

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ЕКОНОМІКО-ПРАВОВИЙ ФАКУЛЬТЕТ
НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ ІНСТИТУТ ФІЗИКИ

О. В. ТЮРИН
О. Ю. АХМЕРОВ

СИСТЕМИ ОБРОБКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ОДЕСА
ОНУ
2021

УДК 512.64+514.12

Рецензенти:

З. М. Соколовська – доктор економічних наук, професор, дійсний член Академії економічної кібернетики України, завідувачка кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій Одеського національного політехнічного університету;

О. В. Дрозд – доктор технічних наук, професор кафедри «Комп’ютерні інтелектуальні системи та мережі» Одеського національного політехнічного університету.

Рекомендовано вченою радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 4 від 27 жовтня 2020 р.

Тюрин О. В.

Системи обробки економічної інформації: навч. посіб. /
О. В. Тюрин, О. Ю. Ахмеров. – *Одеса : Одес. нац. ун-т ім.
І. І. Мечникова*, 2021. – 358 с.

ISBN 978-617-689-418-6

Навчальний посібник написано відповідно до програми курсу навчальної дисципліни «Системи обробки економічної інформації». Основну увагу приділено вивченню положень і концепцій систем обробки економічної інформації, необхідних для вивчення прикладних економічних питань, а також автоматизації обробки економічної інформації та економіко-математичному моделюванню для прийняття управлінських рішень в умовах глобалізації економічних відносин.

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності 051 «Економіка» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, орієнтований на фахівців економіко-гуманітарного профілю.

УДК 512.64+514.12

ISBN 978-617-689-418-6

© Тюрин О. В., Ахмеров О. Ю., 2021

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2021

ЗМІСТ

ВСТУП	7
ТЕМА 1. СУЧАСНЕ НАУКОВО-ТЕХНІЧНЕ УЯВЛЕННЯ ПРО ІНФОРМАЦІЮ	10
1.1. Сучасне узагальнене уявлення про інформацію і її призначення	10
1.2. Науково-технічне визначення інформації	13
1.3. Поняття контекстного методу	16
1.4. Одиниці виміру обсягу комп'ютерної (цифрової) інформації	19
1.5. Інформаційний процес. Особливості інформаційного процесу в комп'ютерній техніці	25
1.6. Властивості інформації	27
1.7. Дані, їх носії та обробка	32
ТЕМА 2. ОРГАНІЗАЦІЙНО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ СТВОРЕННЯ ТА ФУНКЦІОНУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ	37
2.1. Системний підхід при аналізі інформаційних процесів	37
2.2. Інформаційні системи, їх структура і призначення	40
2.3. Базові компоненти інформаційної системи	42
2.4. Комп'ютерні інформаційні системи і їх класифікація	46
2.5. Програмне забезпечення і технічні засоби комп'ютерних інформаційних технологій та їх призначення	50
2.6. Принципи проектування і створення комп'ютерних інформаційних систем	57
ТЕМА 3. УПРАВЛІНСЬКІ ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ	61
3.1. Інформаційний аналіз і синтез систем управління	61
3.2. Поняття «чорний ящик» в інформаційному аналізі систем	72
3.3. Оператор як модель для опису концепції «вхід - вихід»	75
3.4. Марковські процеси	80

3.5. Концепція «зворотного зв'язку»	82
3.6. Схема операційного проекту з вивчення та вдосконалення системи управління	95
3.7. Інформаційна безпека комп'ютерних систем управління	103

ТЕМА 4. СИСТЕМИ ОБРОБКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ І ЇХ РОЛЬ В УПРАВЛІННІ ЕКОНОМІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

4.1. Поняття економічних систем, систем управління і систем обробки економічної інформації, їх класифікація та структура	120
4.2. Корпоративні інформаційні системи, їх класифікація та характеристики	127
4.3. Організація інформаційної бази систем обробки економічної інформації	134
4.3.1. Облікова інформація, її зміст і формалізація	135
4.3.2. Носії облікової інформації та їх класифікація в автоматизованих системах бухгалтерського обліку	137
4.3.3. Класифікація комп'ютерних програм бухгалтерського обліку	144
4.3.4. Комп'ютерні форми бухгалтерського обліку	147

ТЕМА 5. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ СИСТЕМ ОБРОБКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

5.1. Інформаційні технології в банківській сфері	155
5.2. Інформаційні системи і технології в інвестиційному аналізі	159
5.3. Засоби автоматизації процесу фінансового аналізу на підприємствах	162
5.4. Інформаційні технології пенсійного фонду	166
5.5. Сучасні інформаційні технології управління підприємством	169

ТЕМА 6. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ 180
МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПО
УПРАВЛІННЮ ЕКОНОМІКОЮ

6.1. Особливості економіко-математичного комп'ютерного моделювання	180
6.2. Приклади побудови економіко-математичних моделей	186
6.2.1. Економіко-математична модель управління портфелем активів	186
6.2.2. Економіко-математична модель виробничого планування	189
6.2.3. Економіко-математична модель транспортної задачі	192
6.2.4. Економіко-математична модель використання потужностей підприємства	194
6.3. Моделювання споживчого вибору	196
6.3.1. Функція корисності	196
6.3.2. Задача споживчого вибору	200
6.3.3. Рішення задачі споживчого вибору і його властивості	201
6.3.4. Загальна модель споживчого вибору	205
6.4. Моделювання банківських операцій	208
6.5. Класифікація завдань дослідження економіко-математичних моделей	226

ТЕМА 7. МЕТОДИ ВІДШУКАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО 230
РІШЕННЯ ДЛЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ:
ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. Постановка завдання лінійного програмування (ЗЛП)	230
7.2. Основні поняття лінійної алгебри і опуклого аналізу, що застосовуються в теорії математичного програмування	236
7.3. Графічний метод розв'язання ЗЛП на координатній площині $x_1 O x_2$	242
7.4. Базисні рішення і геометрична інтерпретація канонічної ЗЛП	253
7.5. Симплекс-метод знаходження оптимального рішення	

канонічної ЗЛП	256
7.5.1. Основні етапи симплекс-методу	256
7.5.2. Таблична реалізація симплекс-методу	267
7.5.3. Приклад рішення канонічної ЗЛП симплекс-методом	268
7.5.4. Збіжність симплекс-методу. Виродженість в задачах ЛП	274
7.5.5. Знаходження початкового допустимого базисного плану в задачах ЛП	276
7.6. Модифікований симплекс-метод	279
7.6.1. Обчислювальна схема, заснована на перетворенні зворотних матриць	279
7.6.2. Приклад рішення ЗЛП модифікованим симплекс-методом	283
7.7. Двоїстість в задачах лінійного програмування	287
7.7.1. Поняття двоїстої задачі ЛП і загальна схема її побудови	287
7.7.2. Теореми подвійності і їх застосування	291
7.7.3. Економічна інтерпретація двоїстої задачі ЛП	293
7.8. Поняття цілочисельного завдання ЛП	306
7.9. Транспортна задача і методи її вирішення	308
7.9.1. Транспортна задача і її властивості	308
7.9.2. Побудова вихідного допустимого плану в транспортній задачі	313
7.9.3. Критерій оптимальності	318
7.9.4. Алгоритм методу потенціалів для транспортної задачі	320
КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ	338
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	351
СКОРОЧЕННЯ	357

ВСТУП

В даний час українські підприємства слідом за всім цивілізованим світом вступили в період не просто ринкової економіки, а «інформаційної» або «цифрової» економіки постіндустріального суспільства, коли інформація розглядається як один з основних ресурсів розвитку нових економічних відносин. Єдиний спосіб вижити сьогодні – це мати можливість *отримувати достовірну інформацію в достатньому обсязі в режимі реального часу, обробляти і використовувати цю інформацію для прийняття управлінських рішень осмислено і швидко*. До теперішнього часу фірми могли відчувати дефіцит інформації, так як пошук, збір і обробка інформації були тривалими і трудомісткими процесами. Нове століття створює інші проблеми – воно занурює нас в океан інформації та інформаційних технологій і змушує нас навчитися плавати в цьому океані, вибираючи тільки найважливішу і корисну інформацію з цього океану, а також управляти великими потоками інформації такого океану. Ефективними технічними засобами для освоєння даного океану є комп'ютерні інформаційні системи і «цифрові» технології, мова про які стосовно економічної інформації, яка супроводжує і відображає процеси виробництва, розподілу, обміну та споживання, матеріальних благ і послуг *становить предмет нашого викладу. Стрімкий розвиток комп'ютерних та інформаційних технологій внесли суттєві зміни в прийняття рішень, пов'язаних з економічною діяльністю*.

Економічна інформація є центральним компонентом управління будь-яким економічним об'єктом. Економічну інформацію, тобто відомості про результати діяльності господарюючого суб'єкта, використовують різні категорії персоналу підприємства для прийняття управлінських рішень: менеджери, економісти, фінансисти, організатори виробництва і т. п. Економічна інформація (ЕІ) необхідна також зовнішнім користувачам – стороннім організаціям і підприємствам, податковим органам, органам влади, інвесторам і т. п. Від ЕІ залежить багато управлінських рішень, і вона має найбільш істотний вплив на ефективність автоматизації управління.

Специфікою ЕІ є її обов'язковість для всіх юридичних осіб на території країни (для товариств і громадян, які ведуть підприємницьку діяльність без створення юридичної особи).

Надана ЕІ повинна відповідати таким вимогам:

- правильна методична основа побудови планованих та існуючих показників;
- охоплення і ефективність організації всіх господарських процесів і операцій;
- достовірність, повнота, точність даних, оперативність виконання операцій.

. Використання підприємством цифрових інформаційних технологій та Інтернет в системі обробки ЕІ дозволяє йому:

- підвищувати ступінь обґрунтованості прийнятих рішень за рахунок оперативного збору, передачі та обробки ЕІ;

- забезпечувати своєчасність прийняття рішень по управлінню організацією в умовах ринкової економіки;

- домагатися зростання ефективності управління за рахунок своєчасного надання необхідної ЕІ керівникам усіх рівнів управління з єдиного інформаційного фонду;

- погоджувати управлінські рішення;

- за рахунок інформованості управлінського персоналу про поточний стан економічного об'єкта забезпечувати зростання продуктивності праці, скорочення невиробничих втрат і т. д.

Все вищевикладене дає можливість нам зробити висновок, що сьогодні значно зросла роль автоматизованих систем обробки ЕІ на основі цифрових інформаційних технологій та Інтернету. Їх створення призводить до більш скоординованих процесів прийняття рішень в питаннях становлення стратегічної економічної конкурентоспроможності як окремих підприємств, так і країни.

ТЕМА 1. СУЧАСНЕ НАУКОВО-ТЕХНІЧНЕ УЯВЛЕННЯ ПРО ІНФОРМАЦІЮ

1.1. Сучасне узагальнене уявлення про інформацію і її призначення

Отримання інформації з навколишнього світу, її збереження, аналіз і відтворення складають одну з основних функцій людини, інших живих організмів і автоматних інформаційно-технічних систем. Будучи акумульованою і обробленою з певних позицій, інформація дає нові відомості, призводить до нового знання про навколишній світ, що дозволяє людині здійснювати цілеспрямовану діяльність з управління і перетворення навколишнього світу для задоволення своїх потреб. Відтак, для інформації можна дати наступне роз'яснення цього терміну:

***Інформація** – фундаментальне наукове поняття, яке є головним засобом для споживача інформації по досягненню довгострокових і значущих конкурентних переваг, забезпечуючи вироблення правильних рішень при управлінні.*

Прогрес людства неминуче спричиняє збільшення загального обсягу інформації, який воно має в своєму розпорядженні, причому обсяг цей зростає набагато швидше, ніж населення земної кулі і його матеріальні потреби. Інформація міститься в людській мові, текстах книг, журналах, газетах, повідомленнях радіо і телебачення, показаннях приладів і т. д. Людина сприймає інформацію за допомогою органів почуттів. Зберігає і переробляє її за допомогою мозку і центральної нервової системи.

Особливістю поняття «інформація» є його складність і універсальність, воно використовується в усіх без винятку сферах людської діяльності: в філософії, в біології, медицині, в соціології, мистецтві, в техніці і економіці і, звичайно, в повсякденному житті. Спочатку сенс слова «інформація» трактувався як щось властиве тільки людській свідомості та спілкуванню – знання, відомості, звістки. Потім сенс цього слова почав розширюватися і узагальнюватися. Так, з позицій матеріалістичної теорії пізнання однією з загальних властивостей матерії (поряд з рухом, простором, часом і ін.) було визнано відображення, що полягає в здатності адекватно відображати одним реальним об'єктом інші реальні об'єкти, а сам факт відображення одного об'єкта в іншому і означає присутність в ньому інформації про об'єкт, що відображається. Отже, як тільки стани одного об'єкта знаходяться у відповідності до станів іншого об'єкта (наприклад, відповідність між положенням стрілки вольтметра і напругою на його клеммах або відповідність між нашим відчуттям і реальністю), це означає, що один об'єкт відображає інший, тобто містить інформацію про інший. Будь-який фізичний (механічний) процес йде тільки тому, що будь-який фізичний процес є процес обміну, взаємодії матеріальних об'єктів, в якому кожен учасник фізичного процесу отримує інформацію про іншого учасника процесу через фізичні дії (сили, імпульси, хвилі та ін.) і змінює свої параметри точно відповідно до даних сил, їх конфігурації. Таким чином, за сучасними уявленнями інформація є однією з вихідних категорій світобудови поряд з матерією і енергією і ці категорії тісно взаємопов'язані між собою. Без інформації не може існувати життя в

будь-якій формі, і не можуть функціонувати не тільки створені людиною будь-які інформаційні системи, але і фізичний світ взагалі.

До теперішнього часу властивості інформації непогано вивчені в самих різних дисциплінах. Фізика, наприклад, займається властивостями сигналів, що несуть інформацію. Як прикладна дисципліна існує теорія інформації, що займається питаннями інформаційної змістовності сигналів (повідомлень). Теорія інформації близько пов'язана з фізикою і математикою, вона використовує методичний апарат радіотехніки і теорії ймовірностей. Генетика займається вивченням питань передачі спадкової інформації в живій природі. Цей перелік можна продовжити, але фундаментальної науки, що займається дослідженням природи інформації, до сих пір немає. Тому немає і суворого наукового визначення інформації, що є одним з проблемних питань сучасної науки. Наведемо кілька прикладів, в яких робилися спроби дати узагальнююче визначення, що розкриває зміст терміну «інформація»:

- **інформація** – міра зменшення необізнаності людини щодо навколишнього його середовища;
- **інформація** – документовані або публічно оголошені відомості і явища, які відбуваються в суспільстві, державі та навколишньому середовищі;
- **інформація** – це сукупність відомостей, знань і повідомлень про об'єкти, явища і процеси.

З перших двох визначень випливає, що інформація властива лише людині, що на сучасному етапі технічного прогресу це не відповідає дійсності, а з останнього визначення не зрозуміло кому і

для яких цілей призначена інформація, а такі поняття як відомості, знання і повідомлення також вимагають свого роз'яснення.

Однак технічне і правове забезпечення режиму електронного підпису, використання методів криптографії в цивільному документообігу, використання Інтернету в забезпеченні електронної комерції, забезпечення безпеки даних і багато інших суспільних процесів і явищ вимагають суворого і несуперечливого визначення інформації. Його вимагають економічні і правові дисципліни.

Розглянемо тепер становлення науково-технічного поняття терміна «інформація» на сучасному етапі.

1.2. Науково-технічне визначення інформації

По-перше, поняття «інформація» передбачає наявність двох об'єктів – джерела і споживача інформації. Потім інформація передається від джерела до споживача в матеріально-енергетичній формі, що називається **повідомленням** і містить відомості різного характеру, призначені для одержувача про оточуючу його дійсність, про те, які дії він повинен зробити і ін.

Згідно з такими уявленнями для терміна «інформація» можна дати наступне визначення, яке широко використовується в інформатиці:

***інформація** – це відомості (знання) про об'єкт, явища, процеси і ін., що передаються джерелом одержувачу (споживачу) у вигляді повідомлення.*

Сукупність технічних засобів, що використовуються для передачі інформації від джерела до одержувача, називається

системою зв'язку, а сукупність технічних пристроїв або фізичне середовище, що забезпечують передачу повідомлення від передавача до приймача – канал зв'язку. Схематично процес передачі інформації системою зв'язку представлений на рис. 1.

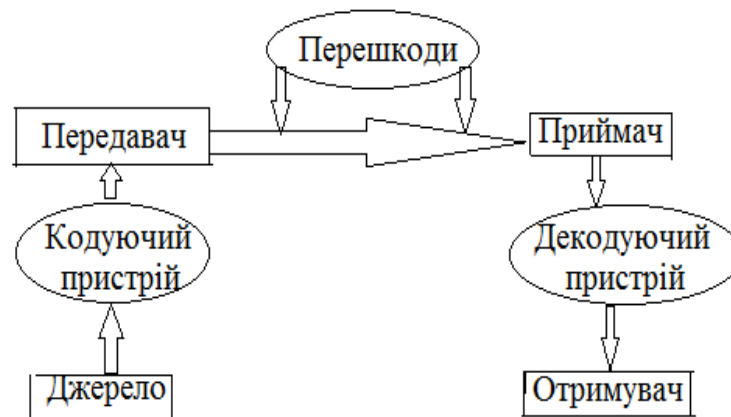


Рис. 1. Процес передачі інформації

Кодуючий пристрій забезпечений методом, призначеним для збереження інформації у вигляді даних.

Дані – результат фіксації (запису), відображення інформації (відомостей) на будь-якому матеріальному носії, тобто зареєстроване на носії подання відомостей незалежно від того, чи дійшли ці відомості до якогось одержувача і чи цікавлять вони його.

Запис інформації у вигляді даних на матеріальному носії (папері, магнітній стрічці, фотоплівці і ін.) здійснюється за допомогою зміни його деяких властивостей (кольору, рельєфу, форми, хімічного складу і ін.). Дані, які є результатом фіксації деякої інформації на матеріальному носії, зберігаються тривалий (необмежений) час і використовуються для передачі інформації в часі.

Передавач ці дані перетворює в інформаційний сигнал, який представляє собою *повідомлення*, призначене для передачі його по каналу зв'язку приймача.

Інформаційний сигнал – фізичний процес, зміна параметрів якого в часі і несе інформацію (відомості) до одержувача.

В якості фізичного процесу може виступати звукова хвиля, електричний струм, електромагнітна хвиля і ін.; при цьому, як тільки випромінювання сигналу припиняється, припиняється і надходження інформації, тобто передача і відтворення інформації, на відміну від даних, являють собою динамічний об'єкт і відбуваються в реальному масштабі часу.

Приймач перетворює сигнал, що надійшов, по каналу зв'язку знову в дані, для яких декодуючий пристрій має метод, здатний відтворити вихідну інформацію, придатну для використання її одержувачем (біоорганізмом або рукотворною машиною).

Слід зазначити також, що повідомлення може бути передано по каналу зв'язку і у вигляді даних, наприклад, поштою або кур'єром. Отже, повідомлення можуть представлятися як у вигляді інформаційних сигналів, так і у вигляді даних.

Згідно з наведеною схемою системи зв'язку (рис. 1) інформація як відомості, що передаються джерелом споживачеві, є динамічний об'єкт, який не існує в природі сам по собі, а виникає тільки при наявності споживача і утворюється в ході взаємодії даних і методів (в декодуючому пристрої), що забезпечують відтворення інформації для споживача. Процес виникнення інформації існує рівно стільки, скільки триває взаємодія даних та методів, а весь інший час

перебуває у вигляді повідомлення: даних або сигналу.

Виходячи з вищесказаного, ми приходимо до наступного науково-технічного визначення:

інформація – це продукт взаємодії даних і методів, розглянутий в контексті цієї взаємодії.

У цьому визначенні нічого не говориться про форму, в якій представлені дані, вона може бути абсолютно будь-якою. Якщо дані графічні, а метод взаємодії – спостереження, то утворюється *візуальна інформація*. Якщо дані текстові або мовні, а метод їх споживання – читання або прослуховування, утворюється *текстова або аудіо інформація*.

1.3. Поняття контекстного методу

У нашому науково-технічному визначенні інформації важливим є пояснення «... *розглянутий в контексті цієї взаємодії*».

У побуті ми часто вважаємо, що книги, газети, журнали, радіо і телебачення – це джерела інформації. Якщо строго підходити з позицій інформатики, то це не зовсім так. Все це джерела повідомлень або даних (книги, газети, журнали), або інформаційних сигналів (радіо і телебачення). *Чи стануть дані і інформаційні сигнали (повідомлення) джерелом інформації, чи ні, і якщо стануть, то якої саме, залежить від того, який метод буде застосований до їх споживання і в яких умовах це відбудеться*, тобто все визначається процесом споживання при наявності споживача.

Наприклад, вже відповідь на просте запитання: «Скільки інформації є в підручнику з інформатики для 10-11 класів?» студент

відразу ж скаже: «Для мене – інформації в ньому 0!» – і буде правий! Він-то його давно знає, і нічого нового для себе в такому підручнику не знайде.

Ще один приклад. У роки другої світової війни перед американськими адміралами стала проблема, яким чином організувати переговори між судами, – але, одночасно, забезпечити високу ступінь їх секретності? Американцям були відомі успіхи японців в області дешифрування. Вихід був знайдений! На кожен з кораблів посадили по індіанцю племені черокі: в США їх залишалося тільки всього кілька сотень. Так був забезпечений вищий рівень секретності! Індіанці перемовлялися між собою своєю «черокською» мовою, а японці їх не розуміли! Звичайно, індіанці потім переводили керівництву кораблів і штабів те, що почули від своїх одноплемінників, на англійську, – але японцям такий переклад зробити було просто нікому! Таким чином, для американців цей індіанський говорок, що заповнив радіо ефір Тихого океану, був «повний інформації», а для японців його «інформативність» дорівнювала нулю.

Всього два приклади, – але вони розкривають надзвичайно важливу особливість інформації. Виявляється, важливе місце в цьому випадку має також і питання *готовності* споживача інформації до її сприйняття.

Тим не менш, ми все-таки звикли говорити не про передачу повідомлень або даних та інформаційних сигналів, а про передачу інформації, не про перетворення і шифрування даних та інформаційних сигналів, а про перетворення і шифрування

інформації, а також про її автоматичну обробку за допомогою комп'ютерів. Чи немає тут протиріччя?

Таке протиріччя дійсно є, але воно вирішується, якщо ввести поняття **контекстного методу**. Контекстним вважається той метод, який є загальноприйнятим для роботи з даними та інформаційними сигналами певного типу. Цей метод повинен бути відомий як творцеві повідомлення, так і споживачеві інформації.

Для ілюстрацій (графічних, образотворчих даних) контекстним є метод спостереження, заснований на зорі. У таких випадках ми говоримо про графічну, образотворчу або *візуальну інформацію*. Для текстових даних мається на увазі контекстний метод читання, заснований на зорі і на знанні мови і абетки. У таких випадках говорять про *текстову інформацію*.

