуля коефіцієнти при $t$ і розглянемо отриману систему

$$p_s + p_{s,n+1} - p_{s1}p_1 - \cdots - p_{sn}p_n = 0, s = \overline{1,n}$$

або

$$\begin{cases}(p_{11}-1)p_1+p_{12}p_2+\cdots+p_{1n}p_n=p_{1,n+1}\\ p_{21}p_1+(p_{22}-1)p_2\ +\cdots+p_{2n}p_n=p_{2,n+1}\\ \dots\dots\dots\\ p_{n1}p_1+p_{n2}p_2\ +\cdots+(p_{nn}-1)p_n=p_{n,n+1}\end{cases}$$

Дана система інтерпретується як лінійна неоднорідна алгебраїчна система відносно змінних $p_s$, ($s$=1,2,…,$n$). Її визначник, позначемо як Δ,

$$\Delta=\begin{vmatrix}p_{11}-1 & p_{12} & \dots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22}-1 & \dots & p_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}-1\end{vmatrix}=\det(P-E).$$

Якщо серед власних значень матриці $P=\|p_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ немає власного значення, що дорівнює 1, то $\Delta\neq 0$ і тоді існує єдиний розв'язок $p_1,\dots,p_n$ цієї системи, а система (1.2) приводиться до вигляду

Якщо жодне з власних значень матриці $P=\|p_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ не дорівнює 1, то визначник цієї матриці відмінний від нуля. Отже, система рівнянь має єдиний розв'язок $p_1,\dots,p_n$ . У такому випадку систему (1.2) можна подати в іншій формі.

$$\begin{cases}t\dfrac{dy_1}{dt}=p_{11}y_1+\cdots+p_{1n}y_n+F_1(y_1,\dots,y_n,\dot y_1,\dots,\dot y_n,t);\\ \dots\dots\dots\\ t\dfrac{dy_n}{dt}=p_{n1}y_1+\cdots+p_{nn}y_n+F_n(y_1,\dots,y_n,\dot y_1,\dots,\dot y_n,t).\end{cases}\tag{1.3}$$

Розглянемо систему (1.3), записану у векторно-матричному вигляді:

$$t\dot y=Py+F(t,y,\dot y),\tag{1.4}$$

де $y=(y_1,\dots,y_n)^T$, $\dot y=(\dot y_1,\dots,\dot y_n)^T$, $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\ \mathbb{R}^n$, $F=(F_1,\dots,F_n)^T$, $F_i(t,y,\dot y)=\ \sum_{|p|+|l|+r\geq 2}A_{plr}^{i}\,y_1^{p_1}y_2^{p_2}\dots y_n^{p_n}\dot y_1^{l_1}\dots\dot y_n^{l_n}t^r,i=\overline{1,n},$

де мультііндекси $|p| = p_1 + \cdots + p_n, |l| = l_1 + \cdots + l_n$. Такий запис дозволяє застосовувати апарат лінійної алгебри для аналізу розв'язків системи. Векторна форма запису є особливо зручною для дослідження властивостей системи та подальших обчислень.

Дослідемо умови застосування теореми 1.1 про неявну голоморфну функцію до системи (1.4) відносно змінної $\dot{y}$. Розглянемо функцію

$$\Phi(t, y, \dot{y}) = t\dot{y} - Py - F(t, y, \dot{y}).$$

Проаналізуємо виконання умов теореми:

Голоморфність функції $\Phi$:
За припущенням, компоненти вектор-функції $F$ є голоморфними в околі точки (0,0,0). Отже, сама функція $F$, а разом з нею і Ф,, володіють властивістю голоморфності в даній точці. Це забезпечує виконання першої умови теореми.

1. Нульове значення в початковій точці:
З умови задачі випливає, що розклад компонент $F$ у околиці (0,0,0) не містить вільних членів, тому $F$(0,0,0) = 0. Це означає, що $\Phi(0, 0, 0) = 0$, що задовольняє другу вимогу теореми.
2. Аналіз похідної $\Phi'_{\dot{y}}$:
Дослідження похідної в точці (0,0,0) показує, що через відсутність лінійних членів у розкладі $F$, похідна $F'_{\dot{y}}(0, 0, 0) = 0$. Внаслідок цього $\Phi'_{\dot{y}}(0, 0, 0) = 0$. також дорівнює нулю, що суперечить третій умові теореми 1.1.

Оскільки не виконується третя істотна умова теореми про неявну функцію, ми зосередимо увагу на дослідженні розв'язків системи (1.3), які задовольняють додатковим умовам:

$$y_k(t) \to 0, \dot{y}_k(t) \to 0 \text{ при } t \to +0, k = \overline{1, n}. \qquad (1.5)$$

# РОЗДІЛ 2

## § 2.1 Окремий клас розв’язків системи (1.3)

Розглядатимемо розв'язки системи (1.3), які відповідають умові (1.5), представлені у формі:

$$\begin{cases} y_i = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k = \sum_{m=2}^{\infty} b_{m0}^i t^m + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k, \\ i = \overline{1,n}, \end{cases} \quad (2.1)$$

де $b_{mk}^i, m = \overline{2,\infty}, k = \overline{0,\infty}, i = \overline{1,n}$ – невідомі дійсні коефіцієнти.

У другому розділі дослідження формальних розв'язків системи (1.3) є ключовим кроком для аналізу її поведінки в околі особливої точки *t = 0*. Формальні розв'язки у вигляді рядів (2.1) дозволяють виявити асимптотичні властивості розв'язків, зокрема їхню залежність від параметрів системи та власних значень матриць $P + \nu A - \nu E$ та A - E . Це дає змогу зрозуміти структуру розв'язків, їхню кількість та умови існування, що є важливим для подальшого аналізу асимптотичної поведінки при *t*→+0.

Формально продиференціюємо ряди (2.1):

$$\begin{cases} \dot{y}_i = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^i [m t^{m-1} (\ln t)^k + k t^{m-1} (\ln t)^{k-1}] + \sum_{m=2}^{\infty} m b_{m0}^i t^{m-1}, \\ i = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Підставимо (2.1) та (2.2) в систему (1.3):

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^{i}[mt^{m}(\ln t)^{k} + kt^{m}(\ln t)^{k-1}] + \sum_{m=2}^{\infty} mb_{m0}^{i}t^{m}$$

$$= p_{i1}\sum_{m+k\geq 2}^{\infty} b_{mk}^{1}t^{m}(\ln t)^{k} + \cdots + p_{in}\sum_{m+k\geq 2}^{\infty} b_{mk}^{n}t^{m}(\ln t)^{k} +$$

$$+ \sum_{|p|+|l|+r=2}^{\infty} A_{plr}^{i}(b_{20}^{1}t^{2} + b_{30}^{1}t^{3}$$

$$+ b_{21}^{1}t^{2}\ln t + \cdots + b_{mk}^{1}t^{m}(\ln t)^{k} + \cdots)^{p_1} \times$$

$$\times \ldots \times$$

$$\times (b_{20}^{n}t^{2} + b_{30}^{n1}t^{3} + b_{21}^{n}t^{2}\ln t + \cdots + b_{mk}^{n}t^{m}(\ln t)^{k} + \cdots)^{p_n} \times$$

$$\times (b_{20}^{1}(2t) + b_{30}^{1}(3t^{2}) + b_{21}^{1}(2t\ln t + t) + \cdots + b_{mk}^{1}\left(mt^{m-1}(\ln t)\right) + \quad (2.3$$

$$+ kt^{m-1}(\ln t)^{k-1}) + \cdots)^{l_1} \times t^{r}$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях $t$:

$$t^{2}|\ 2b_{20}^{i} + b_{21}^{i} = p_{i1}b_{20}^{1} + \cdots + p_{in}b_{20}^{n} + A_{02l_{1}0}^{i}(2b_{20}^{1} + b_{21}^{1})^{2} +$$

$$+ A_{0l_{1}+l_{2}0}^{i}(2b_{20}^{1} + b_{21}^{1})(2b_{20}^{2} + b_{21}^{2}) + \cdots +$$

$$+ A_{0l_{n-1}+l_{n}0}^{i}(2b_{20}^{n-1} + b_{21}^{n-1})(2b_{20}^{n} + b_{21}^{n}) + \quad (2.4)$$

$$+ A^i_{0l_1 1}(2b^1_{20} + b^1_{21}) + \cdots + A^i_{0l_n 1}(2b^n_{20} + b^n_{21}) + A^i_{002}.$$

Після математичних маніпуляцій ми отримали систему рівнянь (2.4) з невідомими $b^i_{20}, b^i_{21}$, $i = \overline{1,n}$. Розглядатимемо систему (2.4) як сумісну, а вектори $b_{20}$ та $b_{21}$ – як її довільні, але фіксовані розв'язки.

