ISSN 2304–1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 59–66

УДК 517.9

З. М. Лысенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЯДРОМ БЕРГМАНА

Лисенко З. М. Двовимiрнi iнтегральнi оператори з ядром Бергмана. З точнiстю до iзометричного iзоморфiзму встановлено структуру простору Бергмана у смузi. Знайдено оператор, унiтарно еквiвалентний ортогональному проектору Бергмана у смузi.
Ключовi слова: простiр Бергмана, унiтарний оператор, спряжений оператор, компактний оператор.

Лысенко З. М. Двумерные интегральные операторы с ядром Бергмана. С точностью до изометрического изоморфизма установлена структура пространства Бергмана в полосе. Найден оператор, унитарно эквивалентный ортогональному проектору Бергмана в полосе.
Ключевые слова: пространство Бергмана, проектор Бергмана, унитарный оператор, сопряжённый оператор, компактный оператор.

Lysenko Z. M. Two-dimensional integral operators with the Bergman kernel. We describe the structure of the Bergman space in the strip up to isometric isomorphism. An operator was found which is unitary equivalent to the orthogonal Bergman projection in the strip.
Key words: Bergman space, Bergman projection, the unitary operator, the adjoint operator, a compact operator.

Введение.

1. Постановка задачи

Пусть D – связная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В пространстве $L_2(D)$ с обычной плоской мерой Лебега $d\nu(z) = dxdy$, где $z = x + iy$, введем оператор

$$(B_D\varphi)(z) = \int\limits_D K_D(z,\sigma)\varphi(\sigma)d\nu(\sigma),$$

где

$$K_D(z,\sigma) = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\partial^2 g(z,\sigma)}{\partial z\partial\overline{\sigma}}$$

есть керн-функция Бергмана [1], построенная по функции Грина $g(z,\sigma)$ области D. Известно [2], что B_D – ортогональный проектор (проектор Бергмана) пространства $L_2(D)$ на его замкнутое подпространство – пространство Бергмана $A^2(D)$, состоящее из всех функций, аналитических в области D.

Рассмотрим двумерный сингулярный интегральный оператор в $L_2(D)$, определяемый формулой

$$(S_D\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\varphi(\sigma)}{(\sigma - z)^2}d\nu(\sigma), \quad z \in D.$$

Тогда сопряженный к S_D двумерный сингулярный оператор S_D^* имеет вид:

$$(S_D^*\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\varphi(\sigma)}{(\overline{\sigma}-\overline{z})^2}d\nu(\sigma), \quad z \in D.$$

Для проектора Бергмана B_D имеет место следующее представление [2]:

$$B_D = I - S_D S_D^* + L,$$

где I – тождественный оператор, L – компактный оператор.

В работе изучаются пространство Бергмана и проектор Бергмана для полосы

$$S = \left\{w \in \mathbb{C} : |Re\, w| < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Интегральные операторы с керн-функцией Бергмана изучались многими авторами. Наиболее полное исследование таких операторов в случае, когда область D – единичный круг, проведена в [2]–[7]. Случай единичного круга в $\mathbb{C}^n$ рассматривался в [9]. В работах [5] и [10] рассматривались операторы Бергмана для верхней полуплоскости.

Результаты данной работы являются аналогом результатов, полученных ранее в [5] для случаев, когда область либо единичный круг, либо верхняя полуплоскость, и могут быть использованы для построения теории Фредгольма операторов из алгебры, одной из образующих которых является ортопроектор B_S.

2. Вспомогательные утверждения.

Известно [2], что ядро Бергмана для единичного круга $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ имеет вид:

$$K_{\mathbb{D}}(z,\sigma) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(1-z\overline{\sigma})^2}.$$

Воспользуемся следующим свойством керн-функции Бергмана [11]:

$$K_S(z,\sigma) = K_{\mathbb{D}}(z,\sigma)\cdot\alpha'(w)\cdot\overline{\alpha'(\omega)},$$

где $z = \alpha(\omega) = \operatorname{tg}\omega$. Отсюда вытекает

Теорема 1. *Проектор Бергмана*

$$B_S : L_2(S) \to A^2(S)$$

является интегральным оператором вида

$$(B_S\varphi)(w) = \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\varphi(\omega)}{\cos^2(w+\overline{\omega})}d\nu(\omega).$$