Для сигналів, представлених радіохвилями, контекстними є апаратні методи перетворення сигналів і відтворення інформації за допомогою радіоприймача (*аудіо інформація*) або телевізора (*телевізійна (відео) інформація*).

Є свої особливості і в комп'ютерній інформації. Для даних, представлених в цифровій формі, і тих, що зберігаються на магнітних (і інших) носіях, або для цифрових сигналів, що циркулюють в комп'ютерних мережах, контекстними є *апаратні і програмні методи обчислювальної техніки*, що дозволяють обробляти величезні масиви інформації за короткий проміжок часу, а також встановити кількісні оціночні характеристики обсягу інформації. Їх ще називають **засобами цифрових інформаційних технологій**.

1.4. Одиниці виміру обсягу комп'ютерної (цифрової) інформації

Інформаційний сигнал як носій інформації може бути представлений в аналоговій і цифровій (дискретній) формі. Аналоговий сигнал є безперервно змінюваним у часі процесом, причому величина параметрів його може плавно змінюватися, приймаючи будь-які проміжні значення в інтервалі від мінімального до максимального. На відміну від аналогового, цифровий сигнал несе інформацію про величину вихідного параметра лише у фіксовані моменти часу, а самі його значення також можуть приймати тільки строго фіксовані дискретні значення, які зазвичай подаються у вигляді двійкових чисел. Подання аналогових сигналів у цифровому вигляді (аналого-цифрове перетворення), коли фіксовані значення вихідного сигналу, взяті через певні проміжки часу, представляються у вигляді двійкових чисел дуже зручне, оскільки дозволяє застосувати до такого сигналу математичну обробку силами сучасної обчислювальної техніки, що оперує якраз двійковими числами.

Аналогово-цифрове перетворення є складним процесом, що складається з двох частин. Перша процедура – фіксація процесу через певні проміжки часу, так звана *дискретизація*. Друга процедура – приведення значення зафіксованого параметра до одного з дозволених дискретних рівнів, так зване *квантування*. На практиці існують різні алгоритми цих процедур, що проводяться в тій чи іншій послідовності. Після перетворення дискретні значення замінюються певним двійковим числом (в залежності від конкретного значення дискретного рівня). Цей процес називається *кодуванням*.

Кодування інформації – це риса не тільки комп'ютерної техніки. Ми дуже часто стикаємося з цим явищем.

Не так уже й давно ми користувалися телеграфом (ця послуга залишається і до цього дня). При цьому текст, що відправляється, кодується у вигляді послідовностей так званих «точок» (коротких сигналів) і «тире» (довгих сигналів) і відправляється по дротах. На виході все це декодується і друкується на стрічці.

Багато людей в недавньому минулому мали знати це кодування, зване інакше «Азбукою Морзе» по імені її винахідника.

У музиці інформація багато століть кодується за допомогою нотного запису (ноти). Математичні формули використовуються в математиці. У хімії застосовуються хімічні формули. Таких прикладів кодування інформації можна навести дуже багато.

У порівнянні з наведеними прикладами кодування, що застосовується для комп'ютерів, виглядає набагато простіше, так як в ній використовуються тільки «нулі» і «одиниці».

Порівняльна простота кодування забезпечує все різноманіття представленої в комп'ютері інформації (від простих текстів до найскладніших графічних ігор і відеофільмів). Це обумовлено високою швидкістю комп'ютерів і їх здатністю до майже миттєвої обробки величезних масивів цифрових даних.

Питання подання і кодування інформації в комп'ютері є також дуже важливим питанням для встановлення одиниць виміру обсягу інформації. Комп'ютери зазвичай працюють у *двійковій системі числення*, що складається з двох цифр 0 і 1. Звичайна для нас десяткова форма числення складається з десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5,

6, 7, 8, 9. До речі, числа 10 в цьому списку немає: воно складається з 0 і 1 – чисел, що входять в десяткову систему числення. Всі необхідні перетворення (в звичну для нас десяткову форму або, навпаки, в двійкову систему числення) можуть виконати програми, що працюють на комп'ютері. Це означає, що всі комп'ютерні елементи чітко розпізнають тільки два стани: увімкнений і вимкнений, є сигнал чи нема сигналу. Для того щоб закодувати ці два стани, досить двох чисел: 0 (немає сигналу) і 1 (є сигнал). Таким чином, за допомогою комбінації 0 і 1 комп'ютер (з першого покоління і наразі) здатний сприймати будь-яку інформацію: тексти, формули, звуки і графіку.

Один двійковий знак – 0 або 1 – називається **біт**. Біт представляє найменшу одиницю інформації. Однак комп'ютер має справу не з окремими бітами, а з байтами.

Байт – число з восьми біт (різні комбінації з восьми нулів і одиниць), наприклад,

0	1	1	0	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Байт є **одиницею вимірювання цифрової інформації**. Один байт здатний зареєструвати $256 = 2^8$ різних комбінацій з восьми нулів і одиниць.

● ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	Біт – це мінімальна одиниця виміру інформації: нуль або одиниця («0» або «1»)
● ● ● ● ● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	Байт складається з восьми біт
● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	2 байта або 16 біт

Послідовністю байтів можна закодувати текст, зображення, звук або будь-яку іншу інформацію. Такий спосіб подачі інформації називається *двійковим кодуванням*.

Щоб перевести в цифрову форму *музичний звук*, можна застосувати такий пристрій, як аналого-цифровий перетворювач. Він з вхідного звукового (аналогового) сигналу на виході дає послідовність байтів (цифровий сигнал). Зворотній переклад можна зробити за допомогою іншого пристрою – цифро-аналогового перетворювача, і таким чином відтворити записану музику. Насправді роль перетворювачів (аналого-цифрового і цифро-аналогового) виконують спеціальні комп'ютерні програми. Тому при використанні комп'ютера потреби в таких пристроях немає.

Схожим чином обробляється і *текстова інформація*. При введенні в комп'ютер кожна буква і кожен знак (цифри, знаки пунктуації, пробіл, математичні знаки та ін.) кодується так, щоб один символ займав 1 байт пам'яті (вісім біт, поєднання 8-ми одиниць і нулів). Одна буква – один символ. Одна цифра – теж один символ. Один розділовий знак (або точка, або кома, або знак питання і т. п.) – знову один символ. Один пробіл також є одним символом. Так, наприклад, для кодування книги з 100 сторінок, що містить 50 рядків і 60 символів на кожній сторінці, потрібно інформаційний обсяг, рівний $50 \cdot 60 \cdot 100 = 300\,000$ байт. А при виведенні на екран монітора або на принтер за цими байтами заново відтворюються відповідні зображення символів тексту, зрозумілі людині.

Зберегти можна не тільки текстову та звукову інформацію. У вигляді кодів зберігаються і *зображення*. Якщо подивитися на

малюнок за допомогою збільшувального скла, то видно, що він складається з точок (**пiкселiв**) однакового розміру і різного кольору – це так званий **растр**. Растрове комп'ютерне зображення на моніторі складається з пікселів, розташованих по рядках і стовпцях. **Піксель** є неподільний об'єкт прямокутної або круглої форми, що характеризується певним кольором, яскравістю і, можливо, прозорістю. Чим більше пікселів на одиницю площі містить зображення, тим більш воно детально. Пікселі, які відображаються на кольорових моніторах, складаються з тріад (субпікселів червоного, зеленого і синього кольорів, розташованих поруч в певній послідовності). Координату кожного пікселя можна запам'ятати у вигляді числа, колір пікселя – це ще одне число для подальшого кодування. Ці числа можуть зберігатися в пам'яті комп'ютера і передаватися на будь-які відстані. За ними комп'ютерні програми здатні відтворити малюнок на екрані монітора або надрукувати його на принтері. Зображення можна збільшити або зменшити, зробити темніше або світліше. Його можна повернути, нахилити, розтягнути. Якщо, наприклад, растровий чорно-білий малюнок складається з 1000 на 1000 пікселів, а кожен піксель може бути закодований 24 бітами або 3 байтами (2 байта для координат пікселя і третій байт для його прозорості), то малюнок займає інформаційний обсяг $1000 \cdot 1000 \cdot 3 = 3\,000\,000$ байт. Якщо малюнок кольоровий, то кількість байтів для кодування пікселя з урахуванням субпікселів збільшується.

Ми вважаємо, що на комп'ютері обробляється зображення. Але насправді комп'ютерні програми змінюють числа, якими окремі точки зображення представлені (точніше, збережені) в пам'яті комп'ютера.

Таким чином, комп'ютер може обробляти тільки інформацію, представлену в числовій формі. Вся інша інформація (звуки, зображення, показання приладів і т. д.) для обробки на комп'ютері повинна бути попередньо перетворена в числову форму за допомогою відповідних комп'ютерних програм.

Вимірювання обсягу комп'ютерної інформації передбачає розгляд і інших, більш великих одиниць виміру інформації:

1 Кб (1 *Кілобайт*) = 2^{10} байт = 1024 байт (приблизно 1 тисяча байт – 10^3 байт);

1 Мб (1 *Мегабайт*) = 2^{20} байт = 1024 кілобайт (приблизно 1 мільйон байт – 10^6 байт);

1 Гб (1 *Гігабайт*) = 2^{30} байт = 1024 мегабайт (приблизно 1 мільярд байт – 10^9 байт);

1 Тб (1 *Терабайт*) = 2^{40} байт = 1024 гігабайт ($\approx 10^{12}$ байт).
Терабайт іноді називають тонна;

1 Пб (1 *Петабайт*) = 2^{50} байт = 1024 терабайт ($\approx 10^{15}$ байт);

1 *Ексабайт* = 2^{60} байт = 1024 петабайт ($\approx 10^{18}$ байт);

1 *Зеттабайт* = 2^{70} байт = 1024 ексабайт ($\approx 10^{21}$ байт);

1 *Йоттабайт* = 2^{80} байт = 1024 зеттабайт ($\approx 10^{24}$ байт).

У наведеній вище таблиці ступеня двійки (2^{10} , 2^{20} , 2^{30} і т. д.) є точними значеннями: кілобайт, мегабайт, гігабайт. А ось ступені числа 10 (точніше, 10^3 , 10^6 , 10^9 і т. п.) будуть вже приблизними значеннями, округленими в сторону зменшення. Таким чином, $2^{10} = 1024$ байта представляє точне значення кілобайта, а $10^3 = 1000$ байт є приблизними значенням кілобайта.

Таке наближення (або округлення) цілком допустимо і є загальноприйнятим.

Обсяг інформації сучасних цифрових носіїв (жорстких або твердотільних дисків) досягає обсягу кілька терабайт. Наприклад, півтори години відеозапису в хорошій якості потребують інформаційного обсягу близько 4 гігабайт, а один гігабайт тексту людина здатна прочитати за все своє життя.

1.5. Інформаційний процес. Особливості інформаційного процесу в комп'ютерній техніці

З визначення інформації випливає важлива властивість її динамічності. Справа в тому, що інформація існує вкрай нетривалий час – рівно стільки, скільки триває взаємодія даних та методів під час її створення і споживання. Потім інформація, яку видобувають із повідомлення, може піддаватися обробці, і результати обробки можуть породжувати нову інформацію, яка фіксується у вигляді нових даних або сигналів. Такий цикл утворення інформації з даних її перетворення і негайного її збереження у вигляді нових даних називається ***інформаційним процесом*** (ІП). Якщо інформація існує вкрай нетривалий час, то сам інформаційний процес триває стільки, скільки існують носії даних, що представляють інформацію, і забезпечує взаємодію між відправником і споживачем інформації.

Іншими словами, ***інформаційний процес*** – це цілеспрямована сукупність послідовних операцій, які виконуються персоналом (реєстрація, передача, накопичення, зберігання, обробка, видача інформації), дій і зв'язків з обміну інформацією, що здійснюються в

системі комунікацій, починаючи з моменту її надходження від джерела інформації (виникнення), і закінчуючи видачею користувачеві.

В обчислювальній техніці, як і всюди, інформаційний процес протікає в ході взаємодії даних і методів. Однак він має особливість, пов'язану з тим, що деякі етапи відбуваються автоматично, без участі людини. В ході цих етапів дані, представлені зареєстрованими інформаційними сигналами, взаємодіють як з апаратними методами (комп'ютерами та іншими пристроями), так і з програмними методами (комп'ютерними програмами).

При цьому важливою особливістю комп'ютерних програм є їх подвійна природа. З одного боку, вони проявляють себе як методи, а з іншого боку – як дані.

Комп'ютерні програми можуть існувати у двох фазах: активній і пасивній. В *активній фазі* програма працює спільно з обладнанням, її команди керують процесором комп'ютера, який під їх впливом обробляє дані і взаємодіє з іншим обладнанням.

В *пасивній фазі* комп'ютерна програма нічим від даних не відрізняється. Її таким же чином можна зберігати, транспортувати по каналах зв'язку, відтворювати у вигляді друкованого тексту або екранного зображення. Її можна навіть обробляти іншими програмами. Програму, представлену як дані, можна редагувати, тобто змінювати її зміст.

1.6. Властивості інформації

Отже, інформація є динамічним об'єктом, що утворюється в момент взаємодії об'єктивних даних і суб'єктивних методів. Як і будь-який об'єкт, вона має властивості. ***Властивість** – це зовнішні прояви того процесу, за допомогою якого виходить знання про об'єкт, ведеться за ним спостереження.* Властивості об'єкта сприймаються за допомогою органів почуттів і технічних засобів. Властивості забезпечують можливість описувати об'єкти системи кількісно, виражаючи їх в одиницях, мають певну розмірність. Властивості об'єктів можуть змінюватися в результаті взаємодії з інформацією. Характерною особливістю інформації, що відрізняє її від інших об'єктів природи і суспільства, є зазначений вище дуалізм: на властивості інформації впливають як властивості даних, складових її змістовної частини, так і властивості методів, взаємодіючих з даними в ході інформаційного процесу. Після закінчення процесу властивості інформації переносяться на властивості нових даних, тобто *властивості методів можуть переходити на властивості даних.* Це дуже важлива обставина. Необхідно пам'ятати про те, що об'єктивні і достовірні, на перший погляд, дані можуть такими не виявитися через те, що на окремих етапах інформаційного процесу до них були застосовані необ'єктивні або неадекватні методи.

Існує багато властивостей інформації, які суб'єктивно мають на увазі людиною як характеристики її якості. Одними з таких властивостей інформації є наступні:

Адекватність інформації. Під адекватністю розуміють ступінь відповідності інформації, отриманої споживачем, тому, що автор

вклав в її зміст (тобто в дані). Оскільки інформація є продуктом взаємодії даних і методів, то на її властивості, в тому числі і на адекватність, впливають як адекватність даних, так і адекватність методів. Адекватність інформації іноді помилково плутають з її достовірністю. Це абсолютно різні властивості. Можна навести приклад адекватної, але недостовірної інформації. Так, наприклад, якщо 1 квітня в газеті з'явиться завідомо неправдиве повідомлення, то його можна вважати адекватним. Адекватно тлумачити його не як інформаційне, а як розважальне. Те ж повідомлення, опубліковане 2 квітня, буде і недостовірним, і неадекватним. Приклади різного підходу до адекватності і достовірності інформації ми можемо знайти в законодавстві. Закон розрізняє права свідків і підозрюваних. У той час як повідомлення завідомо неправдивих даних підозрюваним вважається адекватною поведінкою, ті ж дії з боку свідків адекватними не є і розглядаються як правопорушення.

Достовірність інформації. Під достовірністю інформації розуміється її відповідність об'єктивній реальності (як поточній, так і минулій) навколишнього світу. На достовірність інформації впливає як достовірність даних, так і адекватність методів, використаних при її отриманні. Як правило, чим більше вихідних даних ми маємо, тим вище вірогідність отриманого результату. Таким чином, на достовірність інформації впливають такі її властивості як адекватність і повнота. Властивість достовірності інформації має особливе значення в тих випадках, коли її використовують для прийняття рішень. Недостовірна інформація може приводити до рішень, які мають негативні економічні, соціальні та політичні

наслідки.

Повнота інформації. Під повнотою інформації розуміється її достатність для прийняття рішення. Вона залежить як від повноти даних, так і від наявності необхідних методів. З поняттям повноти даних стикаються всі, кому доводиться виконувати службові завдання. Якщо вихідні дані неповні, прийняти вірне рішення непросто. Однак бувають випадки, коли дані повні, а вірне рішення ми все одно отримати не можемо. Це свідчить про те, що ми не маємо у своєму розпорядженні якихось методів. І в тому, і в іншому випадку можна говорити про те, що недостатньо необхідної інформації.

Надмірність інформації. Це властивість, корисність якої ми відчуваємо дуже часто. Нерідко надмірність інформації людина чисто психологічно сприймає як її якість, тому що вона дозволяє йому менше напружувати свою увагу і менше втомлюватися. Звичайний текст, надрукований російською мовою, має надмірність порядку 20-25 %. Спробуйте відкинути кожну п'яту букву, і ви побачите, що отримати інформацію з друкованого тексту все ж можна, хоча читати його буде дуже втомливо. Нам нерідко доводиться мати справу з недбалим рукописним почерком. Надмірність інформації, що міститься в тексті, надає добру службу, дозволяючи здогадуватися про значення нерозбірливих символів. Візуальна інформація, яку ми отримуємо органами зору, має дуже велику надмірність – більше 90 %. Це означає, що, навіть втративши значну частину візуальної інформації, ми все-таки можемо розуміти її зміст, хоча і не без концентрації уваги. Люди, позбавлені великої частки зору, продовжують залишатися повноцінними членами суспільства, але

відчувають підвищену втому. Ще більшу надмірність має відеоінформація (до 98-99 %). Ця надмірність дозволяє нам розсіювати увагу, що часто сприймається як відпочинок при перегляді кінофільму. З надмірністю інформації пов'язані й інші властивості. Чим вище надмірність даних, тим більш широкий діапазон методів, за допомогою яких з них можна отримати адекватну інформацію. Надмірність інформації дозволяє підвищувати її достовірність за рахунок застосування спеціальних методів, в тому числі і заснованих на теорії ймовірностей і математичній статистиці. Загальний принцип тут такий: в результаті відсіву обсяг даних скорочується, але їх достовірність збільшується. Особливе значення надмірність інформації має в інформаційних технологіях, орієнтованих на автоматичну обробку даних. З одного боку, ця властивість розглядається як негативна, тому що якщо інформація займає більший обсяг, ніж могла б, то це веде до прямих витрат на її зберігання і, головне, на транспортування. У таких випадках її зменшують. Для цього є спеціальні програмні методи стиснення даних. Будь-яке скорочення надмірності даних неодмінно тягне за собою скорочення діапазону можливих методів для їх використання. В інформаційних технологіях питання надмірності даних і достатності методів – це завжди питання тонкого і непростого балансу.

Об'єктивність інформації. Поняття об'єктивності інформації є відносним. Це зрозуміло, якщо врахувати, що методи є суб'єктивними. Більш об'єктивно прийнято вважати ту інформацію, в яку методи вносять менший суб'єктивний елемент. Так, наприклад,

прийнято вважати, що в результаті спостереження фотознімку об'єкта утворюється більш об'єктивна інформація, ніж в результаті спостереження малюнка того ж об'єкта, виконаного людиною. В ході інформаційного процесу ступінь об'єктивності інформації завжди знижується. Цю властивість враховують, наприклад, в правових процесах, де по-різному обробляються свідчення осіб, які безпосередньо спостерігали події, і осіб, які отримали інформацію непрямым шляхом (за допомогою умовиводів або зі слів третіх осіб). У не меншому ступені об'єктивність інформації враховують в історичних дисциплінах. Одні і ті ж події, зафіксовані в історичних документах різних країн і народів, можуть виглядати зовсім по-різному. У фахівців є свої методи для тестування об'єктивності даних і створення нових, більш достовірних даних шляхом зіставлення, фільтрації і селекції вихідних даних. Звернемо увагу на те, що тут мова йде не про підвищення об'єктивності інформації, а про підвищення її достовірності (це зовсім інша властивість).

Доступність інформації. Доступність інформації – це міра можливості отримати ту чи іншу інформацію. На ступінь доступності інформації впливають одночасно як доступність даних, так і доступність адекватних методів для їх інтерпретації. Відсутність доступу до даних або відсутність адекватних методів обробки даних призводять до однакового результату: інформація виявляється недоступною. Відсутність адекватних методів для роботи з даними в багатьох випадках призводить до застосування неадекватних методів, в результаті чого утворюється неповна, неадекватна або недостовірна інформація.

Актуальність інформації. Актуальність – це ступінь відповідності інформації поточному моменту часу. Нерідко з актуальністю, як і з повнотою, пов'язують комерційну цінність інформації. Оскільки інформаційні процеси розтягнуті в часі, то достовірною і адекватною, але застаріла інформація може приводити до помилкових рішень. Необхідність пошуку (або розробки) адекватного методу для роботи з даними може приводити до такої затримки в отриманні інформації, що вона стає неактуальною і непотрібною. На цьому, зокрема, засновані багато сучасних систем шифрування даних і механізми електронного підпису. Особи, які не володіють ключем (методом) для читання даних, можуть зайнятися пошуком ключа, оскільки алгоритм методу зазвичай доступний, але тривалість цього пошуку настільки велика, що за час роботи інформація втрачає актуальність і, відповідно, пов'язану з нею практичну цінність.

1.7. Дані, їх носії та обробка

Дані – діалектична складова частина інформації. Вони являють собою зареєстровані інформаційні сигнали. При цьому фізичний метод реєстрації може бути будь-яким: механічне переміщення фізичних тіл, зміна їх форми або параметрів якості поверхні, зміна електричних, магнітних, оптичних характеристик, хімічного складу і (або) характеру хімічних зв'язків, зміна стану електронної системи і багато іншого.

Відповідно до методу реєстрації дані можуть зберігатися і транспортуватися на носіях різних видів. Найпоширенішим носієм даних, хоча і не самим економічним, мабуть, є папір. На папері дані

реєструються шляхом зміни оптичних характеристик його поверхні. Зміна оптичних властивостей (зміна коефіцієнта відбиття поверхні в певному діапазоні довжин хвиль) використовується також в пристроях, які здійснюють запис лазерним променем на пластмасових носіях з відбиваючим покриттям (CD-ROM). В якості носіїв, що використовують зміну магнітних властивостей, можна назвати магнітні стрічки і диски. Реєстрація даних шляхом зміни хімічного складу поверхневих речовин носія широко використовується у фотографії. На біохімічному рівні відбувається накопичення та передача даних в живій природі.

Носії даних цікавлять нас не самі по собі, а остільки, оскільки властивості інформації досить тісно пов'язані з властивостями її носіїв. Будь-який носій можна характеризувати параметром *роздільної здатності* (кількістю даних, записаних в прийнятій для носія одиниці виміру) і *динамічним діапазоном* (логарифмічним відношенням інтенсивності амплітуд максимального і мінімального реєстрованого сигналів). Від цих властивостей носія нерідко залежать такі властивості інформації, як повнота, доступність і достовірність. Так, наприклад, ми можемо розраховувати на те, що в базі даних, яка розміщується на компакт-диску, простіше забезпечити повноту інформації, ніж в аналогічній за призначенням базі даних, розміщеної на гнучкому магнітному диску, оскільки в першому випадку щільність запису даних на одиниці довжини доріжки набагато вище. Для пересічного споживача доступність інформації в книзі значно вище, ніж тої ж інформації на компакт-диску, оскільки не всі споживачі володіють потрібним обладнанням.

