

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра Теоретичної механіки

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Комп'ютерне моделювання руху сферичного кривошипно-
коромислового механізму»

«Computer simulation of the motion of a spherical crank mechanism»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Холодков Юрій Юрійович

Керівник к.тех.н, Косой М.Б.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент ст. викладач Царенко О. П.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ р.

Захищено на засіданні ЕК № _____

протокол № ____ від _____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

(підпис) Волков В.Е.
(прізвище, ініціали)

Голова ЕК

(підпис) Волков В.Е.
(прізвище, ініціали)

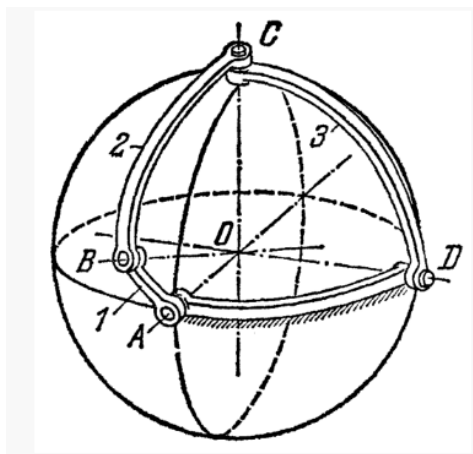
Одеса – 2021

Зміст

Зміст.....	2
Вступ	3
Математична модель механізму.....	4
Кінематика	4
Динаміка	7
Розв’язання задачі Коші про рух сферичного кривошипно-коромислового механізму	11
Аналіз результатів розрахунку	13
Висновки.....	20
Література	21

Вступ

Сферичний кривошипно-коромисловий механізм виконується у вигляді чотириланкового механізму, до складу якого входять кривошип і коромисло. Даний механізм служить для перетворення обертового руху кривошипа АВ



в рух, що гойдає коромисло CD або навпаки - рух, що гойдає в обертовий рух кривошипа. Кривошип АВ з'єднаний з коромислом CD за допомогою шатуна BC. Функція положення кривошипно-коромислового механізму пов'язує кут гойдання коромисла ψ з кутом повороту кривошипа β . За один оберт кривошипа коромисло повертається на кут ψ в один бік і

на такий же кут в інший бік. При хитанні коромисла від одного крайнього положення до іншого кривошип повертається на кут $\beta = 180^\circ$. Зазвичай розміри ланок вказаного механізму підібрані таким чином, що за половину оберту кривошипа коромисло здійснює повне хитання. Функція положення кривошипно-коромислового механізму має симетричний вид. Кривошипно-коромислові механізми широко застосовуються на нафтопромислах.

Об'єкт дослідження – механічна система “сферичний кривошипно-коромисловий механізм”.

Мета роботи – комп'ютерне моделювання руху сферичного кривошипно-коромислового механізму.

Математична модель механізму

Кінематика

Механізм має 1 ступінь свободи. Ланка СВ рухома, положення визначається за допомогою рівняння зв'язку.

Таблиця полярних координат рівняння механізму.

	A	B	C	D	B_0
Φ	0	φ_B	0	$0.5\pi R$	φ_{B_0}
Θ	$0.5\pi R$	θ_B	θ_C	$0.5\pi R$	$0.5\pi R$

Таблиця декартових координат радіус векторів кутів.

	x	y	z
\overline{OA}	R	0	0
\overline{OB}	$\sin \theta_B \cos \varphi_B * R$	$\sin \theta_B \sin \varphi_B * R$	$\cos \varphi_B * R$
\overline{OD}	0	R	0
\overline{OC}	$\sin \theta_C * R$	0	$\cos \theta_C * R$
$\overline{OB_0}$	$\cos \varphi_{B_0} * R$	$\sin \varphi_{B_0} * R$	0

Залежність полярних координат вузлів механізму від β

Вектори \overline{NB} та $\overline{NB_0}$.

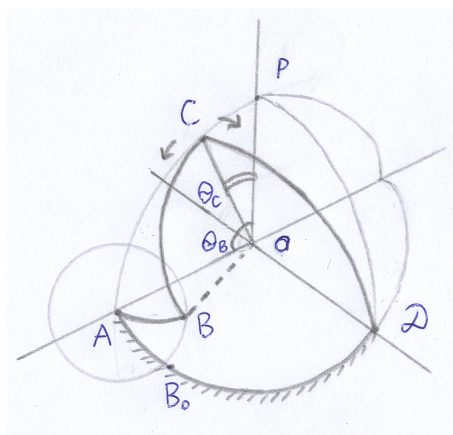
$$\cos \beta = \frac{\overline{NB} \overline{NB_0}}{|\overline{NB}| |\overline{NB_0}|}$$

$$\overline{NB_0} = \overline{OB_0} - \overline{ON}$$

$$\overline{NB} = \overline{OB} - \overline{ON}$$

$$\overline{ON} = (R \cos \varphi_{B_0}, 0, 0)$$

З таблиці 2 $\overline{NB_0} = (0, R \cos \varphi_{B_0}, 0)$



Також ясно, що x координата точки B незмінна і дорівнює $R \cos \varphi_{B_0}$.

$$\cos \varphi_{B_0} = \sin \theta_B \cos \varphi_B \quad (1)$$

$$\overline{NB} = (0, R \sin \theta_B \sin \varphi, R \cos \theta_B)$$

$$\cos^2 \beta = \frac{\sin^4 \theta_B \sin^2 \varphi_B}{\sin^4 \theta_B \sin^2 \varphi_B + \sin^2 \theta_B \cos^2 \theta_B}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \frac{\cos^2 \theta_B}{\sin^2 \theta_B \sin^2 \varphi_B} \Rightarrow (\operatorname{tg} \beta)^2 = \frac{\cos^2 \theta_B}{\sin^2 \theta_B \sin^2 \varphi_B} \Rightarrow (\operatorname{tg} \beta)^2 = \frac{\cos^2 \theta_B}{\sin^2 \theta_B - \cos^2 \varphi_{B_0}} =$$

$$\frac{\cos^2 \theta_B}{(1 - \cos^2 \theta_B) - \cos^2 \varphi_{B_0}} \Rightarrow (\operatorname{tg} \beta)^2 (1 - \cos^2 \varphi_{B_0}) = (1 + (\operatorname{tg} \beta)^2) \cos^2 \theta_B$$

$$\cos^2 \theta_B = \frac{(\operatorname{tg} \beta)^2 (1 - \cos^2 \varphi_{B_0})}{(1 + (\operatorname{tg} \beta)^2)} \Rightarrow \cos \theta_B = \pm \sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_{B_0})} \sqrt{\frac{(\operatorname{tg} \beta)^2}{(1 + (\operatorname{tg} \beta)^2)}} \Rightarrow$$

$$\cos \theta_B = \pm \sin \beta \sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_{B_0})} \quad (2)$$

При $0 \leq \beta \leq \pi$: $0 \leq \theta_B \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \beta \geq 0$, $\cos \theta_B \geq 0$

При $\pi \leq \beta \leq 2\pi$: $\frac{\pi}{2} \leq \theta_B \leq \pi$, $\sin \beta < 0$, $\cos \theta_B < 0$