Пусть $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ – преобразование Фурье, определяемое формулой

$$(F\varphi)(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iu\xi}\varphi(\xi)d\xi.$$

Введем унитарный оператор

$$U_1 = I \otimes F,$$

действующий в пространстве $L_2(S) = L_2(G) \otimes L_2(\mathbb{R})$, где $G = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Тогда [2] пространство $A_1^2 = U_1(A^2(S))$ состоит из всех функций пространства $L_2(S)$, удовлетворяющих уравнению:

$$U_1\, 2\, \frac{\partial}{\partial \overline{w}}\, U_1^{-1}\varphi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial u} - v\right)\varphi(u,v) = 0.$$

Общим решением уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - v\right)\varphi(u,v) = 0,$$

как легко проверить, будет

$$\varphi(u,v) = \psi(v)e^{uv}, \quad u \in G, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Условие $\varphi \in L_2(S)$ удовлетворяется, если A_1^2 состоит из функций вида

$$\varphi_0(u,v) = \sqrt{\frac{v}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}v}} \cdot f(v) \cdot e^{uv}, \quad \text{где } f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Замечание. $\|\varphi_0\|_{A_1^2} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$.

Теорема 2. *Ортогональный проектор*

$$B_1 = U_1 B_S U_1^{-1} : L_2(S) \to A_1^2$$

представим в следующем виде:

$$(B_1\varphi)(u,v) = \frac{v}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}v} \cdot e^{uv} \cdot \int\limits_G \varphi(\xi,v)e^{\xi v}d\xi.$$

Доказательство. Представим ядро Бергмана $K_S(\omega,w)$ следующим образом:

$$K_S(\omega,w) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{2A}} \cdot \frac{e^{-2q}}{\left(e^{-\frac{A}{1/2}} + e^{-\frac{q}{1/2}}\right)^2},$$

где $\omega = \xi + iq$, $w = u + iv$; $A = i(\xi + u) + v$, $q \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{4} < \xi$, $u < \frac{\pi}{4}$. Согласно [12], преобразование Фурье ядра $K_S(\omega,w)$ относительно $q = Im\,\omega$ имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iAy} \cdot \frac{y}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}y}.$$

Отсюда

$$(I \otimes F)K_S(\omega,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(\xi+u)q} \cdot e^{-ivy} \cdot \frac{q}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}q}.$$

Непосредственно вычисляем:

$$\begin{aligned}\left(I\otimes F^{-1}\right)B_1\varphi &= B_S\left(I\otimes F^{-1}\right)\varphi = \\ &= \left\langle\left(I\otimes F^{-1}\right)\varphi, K_S(\omega,w)\right\rangle = \\ &= \langle\varphi,(I\otimes F)\,K_S(\omega,w)\rangle = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left\{\int\limits_G\varphi(\xi,q)e^{(\xi+u)q}\cdot\tfrac{q}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}q}d\xi\right\}e^{ivq}dq = \\ &= \left(I\otimes F^{-1}\right)\int\limits_G\varphi(\xi,v)e^{(\xi+u)v}\cdot\tfrac{v}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}v}d\xi.\end{aligned}$$

Отсюда

$$(B_1\varphi)(u,v)=\frac{v}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}v}\cdot e^{uv}\cdot\int\limits_G\varphi(\xi,v)e^{\xi v}d\xi.$$

□

Теорема 3. *Положим*

$$\varphi_0(u,v)=\sqrt{\frac{v}{sh\frac{\pi}{2}v}}\cdot f(v)\cdot e^{uv},$$

где

$$f(v)=\sqrt{\frac{v}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}v}}\cdot\int\limits_G\varphi(\xi,v)e^{\xi v}d\xi.$$

Тогда

$$B_1\varphi_0=\varphi_0.$$

Доказательство. Проводится непосредственной проверкой. □

Рассмотрим область

$$\widetilde{S}=\left\{(x,y)|y\in\mathbb{R},-\frac{\pi}{4}\,c_y<x<\frac{\pi}{4}\,c_y\right\},$$

где

$$c_y=\begin{cases}\frac{y}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}y} &, \quad y\neq 0,\\ \frac{2}{\pi} &, \quad y=0.\end{cases}$$

Введем унитарный оператор

$$U_2:L_2(S)\to L_2(\widetilde{S})$$

по правилу

$$U_2:\varphi(u,v)\mapsto\frac{1}{\sqrt{c_y}}\varphi\left(\frac{x}{c_y},y\right).$$

Тогда

$$U_2^{-1}:\varphi(x,y)\mapsto\sqrt{c_v}\varphi(uc_v,v).$$

Обозначим:

$$A_2^2=U_2\left(A_1^2\right),\quad B_2=U_2B_1U_2^{-1}.$$

Следовательно, B_2 — ортогональный оператор пространства $L_2(\widetilde{S})$ на A_2^2.