Завдання перетворення даних з метою зміни носія відноситься до однієї з найважливіших задач інформатики. У структурі вартості обчислювальних систем пристрої для введення і виведення даних, що працюють з носіями інформації, складають до половини вартості апаратних засобів.

В ході інформаційного процесу дані перетворюються з одного виду в інший за допомогою методів. Обробка даних включає в себе множину різних операцій. У міру розвитку науково-технічного прогресу і загального ускладнення зв'язків у людському суспільстві трудовитрати на обробку даних неухильно зростають. Перш за все, це пов'язано з постійним ускладненням умов управління виробництвом і суспільством. Другий фактор, що також викликає загальне збільшення обсягів оброблюваних даних, теж пов'язаний з науково-технічним прогресом, а саме, з швидкими темпами появи і впровадження нових носіїв інформації, засобів зберігання і доставки даних.

У структурі можливих операцій з даними можна виділити наступні основні:

- *збір даних* – накопичення даних з метою забезпечення достатньої повноти інформації для прийняття рішень;
- *формалізація даних* – приведення даних, що надходять з різних джерел, до однакової форми, щоб зробити їх порівняними між собою, тобто підвищити їх рівень доступності;
- *фільтрація даних* – відсіювання «зайвих» даних, в яких немає необхідності для прийняття рішень; при цьому повинен зменшуватися рівень «шуму», а достовірність та адекватність даних

повинні зростати;

- *сортування даних* – впорядкування даних за заданою ознакою з метою зручності використання; підвищує доступність інформації;

- *угруповання даних* – об'єднання даних за заданою ознакою з метою підвищення зручності використання; підвищує доступність інформації;

- *архівація даних* – організація збереження даних у зручній та доступній формі; служить для зниження економічних витрат на зберігання даних і підвищує загальну надійність інформаційного процесу в цілому;

- *захист даних* – комплекс заходів, спрямованих на запобігання втрати, відтворення та модифікації даних;

- *транспортування даних* – прийом і передача (доставка і постачання) даних між віддаленими учасниками інформаційного процесу; при цьому джерело даних в інформатиці прийнято називати *сервером*, а споживача – *клієнтом*;

- *перетворення даних* – переклад даних з однієї форми в іншу або з однієї структури на іншу. Перетворення даних часто пов'язано зі зміною типу носія, наприклад, книги можна зберігати у звичайній паперовій формі, але можна використовувати для цього і електронну форму, і мікрофотоплівку. Необхідність в багаторазовому перетворенні даних виникає також при їх транспортуванні, особливо якщо вона здійснюється засобами, не призначеними для транспортування даного виду даних. Як приклад можна згадати, що для транспортування цифрових потоків даних по каналах телефонних мереж (які спочатку були орієнтовані тільки на передачу аналогових

сигналів у вузькому діапазоні частот) необхідно перетворення цифрових даних в якусь подобу звукових сигналів, чим і займаються спеціальні пристрої – *телефонні модеми*.

Наведений тут список типових операцій з даними далеко не повний. Мільйони людей в усьому світі займаються створенням, обробкою, перетворенням і транспортуванням даних, і на кожному робочому місці виконуються свої специфічні операції, необхідні для управління соціальними, економічними, промисловими, науковими і культурними процесами. Повний список можливих операцій скласти неможливо, та й не потрібно. Зараз нам важливий інший висновок: *робота з інформацією може мати величезну трудомісткість, і її треба автоматизувати*. Для цієї мети в даний час призначені інформаційні системи.

ТЕМА 2. ОРГАНІЗАЦІЙНО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ СТВОРЕННЯ ТА ФУНКЦІОНУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

2.1. Системний підхід при аналізі інформаційних процесів

Отже, як було вже сказано *інформаційні процеси – це цілеспрямована сукупність послідовних операцій, які виконуються персоналом задля реєстрації, передачі, накопичення, зберігання, оброблення, видачі інформації, дій і зв'язків з обміну інформацією, що здійснюються в системі комунікацій, починаючи з моменту її надходження від джерела інформації (виникнення) і закінчуючи видачею користувачеві*. Причому поняття «користувач» треба

розуміти в широкому сенсі. Користувачем можуть бути: особа, яка отримує інформацію в зручному для сприйняття вигляді: технічні пристрої, перетворювачі інформації на магнітній стрічці, диску, в оперативній пам'яті, каналі зв'язку і т. д.; програми, що перетворюють отриману інформацію.

Для аналізу інформаційних процесів скористаємося системним підходом.

***Системний підхід** – це методологія наукового пізнання і практичної діяльності, а також пояснювальний принцип, в основі яких лежить розгляд об'єкта як системи.*

Системний підхід полягає у відмові від односторонньо аналітичних, лінійно-причинних методів дослідження. Основний акцент при його застосуванні робиться на аналіз цілісних властивостей об'єкта, виявлення його різних зв'язків і структури. Системний підхід представляється найбільш універсальним методом аналізу і дослідження будь-яких складних технічних, економічних, соціальних, екологічних, політичних, біологічних і інших систем.

Системою може бути будь-який об'єкт живої і неживої природи, суспільства, процес або сукупність процесів, наукова теорія і т. д., якщо в них визначені *елементи, що утворюють єдність (цілісність) зі своїми зв'язками і взаємозв'язками між ними*, що створює в результаті сукупність властивостей, притаманних тільки даній системі і відрізняючих її від інших систем. Інакше кажучи, це означає, що властивості системи хоча і залежать від властивостей елементів, але не визначаються ними повністю. **Висновок:** *система не зводиться до простої сукупності елементів, і, розчленовуючи*

систему на окремі частини, не можна пізнати все властивості системи в цілому. Дана властивість системи отримала назву **емерджентність** або **емергентність**, синонім – **системний ефект**.

Елемент – неподільна частина системи, що володіє самостійністю по відношенню до даної системи. Неподільність елемента розглядається як недоцільність обліку в межах моделі даної системи, його внутрішньої будови. Сам елемент характеризується тільки його зовнішніми проявами у вигляді зв'язків і взаємозв'язків з іншими елементами.

При певних умовах елементи системи можуть, у свою чергу, розглядатися також як системи, в цьому випадку вони називаються підсистемами по відношенню до системи, що їх містить.

Підсистема – частина системи, яка у свою чергу виступає як система нижчого порядку, призначення якої визначається функціями системи вищого порядку та ієрархії.

Ієрархія – структура, що характеризується наявністю підпорядкованості, тобто нерівноправними зв'язками між елементами, коли вплив на елемент в одному напрямку більший, ніж в іншому.

Система існує серед інших матеріальних об'єктів (систем), які не увійшли до неї, але взаємодіють з нею. Вони об'єднуються поняттям **«зовнішнє середовище»**. По суті справи, окреслення або виявлення системи є поділ деякої області матеріального світу на дві частини, одна з яких розглядається як система – об'єкт аналізу (синтезу), а інша – як зовнішнє середовище. **Взаємозв'язок зовнішнього середовища і системи** можна вважати однією з основних особливостей

функціонування системи, зовнішньою характеристикою системи, що в значній мірі визначає її властивості.

Таким чином, у самому загальному випадку з урахуванням вищесказаного термін «система» вживають у двох розуміннях:

- як деякий метод, суть якого полягає в раціональному об'єднанні і впорядкованості всіх елементів у часі та просторі таким чином, що кожен з них сприяє успіху діяльності всього об'єкта для досягнення певної мети. В цьому розумінні для терміна «система» можна дати наступне визначення:

***Система** – це комплекс взаємопов'язаних частин, елементів або підсистем, об'єднаних дослідником для досягнення певної мети або набору цілей. Додатковою ознакою системи є приналежність кожного елемента і кожного зв'язку між елементами до виконання її цільової функції;*

- як об'єкт, який має досить складну, упорядковану внутрішню структуру. При такому підході для терміна «система» приходимо до наступного визначення:

***Система** – це множина складаючих єдність елементів, їх зв'язків і взаємодій між собою, між ними і зовнішнім середовищем, яка утворює притаманну даній системі цілісність, якісну визначеність і цілеспрямованість.*

Грунтуючись на вищевикладених поняттях і визначеннях, визначимо тепер інформаційний процес як інформаційну систему.

2.2. Інформаційні системи, їх структура і призначення

Відповідно до системного підходу інформаційний процес може бути представлений як організований набір елементів, об'єднаних регульованими взаємовідносинами, які виконуються персоналом для цілеспрямованої діяльності з надання споживачеві потрібної йому інформації (див., наприклад, рис. 1) і, отже, може розглядатися як система – інформаційна система. Виходячи з цього, ми приходимо до наступного визначення:

Інформаційна система (ІС) – взаємопов'язана сукупність засобів, методів і персоналу, використовуваних для збору, зберігання, обробки, перетворення, передачі і видачі інформації в інтересах досягнення поставленої мети.

Структура будь-якої інформаційної системи може бути представлена сукупністю забезпечуючих підсистем. Серед підсистем зазвичай виділяють інформаційне, технічне, математичне, програмне, організаційне і правове забезпечення.

Інформаційне забезпечення – сукупність єдиної системи класифікації та кодування інформації, уніфікованих систем документації, схем інформаційних потоків, що циркулюють в системі, а також методологія побудови баз даних.

Технічне забезпечення – комплекс технічних засобів, призначених для роботи інформаційної системи зі збирання, зберігання, обробки, передачі та видачі інформації, а також відповідна документація на ці засоби і технологічні процеси.

Математичне і програмне забезпечення – сукупність математичних методів, моделей, алгоритмів і програм для реалізації

цілей і завдань інформаційної системи, а також нормального функціонування комплексу технічних засобів.

До засобів математичного забезпечення відносяться:

- засоби моделювання процесів управління;
- типові завдання управління;
- методи математичного програмування, математичної статистики, теорії масового обслуговування та ін.

Організаційне забезпечення – сукупність методів і засобів, що регламентують взаємодію працівників з технічними засобами і між собою в процесі розробки і експлуатації інформаційної системи.

Правове забезпечення – сукупність правових норм, що визначають створення, юридичний статус і функціонування інформаційних систем, що регламентують порядок одержання, перетворення і використання інформації.

Для забезпечення роботи інформаційної системи будь-якого призначення необхідно:

- визначити інформаційні потреби;
- здійснити відбір джерел інформації;
- здійснити введення інформації в систему як від зовнішніх, так і внутрішніх джерел;
- виконати дії по обробці інформації, оцінці її повноти і значущості та за поданням її в зручному вигляді;
- вивести інформацію для надання споживачам або передачі в іншу систему;
- організувати перетворення інформації з метою використання інформації для оцінки тенденцій, розробки прогнозів, для вироблення

та оцінки альтернатив управлінських рішень і дій, виготовлення стратегії;

– організувати **зворотний зв'язок** – по вихідній інформації здійснювати корекцію вхідної інформації для того, щоб підтримувати систему в заданому стані (**негативний зворотний зв'язок**), або для переведення системи в бажаний стан (**позитивний зворотний зв'язок**), або організувати як позитивний, так і негативний зворотний зв'язок.

Впровадження інформаційних систем змінює технологію управління, звільняє користувачів від рутинних, досить простих, але трудомістких ручних процедур обробки інформації та ефективність такого впровадження залежить від застосовуваних інформаційних технологій. ІС використовують інформаційні технології і програмні та технічні засоби, зміст яких постійно розширюється і вдосконалюється, що призводить до вдосконалення ІС. В даний час розвиток ІС обумовлено застосуванням в комп'ютерних системах цифрових інформаційних технологій (див. розділ 1.3), включаючи мультимедіа і телекомунікації. Комп'ютерні інформаційні системи, що використовують цифрові інформаційні технології забезпечують накопичення та обробку інформації для цілей аналізу і створення системи підтримки рішень досить великих обсягів, які людина не в змозі виконати.

2.3. Базові компоненти інформаційної системи

Базовими компонентами інформаційної системи будь-якого призначення є:

– інформаційний ресурс (база даних);

– інформаційні технології.

Інформаційний ресурс (база даних) – центральний елемент інформаційної системи, який являє собою дані, що містять відомості про діяльність об'єкта.

Будь-яка інформаційна система характеризується наявністю технології перетворення вихідних даних у результативну інформацію. Такі технології прийнято називати інформаційними.

Інформаційні технології (ІТ) – це комплекс методів і процедур, за допомогою яких реалізуються функції збору, передачі, обробки, перетворення, зберігання і доведення до користувача інформації в організаційно-управлінських системах з використанням обраного комплексу технічних засобів. Інакше кажучи, **інформаційна технологія** – це системно-організована послідовність операцій, що виконуються над даними для отримання, перетворення і транспортування інформації з використанням засобів і методів автоматизації.

Інформаційні технології можуть бути згруповані наступним чином:

- Технічні засоби;
- Комунікаційні засоби;
- Організаційно-методичне забезпечення;
- Стандартизація.

Крім того, в інформаційних технологіях можна виділити дві частини:

1. Здатність генерувати за запитом інформаційний продукт;

2. Засоби доставки цього інформаційного продукту в зручний час і в зручній для користувача формі.

Інформаційні технології класифікують на сучасному етапі як аналогові та цифрові, тобто в залежності від способу представлення інформаційного сигналу та обробки інформації.

Впровадження інформаційних систем змінює технологію управління, звільняє користувачів від рутинних, досить простих, але трудомістких ручних процедур обробки інформації; ефективність такого впровадження залежить від застосовуваних інформаційних технологій. ІС використовують інформаційні технології і програмні та технічні засоби, зміст яких постійно розширюється і вдосконалюється, що призводить до вдосконалення ІС. В даний час розвиток ІС обумовлено застосуванням в комп'ютерних системах цифрових інформаційних технологій (див. розділ 1.3), включаючи мультимедіа і телекомунікації. Комп'ютерні інформаційні системи, що використовують цифрові інформаційні технології, забезпечують накопичення та обробку інформації для цілей аналізу і створення системи підтримки рішень досить великих обсягів, які людина не в змозі виконати.

В даний час в залежності від використання технічних засобів розрізняють два способи обробки інформації – сукупність методики і технічних засобів, за допомогою яких здійснюється обробка інформації: без використання комп'ютерів і з використанням комп'ютерів.

Обробка інформації без використання комп'ютерів має переваги:

- незначні вимоги до кваліфікації працівників;
- складність випадкової втрати інформації і хороша захищеність інформації від несанкціонованого втручання;
- висока юридична доказовість складених первинних документів.

Недоліки:

- значна тривалість і трудомісткість процесу збору та обробки інформації;
- низький рівень деталізації інформації;
- значні обсяги рутинних операцій.

Обробка інформації з використанням комп'ютерів має переваги:

- можливість широкого поділу праці між працівниками;
- можливість кільком користувачам працювати з одним регістром;
- можливість значної деталізації даних в аналізі інформації;
- автоматичний контроль над арифметичними підрахунками, об'єднання документування і запису в облікові регістри;
- значна швидкість отримання результативної інформації, можливість ведення багатовимірних і багаторівневих масивів даних;
- скорочення потоку паперових документів і перехід до безпаперової технології, можливість щоденного формування звітності підприємства за потребою;
- можливість вибору форми подання інформації, можливість пошуку інформації на своїх робочих місцях з метою економії робочого часу.

Недоліки:

- недостатнє вирішення проблеми захисту інформації від несанкціонованого втручання;
- проблема юридичної доказовості складених електронних первинних документів;
- можливість втрати чи псування інформації при відключенні електроенергії, проникненні комп'ютерних вірусів;
- значні разові витрати на здійснення автоматизації, придбання комп'ютерної техніки, програмного забезпечення і навчання персоналу.

2.4. Комп'ютерні інформаційні системи і їх класифікація

Сучасна *комп'ютерна інформаційна система* – сукупність економіко-математичних методів і моделей, технічних, програмних, технологічних засобів і рішень, а також фахівців, призначена для обробки інформації і прийняття управлінських рішень з використанням комп'ютерної та обчислювальної техніки – має широкі можливості, якими фахівці не до кінця ще скористалися. Відбувається інтенсивна робота з освоєння цих можливостей і, в першу чергу, з залученням мережі Інтернет та впровадження їх в життя. Комп'ютерні інформаційні системи відіграють значну роль на сучасних підприємствах. Вони безпосередньо впливають на планування і прийняття управлінських рішень, номенклатуру і технологію виготовлення та реалізації товарів і послуг. Впровадження комп'ютерних ІС змінює технологію управління, звільняє користувачів від рутинних, досить простих, але трудомістких ручних процедур обробки інформації. Комп'ютерні ІС

змінюють організаційну структуру, склад функцій управління і пов'язані з ними інформаційні потоки, форму подання і якісні характеристики інформації (оперативність, достовірність, точність, повноту інформації для управлінських рішень).

При цьому широкомасштабною метою є створення і розгортання єдиної корпоративної інформаційної системи (див. розділ 4.2), що задовольняє інформаційним потребам всіх співробітників, служб і підрозділів організації.

Комп'ютерні ІС (далі просто ІС, так як в теперішній час під ІС розуміють дійсно комп'ютерну ІС) можуть бути класифіковані і значно відрізнитися за типами об'єктів управління, сфері застосування, характером і обсягом розв'язуваних задач та іншими ознаками. Як приклад можна навести таку класифікацію.

Класифікація за архітектурою. Різницю здійснюють за ступенем розподіленості компонент БД, СУБД і клієнтські додатки. У такій класифікації розрізняють *настільні*, або *персональні* ІС, в яких всі компоненти знаходяться на одному комп'ютері, і *розподілені* ІС, в яких компоненти розподілені по декількох комп'ютерах. Так, наприклад, в розподілених клієнт-серверних ІС (ІС з архітектурою «клієнт-сервер») база даних і СУБД знаходяться на сервері, а на робочих станціях знаходяться тільки клієнтські програми.

Робоча станція позначає стаціонарний комп'ютер в складі комп'ютерної мережі по відношенню до сервера і на робочих станціях користувачі вирішують прикладні завдання.

Сервер – це потужний комп'ютер, що містить програмний компонент, що виконує сервісні (обслуговуючі) функції за запитом

клієнта з віддаленої робочої станції, надаючи йому доступ до певних ресурсів або послуг.

Таким чином, з терміном «сервер» нерозривно пов'язаний інший – «клієнт». Клієнт – це апаратний або програмний компонент робочої станції, який посилає запити серверу. В існуванні сервера не було б ніякого сенсу без пов'язаних з ним пристроїв, що містять клієнтські додатки і направляючих на нього ті чи інші запити і отримуючих від нього необхідну інформацію.

Класифікація за ступенем автоматизації. За ступенем автоматизації ІС діляться на:

– автоматизовані ІС, в яких автоматизація може бути неповною (тобто потрібне постійне втручання персоналу). Наприклад:

Автоматизовані системи управління підприємствами (АСУП) – це системи із застосуванням сучасних засобів автоматизованої обробки даних, економіко-математичних та інших методів для вирішення завдань управління виробничо-господарською діяльністю підприємств.

Автоматизовані системи управління технологічними процесами (АСУТП) керують станом технологічних процесів;

- автоматичні ІС, в яких автоматизація є повною, тобто втручання персоналу не потрібно або потрібно тільки епізодично. Наприклад, автоматичні виробничі лінії, автопілот з управління польотом літака.

Класифікація за характером обробки даних. За характером обробки даних ІС діляться на:

- інформаційно-довідкові системи (ІДС), або інформаційно-пошукові системи (ІПС), в яких немає складних алгоритмів обробки даних, а метою системи є пошук і видача інформації в зручному вигляді без її змістовної обробки;

- ІС обробки даних, або вирішальні ІС, в яких дані піддаються обробці по складним алгоритмам. До таких систем в першу чергу відносять:

Автоматизовані системи управління (АСУ), призначені для автоматизованого вирішення широкого кола завдань управління за допомогою системи управління базою даних (СУБД).

Системи підтримки прийняття рішень (СППР) – це інтерактивні комп'ютерні системи, які призначені для підтримки різних видів діяльності і прийняття рішень щодо слабоструктурованих або неструктурованих проблем;

- експертні системи – це ІС, які базуються на знаннях і дають можливість проводити ефективну комп'ютеризацію областей, які представлені в експертній описовій формі, а використання математичних моделей неможливе або утруднене.

Класифікація за сферою застосування. Оскільки ІС створюються для задоволення інформаційних потреб в рамках конкретної предметної області, то кожний предметний області (сфері застосування) відповідає свій тип ІС. Перераховувати всі ці типи не має сенсу, так як кількість предметних областей велика, але можна вказати в якості прикладу наступні типи ІС:

Економічна ІС – інформаційна система, призначена для виконання функцій управління на підприємстві.

Медична ІС – інформаційна система, призначена для використання в лікувальному або лікувально-профілактичному закладі.

Класифікація за охопленням завдань (масштабності):

Персональна ІС призначена для вирішення певного кола завдань однієї людини.

Корпоративна ІС орієнтована на колективне використання інформації членами робочої групи, підрозділу, корпорації (див. Розділ 4.2).

Таким чином, інформаційна система може бути визначена з технічної точки зору як набір взаємозалежних компонентів, які збирають, обробляють, накопичують і розподіляють інформацію, щоб підтримати прийняття рішень і управління в організації. На додаток до підтримки прийняття рішень, координації і управління інформаційні системи можуть також допомогти управлінцям проводити аналіз проблеми, і виробляти рішення щодо їх усунення. В умовах автоматизованого втілення інформаційних технологій існують комп'ютерні програми.

2.5. Програмне забезпечення і технічні засоби комп'ютерних інформаційних технологій та їх призначення

Програмне забезпечення сучасних комп'ютерних інформаційних технологій включають безліч різноманітних програм, яке можна умовно розділити на три групи:

1. Системне програмне забезпечення (системні програми);
2. Прикладне програмне забезпечення (прикладні програми);

3. Інструментальне програмне забезпечення (інструментальні системи).

Системне програмне забезпечення – комплекс програм, які забезпечують управління компонентами комп'ютерної системи, такими як процесор, оперативна пам'ять, пристрої введення-виведення, мережеве обладнання, виступаючи як «міжшаровий інтерфейс», з одного боку якого апаратура, а з іншого – додатки користувача і включає операційні та сервісні системи. Операційна система – комплекс системних програм (Windows XP, Windows Vista, UNIX, Linux), що розширює можливості обчислювальної системи, а також забезпечує управління її ресурсами, завантаження і виконання прикладних програм, взаємодію з користувачами. У більшості обчислювальних систем операційні системи є основною, найбільш важливою (а іноді єдиною) частиною системного програмного забезпечення.

Сервісні системи (утиліти, лат. utilitas – користь) – це допоміжні програми, які надають користувачеві ряд додаткових послуг по реалізації часто виконуваних робіт або ж підвищують зручність і комфортність роботи. До них відносяться також і драйвери. Драйвери – спеціальні програми, що розширюють можливості операційної системи з управління пристроями введення/виводу, оперативною пам'яттю, роботою периферійних пристроїв. Зазвичай драйвери для різних операційних систем поставляються разом з новими пристроями.