Саме тому в (2) залишається лише «+»:

$$\begin{cases} \cos \theta_B = \sin \beta \sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_{B_0})} = \sin \beta \sin \varphi_{B_0} \\ \sin \theta_B = \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{B_0}} \end{cases} \quad (3)$$

З (1) робимо висновок, що:

$$\cos \varphi_B = \frac{\cos \varphi_{B_0}}{\sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{B_0}}} > 0$$

$$\text{Далі, } \sin^2 \varphi_B = \frac{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{B_0} - \cos^2 \varphi_{B_0}}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{B_0}} = \frac{\cos^2 \beta (1 - \cos^2 \varphi_{B_0})}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{B_0}}$$

$$\sin \varphi_B = \pm \cos \beta \sqrt{\frac{(1 - \cos^2 \varphi_{B_0})}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{B_0}}} \quad (4)$$

При $-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}\pi$: $0 \leq \varphi_B \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos \beta \geq 0$, $\sin \varphi_B \geq 0$

При $0 \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_B \leq 0$, $\cos \beta < 0$, $\sin \varphi_B < 0$

Тобто, в (4) знак «+»

$$\begin{cases} \cos \varphi_B = \frac{\cos \varphi_{B_0}}{\sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{B_0}}} \\ \sin \varphi_B = \cos \beta \frac{\sin \varphi_{B_0}}{\sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{B_0}}} \end{cases} \quad (5)$$

Рівняння сталості довжини дуг \widetilde{BC} , \widetilde{AB} дозволяє визначити координати точки

$$C: \cos(\widetilde{BC}) = \frac{\overline{OC} + \overline{OB}}{|\overline{OC}| |\overline{OB}|}$$

Підставимо значення координат векторів з таблиці 1.

$$\cos(\widetilde{BC}) = \sin \theta_B \sin \theta_C \cos \varphi_B + \cos \theta_B \cos \theta_C$$

Виходячи з (3) і (5) отримуємо:

$$\cos(\widetilde{BC}) = \cos \varphi_{B_0} \sin \theta_C + \sin \varphi_{B_0} \cos \theta_C \sin \beta \quad (6)$$

Інакше

$$\cos(\widetilde{BC}) = \cos \varphi_{B_0} \sqrt{\frac{(\operatorname{tg} \theta_C)^2}{(\operatorname{tg} \theta_C)^2 + 1}} + \sin^2 \varphi_{B_0} \sqrt{\frac{1}{(\operatorname{tg} \theta_C)^2 + 1}} \sin \beta \quad (6)'$$

$$\cos^2(\widetilde{BC}) = \cos^2 \varphi_{B_0} \frac{(\operatorname{tg} \theta_C)^2}{(\operatorname{tg} \theta_C)^2 + 1} + \sin^2 \varphi_{B_0} \frac{1}{(\operatorname{tg} \theta_C)^2 + 1} \sin^2 \beta$$

$$\cos^2(\widetilde{BC})((\operatorname{tg} \theta_C)^2 + 1) = \cos^2 \varphi_{B_0} \operatorname{tg}^2 \theta_C + \sin^2 \varphi_{B_0} \sin^2 \beta +$$

$$2 \cos \varphi_{B_0} \sin \varphi_{B_0} \sin \beta \operatorname{tg} \theta_C$$

$$\alpha = \cos(\widetilde{BC})$$

$$(\cos^2 \varphi_{B_0} - \alpha^2) \operatorname{tg}^2 \theta_C + 2 \cos \varphi_{B_0} \sin \varphi_{B_0} \sin \beta \operatorname{tg} \theta_C + \sin^2 \varphi_{B_0} \sin^2 \beta - \alpha^2$$

$$D = 4\alpha^2 \cos^2 \varphi_{B_0} + 4\alpha^2 \sin^2 \varphi_{B_0} \sin^2 \beta - 4\alpha^2 =$$

$$4\alpha^2 (\cos^2 \varphi_{B_0} + \sin^2 \varphi_{B_0} \sin^2 \beta - \alpha^2) \quad (7)$$

Для визначення значення дискримінанту підставимо в (7) значення $\cos^2(\widetilde{BC})$

з (6)'

$$\cos^2 \varphi_{B_0} \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_c}{(\operatorname{tg} \theta_c)^2 + 1}\right) + \sin^2 \varphi_{B_0} \sin^2 \beta \left(1 - \frac{1}{(\operatorname{tg} \theta_c)^2 + 1}\right) - 2 \sin \varphi_{B_0} \cos \varphi_{B_0} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_c}{(\operatorname{tg} \theta_c)^2 + 1}$$

$$\sin \beta = \cos^2 \varphi_{B_0} \cos^2 \theta_c + \sin^2 \varphi_{B_0} \sin^2 \theta_c \sin^2 \beta -$$

$$2 \sin \varphi_{B_0} \cos \varphi_{B_0} \sin \theta_c \cos \theta_c \sin \beta = \left(\cos \varphi_{B_0} \cos \theta_c - \sin \varphi_{B_0} \sin \theta_c \sin \beta\right)^2 \geq 0$$

Тоді

$$\operatorname{tg} \theta_c = \frac{-\cos \varphi_{B_0} \sin \varphi_{B_0} \sin \beta \pm \cos(\widehat{BC}) \sqrt{\cos^2 \varphi_{B_0} + \sin^2 \varphi_{B_0} \sin^2 \beta - \cos^2(\widehat{BC})}}{(\cos^2 \varphi_{B_0} - \cos^2(\widehat{BC}))} \quad (8)$$

$\operatorname{tg} \theta_c$ не може бути від'ємним, так як $0 < \theta_c < \frac{\pi}{2}$

Таким чином

$$\operatorname{tg} \theta_c = \frac{-\cos \varphi_{B_0} \sin \varphi_{B_0} \sin \beta - \cos(\widehat{BC}) \sqrt{\cos^2 \varphi_{B_0} + \sin^2 \varphi_{B_0} \sin^2 \beta - \cos^2(\widehat{BC})}}{(\cos^2 \varphi_{B_0} - \cos^2(\widehat{BC}))} \quad (8)'$$

$$\cos \theta_c = + \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_c + 1}}; \quad \sin \theta_c = + \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \theta_c}{\operatorname{tg}^2 \theta_c + 1}}$$

тому що $\operatorname{tg} \theta_c > 0$

Динаміка

Так як усі координати системи залежать від β , обираємо її в якості узагальненої координати системи.

Кінетична енергія механізму

Ланка АВ. $T_{AB} = \frac{I_{OA}^{AB} \cdot \dot{\beta}^2}{2}$, де I_{OA}^{AB} – момент інерції ланки АВ відносно вісі ОА,

точка А нерухома.

ЛАНКА DC: $T_{AB} = \frac{I_{OD}^{DC} \cdot \dot{\psi}^2}{2}$, де I_{OD}^{DC} – момент інерції ланки CD відносно вісі OD,

точка D нерухома.

ЛАНКА СВ: $T_{CB} = \frac{I_{CD}^{CB} \cdot \dot{\gamma}^2}{2} + \frac{m_{OB} \cdot v_c^2}{2}$, де I_{CD}^{CB} – момент інерції ланки СВ відносно

вісі ОС, точка D рухається зі швидкістю $\vec{V}_c = \overline{\dot{\psi}}_{OC} \times \vec{R}_c$, m – маса ланки СВ, $\dot{\gamma}$ – кутова швидкість ланки СВ відносно точки С.