Наступним кроком буде порівняння коефіцієнтів при однакових степенях $t$:

$$t^3|\ 3b^i_{31} + b^i_{31} = p_{i1}b^1_{20} + \cdots + p_{in}b^n_{30} + [2A^i_{02l_1 0}(2b^1_{20} + b^1_{21}) +$$

$$A^i_{0l_1+l_2 0}(2b^2_{20} + b^2_{21}) + \cdots + A^i_{0l_1+l_n 0}(2b^n_{20} + b^n_{21}) + A^i_{0l_1 1}](3b^1_{30} + b^1_{31})$$

$$+ \cdots +$$

$$[2A^i_{02l_n 0}(2b^n_{20} + b^n_{21}) + A^i_{0l_1+l_n 0}(2b^1_{20} + b^1_{21})|$$

$$+ \cdots +$$

$$A^i_{0l_{n-1}+l_n 0}(2b^{n-1}_{20} + b^{n-1}_{21}) + A^i_{0l_n 1}](3b^n_{30} + b^n_{31}) + D^i_{31}$$

…

$$t^\nu|\nu b^i_{\nu 0} + b^i_{\nu 1} = p_{i1}b^1_{\nu 0} + \cdots + p_{in}b^n_{\nu 0} + [2A^i_{02l_1 0}(2b^1_{20} + b^1_{21}) +$$

$$A^i_{0l_1+l_2 0}(2b^2_{20} + b^1_{21}) + \cdots + A^i_{0l_1+l_n 0}(2b^n_{20} + b^n_{21}) + A^i_{0l_1 1}](\nu b^1_{\nu 0} + b^1_{\nu 1})$$

$$+ \cdots +$$

$$[2A^i_{02l_n 0}(2b^n_{20} + b^n_{21}) + A^i_{0l_1+l_n 0}(2b^1_{20} + b^1_{21})$$

$$+ \cdots +$$

$$A^i_{0l_{n-1}+l_n 0}(\nu b^{n-1}_{\nu 0} + b^{n-1}_{\nu 1}) + A^i_{0l_n 1}](\nu b^n_{\nu 0} + b^n_{\nu 1}) + D^i_{\nu 1},$$

де $D^i_{\nu 1} = D^i_{\nu 1}\left(A^i_{plr}, b^i_{\alpha\beta}\right), \alpha = \overline{2, i-1}, \beta = 0{,}1,\ 2 \le |p| + |l| + r \le \nu, i = \overline{1,n}$ – вже визначені функції коефіцієнтів $A_{plr}$ з розкладів функцій $F_i$ і коефіцієнтів $b^i_{\alpha\beta}$. Їх значення знаходять із систем, сформованих на попередніх кроках завдяки прирівнюванню коефіцієнтів при відповідних степенях $t$.

Розглянемо отримані рівняння записаними у векторно-матричному вигляді:

$$(P + \nu A - \nu E)b_{\nu 0} + (A - E)b_{\nu 1} = D_{\nu 1}, \qquad (2.5)$$

де

$$b_{\nu 0} = \begin{bmatrix} b_{\nu 0}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu 0}^n \end{bmatrix}, b_{\nu 1} = \begin{bmatrix} b_{\nu 1}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu 1}^n \end{bmatrix}, D_{\nu 1} = \begin{bmatrix} D_{\nu 1}^1 \\ \vdots \\ D_{\nu 1}^n \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij} = A_{0l_j1}^i + 2A_{0l_j2}^i\left(2b_{20}^j + b_{21}^j\right) + \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} A_{0l_s+l_j0}^i(2b_{20}^s + b_{21}^s).$$

Отже, в нас вийшло, що коефіцієнти $b_{\nu 0}^i$ і $b_{\nu 1}^i, i = \overline{1,n}, \nu \geq 3$ рядів (2.1) повинні задовільняти систему (2.5).

**Лема 1.** Існує не більше ніж $n$ значень $\nu$, для яких

$$\det(P + \nu A - \nu E) = 0. \qquad (2.6)$$

**Доведення.** Для довільних невироджених квадратних матриць $M_1$ , $M_2$ порядку $n$ з властивості лінійності визначника отримуємо такий вираз для визначника їхньої суми:

$$\det(M_1 \ + M_2) = \qquad (2.7)$$

$$= \det(M_1) + \sum \Delta(1) + \cdots + \sum \Delta(i) + \cdots + \sum \Delta(n-1) + \det(M_2),$$

де $\Delta(i)$ – це визначник, утворений заміною $i$ рядків визначника матриці $M_1$ на відповідні рядки визначника матриці $M_2$, а $\sum \Delta(i)$ позначає суму всіх можливих визначників такого виду для фіксованого $i$.

Використаємо формулу (2.7) для обчислення визначника

$$\det(P+\nu A-\nu E)=\begin{vmatrix} p_{11}+\nu a_{11}-\nu & p_{21}+\nu a_{21} & \cdots & p_{n1}+\nu a_{n1} \\ p_{12}+\nu a_{12} & p_{22}+\nu a_{22}-\nu & \cdots & p_{n2}+\nu a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n}+\nu a_{1n} & p_{2n}+\nu a_{2n} & \cdots & p_{nn}+\nu a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Нехай $M_1 = P$, а $M_2 = \nu A - \nu E$, тоді

$$\det(P+\nu A-\nu E) = \det(P) + c_1\nu + c_2\nu^2 + \cdots + c_{n-1}\nu^{n-1} + c_n\nu^n,$$

де $c_i, i = \overline{1, n-1}$ – функції від $p_{ij}$, $a_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $c_n = de\,t(A - E)$.

Є місце для двох випадків:

1) Випадок, коли власні значення матриці $A$ не містить одиничних, то $\det(A - E) \neq 0$, і $de\,t(P - \nu A - \nu E)$ є многочленом відносно $\nu$. Висновок:кількість дійсних значень $\nu$, що задовольняють рівняння $\det(P - \nu A - \nu E) = 0$, не перевищує $n$.
2) Якщо ж серед власних значень матриці $A$ є таке, що дорівнює 1, то $c_n = \det(A - E) = 0$. Отже степінь многочлена $\det(P + \nu A - \nu E)$ не перевищує $n - 1$. Як наслідок, існує не більше ніж $n - 1$ дійсних значень $\nu$, для яких $\det(P - \nu A - \nu E) = 0$.

Лему доведено.

Позначимо корені рівняння (2.6) через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Має місце така лема.

**Лема 2.** За умови, що $P + \lambda_1 A - \lambda_1 E$ – нульова матриця, та матриця $A$ не містить власного значення рівному 1, то всі власні значення матриці $P + \nu A$ є однаковими.

**Доведення.** При $\nu = \lambda_k$ матриця $P + \nu A - \nu E$ має вигляд:

$$\begin{bmatrix} p_{11}+\lambda_k a_{11}-\lambda_k & p_{21}+\lambda_k a_{21} & \cdots & p_{n1}+\lambda_k a_{n1} \\ p_{12}+\lambda_k a_{12} & p_{22}+\lambda_k a_{22}-\lambda_k & \cdots & p_{n2}+\lambda_k a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n}+\lambda_k a_{1n} & p_{2n}+\lambda_k a_{2n} & \cdots & p_{nn}+\lambda_k a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

За вимогою леми матриця $P + \lambda_1 A - \lambda_1 E$ нульова, а отже з (2.8) отримаємо:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p_{11} = -\lambda_1(a_{11} - 1)$ | $p_{21} = -\lambda_1 a_{21}$ | … | $p_{n1} = -\lambda_1 a_{n1}$ |
| $p_{12} = -\lambda_1 a_{12}$ | $p_{22} = -\lambda_1(a_{22} - 1)$ | … | $p_{n2} = -\lambda_1 a_{n2}$ |
| … | … | … | … |
| $p_{1n} = -\lambda_1 a_{1n}$ | $p_{2n} = -\lambda_1 a_{2n}$ | … | $p_{nn} = -\lambda_1(a_{nn} - 1)$ |

Замінимо отримані значення $p_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ у вираз (1.13) при $k = 2$.

$$\begin{bmatrix} (\lambda_2 - \lambda_1)(a_{11} - 1) & (\lambda_2 - \lambda_1)a_{21} & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_1)a_{n1} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)a_{12} & (\lambda_2 - \lambda_1)(a_{22} - 1) & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_1)a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\lambda_2 - \lambda_1)a_{1n} & (\lambda_2 - \lambda_1)a_{2n} & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_1)(a_{nn} - 1) \end{bmatrix} =$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)^n (A - E).$$

Оскільки $\lambda_2$ є розв'язком рівняння (1.11), то виконується умова $\det(P + \lambda_2 A - \lambda_2 E) = 0$, яка еквівалентна $(\lambda_2 - \lambda_1)^n \det(A - E) = 0$. За умовою леми матриця $A$ не має одиничного власного значення, тому $\det(A - E) \neq 0$. Звідси випливає, що $\lambda_2 = \lambda_1$. Повторюючи аналогічні міркування для$k = 3, \dots, n$, отримуємо $\lambda_3 = \lambda_1$, …, $\lambda_n = \lambda_1$, що й потрібно було довести.