Прикладне програмне забезпечення – складається з прикладних програм користувача (текстові редактори,

електронні таблиці та ін.) і пакетів прикладних програм, призначених для вирішення конкретних завдань.

Інструментальне програмне забезпечення включає системи програмування, інструментальні середовища і системи моделювання.

Програмні засоби *комп'ютерних інформаційних технологій*, тобто *інформаційні технології*, реалізовані з використанням *комп'ютерної техніки*, забезпечують можливість програмної обробки інформації в електронному вигляді, вони включають:

1. Системне програмне забезпечення, яке забезпечує роботу електронно-обчислювальної техніки і комп'ютерних мереж;
2. Прикладне програмне забезпечення, яке дозволяє вирішувати конкретні управлінські завдання і обробляти інформацію відповідно до поставлених перед працівником завдань та його безпосередніх посадових обов'язків.

Технічні засоби для *комп'ютерних інформаційних технологій* діляться на класи:

1. Засоби збору і реєстрації інформації (ПК, сканери, автоматичні датчики);
2. Засоби передачі інформації (локальні, регіональні і глобальні комп'ютерні та телекомунікаційні мережі, Інтернет);
3. Засоби зберігання даних (сервери баз даних, файлові сервери, оптичні (лазерні) диски, цифрові відеодиски);
4. Засоби обробки даних (локальні, регіональні і глобальні обчислювальні мережі);

5. Засоби виведення інформації (відеомонітори, принтери, графічні пристрої).

При цьому широкомасштабною метою є створення і розгортання єдиної корпоративної інформаційної системи (дів. розділ 4.2), що задовольняє інформаційним потребам всіх співробітників, служб і підрозділів організації.

Комп'ютерні ІС можуть бути класифіковані і значно відрізнятися за типами об'єктів управління, сфері застосування, характером і обсягом розв'язуваних задач та іншими ознаками. Як приклад можна навести таку класифікацію.

Автоматизовані системи управління підприємствами (АСУП) – це системи із застосуванням сучасних засобів автоматизованої обробки даних, економіко-математичних та інших методів для вирішення завдань управління виробничо-господарською діяльністю підприємств.

Автоматизовані системи управління технологічними процесами (АСУ ТП) керують станом технологічних процесів.

Інформаційно-пошукові системи (ІПС) орієнтовані на рішення задач з пошуку інформації без її змістовної обробки.

Інформаційно-довідкові системи (ІДС) призначені для обчислення значень арифметичних функцій за результатами пошуку.

Управлінські інформаційні системи (УІС) призначені для автоматизованого вирішення широкого кола завдань управління за допомогою системи управління базою даних (СУБД).

Системи підтримки прийняття рішень (СППР) – це інтерактивні комп'ютерні системи, які призначені для підтримки різних видів

діяльності і прийняття рішень щодо слабоструктурованих або неструктурованих проблем.

Експертні системи – це інформаційні системи, які базуються на знаннях і дають можливість проводити ефективну комп'ютеризацію областей, які представлені в експертній описовій формі, а використання математичних моделей неможливе або утруднене.

Таким чином, інформаційна система може бути визначена з технічної точки зору як набір взаємозалежних компонентів, які збирають, обробляють, накопичують і розподіляють інформацію, щоб підтримати прийняття рішень і управління в організації. На додаток до підтримки прийняття рішень, координації і управління інформаційні системи можуть також допомогти управлінцям проводити аналіз проблеми і виробляти рішення щодо їх усунення. В умовах автоматизованого втілення інформаційних технологій існують комп'ютерні програми.

***Комп'ютерна програма** – це набір інструкцій у вигляді слів, цифр, кодів, схем, символів чи в іншому вигляді, виражених у формі, яку читає комп'ютер і які приводять його в дію для досягнення певної мети або результату.*

Програми, призначені для виконання комп'ютерами, діляться на: ***операційні системи*** (Windows XP, Windows Vista, UNIX, Linux), ***системне програмне забезпечення*** (драйвери, утиліти), ***прикладні програми*** (текстові редактори, електронні таблиці, програми, призначені для вирішення конкретних завдань), ***мови програмування*** (Pascal, Delphi), інші програми.

Основним засобом втілення комп'ютерних інформаційних технологій на робочому місці працівника є його *автоматизоване робоче місце* (АРМ) – професійно-орієнтований програмно-апаратний комплекс, який забезпечує вирішення завдань користувача безпосередньо на його робочому місці.

Вимоги до програмних продуктів формують три різні категорії користувачів: безпосередні користувачі комп'ютерної системи (оператори), фахівці з інформаційних систем (програмісти і техніки), управлінці (керівництво підприємства, менеджери).

Перелік вимог до програм – це складний комплекс функціональних, технічних, комерційних та ергономічних питань.

До основних *функціональних вимог* належать: здатність вводити і накопичувати всі операції, які відображають діяльність досліджуваного об'єкта; можливість розраховувати підсумки, складати звітні форми за результатами аналізу в будь-який момент часу при будь-якій кількості введених операцій; обробка кореспонденції і доставка підсумків аналізу операцій із зазначенням конкретних аналітичних об'єктів для її подання.

Технічні вимоги полягають, по-перше, в якості програмування (алгоритмів обробки даних), по-друге, в передбаченні ряду сервісних параметрів, які необхідні для ефективної роботи програми в межах програмно-апаратного комплексу. До основних технічних вимог належать: невибагливість до апаратного забезпечення – програма повинна ефективно працювати на комп'ютерах з середніми характеристиками; можливість редагування документів і звітів, що дозволяє користувачеві створити форму звіту, яка потім буде

виводитися на екран монітора або принтера; обмін даними з іншими програмами та пристроями; робота в локальних комп'ютерних мережах; забезпечення захисту інформації з застосуванням системи паролів; засоби створення архівів даних і автоматичне відновлення інформації у разі збою.

До комерційних вимог відносять вимоги, які пов'язані з умовами придбання та експлуатації програми, які пропонуються постачальником. До основних комерційних вимог належать: прийнятна ціна програми (потрібно розрізняти вартість власне програмного продукту і вартість його впровадження і супроводу): супровід програмного забезпечення, який передбачає навчання роботі з програмою і налагодження програми на вирішення конкретного завдання з використанням реальних даних користувача; оперативні консультації з проблем, які виникають в процесі роботи; оновлення старих версій програмних продуктів, швидка заміна їх новими; висока якість паперової та електронної документації.

До ергономічних вимог належать зручність інтерфейсу користувача і розвинена система програмної допомоги.

Рекомендована послідовність вибору програми є такою:

- 1) визначення основних напрямів діяльності;
- 2) визначення бюджету на впровадження комп'ютерної програми;
- 3) визначення переліку програм, які мають прийнятну функціональність і відповідають наявним технічному забезпечення та бюджету витрат;

4) отримання демонстраційних версій програм для ознайомлення з ними, вибір оптимального варіанту програми і оцінка її придатності.

Технічні засоби для комп'ютерних інформаційних технологій діляться на класи:

1. Засоби збору і реєстрації інформації (ПК, сканери, автоматичні датчики);
2. Засоби передачі інформації (локальні, регіональні і глобальні комп'ютерні та телекомунікаційні мережі, Інтернет);
3. Засоби зберігання даних (сервери баз даних, файлові сервери, оптичні (лазерні) диски, цифрові відеодиски);
4. Засоби обробки даних (локальні, регіональні і глобальні обчислювальні мережі);
5. Засоби виведення інформації (відеомонітори, принтери, графічні пристрої).

2.6. Принципи проектування і створення комп'ютерних інформаційних систем

Створення комп'ютерних інформаційних систем (далі просто ІС) – це цілеспрямована діяльність, спрямована на забезпечення всіх користувачів інформації, об'єднаних в певну структуру (наприклад, підприємство), потрібною їм інформацією з використанням комп'ютерної техніки.

При створенні ІС використовуються різні підходи:

1. Залежно від змін, здійснених в організаційній структурі користувачів інформації, виділяють підходи, які зберігають існуючу

організаційну структуру, і підходи, які змінюють існуючу організаційну структуру, удосконалюючи її.

2. Залежно від характеру змін, внесених в ІС, виділяють підходи удосконалення, відповідно до яких удосконалюються окремі процеси виконання операцій і комплексні підходи, які вдосконалюють ІС в цілому. Основним засобом комплексного удосконалення ІС є структурний підхід, який передбачає послідовний розподіл ІС системи на окремі модулі. Кожен, з модулів буде мати певну функцію в залежності від призначення з подальшим об'єднанням отриманих модулів в єдине ціле, яке і буде представляти вдосконалену ІС.

3. Залежно від способу реалізації удосконалення ІС виділяють такі підходи до вдосконалення ІС: удосконалення власними силами, удосконалення з використанням стандартизованого рішення, яке було випробувано, і замовлення індивідуальної ІС – системного інтегратора.

При проектуванні ІС потрібно враховувати певні принципи, дотримання яких дозволить значно підвищити ефективність роботи ІС. Виділяють такі *принципи проектування ІС*:

1) **Системність**. Проведення аналізу об'єкта управління в цілому і системи управління ним, визначення загальних цілей і критеріїв управління, а також визначення загальних цілей і критеріїв функціонування об'єкта в умовах його автоматизації. Даний принцип передбачає одноразове введення інформації в систему і багаторазове її використання, наявність єдиної інформаційної бази, комплексне

програмне забезпечення. Даний принцип є основним при проектуванні ІС.

2) **Економічна доцільність.** Переваги, які очікуються від використання системи, повинні перевищувати витрати на проектування, впровадження, вивчення супроводу.

3) **Гнучкість.** Система, яка створюється, повинна мати достатній запас гнучкості, щоб забезпечити можливість реагування на зміну зовнішніх факторів.

4) **Контроль.** Створення паралельних інформаційних потоків, які контролюють один одного і забезпечують достовірність даних.

5) **Захист і безпека даних.** Система, яка проектується, повинна забезпечувати надійність і безпеку інформації в системі. Якісна комп'ютерна система повинна виконувати такі функції щодо безпеки даних: незмінність доступу до функцій і даних системи шляхом авторизації користувачів за паролем; шифрування даних; наявність контролю над входом до системи і ведення журналу робочого часу; контроль над періодичністю створення резервних (архівних) копій інформації.

6) **Сумісність.** Принцип сумісності означає, що система повинна проектуватися з урахуванням людського фактора і організаційних особливостей підприємства, вже наявних комп'ютерів і програм.

7) **Універсальність.** Програмна система повинна вирішувати не окрему задачу, а виконувати стандартні процедури і обробляти конкретну задачу як окремий випадок більш загальної.

8) **Безперервність розвитку** передбачає постійне удосконалення всіх видів і його забезпечення (технічного, програмного, інформаційного та ін.). Це обумовлено тим, що з розвитком підприємств виникають нові завдання управління, удосконалюються і змінюються старі.

Незалежно від підходу до створення ІС, дотримання принципів проектування ІС забезпечує створення високоефективної, працюючої системи, яка може бути швидко адаптована до нових вимог користувачів інформації.

У висновку відзначимо основні ознаки сучасних інформаційних систем. Будь-яка ІС може бути піддана аналізу, побудована і керована на основі загальних принципів побудови систем; ІС є динамічною і розвивається; при побудові ІС необхідно використовувати системний підхід; вихідною продукцією ІС є інформація, на основі якої приймаються рішення; ІС слід сприймати як людино-комп'ютерну систему обробки інформації.

Той факт, що ІС слід сприймати, як людино-комп'ютерну систему обробки інформації, означає, що діяльність щодо забезпечення всіх користувачів потрібної їм інформацією здійснює спеціально навчений персонал.

Посадові інструкції працівників при застосуванні комп'ютерного способу обробки інформації повинні передбачати:

1. Права доступу працівника до комп'ютера і інформаційних ресурсів.
2. Перелік документів, з якими працює співробітник, і перелік операцій, які він виконує.

3. Порядок зберігання паперових документів.
4. Порядок і спосіб перенесення паперових документів в інформаційну базу.
5. Правила створення електронних документів та звітів.
6. Періодичність складання звітів.
7. Порядок формування запитів до працівників різних служб.
8. Спосіб передачі інформації до інших робочих місць.
9. Порядок зберігання архівної інформації та знищення електронних архівних копій.
10. Періодичність контролю робочого місця фахівцями.
11. Періодичність перевірки робочого місця технічними службами.

Як впливає з вищевикладеного розгляду, одне з основних призначень створюваних ІС (крім автоматизації) – це виробництво потрібної інформації для забезпечення ефективного управління об'єктом по досягненню поставлених цілей. Детальний розгляд управлінських ІС і є предметом нашого подальшого викладу.

ТЕМА 3. УПРАВЛІНСЬКІ ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ

3.1. Інформаційний аналіз і синтез систем управління

Інформаційний аналіз виконується з метою дослідження кількісних і якісних характеристик інформації, використовуваної в системі управління.

Процедура інформаційного аналізу включає:

- визначення потреби в інформації на кожній стадії управління;
- планування потреб в інформації;
- визначення кількісних і якісних характеристик комунікаційних процесів;
- визначення потреби в інформації при оцінці ефективності управлінських рішень (дій).

До показників (характеристик) інформації відносяться:

- обсяг і швидкість передачі інформації;
- достовірність переданих повідомлень;
- напрямки інформаційних потоків;
- характеристики методів обробки інформації і здійснювані при цьому помилки;
- якісний склад інформації;
- кількість оброблюваних або переданих документів;
- сумарна кількість оброблюваних або переданих документів і ін.

На основі результатів інформаційного аналізу виробляються попередні рекомендації з розробки інформаційного забезпечення системи управління, включаючи способи передачі, обробки та подання інформації, склад інформації, необхідної для нормального функціонування системи, структуру інформаційного обміну та ін.

У системному розумінні інформація розглядається з точки зору наступних аспектів:

прагматичний – виконання поставлених цілей і завдань, критеріїв оцінки їх здійсненності, способів опису інформаційних образів і потоків, стратегії і тактики виконання цілей;

семантичний – смисловий зміст інформації, її однозначність і конкретність, можливість застосування при виконанні поставлених цілей і завдань;

синтаксичний – правила і закони отримання, обробки, зберігання та передачі інформації, що включає в себе структурний аспект – правила і закони класифікації інформації, формування інформаційних файлів, баз даних і баз знань.

Сутністю інформаційного синтезу є обґрунтування необхідного обсягу і форм подання інформації, методів і засобів її передачі, обробки, зберігання, введення і виведення для розроблюваної структури і алгоритму функціонування системи управління.

Інформаційний синтез здійснюється з метою визначення необхідних якісних і кількісних характеристик інформації, використовуваної в процесі функціонування системи управління.

Визначення оптимальних або раціональних характеристик інформації проводиться, як правило, з використанням показників і критеріїв ефективності, які враховують структурні і функціональні особливості системи. При цьому однією з основних проблем інформаційного синтезу є кількісна оцінка впливу даних характеристик на результати функціонування системи управління.

Процес управління, як процес вироблення керуючих впливів на систему для досягнення нею бажаних цілей, є *інформаційним процесом*.

Керуючий інформаційний процес – це цілеспрямована сукупність операцій по перетворенню інформації, що реалізуються в

певному середовищі, починаючи з моменту її надходження в систему (виникнення) і закінчуючи видачею користувачеві. Причому поняття «користувач» треба розуміти в широкому сенсі. Користувачем можуть бути: особа, яка приймає рішення, що одержує інформацію в зручному для сприйняття вигляді; технічні пристрої, перетворювачі інформації на магнітній стрічці, диску, в оперативній пам'яті, каналі зв'язку і т. д.; програми, що перетворюють отриману інформацію.

Тому об'єктом інформаційного аналізу і синтезу в системі управління є інформаційні процеси, що протікають в системі управління.

Зупинимось на їх сутності і змісті, для чого розглянемо:

- комунікаційну (інформаційну) схему передачі інформації в системі управління;
- класифікацію і характеристику інформаційних процесів;
- структуру інформаційного процесу.

Комунікаційна (інформаційна) схема передачі інформації в системі управління. Ця схема передачі інформації в системі управління показана на рис. 2.

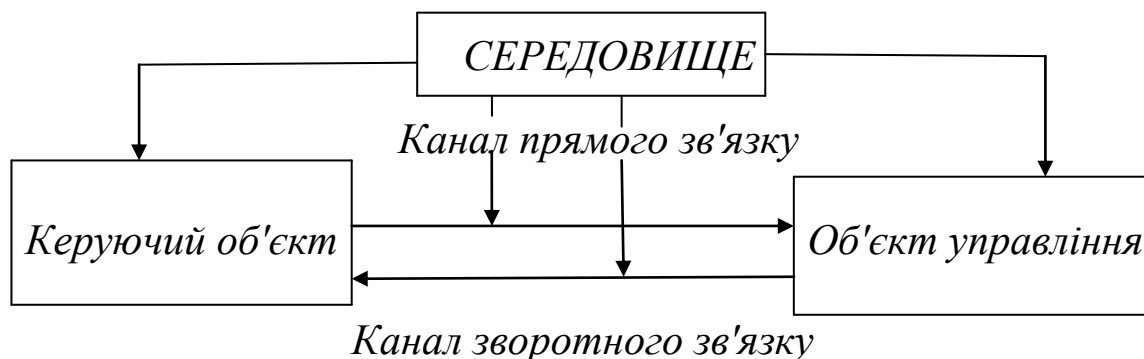


Рис. 2. Комунікаційна схема передачі інформації в системі управління

На рис. 2 джерелом інформації є об'єкт управління, який посилає по каналу зворотного зв'язку інформацію про свій стан. Приймач інформації, він же керуючий об'єкт, в залежності від кількості та змісту інформації про об'єкт управління, виробляє рішення про вплив на нього. Це рішення у вигляді команд і сигналів управління по каналу прямого зв'язку передається на об'єкт управління. Після виконання команд об'єкт управління посилає на керуючий об'єкт інформацію про зміну свого стану і т. д. Таким чином, замикається цикл обміну інформацією в системі управління, а для системи управління можна дати наступне визначення:

Система управління (СУ) – сукупність стійких зв'язків керуючого об'єкта і суб'єкта управління, реалізованих в конкретних організаційних формах для досягнення бажаних цілей.

Завдання органу управління полягає в перетворенні зовнішнього впливу на об'єкт таким чином, щоб на виході об'єкта управління було отримано деякий бажаний стан.

В реально функціонуючих системах управління на джерело інформації, приймач інформації і лінію передачі інформації впливає середовище, в якому дана система функціонує, вносячи свої корективи як в кількість інформації, так і в якість.

Класифікація і характеристика інформаційних процесів. При класифікації слід розрізняти однорідні і неоднорідні сукупності ІІ.

Будемо вважати задану сукупність ІІ однорідною, якщо характер використання ресурсів системи, що забезпечує їх реалізацію, однаковий для всіх ІІ та порядок обслуговування в ній не

пов'язаний з їх приналежністю до конкретних ІП. В протилежному випадку сукупність ІП вважається неоднорідною.

У свою чергу, серед неоднорідних сукупностей ІП можна виділити пріоритетні і непріоритетні. Неоднорідна сукупність ІП є непріоритетною, якщо порядок обслуговування заявок окремих ІП не залежить від їх приналежності до конкретних ІП, в іншому випадку вона вважається пріоритетною.

Для непріоритетної сукупності ІП найбільш характерні наступні дисципліни обслуговування: в порядку надходження; в зворотньому порядку; на основі поділу часу.

Для пріоритетної сукупності ІП дисципліна обслуговування залежить від важливості ІП. Порядок обслуговування (надання ресурсів для реалізації ІП) ґрунтується на аналізі пріоритетів ІП, для чого кожному ІП приписується число, іменоване пріоритетом. Зазвичай вважається, що чим менше це число, тим «важливіше» ІП, тобто, тим більшу перевагу йому повинно бути надано.

За способом призначення пріоритету розрізняють системи з фіксованими і динамічними пріоритетами. У першому випадку числове значення пріоритету ІП зберігається постійним у процесі його обслуговування (в тому числі і з урахуванням часу очікування обслуговування), у другому – з плином часу змінюється, будучи деякою функцією від часу обслуговування.

Пріоритетну сукупність, що не відноситься до жодного із зазначених типів, називають складовою. Для неї зазвичай використовуються різні комбінації описаних способів призначення пріоритету «конкуруючих» ІП.

Незважаючи на все різноманіття ІП, що протікають в системах управління, з точки зору технології обробки інформації вони мають багато спільного. Це дозволяє представити узагальнену схему обробки інформації в системах управління (рис. 3).

Джерелами інформації в системах управління можуть бути *посадові особи* (ПО) органів управління, *автоматичні датчики* (АД) і *обчислювальні комплекси* (ОК).

У загальному випадку інформація до моменту видачі її користувачеві проходить наступні основні технологічні етапи перетворення:

- збір даних (вручну або автоматично);
- формування повідомлення (запиту);
- передача даних по каналах зв'язку з використанням засобів автоматизації або традиційними способами;
- видача даних особі, що приймає рішення (ОПР), або для їх введення в обчислювальний комплекс;
- рішення інформаційних або розрахункових завдань в ОК;
- видача результатів рішення задач ОПР;
- доведення прийнятого рішення або результатів вирішення завдань до адресатів.