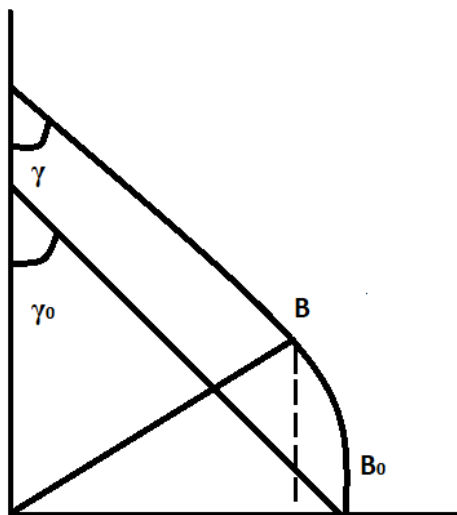
З аналізу конструкції відомо, що $\overline{\dot{\psi}}_{OC} = \overline{\dot{\Theta}}_C$. Кут γ можна знайти через відношення сторін і кутів сферичного трикутника ABC:

$$\frac{\sin(\overline{CB})}{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)} = \frac{\sin(\overline{AB})}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin(\overline{AB}) \cos \beta}{\sin(\overline{CB})}$$

$$\cos \dot{\gamma} = - \frac{\sin(\overline{AB})}{\sin(\overline{CB})} \sin \beta \dot{\beta}$$

$$\dot{\gamma} = \pm \frac{\frac{\sin(\overline{AB})}{\sin(\overline{CB})} \sin \beta \dot{\beta}}{\sqrt{1 - \frac{\sin(\overline{AB}) \cos \beta}{\sin(\overline{CB})}}}$$



за

При $0 \leq b \leq \pi$ відміряємо від дотичного напрямку до меридіана

годинниковою стрілкою в додатньому напрямку. При $\beta = 0$ γ має додатні значення.

При зростанні β від 0 до $\frac{\pi}{2}$ γ зменшується, тобто $\dot{\gamma} < 0$

Приріст β від $\frac{\pi}{2}$ до π $\dot{\gamma} < 0$, при $\beta = \pi$ γ досягає свого *min*, $\dot{\gamma} = 0$

При $\pi \leq b \leq \frac{3\pi}{2}$ $\gamma < 0$, $\dot{\gamma} > 0$ і при $\beta = \frac{3\pi}{2}$ γ досягає свого *max*

При $\frac{3\pi}{2} \leq b \leq 2\pi$ $\gamma > 0$, $\dot{\gamma} < 0$ і при $\beta = 2\pi$ $\gamma = 0$

Таким чином, з (1) виходить, що:

$$\dot{\gamma} = - \frac{\sin(\overline{AB})}{\sin(\overline{CB})} \dot{\beta} \sin \beta / \sqrt{\left(4 - \frac{\sin(\overline{AB})}{\sin(\overline{CB})} \cos \beta\right)^2}$$

Для визначення зв'язку $\Psi = \overline{\Theta}$

Введемо обмеження $A_\Psi(\beta) = \sqrt{\cos^2 \gamma_{B_0} + \sin^2 \gamma_{B_0} - \cos^2(\overline{BC})}$

Таким чином:
$$\frac{\dot{\Psi}}{\cos^2 \Psi} = \frac{-(\cos \varphi_{B_0} \sin \varphi_{B_0} + 2 \cos(\overline{BC})(A_\Psi)'_\beta) \dot{\beta}}{(\cos^2 \varphi_{B_0} - \cos^2(\overline{BC}))(tg^2 \Psi + 1)}$$
 (9)

$$(A_\Psi)'_\beta = \frac{\sin^2 \varphi_{B_0} \sin \beta \cos \beta}{A_\Psi(\beta)}$$

Введемо функцію $A_\gamma(\beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\overline{AB})}{\sin(\overline{BC})} \cos\beta\right)^2}$

$$\gamma = - \frac{\sin(\overline{AB}) \sin\beta}{\sin(\overline{CB})} \quad (10)$$

Кінетична енергія системи має вигляд

$$T = \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(I_{OA}^{AB} + I_{CD}^{CB} \left(\frac{\sin(\overline{AB}) \sin\beta}{\sin(\overline{CB}) A_\gamma(\beta)} \right)^2 + (I_{CD}^{CB} + m_B R_c^2) \left(\frac{\cos\phi_{B_0} \sin\phi_{m_0} \cos\beta + 2\cos(\overline{BC}) ((A_\psi)'_\beta)^2}{(\cos^2\phi_{B_0} - \cos^2(\overline{BC})) (\text{tg}^2\psi + 1)} \right)^2 \right) \right] \dot{\beta}$$

Будуємо складові рівняння Лагранжа 2-го роду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\beta}} \right) - \frac{\delta T}{\delta \beta} = N$$

$$\frac{\delta T}{\delta \beta} = \frac{T}{\dot{\beta}} \quad (12)$$

$$\frac{\delta T}{\delta \beta} = \frac{1}{2} \left[\left(I_{CB}^{AB} \cdot 2 \dot{\gamma} \frac{\sin(\overline{AB})}{\sin(\overline{CB})} \left(\frac{\cos\beta A_\gamma(\beta) - \sin\beta (A_\gamma(\beta))'_\beta}{(A_\gamma(\beta))^2} \right) + (I_{OD}^{OC} + m_B R_c^2) 2 \cdot \dot{\psi} \cdot (C_\psi)'_\beta \right) \right] \quad (13)$$

$$\text{Де } C_\psi = \frac{\cos\phi_{B_0} \sin\phi_{m_0} \cos\beta + \cos(\overline{BC}) (A_\psi)'_\beta}{(\cos^2\phi_{B_0} - \cos^2(\overline{BC})) (\text{tg}^2\psi + 1)} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& (C_\psi)'_{\beta} \\
& = \left[(-\cos \varphi_{B_0} \sin \varphi_{B_0} \sin \beta + 2\cos(\overline{BC})(A'_{\psi})''_{\beta} (\cos^2 \varphi_{B_0} - \cos^2(\overline{BC}))(tg^2 \psi - \right. \\
& \left. 1) - (\cos \varphi_{B_0} \sin \varphi_{B_0} \cos \beta + 2\cos(\overline{BC})(A_{\psi})'_{\beta})(\cos^2 \varphi_{B_0} - \right. \\
& \left. \cos^2(\overline{BC})2tg\psi \frac{(\psi)'_{\beta}}{\cos^2 \psi}) \right] \\
& : (\cos^2 \varphi_{B_0} - \cos^2(\overline{BC}))^2 (tg^2 \psi + 1)^2, (\psi)'_{\beta} = \frac{\dot{\psi}}{\beta}
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \dot{\beta}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2T}{\dot{\beta}} \right) = 2 \left(\frac{\left(\frac{\partial \tau}{\partial \dot{\beta}} \dot{\beta} + \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \ddot{\beta} \right) \dot{\beta} - T \ddot{\beta}}{(\dot{\beta})^2} \right) = \frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \frac{T \ddot{\beta}}{(\dot{\beta})^2} \tag{16}$$

Узагальнені сили – це зовнішній момент, прикладений до ланки АВ, та момент в підшипниках механізму, пропорціональних квадратам швидкостей обертання підшипників. Коефіцієнти моментів сил тертя залежать від властивостей мастила, розмірів підшипників та інших конструкторських властивостей.