Теорема 4. *Проектор $B_2 : L_2(\widetilde{S}) \to A_2^2$ имеет следующий вид:*

$$(B_2\varphi)(x,y) = e^{x \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y} \int\limits_{I_y} \varphi(\nu, y) e^{\nu \frac{\pi}{2} y} d\nu,$$

где $I_y = \left(-\frac{\pi}{4} c_y, \frac{\pi}{4} c_y\right)$.

Доказательство. Проводится непосредственной проверкой. □

Основные результаты.

Обозначим

$$l_{0,y}(x) = e^{x \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\|l_{0,y}\|_{L_2(I_y)} = 1.$$

Фиксируем $y \in \mathbb{R}$. Пусть $L_{0,y}$ — одномерное подпространство пространства $L_2(I_y)$, порожденное $l_{0,y}(x)$. Тогда одномерный проектор

$$P_{0,y} : L_2(I_y) \to L_{0,y}$$

имеет вид:

$$(P_{0,y}\psi)(x) = \langle \psi, l_{0,y} \rangle \cdot l_{0,y} = e^{x \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y} \int\limits_{I_y} \psi(\xi) e^{\xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y} d\xi.$$

Отсюда и из теоремы 4 следует

Теорема 5.

$$B_2 = P_{0,y} \underset{y \in \mathbb{R}}{\otimes} I.$$

Из теорем 2 и 5 непосредственно вытекает

Теорема 6. *Унитарный оператор*

$$U = U_2 U_1 : L_2(S) \to L_2(\widetilde{S})$$

устанавливает изометрический изоморфизм пространств

$$L_2(S) = L_2(G) \otimes L_2(\mathbb{R})$$

и

$$L_2(\widetilde{S}) = L_2(I_y) \underset{y \in \mathbb{R}}{\otimes} L_2(\mathbb{R}),$$

при котором

1) пространство Бергмана $A^2(S)$ отображается на $L_{0,y} \underset{y \in \mathbb{R}}{\otimes} L_2(\mathbb{R})$, где $L_{0,y}$ — одномерное подпространство пространства $L_2(y)$, порожденное $l_{0,y}(x) = e^{x \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y}$, $x \in I_y$;

2) проектор Бергмана B_S унитарно эквивалентен

$$U B_S U^{-1} = P_{0,y} \underset{y \in \mathbb{R}}{\otimes} I,$$

при этом $P_{0,y}$ — одномерный проектор $L_2(I_y)$ на $L_{0,y}$.

Введём изометрический изоморфизм

$$R_0 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\widetilde{S})$$

по правилу:

$$\big(R_0 f\big)(x,y) = f(y) l_{0,y}(x).$$

Тогда сопряженный оператор

$$R_0^* : L_2(\widetilde{S}) \to L_2(\mathbb{R})$$

представим в следующем виде:

$$\big(R_0^* g\big)(y) = \int\limits_{I_y} l_{0,y}(x) g(x,y) dx.$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что для операторов

$$R_0^* R_0 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$$

и

$$R_0 R_0^* : L_2(\widetilde{S}) \to A_2^2$$

имеют место равенства:

$$R_0 R_0^* = I, \quad R_0^* R_0 = B_2.$$

Введем оператор

$$R = R_0^* U : L_2(S) \to L_2(\mathbb{R}).$$

Сужение

$$R\big|_{A^2(S)} : A^2(S) \to L_2(\mathbb{R})$$

является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств.

Теорема 7. $RR^* = I$, $R^* R = B_S$.