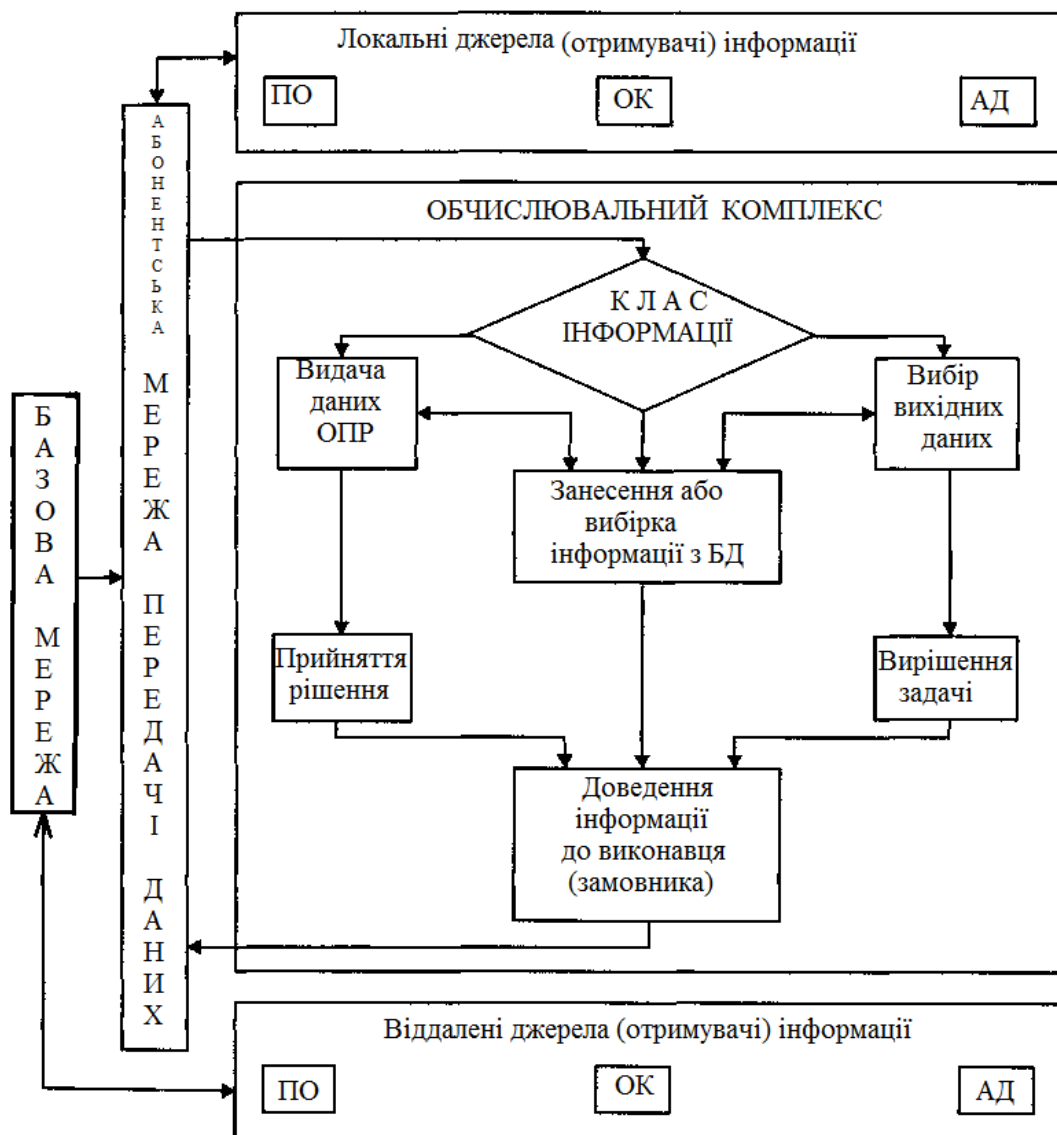


Рис. 3. Узагальнена схема обробки інформації в системах управління

Для різних категорій користувачів кількість етапів, їх тривалість, а також типи повідомлень (запитів), що генеруються ними, як правило, різні. Вони залежать від конкретного призначення системи, технічної реалізації її окремих елементів, їх пріоритетів, характеру відомостей, переданих в інформаційних повідомленнях, і т. д.

Так, для отримання довідки користувачі, локально підключені до досить потужного ОК, можуть залучити інші ОК (без виходу в систему передачі даних).

Структура інформаційного процесу. Будь-який інформаційний процес в системі управління структурно можна уявити як деяку сукупність процесів:

- збір, прийом, сприйняття інформації (ці процеси відображають взаємодію системи із зовнішнім середовищем);
- передача інформації між окремими підсистемами системи;
- переробка, аналіз, відбір інформації, створення нової інформації;
- використання інформації;
- зберігання, запам'ятовування інформації;
- передача інформації з системи в зовнішнє середовище.

Визначивши поняття інформаційного процесу як сукупності операцій по перетворенню інформації, необхідно відзначити наступне.

Будь-яка інформаційна одиниця (I), що володіє споживною вартістю (якістю), характеризується змістом (S), формою (F), просторовим розташуванням (L) і часом (T), тобто $I = \{S, F, L, T\}$.

Кожна з цих характеристик в процесі перетворення (в інформаційному процесі) може змінюватися. При цьому розрізняють наступні види перетворення інформації:

- змістовне (семантична обробка, в результаті якої виходить нова інформація);
- перетворення форми (наприклад, кодування, декодування і т. п.);
- перетворення в просторі і часі (наприклад, передача даних і відповідно зберігання).

Елементарною дією в інформаційному процесі є операція перетворення інформації (рис. 4).

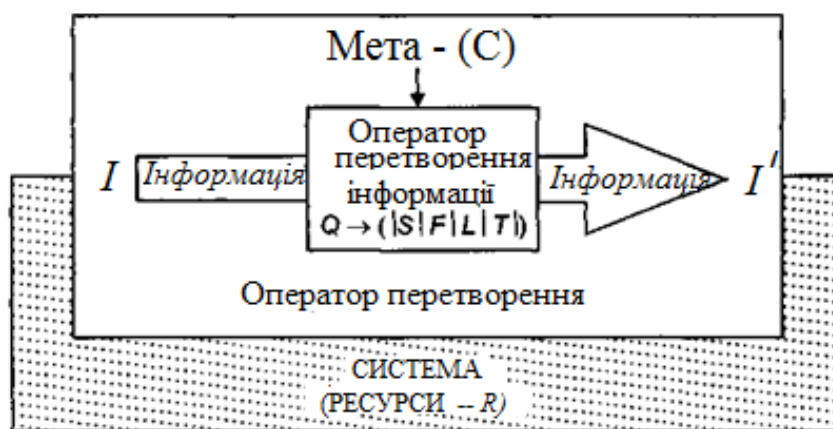


Рис. 4. Структура операції перетворення інформації:

$I' = Q(I, C, R)$; де I, I' – кванти інформації

Основні атрибути операції – інформація (об'єкт перетворення); оператор (суб'єкт перетворення) і мета (вимоги до перетворення).

Операції по перетворенню інформації можуть бути різних типів (V), які визначаються типом оператора $Q \rightarrow (|S|F|L|T|)$, складністю (U), що залежить від типу оператора і мети перетворення $U = \langle V, C \rangle$, часу (T) її реалізації $T = \langle U, I \rangle$ і ресурсоємності (R).

Процес перетворення інформації структурно можна уявити множиною підпроцесів. Залежно від того, які види перетворення інформації домінують (тобто є основними в системі досягнення мети), можна виділити наступні підпроцеси.

1. *Процес формування (підготовки) інформації* для перетворення. Домінуючим видом перетворення є перетворення форми (F).

2. *Процес передачі інформації* від джерела до споживача. Очевидно, що основним видом перетворення тут є перетворення

інформації в просторі (L).

3. *Процес семантичної (сислової) обробки інформації* – центральний підпроцес ІІ у системі управління. В результаті його здійснення з'являється нова інформація, на основі якої, в кінцевому рахунку, формуються управляючі дії. Саме з цього процесу можна повністю ідентифікувати всю систему з управлінням і саме від якості обробки інформації залежить ефективність функціонування системи. Мета даного процесу – вироблення адекватних керуючих впливів оптимальним (раціональним) способом. Домінуючий вид перетворення в цьому випадку – перетворення змісту інформації (S).

4. *Процес зберігання інформації*. Мета даного процесу – забезпечити існування інформації в часі. Основний вид перетворення тут – перетворення інформації в часі (T).

Очевидно, що всі реальні процеси і системи, що їх реалізують, а, отже, і структури ІІ, унікальні. Специфіка функціонування реальних систем (що і визначає їх унікальність) проявляється в змісті самої інформації, складі і послідовності застосування конкретних операторів по її перетворенню і цілей, складі того чи іншого процесу, складі і взаємозв'язку підпроцесів, а також в конкретних глобальних цілях функціонування системи з керуванням.

Керуючі (інформаційні) процеси можна реалізувати на ЕОМ, якщо їх вдається формалізувати.

Формалізація – це етап системного дослідження, на якому сформульована в змістовному описі основна гіпотеза про механізм досліджуваного процесу функціонування системи і його

закономірності набуває суворо логічну і кількісну форму причинно-наслідкових відносин.

Формалізація процесу управління включає виділення управлінських функцій і завдань, розробку алгоритмів формалізації і проведення алгоритмізації. Процес вважають повністю формалізованим, якщо алгоритми до завдань представлені і математично переведені на машинні програми, і при вирішенні завдань вже не потрібно враховувати їх фізичний зміст. Потреба в знанні фізичного змісту з'являється лише при використанні отриманих результатів.

3.2. Поняття «чорний ящик» в інформаційному аналізі систем

Як ми вже знаємо, досліджуваний об'єкт, що розглядається як система, входить складовою частиною в цілий ряд різних ієрархічних систем. В економічних системах головною дійовою особою є людина. Тому, вивчаючи конкретну економічну задачу, ми змушені «обривати» на деякому етапі ієрархію систем, «що йде вниз». Зробимо ми це на людині, або на якійсь сукупності людей – це вже залежить від досліджуваного завдання.

В якості «найменшого» елемента, який можна розглядати як «неподільний», звичайно, не обов'язково виступає людина. Цілком може виявитися, що в якості такого «неподільного» елемента можна розглядати, наприклад, окремі фірми (для задач оптимізації управління економікою регіону), соціальні групи (для задач

розподілу коштів держбюджету), або галузі економіки (при розгляді балансу ресурсів в рамках валового внутрішнього продукту).

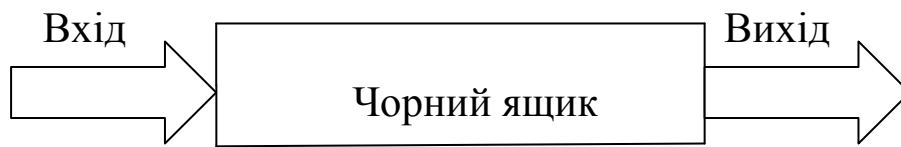
Іншими словами: на деякому етапі дослідження деякі елементи, що складають нашу систему, покладаються нами вже не елементами системи, а «кінцевими» і «неподільними» об'єктами. Таким чином, ієрархія систем розгортається вгору, виходячи від таких об'єктів, які тим самим стають об'єктами найнижчого рівня ієрархії.

Такий об'єкт – в силу зроблених нами припущень (тобто з нашої ситуативної точки зору) – вже не буде мати «внутрішньої будови». Тому він повинен розглядатися як об'єкт, який може бути охарактеризований – в рамках розглянутого нами завдання – тільки двома класами характеристик. Необхідність цього виникає внаслідок тієї причини, що такі об'єкти повинні формувати систему – тобто вони повинні мати можливість утворювати зв'язки один з одним.

Але це можливо тільки при виконанні двох умов.

По-перше, об'єкт повинен мати здатність сприймати вплив з боку інших подібних об'єктів (це може бути інформація, відомості, дані, сигнали і т. п.). По-друге, він сам повинен володіти здатністю «генерувати» такі дії, які будуть впливати на інші подібні до нього об'єкти.

Таким чином, приходимо до визначення: фрагмент системи, який розглядається як єдине ціле і характеризується тільки своїм «входом» (маючи, тим самим, здатність сприймати вплив від інших фрагментів системи) і «виходом» (за допомогою якого він сам взаємодіє з іншими об'єктами системи, в тому числі і «відповідає» на їх вплив на нього), називається *чорним ящиком*.



Чорний ящик – це, мабуть, найбільш потужне абстрактне поняття, що існує в рамках кібернетики. Саме внаслідок його введення з'являється можливість побудови замкнутих систем, що моделюють досліджуваний об'єкт або процес. Чорний ящик – це «міра нашого незнання» про досліджувану систему.

Як правило, він позначається наступним чином у вигляді прямокутника, в який входять стрілочками позначені вхідні (in) характеристики чорного ящика – параметри, які їм перетворюються у вихідні (out) характеристики чорного ящика.

Отже, щоб задати чорний ящик, необхідно задати відповідність «вхідні параметри» – «вихідні параметри». При цьому слід пам'ятати, що внутрішня будова такого ящика залишається для нас невідомим: ми не знаємо, як він улаштований, не знаємо, як він функціонує, не знаємо, які він може мати стани і як здійснюється перехід між його станами (навіть якщо вони у нього є). Єдине, що можна сказати – це тільки побудувати модель опису вхідних характеристик такого об'єкта (сукупність класів змінних, на які він «відповідає»), і співвіднести її (певними співвідношеннями) з моделлю вихідних характеристик чорного ящика (тобто з сукупністю класів змінних, в рамках яких можуть бути виражені його «відповіді»).

У загальному випадку, тим самим передбачається, що такий об'єкт – чорний ящик – інтегрований в якості «активного елементу» в

якусь систему. Особливо наочно це видно в разі графічного (наприклад, у вигляді блок-схеми) опису системи.

Дані (характеристики, параметри, інформація і т. п.), якими характеризується вхід, часто називаються *вхідними сигналами* чорного ящика. Дані (характеристики, параметри, інформація і т. п.), якими характеризується вихід, часто називаються *вихідними сигналами* чорного ящика. Така термінологія прийшла з технічних систем, до яких і було вперше застосовано уявлення про чорний ящик.

3.3. Оператор як модель для опису концепції «вхід – вихід»

При переході до математичних моделей, на математичний рівень опису, такий перетворювач змінних з одної множини (вхідні характеристики) в іншу (вихідні характеристики) моделюється оператором (функцією).

Відомо математичне визначення оператора: Нехай V і W – якісь множини (наприклад, векторні простори).

Оператором A , діючим з V в W , називається відображення виду $A: V \rightarrow W$, яке зіставляє кожному елементу x множини V певний елемент y множині W . Як правило, для оператора використовується позначення $y = A(x)$ або $y = Ax$.

Таким чином, чорний ящик виступає як оператор в тому випадку, коли:

1) Параметри, які характеризують вхід чорного ящика, можуть бути згруповані в якусь множину V .

2) Параметри, які характеризують вихід чорного ящика, можуть бути згруповані в якусь множину W .

3) Визначено деяке правило (алгоритм, спосіб перетворення, розрахунку, і т. п.), яке дозволяє за відомим вхідним сигналом – значенням x з множини V , розрахувати значення y з множини W вихідних сигналів чорного ящика.

В силу сказаного, чорний ящик виступає як модель досліджуваної системи. А в операторі, яким він моделюється, і укладена, по суті, математична модель елемента, що становить нашу систему. З цієї причини, математичний опис чорного ящика і відсунуто, як правило, на останні етапи моделювання.

Важливим класом операторів є так звані *лінійні оператори*. Хоча сьогодні поле діяльності в моделюванні реальних систем за допомогою лінійних операторів вкрай обмежене, вони, тим не менш, все ще виступають як потужний засіб математичного аналізу систем. Як ми вже писали, моделі систем також являють собою ієрархічну систему логічно пов'язаних термінів і понять. Тому досить часто виявляється, що система, яка описується *нелінійним* чином на певному рівні логічної глибини розуміння, на *більш високому* рівні цілком може бути описана в рамках вже *лінійного* апарату і *лінійних* операторів. Приклади таких описів будуть приведені в наступних розділах.

Однак повернемося до лінійним операторам і дамо їх визначення.

Оператор A , що діє з V в W , називається *лінійним*, якщо для будь-яких елементів x_1 і x_2 з множини V і будь-якого числа μ виконуються співвідношення:

1) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$ (властивість адитивності оператора), і

2) $A(\mu x) = \mu A(x)$ (властивість однорідності оператора).

Приклади лінійних операторів

Наведемо кілька прикладів математичних об'єктів, які є лінійними операторами.

Матриця як лінійний оператор

Звичайна матриця є лінійним оператором, якщо розглядати її як перетворення одного вектор-стовпця x в інший вектор-стовпець, y .

$$y = Ax, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Дане співвідношення записано для випадку прямокутної матриці оператора A розмірності $m \times n$, що відповідає тому, що множина X являє собою сукупність вектор-стовпців розмірності n і Y – сукупність вектор-стовпців розмірності m .

Таким чином, матриця, відома з курсу вищої математики, в рамках економічної кібернетики може розглядатися як лінійний оператор, який моделює ряд властивостей чорного ящика. Зокрема, таким чином можуть описуватися моделі управління – тоді вектор-стовпець x являє собою необхідну для вирішення інформацію, а вектор-стовпець y – описує саме рішення. Матриця A в цьому випадку – це скорочений запис алгоритму прийняття рішень, який відповідає нашій моделі.

Операція диференціювання як лінійний оператор

Операція диференціювання – взяття похідної від певної функції – також є лінійним оператором.

В цьому випадку X – це множина всіх (тих, що диференціюються потрібну кількість разів!) функцій, а Y – це теж множина функцій (але вже диференціюються кількість разів, на одиницю менше, ніж у функцій з множини X !).

Позначаючи елемент множини X через $f(t)$, а оператор A через $\frac{d}{dt}$ легко перевіряємо здійсненність умов 1) і 2) з визначення лінійного оператора;

$$\frac{d(f_1(t) + f_2(t))}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} + \frac{df_2(t)}{dt},$$
$$\frac{d\mu f(t)}{dt} = \mu \frac{df(t)}{dt}.$$

Відзначимо, що, як легко доводиться таким же способом, оператор:

$$A = Q(t) \frac{d}{dt},$$

де $Q(t)$ – довільна функція, також є лінійним. Підкреслимо, що в останньому випадку першим на функцію $f(t)$ завжди діє диференціювання, а вже потім – множення результату диференціювання на функцію $Q(t)$. У чому легко переконатися, порівнюючи результати двох різних алгоритмів дій: першого – «спочатку продиференціювати, а вже потім помножити», і другого – «спочатку помножити, а вже потім продиференціювати»!

Операція інтегрування

З операцією інтегрування після всього розглянутого вище питань не виникає: звичайно, вона – взяття невизначеного інтеграла – також є оператором лінійним. Власне, про це йшлося ще в рамках курсу вищої математики – але тоді Ви навіть і не підозрювали, що це, по суті, йде розповідь про математичні моделі!

Властивості об'єкта бути «диференціюючим» (іноді – «різницевим») або «інтегруючим» (іноді – «підсумовуючим») часто задаються як функції деяких чорних ящиків, які виконують в системі якісь *керуючі функції*. Особливо наочно це для радіосхем, – однак і економічні системи демонструють нам багато таких же прикладів. Що таке банк? – це об'єкт «інтегруючий». Що таке рейтинги – економічні чи соціальні? – це процедура диференціювання.

Насправді, ще багато важливих математичних деталей з описаного прикладу залишилися без відповіді. Але задамося питанням: а чи так вже й потрібні нам ці математичні деталі, так чи вже важливі вони для нас в процесі вирішення практичних завдань?! Отримавши рішення – ми завжди зможемо перевірити, чи задовольняє воно нашому рівнянню і нашим граничним умовам! А математична строгість не завжди-то й потрібна при вирішенні практичних завдань. Тому – сміливо вводіть *нові* математичні операції, терміни і поняття, керуючись лише одним, але головним критерієм: *вони повинні допомагати вирішенню досліджуваного завдання!* Власне, саме так протягом усього розвитку науки і діяли вчені. Наприклад, Поль Дірак – ввів функцію, яка різко відрізнялася від усього, що було відомо раніше математикам: вони пояснили це

тільки через 20 років. Річард Фейнман ввів математичні операції, з якими математики мучаться до сих пір! Вернер Гейзенберг ввів операції, які допомогли йому пояснити квантові ефекти, – і математики лише потім зрозуміли, що це всім відомі матриці!

3.4. Марковські процеси

Розглянемо систему. Нехай вона може бути в деякій кількості *різних* станів. Нехай внаслідок якихось причин – чи то внутрішнього, чи то зовнішнього походження – система буде переходити з одного стану в інший. Такі переходи можуть бути двох родів. Переходи першого роду – коли система зі стану i переходить в стан k : $i \rightarrow k$, і до того ж такий перехід здійснюється *завжди*. Таким чином, процеси в системі – для цього класу випадків – можуть бути задані як ланцюжок змінюючих один одного станів.

Але може бути й інший випадок: система здійснює перехід $i \rightarrow k$ в *імовірнісному* сенсі. Іншими словами, *кінцевий* стан системи вже не фіксований (як було раніше!), і для *наступного* стану системи відкриті, в загальному випадку, *всі* стани (включаючи і ймовірність – можливість – залишитися в колишньому).

Для практичних застосувань вельми важливе значення має випадок, коли ймовірності переходу системи в інший стан залежать *тільки від поточного її стану*, – тобто від того стану, в якому вона знаходиться зараз, але не від того, в яких станах вона перебувала раніше.

Саме такі випадки мають місце в багатьох економічних ситуаціях. Нам, наприклад, абсолютно байдуже, які досягнення мала

фірма раніше: нас, як інвесторів, цікавить її прогноз на майбутнє – а він визначається тільки її справжнім становищем на ринку.

Таким чином, *випадкові процеси* можуть служити досить потужним апаратом для моделювання динаміки, зміни станів і перспектив розвитку в економічних системах. Існують різні способи розгляду такої випадковості.

Наприклад, випадковість може бути «введена» на рівні моделі досліджуваної системи за допомогою того, що переходи між станами системи здійснюються у *випадкові* моменти часу. Або ж – самі переходи є *випадковими*, – наприклад, існує ймовірність переходу в кілька різних станів. У загальному ж випадку може бути все: і випадкові моменти часу, і випадкові переходи між станами, та й самі ймовірності таких переходів можуть бути випадковими, – наприклад, коли вони відбуваються під впливом випадкових змін у зовнішньому по відношенню до досліджуваної системи середовищі. Зауважимо, що в останньому випадку ми приходимо до моделі опису взаємодії досліджуваної системи із зовнішнім середовищем!

Звичайно, далеко не всі цікаві – з точки зору фахівця в області економіки – випадки мають добре розвинений математичний апарат. Однак виділяється клас випадкових процесів, для яких отримані вельми потужні математичні результати, що дозволяє успішно застосовувати їх у багатьох областях (див., наприклад, наступний розділ 3.5).

Випадковий процес є *марковським*, коли будь-яка *додаткова* інформація, окрім знання її поточного стану, є несуттєвою для здійснення прогнозу подальшої зміни станів системи.

Саме вимога *майбутнє залежить тільки від теперішнього* і призводить до того, що часто марковські процеси називають «процесами без пам'яті».

Існує досить велика кількість варіантів математичного апарату для марковських процесів. Але про це мова буде йти в спеціальних дисциплінах на старших курсах.

Спеціаліст-економіст надзвичайно часто у своїй практиці стикається з ситуацією, коли для побудови математичної моделі економічного об'єкта йому доводиться звертатися до тих розділів математики, які є абсолютно новими для нього. І тоді він розкриває математичні книги, і починає розбиратися в потрібному для нього математичному апараті. При цьому йому немає необхідності знайомитися з ним досить докладно: цілком достатньо, коли він, по-перше, зрозуміє положення, покладені в основу тієї чи іншої математичної теорії або концепції, по-друге, переконається що ці положення не суперечать положенням його моделі (якщо таке протиріччя знайдеться – доведеться відмовитися або від математики, або від моделі!), і, по-третє, коли він навчиться *використовувати* цей математичний апарат, тобто коли він навчиться *вирішувати завдання* з його використанням. А для вирішення задач – ось для цього, частіше всього, і потрібно просто лише знати *алгоритм використання* тих або інших формул або понять.

3.5. Концепція «зворотного зв'язку»

Отже, управління системою ми можемо розглядати як здійснення *переходів* між її станами. Але що таке *стан*? Це за

визначенням щось *стійке*, тобто мається на увазі, що параметри, які його характеризують, приймають якісь стаціонарні, незмінні в часі значення. Однак кожна система піддається *випадковим (або цілеспрямованим) впливам* з боку навколишнього середовища. В цьому випадку ми очікуємо, що система, будучи виведеною з певного (наприклад, рівноважного або стаціонарного) стану, має здатність «мимовільно» повернутися до *стаціонарних* характеристик, тобто в аналізований стан.