Таким чином рівняння Лагранжа II-го роду для механізму має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} + \frac{T \ddot{\beta}}{(\dot{\beta})^2} = M - \alpha ((\dot{\beta})^2 + (\dot{\gamma})^2 + (\dot{\psi})^2) \tag{17}$$

З вище наведених рівнянь для компонентів $\frac{\partial \tau}{\partial \beta}$ і Т робимо висновок, що рівняння (17) лінійне і може бути розв'язане чисельно.

Розв'язання задачі Коші про рух сферичного кривошипно-коромислового механізму

Диференціальне рівняння (11) разом з початковими значеннями $\beta(0)$ і $\dot{\beta}(0)$ є математичною моделлю механізму. Для її числової реалізації можна використати метод Рунге-Кутта 4 порядку. Для його застосування необхідно привести Задачу Коші до системи рівнянь першого порядку в нормальній формі.

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \eta \\ \dot{\eta} = \frac{0,5}{T^*} \left(M - \frac{\partial T}{\partial \beta} - \alpha (\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\psi}^2) \right) \\ \beta(0) = \beta_0, \eta(0) = \dot{\beta}_0 \end{cases} \quad (18)$$

де T^* коефіцієнт при $\dot{\beta}^2$ в (5). Розрахункова схема рішення має наступний вигляд.

Функції правих частин системи:

$$\begin{aligned} - f_{\beta}(\beta, \eta) &= \eta; \\ - f_{\eta}(\beta, \eta) &= \frac{0,5}{T^*} \left(M - \frac{\partial T}{\partial \beta} - \alpha (\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\psi}^2) \right), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} T^* &= 0,5(m_{CB} + I_{OD}^{CD}) \frac{A_2 A_3}{BA_4} + I_{OB}^{CB} A_6 + I_{OA}^{AB}; \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} &= 0,5 \dot{\beta}^2 (m_{CB} + I_{OD}^{CD}) \frac{(\dot{A}_2 A_3 + A_2 \dot{A}_3) BA_4 - (\dot{B}A_4 + B\dot{A}_4) A_2 A_3}{(BA_4)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sqrt{1 - \left(\frac{\cos(\beta) \sin(AB)}{\cos(BC)} \right)^2}; & A_1 &= \sqrt{\cos^2(AB) + \sin^2(AB) \sin^2(\beta) - \cos^2(BC)}; \\
A_2 &= (\cos(\beta) \sin(AB))^2; & A_3 &= \left(\frac{\cos(AB) - 2 \cos(BC) \sin(AB) \sin(\beta)}{A_1} \right)^2; \\
A_4 &= (\cos^2(AB) - \cos^2(BC))^2; & A_5 &= (\cos(AB) \sin(AB) \sin(\beta) + 2A_1 \cos(BC))^2; \\
A_6 &= \left(\frac{\sin(AB) \sin(\beta)}{A_0 \cos(BC)} \right)^2; & B &= \left(1 - \frac{A_5}{A_4} \right)^2; \\
\dot{A}_0 &= \frac{\cos(\beta) \sin(\beta) \sin^2(AB)}{A_0 \cos^2(BC)}; & \dot{A}_1 &= \frac{\cos(\beta) \sin(\beta) \sin^2(AB)}{A_1}; \\
\dot{A}_2 &= -2\sqrt{A_2} (\sin(\beta) \sin(AB)); & \dot{A}_3 &= 4\sqrt{A_3} \left(\frac{A_1 \cos(\beta) - \dot{A}_1 \sin(\beta)}{A_1^2} \right) \cos(BC) \sin(AB); \\
\dot{A}_4 &= 0; & \dot{A}_5 &= 2\sqrt{A_5} (\cos(AB) \sin(AB) \cos(\beta) + 2\dot{A}_1 \cos(BC)); \\
\dot{A}_6 &= 2\sqrt{A_6} \left(\frac{A_0 \cos(\beta) - \dot{A}_0 \sin(\beta)}{A_0^2} \right) \frac{\sin(AB)}{\cos(BC)}; & \dot{B} &= -2\sqrt{B} \left(\frac{\dot{A}_5}{A_4} \right).
\end{aligned}$$

Ітерації розраховуються за формулами:

$$\begin{aligned}
\beta_{i+1} &= \beta_i + \frac{\Delta t}{6} (k_1^\beta + 2k_2^\beta + 2k_3^\beta + k_4^\beta); \\
k_1^\beta &= f_\beta(\beta_i, \eta_i); & k_2^\beta &= f_\beta \left(\beta_i + \frac{\Delta t}{2} k_1^\beta, \eta_i + \frac{\Delta t}{2} k_1^\eta \right); \\
k_3^\beta &= f_\beta \left(\beta_i + \frac{\Delta t}{2} k_2^\beta, \eta_i + \frac{\Delta t}{2} k_2^\eta \right); & k_4^\beta &= f_\beta(\beta_i + \Delta t k_3^\beta, \eta_i + \Delta t k_3^\eta); \\
\eta_{i+1} &= \eta_i + \frac{\Delta t}{6} (k_1^\eta + 2k_2^\eta + 2k_3^\eta + k_4^\eta); \\
k_1^\eta &= f_\eta(\beta_i, \eta_i); & k_2^\eta &= f_\eta \left(\beta_i + \frac{\Delta t}{2} k_1^\beta, \eta_i + \frac{\Delta t}{2} k_1^\eta \right); \\
k_3^\eta &= f_\eta \left(\beta_i + \frac{\Delta t}{2} k_2^\beta, \eta_i + \frac{\Delta t}{2} k_2^\eta \right); & k_4^\eta &= f_\eta(\beta_i + \Delta t k_3^\beta, \eta_i + \Delta t k_3^\eta);
\end{aligned}$$

де Δt часовий шаг ітерації.

Аналіз результатів розрахунку

Для розрахунку беруться наступні початкові дані . Сфера одиничного радіуса. Маса ланки СВ $m_{CB}=1$. Моменти інерції ланок щодо кінців дуг: $I_{OA}^{AB}=1-\cos(AB)$; $I_{OB}^{CB}=1-\cos(CB)$; $I_{OD}^{CD}=1$. Початковий кут $\beta(0)$ дорівнює 0, початкова кутова швидкість $\dot{\beta}(0)=0$.