Лему доведено.

Зараз дослідимо умови існування розв'язків системи (2.5) та визначимо їх структуру.

**Теорема 2.1.** За умови, що матриця А не має одиничного власного значення, для довільних фіксованих векторів $b_{20}$ та $b_{21}$ (які є розв'язками системи (2.4)) при будь-якому фіксованому ν≥3 система (2.5) має (ν-2)n-параметричне сімейство розв'язків.

**Доведення.** Оскільки матриця А не містить одиничного власного значення, то виконується умова, що $\det(A - E) \neq 0$. Отже, систему (2.5) можна розв'язати відносно $b_{\nu 1}$, отримавши вираз:

$$b_{\nu 1} = (A - E)^{-1}(D_{\nu 1} - (P - \nu A) - \nu E)b_{\nu 0}. \qquad (2.9)$$

Таким чином для фіксованих векторів $b_{20}$ та $b_{21}$ та кожного фіксованого $\nu \geq 3$ система (2.5)має $(\nu - 2)n$- параметричне сімейство розв'язків, вигляду (2.9), де параметрами виступають компоненти векторів $b_{30}, \dots, b_{\nu 0}$.

Теорему доведено.

**Теорема 2.2.** Нехай для всіх фіксованих $\nu \geq 3$ матриця $P + \nu A$ не містить власного значення, що дорівнює $\nu$. Тоді для фіксованих векторів $b_{20}$ та $b_{21}$ (розв'язків системи (2.4)) існує $(\nu - 2)n$-параметрична сім'я розв'язків системи (2.5).

**Доведення.** Оскільки матриця $P + \nu A$ не має власного значення, що дорівнює $\nu$, то $\det(P + \nu A - \nu E) \neq 0$ для всіх $\nu \geq 3$, і система (2.5) може бути розв'язана відносно $b_{\nu 0}$:

$$b_{\nu 0} = (P + \nu A - \nu E)^{-1}(D_{\nu 1} - (A - E)b_{\nu 1}) \qquad (2.10)$$

Отже для кожного фіксованого $\nu \geq 3$ система (2.5) містить $(\nu - 2)n$-параметричну сім'ю розв'язків вигляду (2.10), де параметрами є компоненти векторів $b_{31}, \dots, b_{\nu 1}$.

Теорему доведено.

Альтернативний підхід при невиконанні умов теорем 1.4 та 1.5: у разі порушення умов теорем 1.4 і 1.5, вибір між векторами $b_{\nu 0}$ та $b_{\nu 1}$ у якості вільного параметра є несуттєвим. Якщо прийняти $b_{\nu 1}$, за параметр, систему (2.5) можна переписати у такій формі:

$$(P + \nu A - \nu E)b_{\nu 0} = D'_{\nu 1}, \qquad (2.11)$$

де $D'_{\nu 1} = D_{\nu 1} - (A - E)b_{\nu 1}$. Якщо прийняти є $b_{\nu 0}$, за параметр, то систему (2.5) можна переписатик як:

$$(A - E)b_{\nu 1} = D''_{\nu 1}, \qquad (2.12)$$

де $D''_{\nu 1} = D_{\nu 1} - (P + \nu A - \nu E) b_{\nu 0}$.

Детально розглянемо випадок (2.11).

**Теорема 2.3.** Нехай $\lambda_1$ – власне значення матриці $P + \lambda_1 A$, а $\lambda_k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ – власні значення матриць $P + \lambda_k A$ відповідно. Тоді для фіксованих векторів $b_{20}$ і $b_{21}$ (розв'язків системи (2.4)) і фіксованого $\nu \geq 3$ існує не більше ніж $\big((\nu - 2)n + 1\big)$- параметрична сім'я розв'язків системи (2.11).

**Доведення.** Якщо $\nu \neq \lambda_1$, то $\det(P + \nu A - \nu E) \neq 0$ для всіх $\nu \geq 3$ і вектор можна виразити у вигляді:

$$(P + \nu A - \nu E)^{-1} D'_{\nu 1},$$

Де компоненти $b^i_{\nu 0}$, $i = 1, \dots, n,$ визначаються з точністю до $(\nu - 2)n$ вільних параметрів, якими є координати векторів $b_{31}, \dots, b_{\nu 1}$.

У випадку коли $\nu = \lambda_1$, за умовами теореми $\det(P + \nu A - \nu E) = 0$.

Тоді розв'язок системи залежатиме від додаткових параметрів – компонент вектора $b_{\lambda_1 1}$. Це дозволяє підібрати $b^i_{\lambda_1 1}$, $i = 1, \dots, n,$ так, щоб виконувалась необхідна умова

$$\begin{cases} rang(P + \lambda_1 A - \lambda_1 E) = n - 1, \\ rang\big(P + \lambda_1 A - \lambda_1 E, D'_{\lambda_1, 1}\big) = n - 1, \\ \lambda_1 \geq 3, \end{cases} \qquad (2.13)$$

тому, система $(P + \lambda_1 A - \lambda_1 E) b_{\lambda_1 0} = D'_{\lambda_1, 1}$ має не більше ніж $\big((\lambda_1 - 2)n + 1\big)$-параметричну сім'ю розв'язків, в якій параметрами є компоненти векторів $b_{31}, \dots, b_{\lambda_1 - 1, 1}$, $k$ компонент вектору $b_{\lambda_1 1}$ $(0 \leq k \leq n)$ і довільний $b^i_{\lambda_1 0}$, $i = \overline{1, n}$. Відповідно, система (2.11) утворює сім'ю розв'язків розмірності $(\nu - 2)n$ параметрів при $\nu < \lambda_1$, $\nu \geq 3$, і сім'ю розв'язків розмірності не більше ніж $\big((\nu - 2)n + 1\big)$- при $\nu \geq \lambda_1$, $\nu \geq 3$.

Теорему доведено.

**Теорема 2.4.** Припустимо, що матриці $P+\lambda_i A$ мають відповідно власні значення $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $i=\overline{1,s}$, $1 \le s \le n$, а матриці $P+\lambda_k A$ – власні значення $\lambda_k \notin \mathbb{N}$ , $k \ge s+1$, причому $\lambda_i \ne \lambda_j$ для всіх $i \ne j$, $i,j = 1,2,\ldots,$s $(1 \le s \le n)$. Тоді для фіксованого $\nu \ge 3$ і фіксованих векторів $b_{20}$ та $b_{21}$ (які є розв'язками системи (1.9))множина розв'язків утворює сім'ю розмірності не більше ніж $(\nu-2)n+s$ параметрів.

**Доведення.** При $\nu=\lambda_i$, $i=\overline{1,s}$, $1 \le s \le n$ є вірними твердження теореми (2.3). Єдина різниця, що умова (2.13) замінюється умовою

$$\begin{cases} rang\,(P+\lambda_i A-\lambda_i E)=n-1, \\ rang\left(P+\lambda_i A-\lambda_i E, D'_{\lambda_i 1}\right)=n-1, \\ i=\overline{1,s}, 1 \le s \le n. \end{cases}$$

Нехай для визначеності $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $i=\overline{1,s-1}$. Тоді при $\nu \ge 3$, $\nu < \lambda_1$ система (2.11) має $(\nu-2)n$-параметричну сім'ю розв'язків, у якій параметрами є компоненти векторів $b_{31},\ldots,b_{\nu 1}$. При $\nu \ge 3$, $\nu > \lambda_1$, $\nu < \lambda_2$ система (2.11) має не більше ніж $\big((\nu-2)n+1\big)$-параметричну сім'ю розв'язків, у якій параметрами є компоненти векторів $b_{31},\ldots,b_{\lambda_1-1,1}$, $b_{\lambda_1+1,1},\ldots,b_{\nu 1}$, $k$ компонент вектора $b_{\lambda_1 1}$ та довільний $b^i_{\lambda_1 0}$, $i=\overline{1,n}$. При $\nu \ge 3$, $\nu \ge \lambda_s$ система (2.11) має не більше ніж $\big((\nu-2)n+s\big)$- параметричну сім'ю розв'язків, у якій параметрами є компоненти векторів $b_{\alpha 1}$, $\alpha=\overline{1,\nu}$, $\alpha \ne \lambda_i$, $i=\overline{1,s}$, $1 \le s \le n$ і по $k$ компонент векторів $b_{\alpha 1}$, $\alpha=\lambda_i$, $i=\overline{1,s}$, $1 \le s \le n$ $(0 \le k_i \le n)$, а також $s$ параметрів вигляду $b^j_{\lambda_i 0}$ $(j=\overline{1,n}, i=\overline{1,s}, 1 \le s \le n, \lambda_i \ge 3)$.