А що робити, коли система не має цієї властивості? Щоб відповісти на це питання, поставимо зустрічний: а як же тоді ми можемо говорити про «стан»? Таким чином, приходимо до висновку, що говорити про стан для системи має сенс тільки в тому випадку, коли цей стан є *стійким*. Інакше кажучи, ми очікуємо, що стан системи повинен мати якісь *межі стійкості*, тобто що при малій зміні своїх параметрів (залишаючись все ще *всередині* кордону стійкості) система *залишиться* все в тому ж стані.

Але ж можуть бути ситуації, коли такі межі стійкості для системи є «занадто вузькими», і нам дуже хотілося б їх *розширити*. Чи можна це зробити, і якщо можна, то яким чином?

Для того, щоб відповісти на це питання, потрібно ввести поняття про «керуючі дії». Для того, щоб описати його, зробимо розбиття всієї множини параметрів, що характеризують систему, на два класи. Перший клас: параметри, на які ми не можемо вплинути. Другий клас – це параметри, які ми можемо – в тих чи інших межах – змінювати. Ось такі параметри, які ми можемо змінювати, і називаються *керуючими*.

Керуючими параметрами називаються такі характеристики системи, які володіють двома властивостями: по-перше, вони можуть бути змінені у потрібний для нас бік (наприклад, за величиною і знаком) шляхом зовнішніх по відношенню до досліджуваної системи впливів, і, по-друге, вони визначають межі стійкості системи (зокрема – швидкість прагнення інших характеристик системи до свого стаціонарного значення, яке характеризує даний *стан системи*). У загальному випадку для кожного стану керуючі параметри будуть різними.

Відзначимо, що ми не пов'язуємо керуючі параметри виключно тільки з процесом *повернення* системи до даного стану. Визначення дано в такому вигляді, що воно допускає і управління *переходом* системи до нового стану. Наприклад, це можливо, якщо кордони стійкості системи (в даному стані!) під впливом зовнішнього управління *звужуються* до величини, коли зовнішні випадкові впливи (фактори) вже виводять систему за ці межі.

Як впливає зі зробленої вище примітки, ми можемо, в загальному випадку, всі способи управління системою розділити на два альтернативних класи.

- Управління, покликане забезпечити *стійкість системи в даному стані*. Це забезпечується за рахунок так званого *негативного зворотного зв'язку*.
- Управління, покликане забезпечити *переведення системи з одного стану в інший*. Це досягається за рахунок *позитивного зворотного зв'язку*.

Як взагалі організований *зворотний зв'язок*?

Уявімо собі систему. Нехай вона *відхилилася* від свого поточного стану. Про це ми можемо судити по *зміні* значень ряду параметрів, які її характеризують. Тепер ми змушені приймати рішення – тобто визначати *мету* свого управління: чи сприяти поверненню системи до свого початкового стану (негативний зворотний зв'язок – прикметник «негативний» має не тільки *буквальне* значення (це ми побачимо нижче!), а й підкреслює, що ми прагнемо *зменшити* ті зміни, які внесені навколишнім середовищем), або ж навпаки, *збільшити* це відхилення з тим, щоб система перейшла до *нового* стану (позитивний зворотний зв'язок: знову прикметник «позитивний» має не тільки *буквальний* сенс, але також і символічний, що підкреслює наше прагнення *збільшити* відхилення, що мають місце в системі).

По суті, *позитивний* і *негативний* зворотний зв'язки утворюють тим самим *контур управління*, що має замкнутий вид за рахунок появи можливості дозування керуючих впливів і аналізу їх результатів.

Відомо всього два ефективних – і взаємодоповнюючих! – способи управління людьми в соціальних і економічних структурах: це методи «батога» і «пряника». По суті – вони часто трансформуються в методи заохочення і покарання. Це – здійснення все того ж самого позитивного або негативного зворотного зв'язку. Заохочення відповідає негативному зворотному зв'язку, що *фіксує* ті чи інші дії співробітника, тобто – *заохочуючи* його до *продовження* поточної своєї діяльності. Тепер ми можемо сказати – заохочення *стимулює* його перебування в даному стані. Покарання – навпаки:

заохочує його *змінити* свій поточний стан на інший. До речі: тепер нам стають ясними також і причини наявності *саме цих* двох систем управління окремою людиною, – це оптимальний набір, що дозволяє здійснювати ефективне управління його діяльністю і поведінкою. Використання *тільки одного* з цих методів означає, тим самим, *неефективність* управління. В ефективно працюючій фірмі повинні бути чітко зафіксовані як способи заохочення, так і способи покарання співробітників. Звичайно, при цьому і заохочення, і покарання повинні ставитися *виключно тільки* до тієї області, результати якої залежать від *особистої* діяльності даного співробітника, – тобто визначаються тим станом, в якому знаходиться *даний* співробітник. Нерозуміння цієї обставини – коли співробітник карається або заохочується не за *свої особисті* дії, призводить до неефективності управління економічними системами.

Перейдемо тепер до математичної форми опису сказаного вище.

Лінійний випадок – модель Мальтуса.

Розглянемо систему, яка характеризується всього *одним параметром* x – такі системи називаються *однокомпонентними*. Нехай стан системи характеризується його значенням x_0 . Через зовнішні впливи система змінилася і стала характеризуватися значенням параметра x_1 . Найбільш простий випадок управління – коли ми реалізували такі умови, що швидкість зміни параметра виявляється пропорційною його відхиленню від рівноважного (стаціонарного) значення x_0 .

Математично це можна записати так:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma(x - x_0) \text{ або } \frac{d\Delta x}{dt} = \gamma\Delta x, \text{ де } \Delta x = x - x_0.$$

Зручніше записувати це рівняння відразу щодо зміни характеристики – тобто зміни параметра системи Δx .

У рівнянні γ – це так званий *керуючий параметр*, який також характеризує систему, і який ми можемо змінювати як за величиною, так і за знаком – наприклад, зробити його або позитивним, або негативним – за допомогою зовнішніх (керуючих) впливів.

Рішення рівняння записується у вигляді:

$$\Delta x = (x_1 - x_0)e^{\gamma t} \text{ або } x = x_0 + (x_1 - x_0)\exp(\gamma t).$$

Тут x_1 – значення характеристики x (відхилення від рівноваги) при $t = 0$, тобто – в початковий момент часу.

З рішення видно, що при $\gamma > 0$ система буде все більш *віддалятися* від свого *рівноважного* стану, що характеризується значенням x_0 . Навпаки, при $\gamma < 0$ система буде *повертатися* до свого *рівноважного* стану. Таким чином, в першому випадку – при $\gamma > 0$ – має місце *позитивний* зворотний зв'язок, а при $\gamma < 0$ – *негативний* зворотний зв'язок.

Швидкість, з якою буде здійснюватися це віддалення / наближення, залежить від абсолютної величини керуючого параметра – від $|\gamma|$. Чим більше ця величина, тим швидше система віддаляється / повертається до рівноважного стану.

Отже, в рамках цієї математичної моделі ми отримуємо можливість регулювати – тобто управляти системою за допомогою:

1. Створення позитивного / негативного зворотного зв'язку.

2. Зміни *сили* цього зворотного зв'язку (величини модуля керуючого параметра) $|\gamma|$.

Прикладом даного рівняння, що описує *реальну* соціально-економічну ситуацію, є так звана *модель Мальтуса* для чисельності населення. В її основу закладено «просте і природне» припущення: приріст кількості людей пропорційний їх наявній кількості. У цьому випадку рівняння, що описує *відхилення* системи від деякої початкової кількості людей N_0 , може бути записано так: $dN/dt = \gamma N$. Звичайно, тут $\gamma > 0$, щоб мав місце саме *приріст*, а не спад населення. Рішення цього рівняння має вигляд $N(t) = N_0 \exp(\gamma t)$, – вважається, що при $t = 0$ чисельність населення становила N_0 . Як видно з рішення, чисельність населення в такій моделі стрімко наростає, – період *подвоєння* кількості населення може бути розрахований за формулою $T = \ln 2 / \gamma$. За демографічними статистичними даними цей період часу сьогодні становить 40 років. У моделі Мальтуса ми отримали зростання населення в *геометричній* прогресії. Разом з тим відомо, що ресурси, якими володіє та чи інша країна (та й вся планета в цілому!) зростають в *арифметичній* прогресії. Але тоді приходимо до висновку, що у міру плину часу зростання населення відбувається *швидше*, ніж приріст ресурсів! Інакше кажучи, *відносна* кількість ресурсів – кількість ресурсів, що припадають на одну людину – з плином часу буде *зменшуватися*. У цьому, власне, і полягає висновок теорії Мальтуса. Цей висновок він зробив на початку XIX століття, а в кінці XX століття до цього ж висновку прийшли і вчені, що сформували неформальну організацію під назвою «Римський клуб». Звичайно, прийшли вони до нього,

використовуючи набагато більш «витончені» теоретичні і математичні моделі. Власне, саме в такий простий моделі, яка виявилася напрочуд *мало чутливою* до наступних уточнень, і криються причини почастишання закликів до обмеження народжуваності (тобто до зменшення керуючого параметра γ). Звичайно, це не вирішить проблеми – але хоча б дасть час на прийняття рішень і, можливо, дасть змогу очікувати значення $\gamma = 0$ – хоча б в масштабах всієї планети? Однак, як легко бачити, це значення є *нестійким*: як тільки γ стане позитивним – знову почнеться зростання населення, а як тільки воно стане негативним – кількість населення почне зменшуватися. Звичайно, це відбудеться не відразу – але така організація управління зачіпає вже *все населення Землі*, і тому вимагає зовсім *нових способів управління і координації в масштабах всієї планети*. Здійснити це сьогодні неможливо. Так що ж робити?! Перш за все – вивчати цю проблему, будувати нові моделі, розглядати нові можливі сценарії розвитку подій.

Нелінійний зворотний зв'язок – модель Ферхюльста

Вище був описаний випадок, коли система *відхилялася* від свого початкового положення і стрімко віддалялася від нього, в рамках цієї моделі, як завгодно далеко. Однак ми очікуємо – у всякому разі, моделі систем будуються саме з розрахунку на це – що, рано чи пізно, наша система перейде в *новий* стан. Іншими словами, тепер перед нами стоїть завдання про математичний опис *переходу* системи з одного стану в інший.

Для побудови такої моделі задамося питанням: а чому взагалі можливо «гальмування» зміни характеристики системи? Наприклад,

це можна зробити наступним чином: як тільки значення характеристики системи x почне наближатися до потрібного нам нового значення x_2 , значення керуючого параметра γ має зменшуватися і досягати нульового значення при $x = x_2$.

Інакше кажучи, для опису управління переводом системи в новий стан, ми повинні розглянути випадок, коли є залежність керуючого параметра від поточних характеристик системи. Як правило, ми отримуємо при цьому *нелінійні* диференціальні рівняння.

Наприклад, для нашого рівняння його модифікація виглядає так:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma(x)x.$$

Найпростіший випадок – це коли $\gamma(x) = 1 - x$, і ми отримуємо рівняння, зване рівнянням Ферхюлста або *логістичним* рівнянням (до такого виду можна навести за допомогою перетворення координат будь-яку лінійну залежність керуючого параметра від характеристики системи):

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)x.$$

Неважко бачити, що це рівняння описує *перехід* системи з «нестійкого» стану $x = 0$ в стійкий стан $x = 1$ – розглядаються тільки позитивні значення x .

У найзагальнішому випадку, *відхилення* від рівноважного – тобто від *стійкого* стану – описуються найчастіше в рамках *лінійного* підходу. Якщо навіть і розглядаються *нелінійні* компоненти, то вони покладаються, в певному сенсі, «малими» в порівнянні з лінійними членами. Тому можна зробити висновок: для управління за

допомогою *негативного* зворотного зв'язку досить, як правило, *лінійного* опису. Оскільки лінійні методи в математиці добре розвинені, тому і не дивно, що основні успіхи в кібернетиці (особливо – в кібернетиці технічній) досягнуті саме в галузі управління системами з метою *збереження* їх поточного стану. Разом з тим в області *економічної* кібернетики множина завдань носить абсолютно протилежний характер: необхідно управляти *процесом* *переводу* досліджуваної системи в той стан, який нам потрібно. Отже, основним об'єктом вивчення в економічній кібернетиці є *нелінійні* математичні моделі. Математичний апарат для їх дослідження дуже складний, з цієї причини і результатів досягнуто не так багато. Втім, в рамках технічної кібернетики для нелінійних задач результатів також досягнуто вельми мало.

Рішення рівняння Ферхюльста можна записати у вигляді:

$$x(t) = \frac{x_0 e^t}{1 + x_0 e^t},$$

тут через x_0 позначено значення характеристики системи в початковий момент часу, при $t = 0$. З рішення випливає, що при $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 1$.

Виникає питання: а чи можемо ми говорити в цьому випадку про наявність *зворотного зв'язку* взагалі? Може бути, було б більш коректно говорити про *моделі* системи? Багато що залежить від того, яке завдання ми вирішуємо, тобто *від мети* нашого дослідження. Як правило, питання про побудову моделі системи – це не більше ніж *етап* в підготовці і виборі системи управління даним соціальним чи економічним об'єктом. Ця думка стане більш зрозумілою в тому

випадку, коли рівняння Ферхюльста запишеться в *розмірній* формі, – тобто так, як воно зазвичай і виходить при моделюванні:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = ax \left(1 - \frac{b}{a}x\right).$$

У такій формі запису явно введені *керуючі параметри* a і b , за допомогою зміни яких ми можемо управляти як кінцевим станом системи, так і процесом його досягнення.

Інтерпретація та узагальнення моделі Ферхюльста: «квота вилову» як модель оптимального управління.

Модель Ферхюльста з'явилася як найпростіше узагальнення моделі Мальтуса щодо наявності «природних обмежень» на народжуваність, що призводять до загибелі індивідів. Цією моделлю часто описують розмноження біологічних об'єктів різного роду – від бактерій і до вищих організмів – таких, як риби.

У зв'язку з останнім і розглянемо на прикладі риб *організацію системи управління* їх чисельністю з урахуванням вилову. Таке завдання відображає наше природне бажання використовувати ресурс – в даному випадку рибу – для своїх потреб. При цьому, однак, ми хочемо здійснити *управління кількістю риб* таким чином, щоб досягти максимально можливого вилову без того, щоб риби зникли. Таким чином, ми будемо розглядати задачу про оптимальне використання природного ресурсу. При цьому під терміном *оптимальність* розуміється, що 1) риби потрібно виловлювати якнайбільше, але 2) ресурс не повинен вичерпуватися.

Оскільки наше втручання є *зовнішнім* по відношенню до системи, рівняння Ферхюльста $\frac{dx}{dt} = (1 - x)x$ потрібно модифікувати.

Розглянемо дві найпростіші можливості для модифікації.

Перш за все, ми можемо відловлювати рибу з *постійною швидкістю*, позначеною β (кількість риб, що виловлюються в одиницю часу, наприклад, щорічно). У цьому випадку рівняння Ферхлюста набуде вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)x - \beta = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} - \beta\right).$$

З цього рівняння випливає, що при $\beta > \frac{1}{4}$ кількість риб може тільки зменшуватися, бо при цьому похідна буде завжди негативна. Іншими словами, якщо ми відловлюємо *щорічно* (природним проміжком часу зручно вибрати 1 рік – час репродуктивного циклу риб) більш ніж 25 % від *стаціонарно* можливої кількості риб (тобто тих, які були б без вилову, – в наших позначеннях їх кількість дорівнює 1), то рибний ресурс буде виснажений, тобто кількість риб прямує до нуля. При $0 < \beta < \frac{1}{4}$ – рибний ресурс встановиться на деякому рівні, що становить якусь *частину* від максимально можливого $x = 1$. При цьому, однак, максимальна квота вилову $\beta = 1/4$ є нестійкою (будь-яке її як завгодно мале перевищення призведе до зникнення системи – риб), і тому повинна бути визнана *неприпустимою*.

Може бути, спробуємо організувати вилов риби по-іншому? Наприклад, будемо задавати квоту вилову як величину, пропорційну вже наявній кількості риби? Тоді отримаємо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)x - px = (1 - p)x - x^2.$$

Тут величина px задає швидкість вилову риби β . З отриманого рівняння, очевидно, що мають місце нерівності $0 < p < 1$. При цих умовах *стаціонарна* кількість риб встановлюється на рівні $x = B$, де B знаходиться як розв'язок рівняння $(1 - x)x = px$. Швидкість вилову тоді може бути розрахована за формулою $\beta = pB$. Задамося питанням: коли ця швидкість може бути *максимальною*? Відповідь на це питання найлегше знайти з геометричних міркувань. Точка B знаходиться як *перетин* графіка квадратичної параболи $(1 - x)x$ і прямої px . Найбільше значення швидкості вилову $\beta = px$ дорівнює найбільшій ординаті графіка функції $(1 - x)x$, а це досягається при $x = 1/2$. При цьому значення $p = 1/2$ (необхідно, щоб значення px дорівнювало $1/4$ – максимальному значенню функції $(1 - x)x$, яке досягається при $x = 1/2$). А це досягається, у свою чергу, при $p = 1/2$.

Таким чином, для нашої задачі максимальна швидкість вилову риби встановлюється на рівні $\beta = 1/4$, – однак тепер, як легко бачити з останнього рівняння, при цьому встановлюється *стійка* кількість риб.

Ось ми і навели приклад ситуації, коли розгляд *різних* сценаріїв управління системою – в нашому випадку це були різні сценарії вилову риби – дозволяє досягти *стійкого* переведення системи в новий стан. Звичайно, важливі для практики завдання не будуть, швидше за все, мати такий простий вигляд – проте *загальна методологія* їх рішень буде такою ж: спочатку підбираємо відповідну *модель системи* і формулюємо для неї базову математичну модель. А потім – досліджуємо різні *способи управління*, які можуть бути здійснені в рамках цієї моделі. Часто для цього доводиться явно

виділяти ті допущення, які були покладені в основу базової моделі, і досліджувати, чи можемо ми від них відмовитися – і як при цьому зміниться математична модель як системи, так і управління цією системою.

3.6. Схема операційного проекту по вивченню і вдосконаленню системи управління

Весь комплекс робіт з вивчення і вдосконалення системи управління для досягнення поставленої мети проводить операційна група системних аналітиків або ще її називають *оперуючою стороною* (ОС). Цей комплекс робіт проводиться в інтересах особи, яка приймає рішення (ОПР). ОПР може відкинути проект, а може прийняти. На рис. 5 зображена приблизна схема етапів операційного проекту з вивчення та вдосконалення системи управління. Дамо коротку характеристику етапів представленого на рис. 5 операційного дослідження.

1. У найзагальнішому випадку приводом для вивчення і вдосконалення системи служать зафіксовані *симптоми*, які виявляють проблемні питання в роботі системи.

2. Встановлені симптоми проблеми можуть утворювати пов'язаний ланцюжок фактів (тенденцію), яка допомагає сформулювати проблему.

3. Найважливішим етапом дослідження системи є чітке формулювання проблеми, яка присутня на даному рівні життєдіяльності системи.

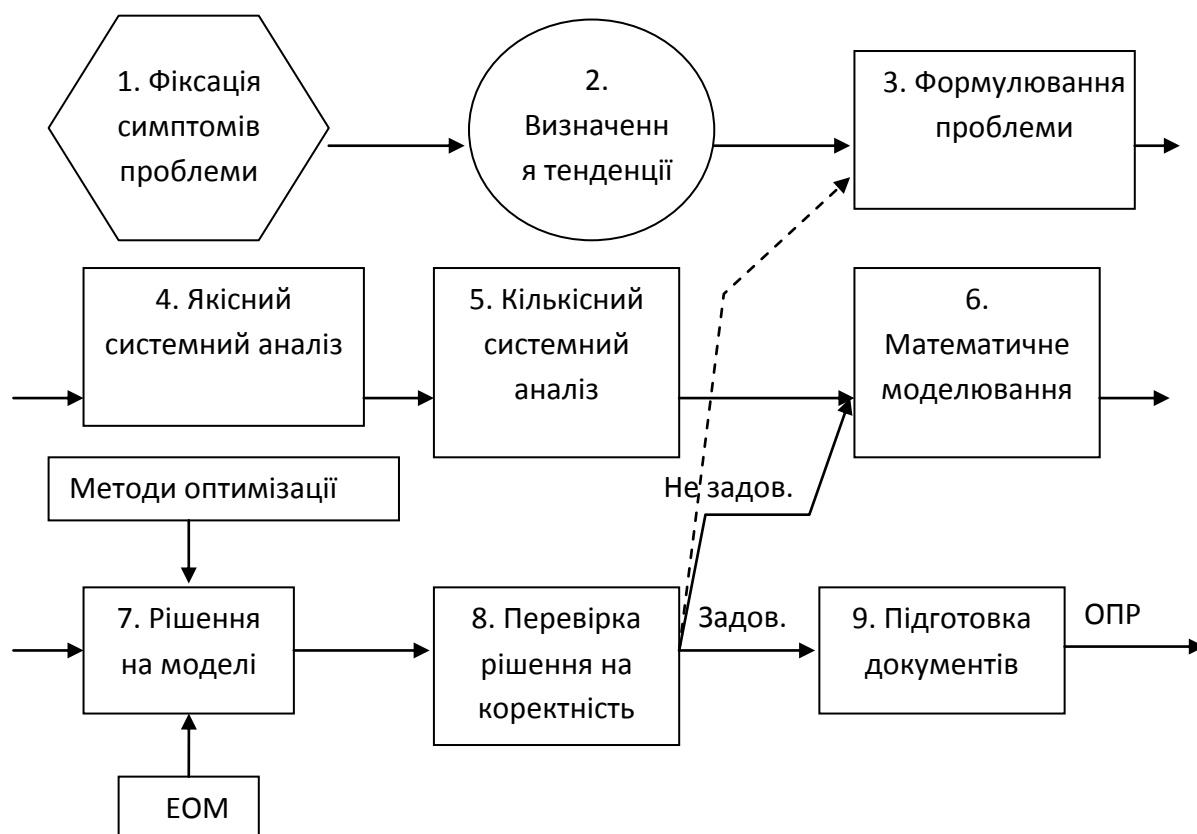


Рис. 5. Схема етапів операційного проекту з вивчення та вдосконалення системи управління

4. Якісний системний аналіз – це розщеплення цілісної системи на окремі елементи (сутності). Для цього потрібно:

- виділити досліджувану систему з вищестоящої системи, тобто встановити межі системи, що підлягає оптимізації. Розширення меж системи підвищує розмірність і складність багатокomпонентної системи, тим самим ускладнюючи її аналіз,
- сформулювати мету, виконувану системою,
- перерахувати чинники, які впливають на досягнення мети,
- визначити можливі обмеження, в рамках яких можна вдосконалювати систему.