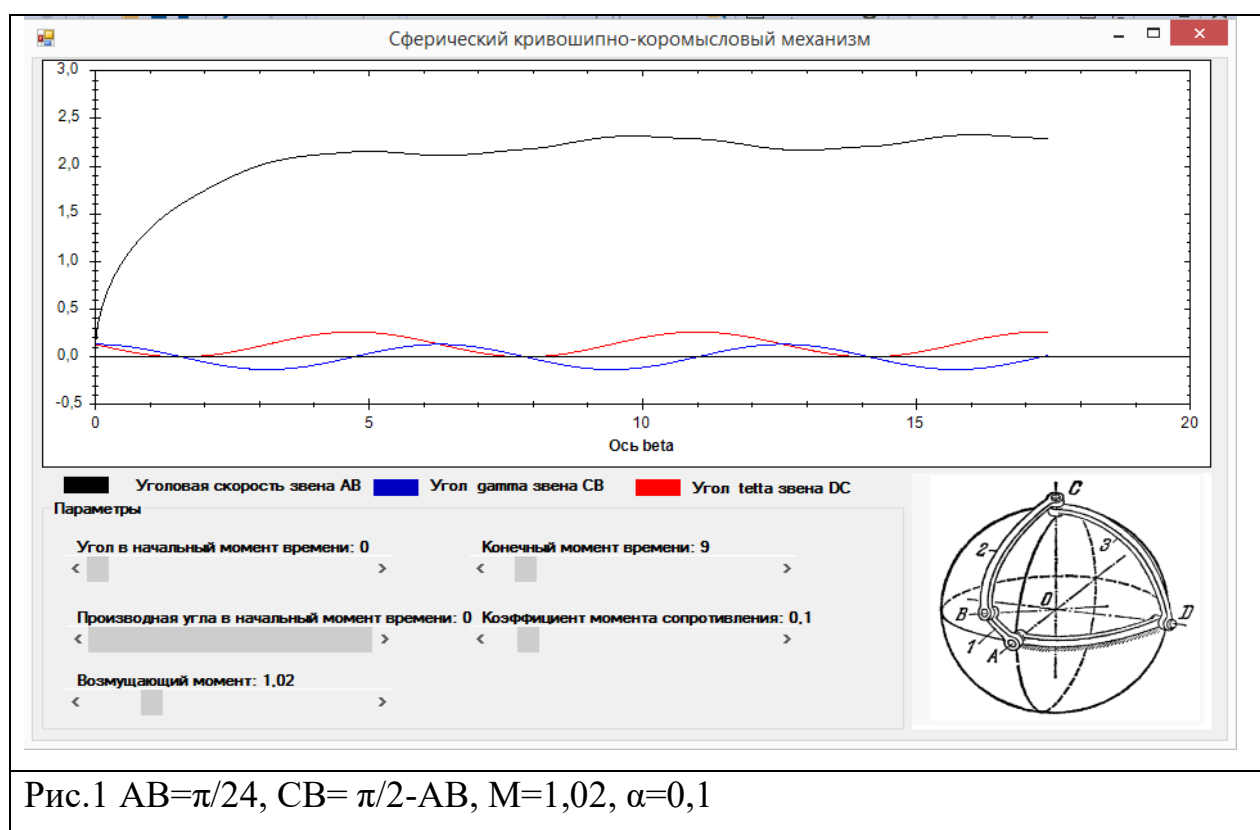
Було проведено кілька розрахунків для різних значень довжин дуг АВ і СВ. Через те, що радіус сфери дорівнює 1, довжина дуги АВ збігається зі своєю кутовою мірою. Таким чином $AB = \varphi_{B0}$ виходила з діапазону $\left[\frac{\pi}{24}; \frac{\pi}{12}\right]$.

Довжина ланки СВ було обрана таким чином, щоб сума довжин АВ і СВ належали діапазону $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значення зовнішнього моменту M , при одинарному лінійному масштабі і одинарному масштабі маси, збігатимуться з безрозмірними і беруться з діапазону $[0;5]$. Коефіцієнт моменту опору тертя в підшипниках вузлів ланок брались з діапазону $[0;0,1]$

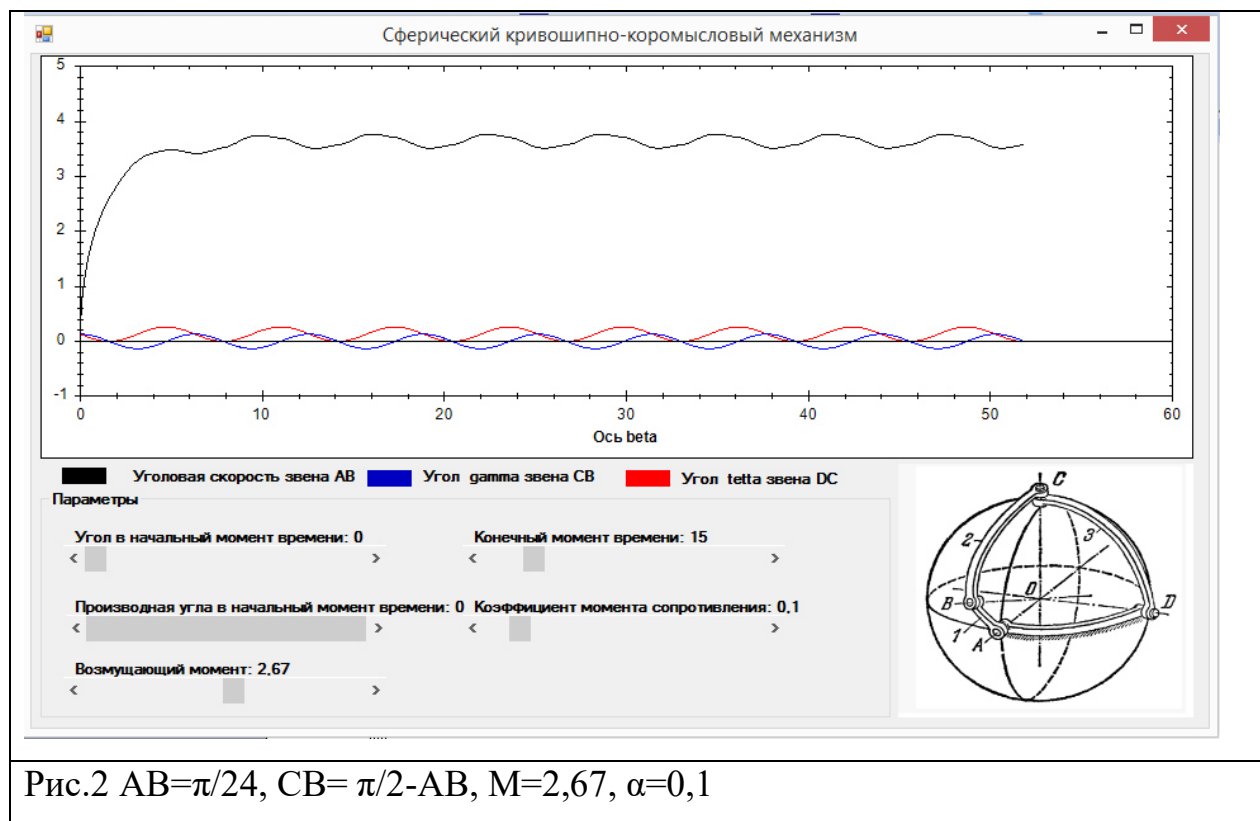
На малюнках нижче наведені результати розрахунків.