Теорему доведено.

**Теорема 2.5.** Нехай $\lambda_1 \in \mathbb{N}$ – власне значення матриці $P+\lambda_1 A$, і $\lambda_1$ має кратність $k$, а $\lambda_i \notin \mathbb{N}$ – власні значення відповідно матриць $P+\lambda_i A$, $i \ge 2$. Тоді якщо $rang(P+\lambda_1 A-\lambda_1 E)=q$, $\lambda_1 \ge 3$, то для фіксованого $\nu \ge 3$ і для фіксованих векторів $b_{20}$ і $b_{21}$ (розв'язків системи (2.4)) існує не більше ніж $\big((\nu-1)n-q\big)$-параметрична сім'я розв'язків системи (2.11).

**Доведення.** При $\nu < \lambda_1$

$$\det(P + \nu A - \nu E) \neq 0$$

і

$$b_{\nu 0} = (P + \nu A - \nu E)^{-1} D'_{\nu 1}.$$

Тоді система (2.11) має $(\nu - 2)n$-параметричну сім’ю розв’язків з параметрами $b^i_{31}, \dots, b^i_{\nu 1}$, $i = \overline{1,n}$. Якщо ж $\nu = \lambda_1$, то, виходячи з побудови (2.11), можна вибрати $b^i_{\lambda_1 1}$, $1 = \overline{1,n}$ так, щоб виконувалась умова

$$rang\big(P + \lambda_1 A - \lambda_1 E, D'_{\lambda_1 1}\big) = q. \qquad (2.14)$$

Тоді при $\nu \geq \lambda_1$ множина розв'язків системи (2.11) утворює сім'ю розмірності не більше ніж $\big((\nu - 1)n - q\big)$ параметрів, у якій $(\nu - 3)n$-параметрів – це компоненти векторів $b_{31}, \dots, b_{\lambda_1 - 1,1}, b_{\lambda_1 + 1,1}, \dots, b_{\nu 1}$, $n - q$ параметрів – компонент вектора $b_{\lambda_1,0}$ і $r$ компонент вектора $b_{\lambda_1,1}$ $(0 \leq r \leq n)$. Разом не більше ніж $\big((\nu - 1)n - q\big)$ параметрів.

Теорему доведено.

**Теорема 2.6.** Нехай $\lambda_i \in \mathbb{N}$ – власні значення матриць $P + \lambda_i A$ кратностей $k_i$ відповідно, де $i = \overline{1,p}$, $\sigma_p = \sum_{i=1}^{p} k_i$, $1 \leq \sigma_p \leq n$, а $\lambda_j \notin \mathbb{N}$, $j = \overline{\sigma_p, n}$, – власні значення відповідно матриць $P + \lambda_j A$. Нехай також для матриць $P + \lambda_i A$, $i = \overline{1,p}$ виконується умова

$$\begin{cases} rang(P + \lambda_i A - \lambda_i E) = q_i, \\ rang\big(P + \lambda_i A - \lambda_i E, D'_{\lambda_i 1}\big) = q_i, \\ i = \overline{1,p}. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Тоді для фіксованого $\nu \geq 3$ і фіксованих векторів $b_{20}$ і $b_{21}$ (розв'язків системи (2.4)) існує не більше ніж $\left[(\nu-1)n-p-\sum_{i=1}^{p} q_i\right]$-параметрична сім'я розв'язків системи (2.11).

**Доведення.** При $\nu = \lambda_i$, $i = \overline{1,p}$, $1 \leq \sum_{i=1}^{p} k_i \leq n$ місце мають також твердження теореми (2.5), але замість умови (2.14) мають виконуватись умови (2.15). У цьому випадку буде існувати не більше ніж $\left[(\nu-1)n-p-\sum_{i=1}^{p} q_i\right]$-параметрична сім'я розв'язків системи (2.11) з такими ж параметрами, що і в минулій теоремі.

Теорему доведено.

**Теорема 2.7.** Якщо:

- $\lambda_1 \in \mathbb{N}, \lambda_1 \geq 3$ – власне значення матриці $P + \lambda_1 A$.
- Матриця $P + \lambda_1 A - \lambda_1 E$ є нульовою.
- Виконується умова $D'_{\lambda_1 1} = 0$.

Тоді для довільних фіксованих векторів $b_{20}$ та $b_{21}$ (які є розв'язками системи (2.4)) і для фіксованого $\nu \geq 3$ система (2.11) має параметричне сімейство розв'язків розмірності не більше *(ν-1)n.*

**Доведення.** З леми номер 2 ми маємо рівність всіх власних значень нульової матриці $P + \lambda_1 A - \lambda_1 E$, з цього випливає, що для $\forall\, \nu \neq \lambda_1$ $\det(P + \nu A - \nu E) \neq 0$, а коефіцієнти визначаються як:

$$b_{\nu 0} = (P + \nu A - \nu E)^{-1} D'_{\nu 1}, \nu \geq 3.$$

При $\nu = \lambda_1$ отримує рівняння у векторній формі:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_{\lambda_1 0} \\ b^2_{\lambda_1 0} \\ \vdots \\ b^n_{\lambda_1 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Як висновок, при $\nu < \lambda_1$ утворюється сім'я розв'язків розмірності $(\nu-2)n$-параметрів системи (2.11) з параметрами $b^i_{31}, \ldots, b^i_{\nu 1}$, $i = \overline{1,n}$, а при $\nu \geq \lambda_1$

утворюється сім'я розв'язків розмірності $(\nu-1)n$-параметрів системи (2.11) з параметрами $b_{31}^i, \dots, b_{\nu 1}^i$, $i=\overline{1,n}$, і $b_{\lambda_1 0}^i$, $i=\overline{1,n}$.

Теорему доведено.

Проаналізуємо випадок системи (2.12).

**Теорема 2.8.** У випадку, коли λ=1 є власним значенням матриці А, для кожного ν≥3 і заданих векторів $b_{20}$ та $b_{21}$ (які задовольняють системі (2.4)) розв'язки системи (2.12) утворюють (ν-2)(n+1)-параметричне сімейство.

**Доведення.** За побудовою системи (2.12) для фіксованого $\nu \geq 3$ завжди можна підібрати параметри $b_{\nu 0}^i$, $i=\overline{1,n}$ так, щоб виконувалась умова

$$\begin{cases} rang(A-E)=n-1, \\ rang(A-E, D''_{\nu 1})=n-1. \end{cases}$$

Тоді для фіксованих векторів $b_{20}$ та $b_{21}$ і фіксованого $\nu \geq 3$ існує не більше ніж $(\nu-2)(n+1)$-параметрична сім'я розв'язків системи (2.12), у якій параметрами є $k_j$ компонент векторів $b_{j0}^i$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{3,\nu}$ $(0 \leq k_j \leq n)$ і $\nu-2$ параметра вигляду $b_{j1}^i$, $j=\overline{3,\nu}$ (для фіксованого , $i=\overline{1,n}$).

Теорему доведено.

**Теорема 2.9.** Нехай матриця $A$ має власне значення $\lambda=1$ кратності $k$. Тоді для фіксованого $\nu \geq 3$ і фіксованих векторів $b_{20}$ та $b_{21}$ (розв'язків системи (2.4)) існує не більше ніж $(\nu-2)(2n-q)$-параметрична сім'я розв'язків системи (2.12), де $q=rang(A-E)$.

**Доведення.** За побудовою системи (2.12) для фіксованого $\nu \geq 3$ завжди можна підібрати $b_{\nu 0}^i$, $i=\overline{1,n}$ так, щоб виконувалась умова

$$\begin{cases} rang(A-E)=q, \\ rang(A-E, D''_{\nu 1})=q. \end{cases}$$

Тоді для фіксованих векторів $b_{20}$ та $b_{21}$ (розв'язків системи (2.4)) і фіксованого $\nu \geq 3$ існує не більше ніж $(\nu - 2)(2n - q)$-параметрична сім'я розв'язків системи (2.4), у якій параметрами є $k_j$ компонент векторів $b_{j0}^i$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{3, \nu}$ $(0 \leq k_j \leq n)$ і по $(n - q)$ компонент векторів $b_{j1}^i$, $j = \overline{3, \nu}$.

Теорему доведено.