5. Кількісний системний аналіз передбачає описати всі перелічені фактори, які беруть участь в операції на кількісному рівні, тобто на основі вимірних параметрів. Для цього:

- встановлюється *критерій K (показник ефективності)*. Величина K , кількісно вимірює ступінь досягнення мети системи і дозволяє порівнювати різні рішення по ефективності. У разі якщо має місце одноцільове прийняття рішень, то K – скаляр, якщо ж багатоцільове прийняття рішень, то K – вектор;

- вводяться кількісні внутрішні параметри системи, які вимірюють фактори, які беруть участь в описі системи. Всю множину цих факторів необхідно розбити на дві частини:

- а) *некеровані (неконтрольовані) фактори*, якими ОС не розпоряджається і в даній конкретній системі (операції) міняти не може. Параметри $a_1, a_2, \dots, a_k$ цих факторів ми будемо розглядати як координати вектора a , і позначати $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$. Неконтрольовані фактори $a_1, a_2, \dots, a_k$, виходячи з інформованості про них, можна розбити на три групи: фіксовані, випадкові, невизначені.

Фіксовані неконтрольовані фактори – це такі фактори, значення яких точно відомі ОС. *Випадкові неконтрольовані фактори* є випадковими величинами, закони (функції) розподілу яких точно відомі ОС. *Невизначені неконтрольовані фактори* є детермінованими або випадковими величинами, щодо яких ОС відома лише область можливих значень або клас можливих законів розподілу,

- б) *керовані параметри (змінні) $x_1, x_2, \dots, x_n$* – величини, якими ОС може розпоряджатися і міняти їх на свій розсуд. Ми будемо

розглядати $x_1, x_2, \dots, x_n$ як координати вектора x – єдиного елемента математичної моделі, називати *стратегією* і позначати $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

6. Суть математичного моделювання – встановлення кількісних зв'язків між введеними величинами K, a , і x у вигляді так званої *операційної (математичної) моделі*. Розкриємо спочатку зміст моделювання в загальному розумінні, а потім в формалізованому (математичному).

Моделювання – це метод наукового дослідження (пізнання) оточуючого нас світу, що полягає в підміні реальних об'єктів або явищ їх свідомо спрощеними образами (моделями) з метою вивчення цих образів і подальшого перенесення отриманих результатів і висновків на об'єкти і явища реального світу.

Модель (в науці) – це об'єкт-замінник об'єкта-оригіналу, інструмент для пізнання, який дослідник ставить між собою і об'єктом-оригіналом і за допомогою якого вивчає деякі властивості оригіналу.

В якості моделі виступає інший матеріальний чи подумки представлений об'єкт, що заміщає в процесі дослідження об'єкт-оригінал. Відповідність властивостей моделі вихідного об'єкту характеризується *адекватністю* – інформація, отримана при дослідженні моделі, може бути з тим або іншим ступенем достовірності перенесена на об'єкт.

Зв'язок (відношення) між об'єктом реального світу і його моделлю можна проілюструвати графічно за допомогою укрупненого циклу моделювання (рис. 6).

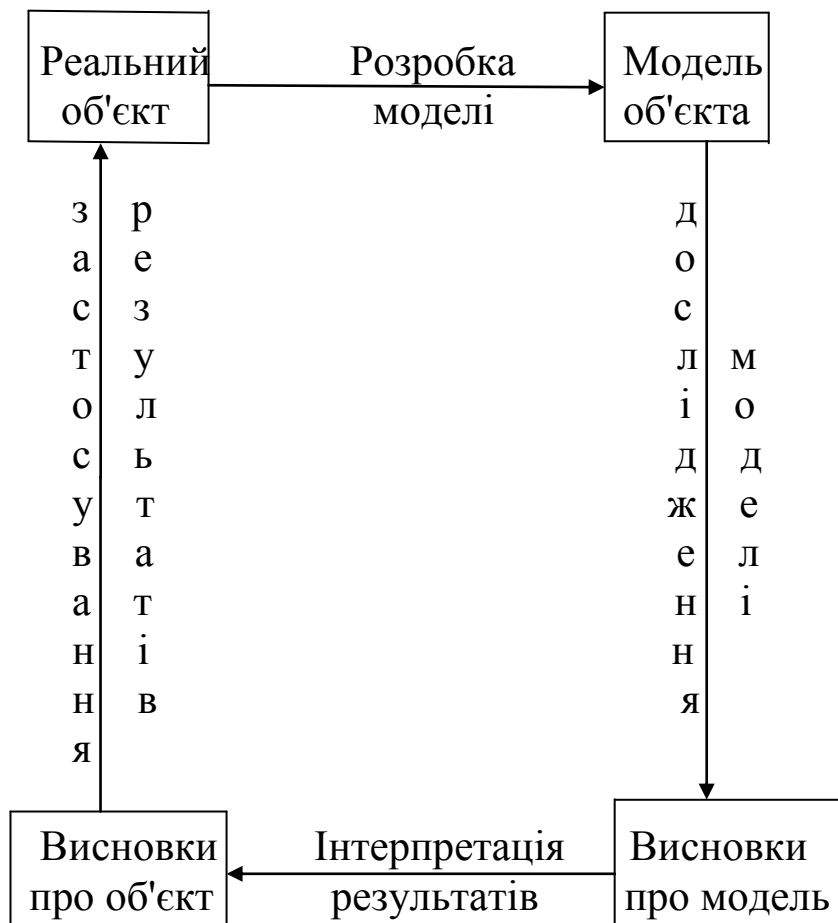


Рис. 6. Укрупнений цикл моделювання

Математичне моделювання – це засіб вивчення реального об'єкта, процесу або системи шляхом їх заміни математичною моделлю, більш зручною для експериментального дослідження з використанням тих чи інших математичних методів за допомогою ЕОМ.

Математична модель – це образ досліджуваного об'єкта, створюваний дослідником (суб'єктом) за допомогою певної формальної (математичної) системи з метою вивчення (оцінки) певних властивостей (або функціонування) даного об'єкта.

При побудові математичної моделі необхідно керуватися наступними основними принципами:

1) Необхідно порівнювати точність і подробиці моделі, по-перше, з точністю тих вихідних даних, якими володіє дослідник, і, по-друге, з тими результатами, які потрібно отримати.

2) Математична модель повинна відображати істотні риси досліджуваного об'єкта чи явища і при цьому не повинна його сильно спрощувати.

3) Математична модель не може бути повністю адекватна об'єкту або явищу, тому для його дослідження краще використовувати кілька моделей, для побудови яких застосовують різні математичні методи. Якщо при цьому виходять подібні результати, то дослідження закінчується. Якщо ж результати сильно розрізняються, то слід переглянути постановку задачі.

4) Будь-яка складна система завжди піддається малим зовнішнім і внутрішнім впливам (збуренням), отже, математична модель повинна бути стійкою, тобто зберігати свої властивості і структуру при цих впливах.

Елементи моделі містять всю інформацію, яка використовується під час розрахунку проекту. Процес побудови моделі є досить трудомістким і вимагає чіткого розуміння специфічних особливостей даної системи. Існує багато різних класифікацій математичних моделей. Зокрема, моделі бувають багатокритеріальні, динамічні, в яких крім параметрів a і x явно присутня змінна часу, і статичні, в яких цієї змінної немає. В реальності всі процеси протікають у часі, тому динамічні моделі, взагалі кажучи, більш точно описують дійсність. Однак слід мати на увазі, що всі ці моделі базуються на фундаменті методів однокритеріальної оптимізації та обмежуються

простішими статичними моделями, без ясного розуміння яких неможлива робота з більш складним математичним апаратом. При цьому критерій ефективності представляють як числову функцію тільки стратегій і неконтрольованих факторів, тобто $K = f(x, a)$, де f – це модель цільової функції, вона встановлює функціональну залежність критерію K від некерованих параметрів a і керованих величин x .

Для цільової функції вказується напрямок поліпшення критерію

$$K = f(x, a) \rightarrow \min (\max). \quad (3.1)$$

Цим виразом і визначається зміст оптимізації системи, або математичний еквівалент мети операції. Задання цільової функції становить першу частину побудови операційної моделі.

Друга частина операційної моделі – математичний опис обмежень на вибір змінних x . Всі обмеження, узагальнюючи, можна записати у вигляді нерівностей і рівностей:

$$\varphi_i(x, a) (\leq, =, \geq) 0, i = 1, 2, \dots, m = \overline{1, m}. \quad (3.2)$$

Кожна функція $\varphi_i(x, a)$ називається *функцією обмеження*. У деяких завданнях є вимоги на сам вид змінних x або K .

$$\left. \begin{array}{l} x \in D \\ K \in M \end{array} \right\}. \quad (3.3)$$

Наприклад, часто виникає вимога, щоб x або K повинні бути цілими числами. У деяких випадках вони повинні належати деякій стандартній множині значень.

Модель у вигляді (3.1), (2.2), (3.3) – *модель операційного виду* або *оптимізаційна модель* (не оптимізаційна – без цільової функції).

Оптимізаційна модель (3.1), (2.2), (3.3) дозволяє поставити задачу *оптимізації системи* (операції) як математичну задачу: знайти такі керовані змінні x^* , які задовольняли б системі обмежень (3.2), (3.3) і забезпечували б найкраще значення критерію K цільової функції.

7. Рішення поставленої математичної задачі вимагає залучення методів оптимізації, що включають крім класичних математичних методів також і спеціальні методи дослідження операцій, пов'язаних, наприклад, з методами багатокритеріальної оптимізації або коли в моделі присутні випадкові неконтрольовані параметри. Слід зазначити також, що в більшості своїй реальні завдання оптимізації призводять до великого обсягу обчислень (до десятків тисяч). Тому сучасні методи знаходження оптимальних рішень орієнтовані на використання комп'ютерних засобів.

8. Зіставляючи отримане рішення зі змістовною (вербальною) постановкою завдання можна виявити суперечності або якісь некоректні елементи рішення. Причиною некоректності можуть бути помилки в математичній моделі або неврахування деяких суттєвих обмежень. На цьому етапі може брати участь особа, яка приймає рішення. Якщо отримане рішення прийнятно – воно приймається, якщо ні – необхідно повернутися на етап математичного моделювання або навіть на більш ранні етапи дослідження.

9. Знайдене оптимальне рішення x^* дозволяє підготувати керуюче рішення у формі документа для ОПР.

Таким чином, операційне дослідження – ітераційний процес, який сходиться до певного оптимального рішення. Розглянута схема є

зразковою. Вона дозволяє краще зрозуміти сенс системного аналізу як науки про кількісне обґрунтування оптимальних рішень на основі побудови і використання математичної моделі. На жаль, процес перекладу на кількісний опис складних систем не є технологією. Математична модель може вийти вдалою або невдалою для отримання практичних рішень. Крім цього, далеко не завжди весь комплекс цілей і завдань, що стоїть перед модельованим об'єктом, може бути виражений у формі деякої цільової функції.

Ілюстрації основних етапів операційного проекту і складових елементів математичних моделей на прикладах побудови економіко-математичних моделей і їх оптимізації для деяких змістовних завдань присвячена тема 5.

3.7. Інформаційна безпека комп'ютерних систем управління

Компанії, які є піонерами з використання інформаційних технологій, не тільки отримують значні переваги, а й несуть підвищені ризики. Одним з найгостріших питань сьогодення є питання забезпечення інформаційної безпеки, як різних держструктур, так і комерційних організацій, і персональних даних. «Останнім часом, все більші обсяги інформації, в тому числі і критично важливої для окремих людей, організацій або держав, зберігаються, обробляються і передаються з використанням автоматизованих систем обробки інформації».

Навіть півтора десятиліття назад, коли інформаційна економіка була на початкових стадіях впровадження в наше життя, згідно з дослідженнями фахівців з інформаційної безпеки – вже на той час все більше був помітний перекис понять в області захисту даних.

Говорячи про економічну доцільність заходів з підтримки інформаційної безпеки, в першу чергу мається на увазі захист від вірусів і хакерів, але найбільшої шкоди, згідно зі звітами провідних організацій останні десять років приносять дії інсайдерів (співробітників компанії), що показано, наприклад, в щорічних звітах ФБР (Computer Crime and Security Survey). Згідно з даними цих досліджень, оцінюваний збиток від необережних і неправомірних дій співробітників в рази перевищує обсяг завданої шкоди від дій вірусів і хакерських атак або ж спроб шкідливого безпосереднього втручання з метою вилучення інформації. І це було ще в 2007 році, коли кількість інцидентів з вини зовнішніх і внутрішніх порушників спокою були порівняними.

Цей результат був цілком закономірний. Незважаючи на те, що зовнішніх зловмисників дійсно значно більше, але, по-перше, вони менше мотивовані, відкинувши мале число найманих професіоналів, ми отримаємо величезну масу школярів і студентів, які просто з цікавості пробують викачати утиліти, не переслідуючи будь-яких конкретних цілей і часом навіть не знаючи, що робити з отриманою інформацією. По-друге, їм протистоять могутні і зрілі технології периметрового захисту, тобто зовнішньому зловмисникові потрібна велика кваліфікація, щоб подолати всі ці бар'єри.

В наш час, навіть незважаючи на значне поліпшення технологій прориву через засоби мережевої та інформаційної безпеки – ситуація не особливо змінилася. Найчастіше від зовнішніх ударів страждають саме стратегічно важливі напрямки або найбільші підприємства, яким дійсно можна або нанести непоправної шкоди за допомогою

порушення їх інформаційної безпеки, крадіжки даних або коштів у разі фінансової організації. Що ж стосовно малого та середнього бізнесу, то він все так же рідко потрапляє під удар, оскільки не представляє особливого інтересу, навіть з огляду на значно слабші засоби захисту від втручання ззовні.

У внутрішнього ж порушника, особливо в тому випадку, якщо його дії свідомі, а не є помилкою, стимулів може бути більше. Від банальної образи до матеріальної вигоди в разі підкупу з боку конкурентів, а можливостей при цьому значно більше, оскільки він спочатку вже є легальним користувачем мережі, має доступ, в тому числі, і до конфіденційних ресурсів організації, може користуватися корпоративними додатками і робочими даними на законних підставах. Крім того, приблизно в 40 % випадків зовнішнього втручання в роботу підприємства – обходу системи інформаційної безпеки не відбувається, банально через те, що для удару використовувалися внутрішні ресурси підприємства і зацікавлені штатні його співробітники. Але якщо це так, чому великі зусилля витрачаються саме на захист від зовнішніх загроз? На це є кілька причин.

Для початку, будувати систему захисту від зовнішнього ворога майже завжди є набагато більш простим завданням. Це добре відомий і вже вторований шлях, так як будь-який із співробітників інформаційної безпеки навіть з низьким рівнем кваліфікації готовий почати перераховувати необхідні засоби захисту від загроз, бо вони в більшості випадків схожі, а деталі вимагають адаптивності до певної ситуації вже на місці, коли відбувається спроба втручання. Крім того,

займаючись побудовою зовнішнього кордону оборони, від зовнішніх же загроз, ніхто не впливає на працездатність самої інформаційної системи. Всі бізнес-додатки працюють нормально, ціна помилки адміністрування, за великим рахунком, лише короточасна відсутність доступу в Інтернет або невеликі порушення в роботі внутрішньої мережі ресурсів, що відносяться до швидкоусунутих проблем.

Захист же від внутрішнього ворога на порядок складніший і вимагає великих зусиль, так само як і витрат. Він складається з забезпечення безпеки самих додатків і грамотного адміністрування, яке, перш за все, має на увазі під собою наявність чітких привілеїв співробітників компанії на доступ до ресурсів інформаційної системи, які у сформульованому вигляді називаються внутрішньою політикою безпеки. Дані привілеї повинні бути достатні для забезпечення нормальної роботи і в той же час мінімальні з точки зору доступу і можливості маніпулювання інформацією. Подібні системи контролю внутрішнього доступу до теперішнього часу використовуються тими особами, хто надає послуги інформаційної безпеки, будучи скопійованими з державної системи рівнів допуску до секретної інформації, тільки спроектовані вже на внутрішню структуру компанії. І часто при появі такого завдання, проблем бачиться більше, ніж рішень.

Перераховувати їх можна довго, тому що основні проблеми чіпляються одна за одну. Наприклад, незахищеність ряду додатків змушує нас використовувати додаткові засоби захисту, проте ці кошти потрібно не тільки придбати і правильно впровадити, але і

супроводжувати на постійній основі для кожного індивідуального пристрою, що використовується в комп'ютерній мережі. І якщо з процесом впровадження зазвичай проблем не виникає, оскільки з ним справляються або штатні фахівці, або найняті консалтингові компанії, труднощі супроводу з'являються потім, в процесі адміністрування системи. Адже управління супроводжуваними засобами захисту здійснюється найчастіше окремо від вже використовуваних в компанії, в тому числі і штатних механізмів. А це означає, що рано чи пізно, в залежності від масштабу інформаційної системи, настає момент, коли настройки системи захисту і настройки штатних механізмів починають значною мірою розходитись.

Розбіжність відбувається ще й тому, що відсутні процедури, які регламентують внесення змін, як в саму інформаційну систему, так і в настройки підконтрольних їй механізмів безпеки. А, власне, саме внесення змін у реальні настройки системи набагато простіше і швидше, ніж регулярне оформлення з документуванням основних внесених поправок. Та й набрати номер адміністратора або забігти до нього простіше, ніж написати заявку. В результаті – в певний момент часу практично неможливо відтворити реальну картину того, що відбувається, так само як і неможливо відповісти на питання – чому до певного ресурсу мають доступ ці користувачі або групи користувачів, які не володіють для подібного достатніми привілеями. Саме подібним чином і втрачається історія всіх вироблених оновлень, і неможливо встановити – правильно чи неправильно сконфігуровані, нехай навіть найдосконаліші, механізми захисту.

Ціна помилки за подібне неправильне адміністрування вимірюється або наданням користувачеві необґрунтовано великих компетенцій, тобто, при певних прецедентах, це буде супроводжуватись створенням величезної уразливості в інформаційній системі, або обмеженням необхідного йому в якийсь момент доступу, допустимого для його рівня привілеїв, при цьому, можливо, зривається виконання завдань самої організації.

Формально, існують кілька способів вирішення зазначених проблем, такі як впровадження повноцінної системи централізованого управління і впровадження системи обліку налаштувань і змін в настройках інформаційної системи або будь-якого із сегментів ІТ-сфери підприємства, навіть поза юрисдикцією відділу з інформаційної безпеки. Однак же, універсальна консоль управління всіма додатками не рятує, оскільки подібне рішення не дає відповідь на питання – на якій підставі, хто і як повинен приймати рішення про те, які зміни потрібні. Для упорядкування діяльності з адміністрування на підприємстві повинні вироблятися повноцінні регламенти та інші документи, що описують правила роботи і взаємодії всіх суб'єктів інформаційної системи.

Але при цьому варто пам'ятати, що вирішити цю проблему тільки організаційними методами не вдається. Виною всьому такі речі як банальний брак і недостатня кваліфікація адміністраторів, перевантаженість фахівців і, найголовніше – відсутність механізмів перевірки фактичного стану справ. Все це призводить до того, що навіть при наявності деякої формальної системи управління контроль над інформаційною системою і питаннями безпеки даних в ній все

одно втрачається без адекватних заходів управління. Тому, з огляду на подібні процеси, варто зазначити, що часто просте збільшення штату ІТ-підрозділу і підрозділу інформаційної безпеки, навіть тільки за рахунок фахівців з адміністрування – часто можуть посилити проблеми. У цих структурах, у свою чергу, з'являються підрозділи, що спеціалізуються на окремих підсистемах, взаємодія структур порушується ще більше, тому, усвідомлюючи всю складність вирішення задачі, а також відсутність інструментів, фахівці з інформаційної безпеки часто-густо уповільнюються з вирішенням проблеми.

Забезпечення підвищених вимог до інформаційної безпеки передбачає відповідні заходи на всіх етапах життєвого циклу інформаційних технологій. Планування цих заходів проводиться після завершення етапу аналізу ризиків та вибору контрзаходів. Обов'язковою складовою частиною цих планів є періодична перевірка відповідності існуючого режиму політиці безпеки, сертифікація інформаційної системи (технології) на відповідність вимогам певного стандарту безпеки. Все перераховане і є управління ризиками.

За великим рахунком, для управління будь-якою складною системою необхідно створити жорсткий, але простий регламент обслуговування системи і забезпечити контроль за тим, щоб настройки системи змінювалися відповідно до цього регламенту.

Стосовно до забезпечення безпеки інформаційної системи це можна представити таким чином. Спочатку включити в наявність документ, в якому повинно бути чітко описано, хто і на якій підставі повинен мати доступ до ресурсів інформаційної системи. Крім того,

необхідно мати єдину точку взаємодії співробітників організації з інформаційною системою, через яку вони зможуть формулювати свої побажання на надання доступу до тих чи інших ресурсів інформаційної системи в рамках поточних норм інформаційної безпеки підприємства. І для управління подібними процесами підприємству необхідно мати гнучкі інструменти контролю правильності налаштувань інформаційної мережі. Варто відзначити, що останніми роками розробками такого роду вже займається кілька великих корпорацій. Свої рішення пропонують підрозділу інформаційної безпеки компаній Oracle і IBM. Особливість пропонованих рішень подібного роду полягає в тому, що в них з'єднуються не працюючі окремо технічний і організаційний підходи до управління безпекою.

При впровадженні таких систем передбачається, що організація вже має сформульовану політику безпеки. Ця політика разом з інформацією про ІС служить надалі фундаментом системи управління. Що ж стосовно самого опису інформаційної системи зазвичай необхідно знати наступне:

- Перелік інформаційних ресурсів. Під ресурсом можуть розумітися конкретні сервери і папки на них, експлуатовані додатки, обладнання та навіть сегменти мережі.

- Відповідального за безпеку цих ресурсів. Це можуть бути власники ресурсів, голови підрозділів, куратори з боку служби безпеки та інші.

- Відповідального за адміністрування цих ресурсів.

– Як ресурси інформаційної системи взаємопов'язані між собою. Часом для нормальної роботи програми необхідний комплекс налаштувань – від налаштувань самого додатка до комутаційного обладнання. Адже навіть якщо ми виконаємо всі настройки, але забудемо прописати дозволяюче правило на внутрішньому міжмережевому екрані, рішення всієї задачі буде зірвано.

– Штатна структура компанії. Який доступ, і до яких ресурсів має співробітник, що займає певну посаду.

Таким чином, на базі всієї вищевказаної отриманої інформації система управління вибудовує ідеальну модель інформаційної мережі підприємства, що відповідає нормам інформаційної безпеки. Цей момент можна вважати стартовим у роботі системи управління безпекою. Відтепер все спілкування з питань змін у налаштуваннях інформаційної системи починає відбуватися через спеціалізовану систему документообігу, що входить до складу системи управління безпекою, що знаходиться під наглядом відділу інформаційної безпеки.

Варто зазначити, що від зарубіжних аналогів вітчизняну систему комплексного управління безпекою відрізняє спеціальний транслятор, який дозволяє долати мовний бар'єр і надає можливість кожному працювати зі зрозумілими йому термінами. Наприклад, якщо це менеджмент компанії – то в системі він може використовувати набір функцій по управлінню співробітниками і посадами, без зайвих інформаційних надбудов, в той час як інформаційна безпека і ІТ-фахівці будуть працювати обліковими записами користувачів, їх правами доступу і т. п.