Аналіз розрахунку, наведеного на першому рисунку показує, що при зміні β від 0 до $0,5\pi$ кути γ і ψ зменшуються до 0. Це означає, що коли ланка АВ лежить на меридіані, то СВ лежить на тому ж меридіані, а дуга CD лежить на перпендикулярному меридіані, що відповідає геометрії механізму. Далі, при зростанні β від $0,5\pi$ до π , γ зменшується, і набуває максимального значення свого модуля тоді, коли ланка АВ лежить на екваторі ліворуч від меридіана. Кут ψ при цьому зростає. При зростанні β від π до $1,5\pi$ кут γ зростає до 0, а кут ψ продовжує зростати, і набуває свого максимуму. При зростанні β від $1,5\pi$ до 2π кут γ зростає, а кут ψ зменшується, і обидва

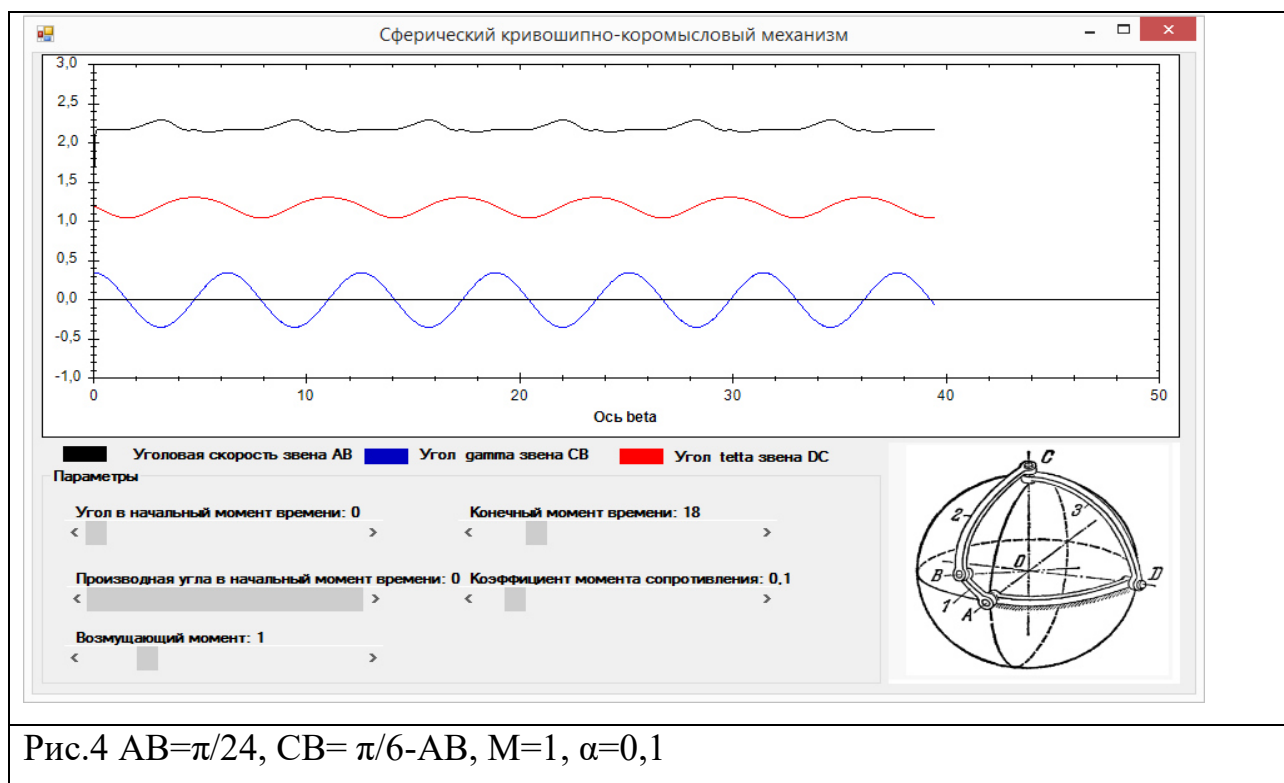
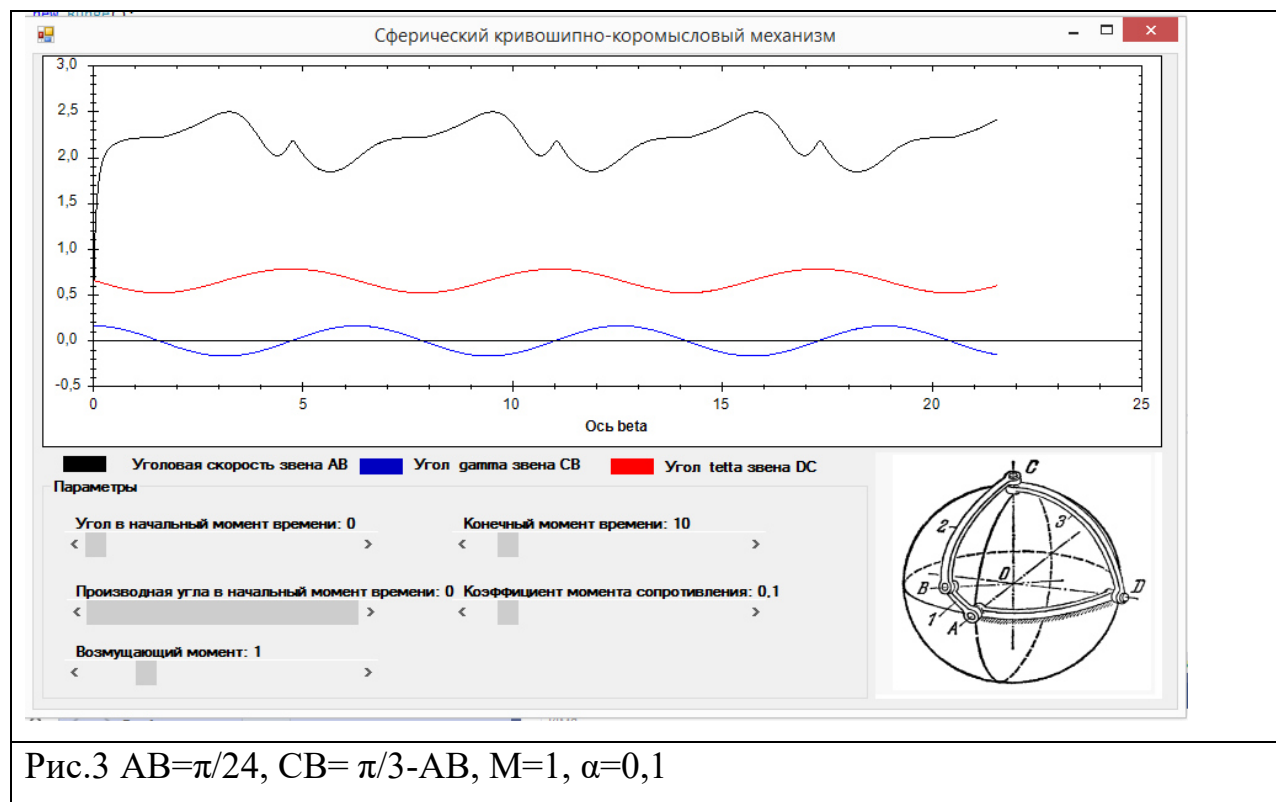
набувають початкових значень, коли ланка АВ лягає на екватор уже праворуч від меридіана. Якісно картина руху ланок механізму відповідає його геометрії. Кутова швидкість ланки АВ має слабкий коливальний характер відносно значень 2,3 рад/сек. При цьому максимуми швидкості спостерігаються при β близьких до π , тобто коли ланка АВ проходить екватор зліва від меридіана, а мінімуми спостерігаються в момент проходження екватора праворуч від меридіана.