Перейдемо до пошуку решти коефіцієнтів розкладу (2.1) методом послідовного прирівняння коефіцієнтів при відповідних степенях t та ln t у рівняннях системи (2.3). Отримаємо:

$$t^2 \ln t |\, 2b_{22}^i = 2b_{22}^1 \times [2A_{02l_1 0}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) + A_{0l_1+l_2 0}^i(2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \cdots +$$

$$A_{0l_1+l_n 0}^i(2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1 1}^i] + \cdots +$$

$$2b_{22}^n \times [2A_{02l_n 0}^i(2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1+l_n 0}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) + \cdots +$$

$$A_{0l_{n-1}+l_n 0}^i(2b_{20}^{n-1} + b_{21}^{n-1}) + A_{0l_n 1}^i] + D_{22}^i,$$

$$t^3 \ln t |\, 2b_{32}^i = 2b_{32}^1 \times [2A_{02l_1 0}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) + A_{0l_1+l_2 0}^i(2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \cdots +$$

$$A_{0l_1+l_n 0}^i(2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1 1}^i] + \cdots +$$

$$2b_{32}^n \times [2A_{02l_n 0}^i(2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1+l_n 0}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) + \cdots +$$

$$A_{0l_{n-1}+l_n 0}^i(2b_{20}^{n-1} + b_{21}^{n-1}) + A_{0l_n 1}^i] + D_{32}^i,$$

$$\ldots \qquad (2.16)$$

$$t^\nu \ln t |\, 2b_{\nu 2}^i = 2b_{\nu 2}^1 \times [2A_{02l_1 0}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) + A_{0l_1+l_2 0}^i(2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \cdots +$$

$$A^i_{0l_1+l_n0}(2b^n_{20}+b^n_{21})+A^i_{0l_11}]+\cdots+$$

$$2b^n_{\nu2}\times[2A^i_{02l_n0}(2b^n_{20}+b^n_{21})+A^i_{0l_1+l_n0}(2b^1_{20}+b^1_{21})+\cdots+$$

$$A^i_{0l_{n-1}+l_n0}(2b^{n-1}_{20}+b^{n-1}_{21})+A^i_{0l_n1}]+D^i_{\nu2},$$

...

$$t^\nu\ln^{(\eta-1)}t|\ 2b^i_{\nu\eta}=\eta b^1_{\nu\eta}\times[2A^i_{02l_10}(2b^1_{20}+b^1_{21})+A^i_{0l_1+l_20}(2b^2_{20}+b^2_{21})+\cdots+$$

$$A^i_{0l_1+l_n0}(2b^n_{20}+b^n_{21})+A^i_{0l_11}]+\cdots+$$

$$\eta b^n_{\nu\eta}\times[2A^i_{02l_n0}(2b^n_{20}+b^n_{21})+A^i_{0l_1+l_n0}(2b^1_{20}+b^1_{21})+\cdots+$$

$$A^i_{0l_{n-1}+l_n0}(2b^{n-1}_{20}+b^{n-1}_{21})+A^i_{0l_n1}]+D^i_{\nu\eta},$$

де $D^i_{\nu\eta}=D^i_{\nu\eta}\left(A^i_{plr},b^i_{\alpha\beta}\right)$, $\alpha=\overline{2,\nu}$, $\beta=\overline{0,\eta-1}$, $\nu\geq2$, $\eta\geq2$, $i=\overline{1,n}$, $p=(p_1,\dots,p_n)$, $l=(l_1,\dots,l_n)$ – вже визначені функції для коефіцієнтів $A^i_{plr}$

$(2\leq|p|+|l|\leq\nu)$ розкладів функцій $F_s$ і $b^i_{\alpha\beta}$. Зазначені коефіцієнти знаходяться шляхом послідовного розв'язання систем, знайдених на минулих кроках прирівнювання коефіцієнтів при відповідних степенях t та ln t.

Перепишемо (2.16) у матричній формі:

$$\eta(A-E)b_{\nu\eta}=D_{\nu\eta}, \tag{2.17}$$

де $\nu\geq2,\eta\geq2$, $b_{\nu\eta}=(b^1_{\nu\eta},\dots,b^n_{\nu\eta})^T$, $D_{\nu\eta}=(D^1_{\nu\eta},\dots,D^n_{\nu\eta})^T$, $A=\left(a_{ij}\right)$,

$$a_{ij}=A^i_{0l_j1}+2A^i_{02l_j1}\left(2b^j_{20}+b^j_{21}\right)+\sum_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}A^i_{0l_s+l_j0}(2b^s_{20}+b^s_{21}).$$

Аналіз коефіцієнтів ряду (2.1).

Отримані умови для коефіцієнтів $b^i_{\nu\eta}$, $i=\overline{1,n}$, $\nu\geq2$, $\eta\geq2$ Аналогічно до результатів теорем 2.1–2.9, розрізняємо дві ситуації:

1. Випадок 1: Якщо матриця $A$ не має одиничного власного значення, то система (2.17) має єдиний розв'язок з точністю до вільних параметрів:

$$b_{\nu\eta} = \frac{1}{\eta}(A - E)^{-1} D_{\nu\eta};$$

1. Випадок 2: При наявності власного значення λ=1 у матриці A аналіз проводиться за схемою, аналогічною до доведення теорем 2.8–2.9.

**Зауваження.** Може трапитись так, що розв'язок $y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^{i} t^m (\ln t)^k$ не містить членів з $t \ln t$, тоді отримаємо формальні розв'язки у вигляді степеневих рядів. Так може трапитись у тому, і тільки у тому випадку, коли $b_{mk}^{i} = 0$, $\forall\, k = \overline{1, \infty}$, $m = \overline{2, \infty}$, $i = \overline{1, n}$. Якщо ж $b_{m0} = 0$, $\forall\, m = \overline{2, \infty}$, отримаємо розв'язок у вигляді ряду $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^{i} t^m (\ln t)^k$.

# РОЗДІЛ 3

## § 3.1 Перехід до системи, яка розв'язана відносно похідних

Для подальшого аналізу розв'язків системи (1.3) застосуємо особий підхід. Виконуємо наступні кроки:

1. Вибір параметра N: підбираємо натуральне $N > 1$, вимагаємо виконання умови $D_{N,N+2} = 0$, отже $b_{N,N+2} = 0$.
2. Перетворення системи: Для обраного фіксованого N здійснимо заміну змінних у системі (1.3):

$$y_i = \sum_{m=2}^{N} \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i t^m \ln^k t + \sum_{m=2}^{N} b_{m0}^i t^m + t^{N+\varepsilon} Y_i, i = \overline{1, n}, \tag{3.1}$$

$$\dot{y}_i = \sum_{m=2}^{N} t^{m-1} \left[ m b_{m0}^i + \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i (m \ln^k t + k \ln^{k-1} t) \right] + t^{N+\varepsilon-1} S_i, \tag{3.2}$$

$$i = \overline{1, n},$$

де $\varepsilon \in (0,1)$, а $Y_i$ та $S_i$ – нові невідомі функції від $t$. Введемо для них вектори

$$S = (S_1, \dots, S_n)^T,$$

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T.$$

У результаті заміни (3.1) та (3.2) система (1.4) набуває вигляду

$$t^{N+\varepsilon} R(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y, S) = 0, \tag{3.3}$$

де

$$R = (A - E)S + PY + D_{N,N+2} t^{-\varepsilon} \ln^{1-\varepsilon} t + T(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y, S),$$

і вектор-функція $T$ голоморфна в точці $(0,0,0,0,0)$, а її розклад в околі цій точки не містить вільних та лінійних членів. Розділимо (3.3) на $t^{N+\varepsilon}$

$$R(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y, S) = 0 \qquad (3.4)$$

Отриману систему (3.4) можна проаналізувати за допомогою теореми про існування неявної голоморфної функції. Перевіряємо:

1) $R$ голоморфна в точці $(0,0,0,0,0)$;
2) $R(0, 0,0,0,0) = 0$, тому що за умовою $D_{N,N+2} = 0$;
3) $\frac{DR}{Ds}(0,0,0,0,0) = \det(A - E) \neq 0$, якщо матриця $A$ не має власного значення, що дорівнює 1,

то система (3.4) може бути однозначно розв'язана відносно $S$, тобто

$$S = \omega(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y),$$

де вектор-функція $\omega$ голоморфна в точці $(0,0,0,0)$ і $\omega(0, 0, 0, 0) = 0$. Тоді функція $\omega$ має вигляд

$$\omega = (A - E)^{-1}\left(PY + T_1(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y)\right), \qquad (3.5)$$

де вектор-функція $T_1$ голоморфна в точці $(0,0,0,0)$, а її розклад в околі цієї точки не містить вільних та лінійних членів.