Доказательство.

$$RR^* = (R_0^* U)(U^* R_0) = R_0^* (UU^*) R_0 = R_0^* R_0 = I;$$

$$R^* R = U^* (R_0 R_0^*) U = U^* B_2 U = U^* (U B_S U^{-1}) U = B_S.$$

□

Теорема 8. *Для изометрического изоморфизма*

$$R^* = U^* R_0 : L_2(\mathbb{R}) \to A^2(S)$$

имеет место следующее интегральное представление:

$$\big(R^* f\big)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{c_\xi} \cdot f(\xi) \cdot e^{\xi z} d\xi.$$

Доказательство. Непосредственно находим

$$\begin{aligned}\left(U^* R_0 f\right)(z) &= \left(\left(U_2 U_1^*\right) R_0 f\right)(z) = U_1^{-1} U_2^{-1} f(y) l_{0,y}(x) = \\ &= \left(I \otimes F^{-1}\right)\left\{\sqrt{\frac{v}{sh \frac{\pi}{2} v}} \cdot f(v) \cdot e^{u c_v \cdot \mathrm{sh}\, \frac{\pi}{2} v}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\xi}{sh \frac{\pi}{2} \xi}} \cdot f(\xi) \cdot e^{x\xi} \cdot e^{i\xi y} d\xi.\end{aligned}$$

□

Замечание 1. *Из теоремы 8 следует, что*

$$\begin{aligned}\langle f, R^* g\rangle &= \int\limits_S f(x,y)\left\{\overline{\int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{c_\xi} g(\xi) e^{\xi(x+iy)} d\xi}\right\} dx\, dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{g(\xi)} d\xi \int\limits_S \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x,y) \sqrt{c_\xi} e^{\xi(x-iy)}\right\} dx\, dy.\end{aligned}$$

Отсюда для оператора $R : A^2(S) \to L_2(\mathbb{R})$ получим следующее интегральное представление:

$$\left(Rf\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{c_\xi} \cdot \int\limits_S f(x,y) e^{\xi\overline{\omega}} d\mu(\omega).$$

Заключение. В данной работе с точностью до изометрического изоморфизма установлена структура пространства Бергмана в полосе. Найден оператор, унитарно эквивалентный ортогональному проектору Бергмана в полосе.

1. **Bergman S.** The kernel function and conformal mapping [text] / S. Bergman // Math Surveys. Amer. Math. Soc., 1950. – № 5. – 161 p.
2. **Джураев А. Д.** Метод сингулярных интегральных уравнений [текст] / А. Д. Джураев // М.: Наука, 1987. – 415 с.
3. **Комяк И. И.** Об условиях нётеровости и формуле для индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений [текст] / И. И. Комяк // ДАН БССР. – 1979. – Т. 22. – № 6. – С. 488–491.
4. **Комяк И. И.** Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Бергмана [текст] / И. И. Комяк // ДАН БССР. – 1979. – Т. 23. – № 1. – С. 8–11.
5. **Vasilevski Nikolai** Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space [text] / Nikolai L. Vasilevski // Series: Operator Theory: Advances and Applications. – 2008. – Vol. 185. – 417 p.
6. **Loaiza Maribel** Algebras generated by the Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions [text] / Maribel Loaiza // Integr. equ. oper. theory. – 2003. – T. 46 – P. 215–234.
7. **Sanchez-Nungaray Armando** Toeplitz operators on the Bergman spaces with pseudodifferential defining symbols [text] / Armando Sanchez-Nungaray and Nikolai Vasilevski // Operator Theory: Advances and Applications. – 2011, Vol. 1. – P. 1–20.

8. **Ze-Hua Zhou** Algebraic properties of Toeplitz operators with radial symbols on the Bergman space of the unit balls [text] / Ze-Hua Zhou and Xing-Tang Dong // Integr. equ. oper. theory. – 2009. – T. 64. – P. 137–154.

9. **Zhi Ling Sun** Toeplitz Operators on the weighted pluriharmonic Bergman space with radial symbols [text] / Zhi Ling Sun and Yu Feng Lu // Abstract and Applied Analysis. – 2011. – 15 p.

10. **Karlovich Yu. I.** Algebras generated by Bergman and anti-Bergman projections and by multiplications by piecewice continuous functions [text] / Yu. I. Karlovich and Luis Pessoa // Integr. equ. oper. theory. – 2005. – T. 52. – P. 219–270.

11. **Курант Р.** Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности [текст] / Р. Курант. – М., 1962. – 254 с.

12. **Бэйтмен Г.** Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина [текст] / Т. Бэйтмен, А. Эрдейн. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 343 с.