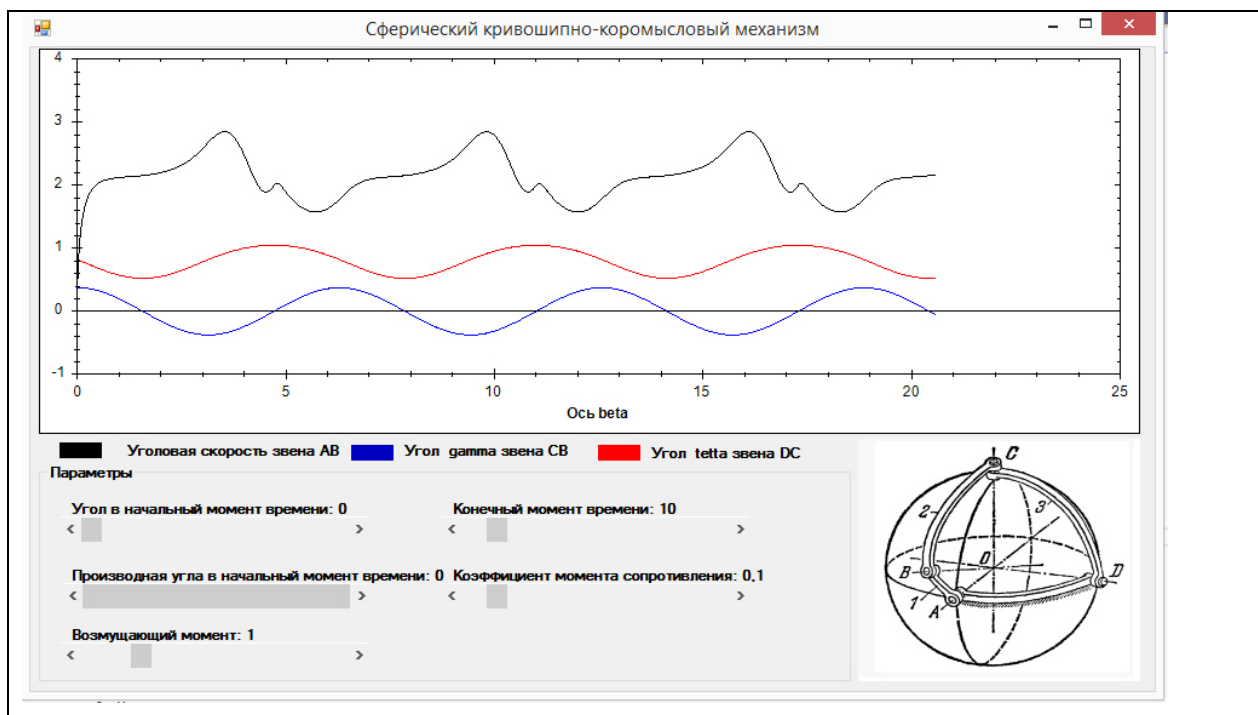
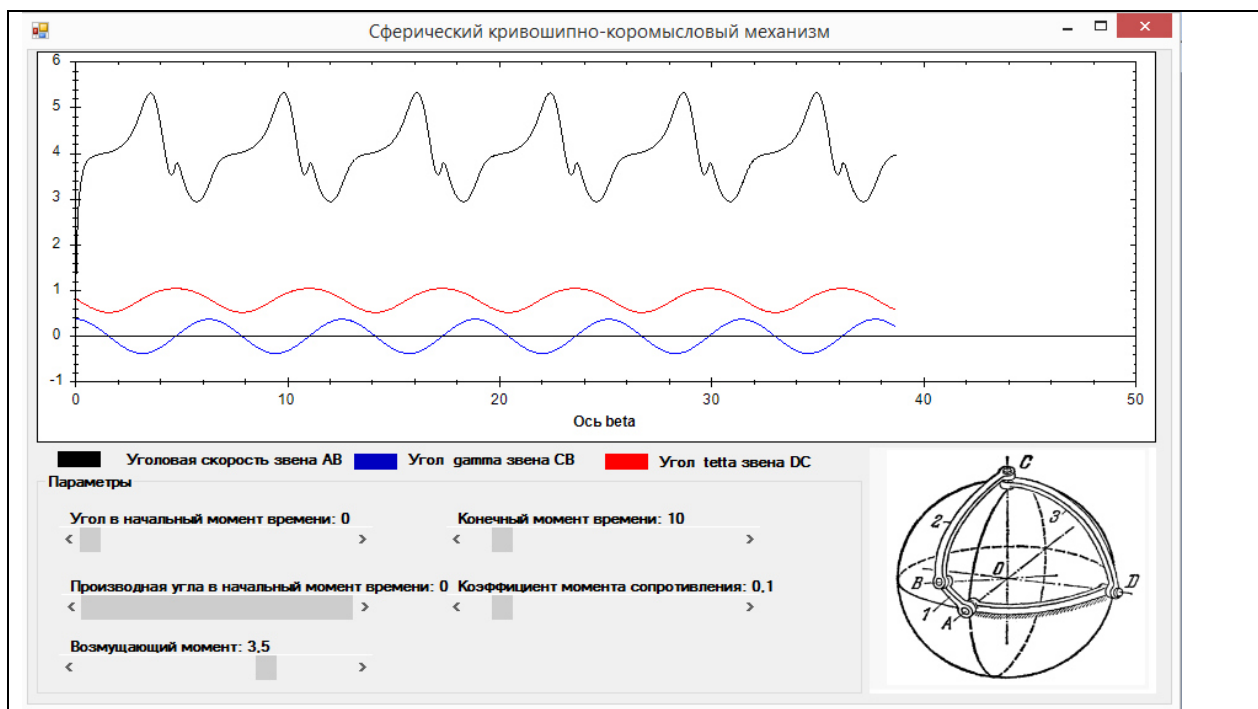