Тепер з'ясуємо, як пов'язані між собою змінні $Y_i$ та $S_i$. Для цього продиференціюємо $y_i$, $i = \overline{1, n}$, в заміні (3.1):

Тепер з'ясуємо, як пов'язані між собою змінні $Y_i$ та $S_i$. Для цього продиференціюємо $y_i$, $i = \overline{1,n}$, в заміні (3.1):

$$\dot{y}_i = \sum_{m=2}^{N} t^{m-1}\left[mb_{m0}^{i} + \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^{i}(m\ln^k t + k\ln^{k-1} t)\right] + (N+\varepsilon)t^{N+\varepsilon-1}Y_i + t^{N+\varepsilon}\dot{Y}_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{3.6}$$

і прирівняємо (3.6) та (3.2)

$$t^{N+\varepsilon-1}S_i = (N+\varepsilon)t^{N+\varepsilon-1}Y_i + t^{N+\varepsilon}\dot{Y}_i,$$

Тоді

$$t\dot{Y} = S - (N+\varepsilon)Y. \tag{3.7}$$

Підставимо (3.5) в (3.7)

$$t\dot{Y} = (A-E)^{-1}(PY + T_1) - (N+\varepsilon)Y,$$

$$t\dot{Y} = [(A-E)^{-1}P - (N+\varepsilon)E]Y + (A-E)^{-1}T_1, \tag{3.8}$$

$$t\dot{Y} = GY + T_2(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y),$$

де

$$G = (A-E)^{-1}P - (N+\varepsilon)E,$$

$$T_2(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y) = (A-E)^{-1}T_1(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y).$$

Отже, ми довели, що за умов:

1. Матриця $A$ не має одиничного власного значення
2. Коефіцієнт $D_{N,N+2}$ дорівнює нулю

То система рівнянь (1.3) еквівалентна зведеній системі (3.8).

# РОЗДІЛ 4

## § 4.1 Поведінка розв'язків системи (1.3) при $t \to +0$

Проведемо заміну змінних у системі (3.8), застосувавши невироджену лінійну трансформацію невідомих функцій:

$$\dot{Y} = K\dot{u},$$

де $K$ – неособлива невироджена матриця порядку $n \times n$, $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ – нова невідома вектор-функція від $t$. Застосувавши до вихідної системи невироджену лінійну заміну, отримаємо її лінеаризовану апроксимацію.

$$K^{-1}tK\dot{u} = K^{-1}GKu + K^{-1}T_3(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Ku),$$

де вектор-функція $T_3$ – голоморфна в околі точки $(0,0,0,0)$, розклад якої в околі цієї точки не містить вільних та лінійних членів, отримана з $T_2$ шляхом заміни $Y$ на $Ku$.

Позначимо $K^{-1}GK$ через $\Lambda$, для $K^{-1}T_3(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Ku)$ запишемо розклад

$$K^{-1}T_3(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Ku) = \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^{\varepsilon})^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2},$$

$$|k| = k_1 + \dots + k_n,$$

$$|j| = j_1 + j_2.$$

Таким чином отримаємо систему

$$t\dot{u} = \Lambda u + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^{\varepsilon})^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2}. \qquad (4.1)$$

Дослідимо, як поводяться розв'язки системи (4.1) при $t \to +0$ у зв'язку з особливостями матриці $\Lambda$.

## § 4.2 Випадок діагональної матриці Λ .Поведінка розв'язків системи (4.1) при $t \to +0$.

Нехай матриця Λ має вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Для дослідження поведінки розв'язків системи (4.1) при t→+0 застосуємо комбінацію методу контактних кривих та поверхонь із топологічним підходом Важевського. Перейдемо до скалярного запису системи (4.1):

$$\begin{cases} t\dot{u}_i = \lambda_i u_i + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj}^i u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^{\varepsilon})^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2}, \\ \qquad i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Візьмемо поверхню

$$\begin{cases} u_1^2 = \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \qquad \cdots \\ u_n^2 = \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}, \qquad (4.2)$$

де $\delta_i > 0$ – малі, $0 < \alpha_i < \varepsilon$, $\alpha_i \neq \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, і знайдемо вектор нормалі $\overline{N}$ до цієї поверхні у точці $(t, u_1, \dots, u_n)$, $t > 0$

$$\frac{\overline{N}_i}{2} = \left(0, \dots, u_i, \dots, 0, -\alpha_i \delta_i^2 t^{2\alpha_i - 1}\right), i = \overline{1,n}.$$

Розглянемо скалярний добуток вектора поля напрямків $\overline{T}$ системи (4.1) в точці $(t, u_1, \dots, u_n)$, $t > 0$ і $\overline{N}$

$$\left(t\overline{T},\frac{\overline{N}_1}{2}\right)=\lambda_1 u_1^2+\sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj}^1 u_1^{k_1+1}\dots u_n^{k_n}(t^{\varepsilon})^{j_1}(t^{1-\varepsilon})^{j_2}-\alpha_1\delta_1^2 t^{2\alpha_1},$$

...

$$\left(t\overline{T},\frac{\overline{N}_n}{2}\right)=\lambda_n u_n^2+\sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj}^n u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n+1}(t^{\varepsilon})^{j_1}(t^{1-\varepsilon})^{j_2}-\alpha_n\delta_n^2 t^{2\alpha_n}.$$

За умовою методу кривих та поверхонь без контакту змінна $t\to+0$

$$\left(t\overline{T},\frac{\overline{N}_i}{2}\right)=(\lambda_i-\alpha_i)\delta_i^2 t^{2\alpha_i}+o(t^{\alpha_i-\varepsilon}),i=\overline{1,n},t\to+0 \tag{4.3}$$

Визначимо, за яких $\alpha_i$ $o(t^{\alpha_i-\varepsilon})$ швидше прямує до нуля.

$$\alpha_i+\varepsilon>2\alpha_i \Longrightarrow 0<\alpha_i<\varepsilon, i=\overline{1,n}. \tag{4.4}$$

За умови виконання (4.4) величини $o(t^{\alpha_i-\varepsilon})$ прямуватимуть до нуля при $t\to+0$ швидше порівняно з $(\lambda_i-\alpha_i)\delta_i^2 t^{2\alpha_i}$, $i=\overline{1,n}$, і тому не впливають на знак скалярного добутку.

Відповідно до теореми Пікара – Коші, через кожну неособливу точку поверхні (4.3) проходить єдина інтегральна крива системи (3.1). Оскільки скалярний добуток$(\overline{N},\overline{T})$ виражається через $|\left|\overline{T}\right|\cos\left(\overline{N}^{\overline{T}}\right))$, то його нульове значення свідчить про дотик інтегральної кривої до поверхні. У такому разі неможливо однозначно визначити, чи є точка дотику точкою входу чи виходу. Якщо ж $\left(\overline{N},\overline{T}\right)>0$ (або $\left(\overline{N},\overline{T}\right)<0$) при спаданні $t$, то маємо точку строгого входу (відповідно, виходу) інтегральної кривої в область (або з області), обмежену поверхнею (4.2). Позначимо множини точок виходу та строгого виходу якз $\Omega_e$ і $\Omega_{se}$, а множини точок входу та строгого входу — як ${}_e\Omega$ і ${}_{se}\Omega$ . Можливі такі випадки:

1) всі правильні точки поверхні є точками строгого виходу $(\partial\Omega=\Omega_{se})$;

2) всі правильні точки поверхні є точками строгого входу ($\partial\Omega = {}_{se}\Omega$);

3) поверхня містить як точки строгого входу, так і точки строгого виходу.

Проаналізуємо перший варіант. Нехай

$$\Omega: \begin{cases} 0 < t < \Delta \\ u_1^2 < \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_n^2 < \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}$$

– область, обмежена кусково-гладкою поверхнею $\partial\Omega \cup \partial\Omega_0$, $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_n$, де

$$\partial\Omega_0: \begin{cases} t = \Delta \\ u_1^2 \le \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_n^2 \le \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}, \partial\Omega_i: \begin{cases} 0 < t \le \Delta \\ u_1^2 \le \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_i^2 = \delta_i^2 t^{2\alpha_i} \\ \dots \\ u_n^2 \le \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}, \quad i = \overline{1,n}$$

і всі $\partial\Omega_i$, $i = \overline{0,n}$ – гладкі поверхні.

Припустимо, що інтегральна крива, яка проходить через точку$P \in \partial\Omega_0$ , виходить з області через $\partial\Omega_1$. Враховуючи теорему про неперервну залежність розв'язків від початкових умов, існує окіл точки $P$, через який усі інтегральні криві також виходитимуть з $\Omega$ через $\partial\Omega_1$. Позначимо через $M$ об'єднання всіх таких точок разом з їхніми околами. За визначенням, $M$ утворює відкриту множину.

Розглянемо інтегральну криву, що проходить через довільну точку $Q \in \partial M$. Оскільки $Q$ є граничною точкою $M$, ця крива не може вийти з $\Omega$ через $\partial\Omega_1$, бо тоді $Q$ належала б $M$. Якщо припустити, що вона виходить з $\Omega$ через $\partial\Omega_2$, то існував би окіл $Q$, через який усі криві виходили б через $\partial\Omega_2$, але в будь-якому околі $Q$ знайдуться точки з $M$, що суперечить визначенню граничної точки. Отже, інтегральна крива через $Q$ залишається в $\Omega$, що доводить існування принаймні одного розв'язку системи (4.1).

У другому варіанті маємо, що всі інтегральні криві, що входять в область $\Omega$ через поверхню $\partial\Omega$, не покидають її. Тому існує множина кривих, які залишаються в області при t→+0.

У третьому випадку припустимо, що

$$\Omega_{se} = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_k,$$

$$_{se}\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_{k+1} \cup \dots \cup \partial\Omega_n.$$

Застосовуючи топологічний принцип Важевського, беремо $H$ – підмножина множини $\Omega \cup \partial\Omega$, а $\Pi = \Omega_{se} \cap H$. Потрібно показати, що:

1. $\Omega_{se} = \Omega_e$,
2. $\Pi$ є ретрактором для $\Omega_{se}$, але не для $H$, тобто:
   - існує неперервне відображення $\Omega_{se} \to \Pi$, що фіксує точки $\Pi$ ;
   - не існує неперервного відображення $H \to \Pi$, яке залишає точки $\Pi$ нерухомими.

Тоді, згідно з принципом Важевського, на $H \setminus \Pi$ існує точка, черуз яку проходить інтегральна крива, що залишається в $\Omega$ при $t \to +0$ на максимальному інтервалі свого існування.

Розглянемо область

$$\Omega\colon \begin{cases} 0 < t < \Delta \\ u_1^2 < \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_n^2 < \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}, \qquad \Omega_{se}\colon \begin{cases} 0 < t < \Delta \\ u_1^2 = \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_p^2 = \delta_p^2 t^{2\alpha_p} \\ u_{p+1}^2 < \delta_{p+1}^2 t^{2\alpha_{p+1}} \\ \dots \\ u_n^2 < \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}.$$

Запропонуємо конструкцію множини $H \subset \Omega \cup \partial\Omega$, яка задовольнятиме умови заданого принципу. Побудову виконаємо наступним чином:

$$H = \{(t, u_1, \dots, u_n): t = t', u_i^2 \le \delta_i^2 t'^{2\alpha_i}, i = \overline{1, p}, u_j^2 < \delta_j^2 t'^{2\alpha_j}, j = \overline{p+1, n}\},$$

де $t'$ – константа з $(0, \Delta)$, достатньо близька до $\Delta$. Очевидно, що $H \subset \Omega \cup \partial\Omega$. Тоді

$$\Pi = \{(t, u_1, \dots, u_n): t = t', u_i^2 = \delta_i^2 t'^{2\alpha_i}, i = \overline{1, p}, u_j^2 < \delta_j^2 t'^{2\alpha_j}, j = \overline{p+1, n}\}.$$

Зауважимо, що $\Pi \subset H$ і $\Pi \subset \Omega_{se}$.

Для доведення твердження 1 достатньо побудувати хоча б одне таке неперервне відображення $\pi: \Omega_{se} \to \Pi$, що

$$\forall P \in \Omega_{se}\ \pi(P) \in \Pi,$$

$$\forall Q \in \Pi\ \pi(Q) = Q.$$

Побудуємо його так:

$$\pi: P\big(t, u_1(t), \dots, u_n(t)\big) \to R\big(t', u_1(t'), \dots, u_n(t')\big) \in \Pi.$$

Тоді $\pi$ буде ретракцією $\Omega_{se}$ на $\Pi$.

Твердження 2 доведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує таке неперервне відображення $\pi_0: H \to \Pi$, що

$$\begin{gathered} \forall P \in \Omega_{se}\ \pi_0(P) \in \Pi, \\ \forall Q \in \Pi\ \pi_0(Q) = Q. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Тоді множина

$$A = \{(t, u_1, \dots, u_n): t = t', u_i^2 = \delta_i^2 t'^{2\alpha_i}, i = \overline{1, p}, u_j^2 = 0, j = \overline{p+1, n}\}$$

неперервно відобразиться на $\pi_0(A) \subset \Pi$. Позначимо через $[\pi_0(A)]_0$ множину

$$[\pi_0(A)]_0 = \{u^0: u_i^0 = u_i, i = \overline{1, p}, u_j^0 = 0, j = \overline{p+1, n}\} \forall u \in \pi_0(A).$$

Відображення $[\pi_0]_0$ є неперервним оскільки воно утворене композицією неперервного відображення $\pi_0$ (за припущенням) та неперервного перетворення координат. Розглядаються 3 гіпотетичні ситуації:

a) $\exists P_1, P_2 \in A \backslash \partial A$: $[\pi_0(P_1)]_0 \in A \backslash \partial A, P_2 \notin [\pi_0(A)]_0$;

b) $(A \backslash \partial A) \cap [\pi_0(A)]_0 = \emptyset$;

c) $A \subset [\pi_0(A)]_0$.

**Доведення неможливості цих варіантів.**

Для аналізу перших двох випадків розглянемо процес неперервної деформації $\partial A$ до точки $P \in A \backslash \partial A$ . Позначимо проміжні стани цієї деформації як $\partial A_t$,

де $t \in T$. Відповідно, $[\pi_0(\partial A_t)]_0 = (\partial A_t)_0$ буде неперервно стягуватись наближаючись до точки$[\pi_0(P)]_0$.

Згідно з побудовою:

$$\forall R \in \partial A, \pi_0(R) = [\pi_0(R)]_0, [\pi_0(R)]_0 = R. \tag{4.6}$$

Якщо взяти $P = P_1$, то $(\partial A_t)_0$ буде стягуваться в точку $[\pi_0(P_1)]_0 \in A \backslash \partial A$ . З рівності (4.6) та неперервності $[\pi_0]_0$ випливає, що при зміні $t$ множина $(\partial A_t)_0$ повинна пройти через всі точки множини $A$, включаючи $P_2$. Однак це суперечить умові $P_2 \notin [\pi_0(A)]_0$.

У другому випадку, якщо $(A \backslash \partial A) \cap [\pi_0(A)]_0 = \emptyset$. то існує таке $t_0 \in T$, при якому $(\partial A_t)_0$ проходить через нескінченно віддалену точку Однак, якщо розглядати $A$ як топологічний простір з тривіальною топологією, то відомо, що неперервний образ компактної множини залишається компактним. У просторі $\mathbb{R}^n$ компактні множини є обмеженими, тому $[\pi_0(A)]_0$ має бути обмеженою, що виключає можливість проходження через нескінченно віддалену точку.

Третій варіант також неможливий, оскільки, за визначенням множин П, $A$ та $[\pi_0(A)]_0$ вони не мають спільних точок, крім точок $\partial$A.

Таким чином, неможливо побудувати неперервне відображення $\pi_0 \colon H \to$ П, яке задовольняло б умову (4.5). Отже, існує принаймні одна точка, через яку проходить інтегральна крива, що залишається в області $\Omega$ при зменшенні $t$ на максимальному інтервалі свого існування.

Отримані результати дозволяють сформулювати теореми про асимптотичну поведінку розв'язків системи (3.1).

**Теорема 4.1.** Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$ та всі власні значення матриці $\Lambda$, $\lambda_i$, $i = \overline{1,n}$ є від'ємними. Тоді система (4.1) має принаймні один розв'язок, для якого разом з похідною при $t \to +0$ справджується наступна асимптотична поведінка:

$$\begin{cases} y_i = \sum_{m=2}^{N} \sum_{k=0}^{N+1} b_{mk}^i t^m \ln^k t + o(t^{N+\alpha_i}), \\ \dot{y}_i = \sum_{m=2}^{N} m b_{m0}^i t^{m-1} + \sum_{m=2}^{N} \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i t^{m-1} \ln^{k-1} t \, (m \ln t + k) + \\ +o(t^{N+\alpha_i - 1}), 0 < \alpha_i < \varepsilon < 1, \\ i = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (4.7$$

Доведення спирається на комбіноване застосування:

1. методу поверхонь без контакту
2. топологічного принципу Важевського

Розглядається випадок, коли кожна регулярна точка граничної поверхні $\partial\Omega$ має властивість строгої вихідної точки.

**Теорема 4.2.** Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$ та всі власні значення матриці $\Lambda$, $\lambda_i$, $i = \overline{1,n}$ є додатними. Тоді існує нескінченна множина розв'язків системи (4.1), що разом зі своїми похідними при $t \to +0$ володіють асимптотикою (4.7).