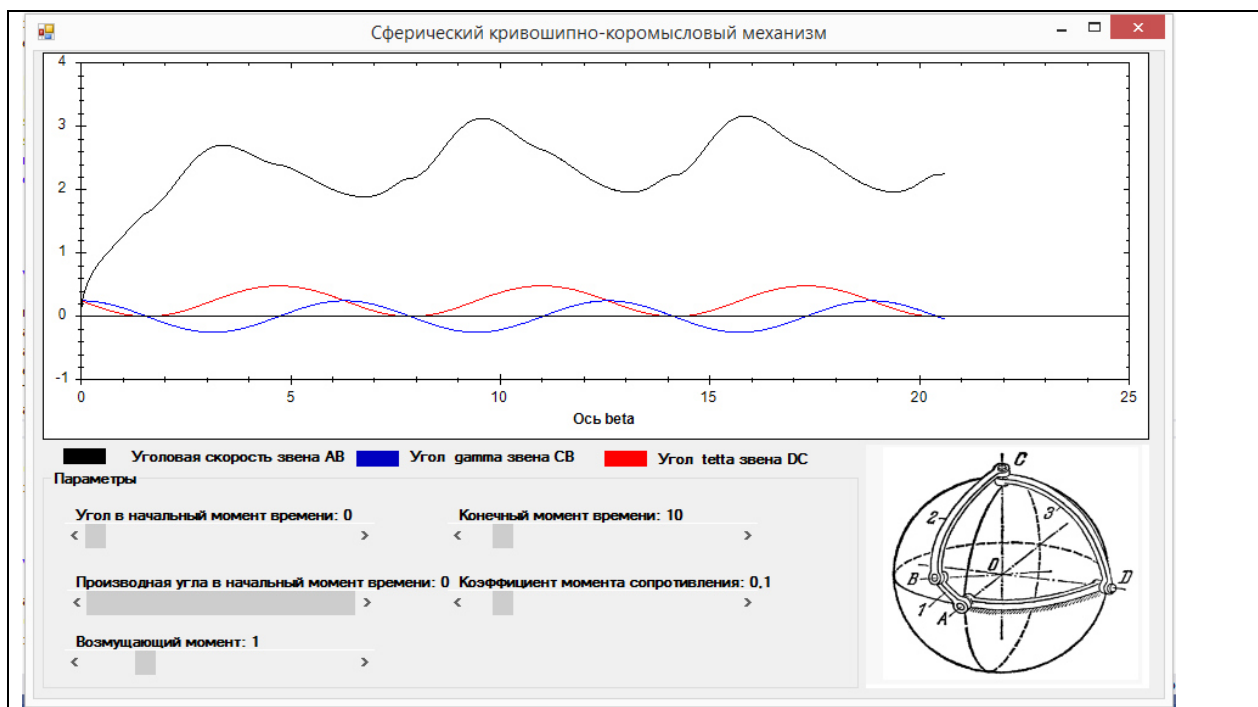
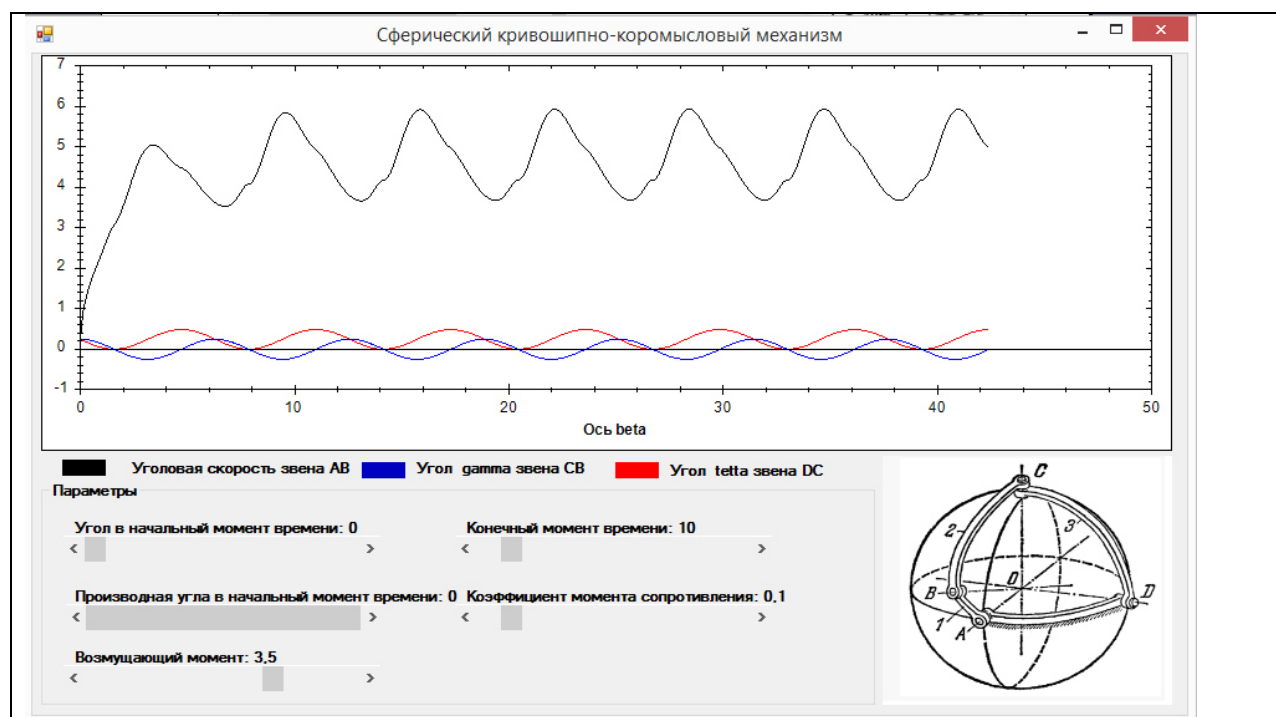
На рисунку 2 зображено розрахунок при зовнішньому моменті $M=2,67$. Ситуація якісно не змінюється.



На рисунку 3 зображено розрахунок механізму, у котрого довжина ланки СВ задовільняє умові $CB=\pi/3-AB$, $AB=\pi/24$. Кут ψ коливань ланки CD вже не набуває нульових значень, що теж відповідає геометрії механізму. Коливання швидкості збільшилось, хоча якісний розподіл максимумів та мінімумів залишився колишнім. З'явився локальний пік при значенні кута $\beta=1,5\pi$, коли ланка АВ проходить меридіан під екватором. На рисунку 4 зображено розрахунок механізму, у котрого довжина ланки СВ задовільняє умові $CB=\pi/6-AB$, $AB=\pi/24$. Знову ж таки, якісно картина зміни кутів не змінюється. Характер зміни швидкості дещо змінився. Помітні піки максимумів, без характерних мінімумів.



Рис.5 $AB=\pi/12$, $CB= \pi/3-AB$, $M=1$, $\alpha=0,1$ Рис.6 $AB=\pi/12$, $CB= \pi/3-AB$, $M=3,5$, $\alpha=0,1$

Рис.7 $AB=\pi/13$, $CB= \pi/2-AB$, $M=1$, $\alpha=0,1$ Рис.8 $AB=\pi/13$, $CB= \pi/2-AB$, $M=3,5$, $\alpha=0,1$

На рисунках 5-8 наведені розрахунки для ілюстрації тих обставин, що характер зміни кутів γ і ψ не залежить від початкових параметрів. Також не залежать від початкових параметрів розподіл максимумів та мінімумів кутової швидкості $\dot{\beta}$ від кута β . Величини кутової швидкості $\dot{\beta}$ і кутів γ і ψ залежать від значень.

Висновки

1. Побудована математична модель механізму у вигляді диференціального рівняння відносно узагальненої координати системи і початкових умов.
2. Математична модель реалізовано у вигляді комп'ютерної програми розрахунку параметрів руху механізму та графічного відображення результатів.
3. Проведено ряд тестових розрахунків і аналіз якісної відповідності результатів та геометрії механізму.

Література

1. Артоболевский И. И. Механизмы в современной технике. Справочное пособие. В 7 томах. Т. I: Элементы механизмов. Простейшие рычажные и шарнирно-рычажные механизмы. — 2-е изд., переработанное. — М.; «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1979» — 496 с
2. Волков, Е.А. Численные методы: Учеб. Пособие для вузов – 2-е изд., испр., 1987
3. Пахомов, Б. С# для начинающих
4. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам, 1981
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики, 1966