Доведення випливає із застосування методу кривих та поверхонь без контакту, а також топологічного принципу Важевського, за умови, що всі регулярні точки поверхні є точками строгого входу.

**Теорема 4.3.** “Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$ та власні значення матриці $\Lambda$, $\lambda_i$, $i = \overline{1, n}$ такі, що $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i < 0$. Тоді існує хоча б один розв’язок системи (4.1), що разом зі своєю похідною при $t \to +0$ володіє асимптотикою (4.7).

Наступні теореми застосовуються у випадку, коли $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda_0$.”

**Теорема 4.4.** Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$ та у матриці $\Lambda$ власне значення $\lambda_0 > 0$. Тоді існує нескінченна множина розв’язків системи (4.1), що разом зі своїми похідними при $t \to +0$ володіють асимптотикою (4.7).

**Теорема 4.5.** Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$ та у матриці $\Lambda$ власне значення $\lambda_0 < 0$. Тоді існує хоча б один розв’язок системи (4.1), що разом зі своєю похідною при $t \to +0$ володіє асимптотикою (4.7).

**Теорема 4.6.** Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$. та власні значення матриці $\Lambda$ такі, що $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0, p < n$ і $\lambda_i > 0, i = \overline{p+1, n}$. Тоді існує нескінченна множина розв’язків системи (3.1), що разом зі своїми похідними при $t \to +0$ володіють асимптотикою (4.7). Якщо ж $\lambda_i < 0$, $i = \overline{p+1, n}$, то існує хоча б один розв’язок системи (4.1), що разом зі своєю похідною при $t \to +0$ володіє асимптотикою (4.7).

# ВИСНОВКИ

У дослідженні було розглянуто та проаналізовано систему звичайних диференціальних рівнянь типу Бріо та Буке, які не розв'язані відносно похідних. Основна увага приділена системі вигляду:

$$\begin{cases} t\dfrac{dy_1}{dt} = p_{11}y_1 + \cdots + p_{1n}y_n + F_1(y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n, t); \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ t\dfrac{dy_n}{dt} = p_{n1}y_1 + \cdots + p_{nn}y_n + F_n(y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n, t). \end{cases} \tag{1.3}$$

де функції $Fs$ є голоморфними в околі точки (0,…,0) і не містять вільних та лінійних членів у своїх розкладах.

Основні результати можна сформулювати наступним чином:

1. **Формальні розв'язки для фіксованих розв'язків допоміжної системи**: Знайдено формальні розв'язки системи (1.3) у вигляді рядів:

$$\begin{cases} y_i = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k = \sum_{m=2}^{\infty} b_{m0}^i t^m + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k, \\ \qquad\qquad\qquad i = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{2.1}$$

де коефіцієнти $b_{mk}^i$ визначаються з рекурентних систем рівнянь (2.5), (2.17) тощо. Система (2.5) має вигляд

$$(P + \nu A - \nu E)b_{\nu 0} + (A - E)b_{\nu 1} = D_{\nu 1},$$

де

$$b_{\nu 0} = \begin{bmatrix} b_{\nu 0}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu 0}^n \end{bmatrix}, b_{\nu 1} = \begin{bmatrix} b_{\nu 1}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu 1}^n \end{bmatrix}, D_{\nu 1} = \begin{bmatrix} D_{\nu 1}^1 \\ \vdots \\ D_{\nu 1}^n \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij} = A^i_{0l_j1} + 2A^i_{0l_j2}\left(2b^j_{20} + b^j_{21}\right) + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} A^i_{0l_s+l_j0}(2b^s_{20} + b^s_{21}).$$

а система (2.17) – це:

$$\eta(A - E)b_{\nu\eta} = D_{\nu\eta},$$

де $\nu \geq 2, \eta \geq 2, b_{\nu\eta} = (b^1_{\nu\eta}, \dots, b^n_{\nu\eta})^T, D_{\nu\eta} = (D^1_{\nu\eta}, \dots, D^n_{\nu\eta})^T, A = \left(a_{ij}\right),$

$$a_{ij} = A^i_{0l_j1} + 2A^i_{02l_j1}\left(2b^j_{20} + b^j_{21}\right) + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} A^i_{0l_s+l_j0}(2b^s_{20} + b^s_{21}).$$

Доведено, що для фіксованих розв’язків допоміжної системи існують параметричні сім'ї розв'язків, які залежать від власних значень матриць $P+\nu A-\nu E$ та $A-E$ (теореми 2.1–2.9).

2. **Перехід до системи, роз 'язаної відносно похідних**:

   За допомогою заміни змінних (3.1) та (3.2) систему (1.3) зведено до вигляду, розв'язаного відносно похідних:

$$t^{N+\varepsilon}R(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y, S) = 0, \tag{3.3}$$

   де

$$R = (A - E)S + PY + D_{N,N+2}t^{-\varepsilon}\ln^{1-\varepsilon} t + T(t, t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}, Y, S),$$

   і вектор-функція $T$ голоморфна в точці $(0,0,0,0,0)$, а її розклад в околі цій точки не містить вільних та лінійних членів. Це дозволило подальше дослідження асимптотичної поведінки розв'язків.

3. **Асимптотична поведінка**:

   Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків при $t\to+0$. Для системи

$$t\dot{u} = \Lambda u + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^{\varepsilon})^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2}. \tag{4.1}$$

отриманої після зведення (1.3) до вигляду, розв'язаного відносно похідної, доведено наступне:

- Якщо власні значення матриці $\Lambda$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

від'ємні, то існує хоча б один розв'язок з асимптотикою

$$\begin{cases} y_i = \sum_{m=2}^{N} \sum_{k=0}^{N+1} b_{mk}^i t^m \ln^k t + o(t^{N+\alpha_i}), \\ \dot{y}_i = \sum_{m=2}^{N} m b_{m0}^i t^{m-1} + \sum_{m=2}^{N} \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i t^{m-1} \ln^{k-1} t \,(m \ln t + k) + \\ + o(t^{N+\alpha_i - 1}), 0 < \alpha_i < \varepsilon < 1, \\ i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad ($$

(теорема 4.1).

- Якщо власні значення додатні, існує нескінченна множина розв'язків з асимптотикою (4.7) (теорема 4.2).
- У випадку, коли власні значення мають різні знаки або частина їх дорівнює нулю, отримано аналогічні результати (теореми 4.3–4.6).
- Якщо матриця $\Lambda$ є матрицею Жордано, то дослідження проводяться аналогічно, враховуючи вигляд кожної клітини Жордано. Це дозволяє узагальнити результати для випадків з кратними власними значеннями.

Результати роботи розширюють відомі підходи до аналізу сингулярних систем типу Бріо та Буке та можуть бути застосовані для подальшого вивчення асимптотичної поведінки розв'язків у випадках з більш складними нелінійностями або додатковими обмеженнями.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bendixon J.Sur les courles de'fmies par des equations deffe'rentiellés // Acta Mathematical 901.-24.-C.1-88.

2. Briot Ch. et Bouquet J.Recherches sur les propriétés des fonctions definies par des equations deffe'rentielles //Journal de l'ecde polytechnique. Paris.- 1856.-21,cah.36.- c.133-198.

3. Bungartz P.Uber singulare Stellen analytischer Differentialgleichungen mit holomorph einmundenden Integralen.Doht.Dissertation.Bonn.-1969.

4. Campbell St.,Retzold L.Canonical forms and solvable singular systems of differential equations //SIAM J.Algebra and Discrete Methods.-1983.-№4-c.517-521.

5. Diblic J. On the an asymptotic behavior of solutions of a certain system of quasilinear differential equations not solved wich respect to derivatives //Rici Math. Univ. Parma. – 1987. – №13. – c. 413–419.

6. Hartman P.,Wintner A. On the asymptotic behavior of the solutions of a nonlinear differential equation //American Journal of Math.-1946/-68,№2- c.301-308.

7. Jwano M.On an n-parameter family of solutions of a nonlinear n-systems with an irregular type singularity //Ann.Math pura ed Appl.-1985.-№140.-c.57-145.

8. K. Mikhailenko, G. Samkova. The analytical solutions existence of the differential equations system in the domain with the special point on the boundary. The Fourth International Workshop-2009 Constructive methods for non-linear boundary value problems. Eger, Hungary, 2009. (4 July, 2009 organized by Institute of Mathematics,University of Miskolc, Hungary; Institute of Mathematics and Informatics of the Eszterházy Károly College, Eger and Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Czech Republic in cooperation with Miskolc Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences).

9. Wazewski T., Une methode topologique de l’examen du phenomene asymptotique reletivement aux equations differentielles ordinaries.- Atti della academia nazionale dei Lincei. Rendiconti. 1947,т.3, №3-4,p.210-215.