Заявка на зміну доступу, складена в системі управління безпекою, буде перевірена на несуперечливість вимогам політики безпеки, узгоджена з власниками ресурсів і спрямована на виконання адміністраторам. Виявляти невідповідність моделі інформаційної системи і її поточного стану системи управління безпекою дозволяють агенти-сенсори. Такі агенти регулярно стежать за всіма пов'язаними з мережевою безпекою підприємства настройками операційних систем, додатків, засобів захисту, мережевого обладнання.

Під невідповідністю системи управління безпекою інформаційної системи підприємства слід розуміти або невиконані адміністратором необхідні дії по адмініструванню інформаційної системи, або дії, вчинені ним в обхід прийнятого і затвердженого в організації порядку. Наприклад, надання зайвих повноважень якому-небудь користувачеві або неправомірне обмеження користувача в правах.

Інформація про невідповідності тут же надходить в служби безпеки і в службу ІТ. Адже кожне з них пов'язане з тим, що хтось із співробітників або набуває права на доступ до ресурсів інформаційної системи, або втрачає їх. Це означає, що він може отримати зайву інформацію або позбутися доступу до необхідних йому відомостей. А це, як ми вже відзначали, рівнозначно неприпустимо, оскільки загрожує безпеці або ж призводить до зриву виконання бізнес-завдань.

Наявність в системі документообігу механізму архівування заявок на зміни доступу до інформаційної системи дозволить в будь-

який момент зрозуміти, хто має доступ до ресурсів інформаційної системи і хто запитував надання цього доступу. Використання описаного підходу до управління інформаційною безпекою – це серйозні зміни в звичному ритмі роботи інформаційної системи. Але витрачені зусилля з лишком окупляться. Вигоди від впровадження систем управління безпекою очевидні. І, перш за все, це підвищення захищеності інформаційної системи, оскільки відтепер всі вироблені зміни налаштувань будуть контролюватися, і проводитися в точній відповідності з політикою інформаційної безпеки організації. Додатковим бонусом буде скорочення витрат на супутній управлінню документообіг.

Крім того, після впровадження подібної системи управління забезпечення інформаційної безпеки перестає бути долею, відповідальністю і обов'язком тільки вузьких фахівців. В управлінні інформаційною системою починає дійсно активно брати участь менеджмент організації: адже саме вони тепер формують вимоги до налаштувань за допомогою механізму заявок.

Що ж стосовно самого ринку інформаційної безпеки в нашій країні, то тут ситуація виглядає наступним чином. В Україні до питань інформаційної захисту найбільш серйозно підходять компанії, що мають відношення до інформаційних технологій, до банківського сектору, стільникового зв'язку, компанії, які проводять операції з цінними паперами. Що стосується інших організацій, згідно з результатами різних досліджень, керівники багатьох з них знають про основні види загроз, але не приділяють належної уваги цим питанням, вважаючи, що забезпечення інформаційної безпеки не має

сенсу, якщо відсутня видима загроза. Тобто, основна проблема в сфері інформаційного захисту – недостатня увага до неї керівництва компаній і, як наслідок, дефіцит її фінансування.

Проте, поступово керівники українських компаній змінюють свій погляд на інформаційну безпеку, починаючи ставитися до неї як до одного зі способів підвищення конкурентоспроможності компанії.

Переходячи до структури застосовуваних систем забезпечення комплексної інформаційної безпеки, варто сказати, що, незважаючи, на значний прогрес, у даний час лівову частку вітчизняного ринку інформаційної безпеки досі становлять міжмережеві екрани, системи виявлення атак (Intrusion Detection Systems – IDS) і антивірусні системи. Однак згадані безпечові заходи в більшості своїй перестали задовольняти сучасним вимогам, в рамках нинішніх реалій інформаційної безпеки, що пред'являються до захисних систем.

Цілком зрозуміло, що інтервали часу між появою повідомлення про чергову нову точку уразливості в програмному забезпеченні, випуском «латки» і створенням програми, що використовує цю уразливість, скорочуються сьогодні дуже швидко. IDS всього лише виявляють комп'ютерні атаки. Можна провести паралель між такою системою і термометром: останній лише визначає температуру тіла хворого, але не є засобом лікування.

Виходить, що система виявлення комп'ютерних атак має тільки діагностичне значення.

Існують дві технології виявлення атак, перша з них це технологія сигнатурного аналізу, а друга це так звана технологія виявлення аномальної діяльності. IDS, засновані на першій з них,

виявляють далеко не всі атаки, а лише ті, які вже описані в сигнатурах (зразок IP-пакета даних, характерного для будь-якої певної атаки). Інакше кажучи, вони реагують тільки на відомі атаки і беззахисні перед новими, невідомими. Такі IDS працюють за тим же принципом, що і антивірусні програми: відомі віруси ловляться, невідомі – ні.

Поява нової сигнатури завжди обумовлена аналізом механізму атаки, що вже пройшла, і її впливу на будь-яку інформаційну систему. Добре, якщо це були дії, спрямовані на конкретні інформаційні ресурси. А якщо це був, припустимо, новий різновид інтернет-хробака? Тоді користувач захисної системи, створеної на основі технології сигнатурного аналізу, не застрахований від наслідків можливої комп'ютерної атаки. Принцип роботи «пронесе – не пронесе» влаштує лише тих користувачів, для яких не критична втрата інформації, але не тих, чия діяльність заснована на використанні інформаційних ресурсів.

Виникає резонне питання, а як же бути з невідомими атаками? Комп'ютерні атаки, які трапилися останнім часом, наприклад, такі як Slammer або Nimda, вислизають від уваги програмних засобів, заснованих на розпізнаванні сигнатур, і практично миттєво поширюються через локальні мережі – задовго до того, як стає можливим якесь оновлення систем захисту. Система, орієнтована на виявлення нових типів атак, – це система виявлення «аномальної» поведінки, яка відстежує в мережевому трафіку, в роботі додатків і в інших процесах всі відхилення від норми, контролює частоту подій і виявляє статистичні аномалії. Заснована на аналізі поведінки, така

система може зупинити як відомі, так і ті, що не зустрічалися раніше, види несанкціонованої діяльності. Однак і у неї є істотний недолік – труднощі з формулюванням ефективних критеріїв того, що вважати аномальною поведінкою, а що не брати до уваги. Об'єднуючи ці дві технології і усуваючи, таким чином, їх взаємні недоліки, можна отримати засіб виявлення відомих і невідомих атак.

Необхідно не тільки виявлення, а й блокування шкідливих впливів – перехід до проактивного захисту. Виявлення вторгнень без протидії можна вважати ефективним засобом захисту. Купуючи систему інформаційної безпеки, користувач має на меті гарантовано захистити свої інформаційні ресурси від зловмисних дій. Тому на черговому витку розвитку інформаційних технологій, стикаючись з постійною еволюцією загроз і дотримуючись побажань користувачів, розробники засобів інформаційного захисту запропонували на зміну IDS системи запобігання комп'ютерних атак.

Основа функціонування IPS – інтеграція IDS з міжмережевими екранами. Крім того обов'язковою умовою ефективної роботи IPS є установка системи «в розрив» мережі. Система IPS не тільки визначає, але і намагається зупинити атаку, і навіть може провести у відповідь напад на атакуючого. Найбільш поширені типи реагування – переривання сесії і переконфігурування брандмауера. Сьогодні IPS – вже переважаюча технологія, реалізована в продуктах практично всіх відомих виробників засобів інформаційного захисту. Деякі вендори йдуть далі і намагаються доповнити системи запобігання атак унікальними розробками.

Цікава в цьому плані популярна технологія Virtual Patch, розроблена фахівцями компанії Internet Security System, що працює в сфері інформаційної безпеки. Її головне призначення – це блокування атаки, що експлуатує уразливість у певній системі, до офіційного випуску «латки» виробником цієї системи. Фактична швидкість виходу оновлення для модуля Virtual Patch становить кілька годин з моменту виявлення першої інформації про уразливість, після чого відбувається розсилка оновлень і автоматична реконфігурація сенсорів системи виявлення атак, так як вплив системи точковий і не пов'язаний з традиційними засобами інформаційної безпеки.

Станом на сьогодні внутрішні порушники представляють чи не більшу небезпеку, ніж зовнішні, адже зловмисником може бути будь-який співробітник компанії, від звичайного користувача до керівника вищого рангу. І рішення задачі захисту інформації від несанкціонованого впливу внутрішніх користувачів неможливе тільки організаційними, або тільки технічними методами захисту. Лише комплексне застосування цих методів здатне принести результат. Комплексна система захисту інформації повинна бути: безперервною, плановою, цілеспрямованою, конкретною, активною, надійною і ін. Система захисту інформації повинна спиратися на систему видів власного забезпечення, здатного реалізувати її функціонування не тільки в повсякденних умовах, але і критичних ситуаціях.

У зв'язку з усім цим взаємопов'язаним комплексом змінних, які необхідно враховувати в сучасному інформаційному суспільстві, стає очевидним факт взаємозв'язку всіх сфер суспільного регулювання. За

останнє десятиліття посилилася роль інформатизації освіти в розвитку інформаційного суспільства та їх тісний взаємозв'язок.

З одного боку становлення інформаційного суспільства суттєво впливає на процеси проникнення інформаційних технологій в усі сфери освітньої діяльності, з іншого боку інформатизація освіти, формуючи інформаційну культуру членів суспільства, істотно сприяє його інформатизації.

Інформаційна безпека, як і захист інформації, завдання комплексне, спрямоване на забезпечення безпеки, що реалізується впровадженням системи безпеки. Проблема захисту інформації є багатоплановою і комплексною і охоплює ряд важливих завдань. Проблеми інформаційної безпеки постійно поглиблюються процесами проникнення в усі сфери суспільства технічних засобів обробки і передачі даних і, перш за все, обчислювальних систем.

На сьогоднішній день сформульовано три базові принципи, які повинна забезпечувати інформаційна безпека:

- цілісність даних – захист від збоїв, що ведуть до втрати інформації, а також захист від неавторизованого створення або знищення даних;
- конфіденційність інформації;
- доступність інформації для всіх авторизованих користувачів.

Захист інформації в комп'ютерних системах має низку специфічних особливостей, пов'язаних з тим, що інформація не є жорстко пов'язаною з носієм, може легко і швидко копіюватися і передаватися по каналах зв'язку. Відома дуже велика кількість загроз

інформації, які можуть бути реалізовані як з боку зовнішніх порушників, так і з боку внутрішніх порушників.

В області захисту інформації та комп'ютерної безпеки в цілому найбільш актуальними є три групи проблем:

- порушення конфіденційності інформації;
- порушення цілісності інформації;
- порушення працездатності інформаційно-обчислювальних систем.

Захист інформації перетворюється в найважливішу проблему державної безпеки, коли мова йде про державну, дипломатичну, військову, промислову, медичну, фінансову та іншу секретну інформацію. Величезні масиви такої інформації зберігаються в електронних архівах, обробляються в інформаційних системах і передаються по телекомунікаційних мережах. Основні властивості цієї інформації – конфіденційність і цілісність, повинні підтримуватися законодавчо, юридично, а також організаційними, технічними і програмними методами.

ТЕМА 4. СИСТЕМИ ОБРОБКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ І ЇХ РОЛЬ В УПРАВЛІННІ ЕКОНОМІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

4.1. Поняття економічних систем, систем управління і систем обробки економічної інформації, їх класифікація та структура

Будь-який господарський суб'єкт є об'єктом управління, яке здійснюється органом управління та забезпечує стійку і цілеспрямовану поведінку цих суб'єктів щодо досягнення мети. Виходячи з цього, в нашому викладі для економічного об'єкта управління будемо використовувати термін «економічний об'єкт» і для нього скористаємося наступним визначенням:

Економічний об'єкт – це господарський суб'єкт різної природи, що підлягає дослідженню його економічної діяльності органами управління для забезпечення сталої і цілеспрямованої поведінки цього суб'єкта для досягнення поставленої мети.

На рис. 7 в якості прикладу представлена схема економічного об'єкта – підприємство – це господарюючий суб'єкт, створений для виробництва продукції, виконання робіт і надання послуг з метою задоволення суспільних потреб і отримання прибутку.

Органи управління підрозділяються на *зовнішні і внутрішні керівні органи*. Зовнішні органи управління не входять до структури економічного об'єкта, а внутрішні – входять. Вищі і контролюючі органи на рис. 7 – це зовнішні органи управління підприємством, а адміністрація і служби управління – внутрішні органи управління підприємства. Служби забезпечення, виробничі підрозділи і служби збуту – це господарські суб'єкти підприємства, що підлягають

дослідженню їх господарської діяльності та управління органами управління.



Рис. 7. Схематична структура управління підприємством

У свою чергу забезпечення цілеспрямованої поведінки економічних об'єктів в результаті управління *неможливо без наявності економічної інформації*, просування якої на рис. 7 позначено стрілками.

Економічна інформація – це сукупність даних, обробка яких спеціальними методами забезпечує отримання відомостей економічного характеру, на основі яких здійснюється господарська діяльність економічного об'єкта, а також процеси планування, обліку, аналізу, контролю на всіх рівнях управління економічним об'єктом.

Для аналізу економічного об'єкта – підприємство (рис. 7) – ми скористалися системним підходом і тому досліджуване підприємство ми розглядали як економічну систему. У зв'язку з різним вмістом і

викладом поняття терміну «система» (див. тема 2) дамо тепер визначення «економічної системи», що розкриває суть спрямованості дослідження економічного об'єкта з позицій теорії систем і системного аналізу і яких ми будемо дотримуватися надалі:

***Економічна система** – це сукупність взаємопов'язаних економічних елементів, що утворюють певну цілісність, економічну структуру суспільства, єдність відносин, що складаються з приводу виробництва, розподілу, обміну та споживання економічного продукту.*

***Економічна структура суспільства** – будова економічної системи суспільства, внутрішні стійкі зв'язки між її підсистемами і елементами.*

Основними підсистемами економічної системи є продуктивні сили, техніко-економічні, організаційно-економічні та виробничі відносини (або відносини власності) і базисні елементи господарського механізму, тому аналіз економічної структури суспільства передбачає перш за все з'ясування співвідношення цих підсистем між собою. Продуктивні сили – визначальна підсистема економічної структури суспільства, від рівня розвитку основних елементів якої залежить економічний потенціал країни, її місце в світовій економічній системі.

***Єдність відносин** – це та, що історично виникла або встановлена, діюча в країні сукупність принципів, правил, законодавчо закріплених норм, що визначають форму і зміст основних економічних відносин, що виникають в процесі*

виробництва, розподілу, обміну та споживання економічного продукту.

Економічний продукт – результат людської праці, господарської діяльності, представлений в матеріально-речовій формі (матеріальний продукт), в духовній, інформаційній формі (інтелектуальний продукт) або у вигляді виконаних робіт і послуг.

Кожна економічна система включає в себе такі **компоненти**:

- структура системи – множина елементів системи, які являють собою підсистеми по відношенню до всієї економічної системи і взаємозв'язків між ними. Наприклад, структура підприємства (рис. 7), де кожен елемент, у свою чергу може розглядатися як система, тобто підсистема всієї системи підприємства;

- функції кожної підсистеми економічної системи і всієї системи в цілому. Наприклад, управлінські функції – це прийняття рішень в певних структурних підрозділах підприємства і щодо підприємства в цілому (наприклад, адміністрація на рис. 7);

- вхід і вихід кожної підсистеми системи і всієї системи в цілому. Наприклад, матеріальні або інформаційні потоки, які надходять в систему або виводяться нею (наприклад, на рис. 7, це вищі і контролюючі органи, підприємства-партнери);

- обмеження економічної системи і її окремих підсистем. Наприклад, ресурсні обмеження: матеріальні, фінансові, інформаційні та ін.

Слід зауважити, що структура і функції економічної системи і її окремих підсистем залежать від мети, для якої призначена економічна система. Наприклад, структури організаційної та

виробничої систем, систем громадського харчування та бухгалтерського обліку одного і того ж підприємства розрізняються.

Грунтуючись на вищевикладених поняттях і визначеннях, дамо тепер визначення управління економічними системами та у відповідності з цими поняттями розглянемо завдання управління.

Управління – процес цілеспрямованої поведінки економічної системи за допомогою інформаційних впливів, що виробляються людиною (групою людей) або пристроєм – органом управління.

Завдання органу управління економічною системою полягає у виробленні на основі інформації, що надходить, про справжній стан системи в керуючу інформацію, яка дозволить перевести систему в деякий бажаний стан.

До основних завдань управління відносяться:

- цілепокладання – визначення необхідного стану або поведінки системи;
- стабілізація – утримання системи в існуючому стані в умовах збурюючих впливів;
- виконання програми – переведення системи в потрібний стан в умовах, коли значення керованих величин змінюються по детермінованим (відомим і незмінним) законам і поведінку системи можна абсолютно точно передбачити;
- стеження – утримання системи на заданій траєкторії (забезпечення необхідного поведіння), коли закони зміни керованих величин невідомі або змінюються;

- оптимізація – утримання або переведення системи в стан з екстремальними значеннями характеристик при заданих умовах і обмеженнях.

Для подальшого викладу виділимо підсистеми, що цікавлять нас та забезпечують процес управління економічними системами, і розглянемо їх структуру і властивості.

*Як було вже сказано система, що включає 3 підсистеми: керуючу систему, об'єкт управління (суб'єкти господарювання економічної системи) і систему зв'язку, що забезпечує обмін інформаційними потоками між ними, називається **системою управління**.*

***Керуючою системою** називається весь комплекс складаючих єдність елементів, їх зв'язків і взаємодій, призначений для управління економічною системою особами, що приймають рішення і реалізації всіх завдань управління.*

Інакше кажучи, **система управління** – це система, в якій реалізуються функції управління. Отже, будь-яка економічна система являє собою *систему управління*.

Наприклад, структурна схема економічної системи – підприємство, зображене на рис. 7, являє собою *систему управління підприємством*. Адміністрація та служби управління складають керуючу систему, а служби забезпечення, виробничі підрозділи, служби збуту – об'єкти управління (суб'єкти господарювання підприємства).

Основними групами функцій СУ є:

- функції прийняття рішень – збір і перетворення змісту інформації (створення нової інформації);
- рутинні функції обробки інформації;
- функції обміну інформацією.

Реалізацію цих функцій СУ забезпечує *інформаційна система*.

У діяльності підприємства *інформаційна система підприємства* розглядається як *система обробки економічної інформації*, що представляє собою програмне забезпечення, яке реалізує ділову стратегію підприємства, де хронологічно і систематично накопичуються і обробляються дані, пов'язані з обліком, контролем, плануванням, аналізом і регулюванням. На підставі цих даних формується економічна інформація про роботу підприємства, порівнюються фактичні і нормативні показники, формулюються глобальні і локальні напрями діяльності, розробляються пропозиції щодо встановлення причин відхилень і коригування результатів, здійснюється прогнозування ефективності політики управління підприємством, тобто реалізуються всі основні функції системи управління підприємством. Таким чином, вона є сукупністю компонентів (інформації, процедур, персоналу, апаратного та програмного забезпечення), об'єднаних регульованими взаємовідносинами для формування організації як єдиного цілого і забезпечення її цілеспрямованої діяльності. При цьому широкомасштабною метою є створення і розгортання єдиної корпоративної інформаційної системи, що задовольняє інформаційні потреби всіх співробітників, служб і підрозділів підприємства.

4.2. Корпоративні інформаційні системи, їх класифікація та характеристики

Корпорація – це об'єднання підприємств, що працюють під централізованим управлінням і вирішують спільні завдання.

Підприємство – самостійний, організаційно відокремлений господарюючий суб'єкт з правами **юридичної особи**, який виробляє і збуває товари, виконує роботи, надає послуги.

Юридична особа – організація, яка має відокремлене майно і відповідає їм за своїми зобов'язаннями, може від свого імені набувати і здійснювати цивільні права, нести цивільні обов'язки, бути позивачем і відповідачем у суді.

Організація – група людей, які є суб'єктами права (наприклад, юридична особа), діяльність яких свідомо координується для досягнення спільної мети або цілей.

Корпорація – окремий випадок організації і один із видів юридичної особи.

Таким чином, поняття «організація», «корпорація» і «підприємство» взаємопов'язані між собою, причому первинним і більш загальним є поняття «організація».

Корпорація є складною, багатoproфільною структурою і внаслідок цього має розподілену ієрархічну систему управління.

Корпоративне управління визначається як система взаємовідносин між акціонерами, радою директорів і правлінням, визначені статутом, регламентом і офіційною політикою компанії, а також принципом головування права на основі прийнятої бізнес-моделі.

Підприємства, відділення та адміністративні офіси, що входять в корпорацію, як правило, розташовані на достатньої відстані один від одного. Їх інформаційний зв'язок один з одним утворює комунікаційну структуру корпорації, основою якої є інформаційна система підприємства, яка значною мірою визначає ефективність управління і конкурентоспроможність підприємства та корпорації в цілому.

Ресурси корпорації включають:

- матеріальні (матеріали, готова продукція, основні засоби);
- фінансові;
- людські (персонал);
- знання (ноу-хау);
- корпоративну інформаційну систему.

У корпоративній інформаційній системі (KIC) реалізована сучасна управлінська ідеологія, яка поєднує бізнес-стратегію компанії і прогресивні цифрові інформаційні технології. На основі KIC реалізується система управління будь-якої компанії, яка включає *три основні підсистеми*:

1. Планування продажів і операцій. Це загальний план функціонування підприємств корпорації, що встановлює обсяги виготовлення готової продукції. Головним тут є планування попиту і оцінка ресурсів, необхідних для задоволення попиту. Тут же створюється основний виробничий план, що визначає, які вироби, в якій кількості і в які терміни потрібно виробити.

2. Детальне планування необхідних ресурсів (матеріалів, виробничих потужностей, трудових ресурсів тощо). Складений план

визначає час і обсяг замовлень для всіх матеріалів і комплектуючих, необхідних для реалізації основного виробничого плану.

3. Управління виконанням планів у процесі виробництва і закупівель (постачання).

Таким чином, *корпоративні інформаційні системи* – це інтегровані системи управління територіально розподіленою корпорацією, засновані на поглибленому аналізі даних з використанням цифрових технологій, широкому використанні систем інформаційної підтримки прийняття рішень, а також використанні технічних і програмних засобів, що реалізують ідеї та методи автоматизації.

Корпоративна інформаційна система об'єднує систему управління персоналом, матеріальними, фінансовими й іншими ресурсами компанії, використовується для підтримки планування й управління компанією, для підтримки ухвалення управлінських рішень її керівниками. Тому *головне завдання КІС* – *ефективне управління всіма ресурсами компанії (матеріально-технічними, фінансовими, технологічними та інтелектуальними)* для отримання максимального прибутку і задоволення матеріальних і професійних потреб всіх співробітників компанії.

Ефективність корпоративної інформаційної системи може бути оцінена тільки за результатами її внеску в досягнення організацією її стратегічних цілей.

Сучасні КІС мають такі основні характеристики:

- *масштабованість*. Це одна з важливих характеристик КІС, оскільки вони повинні створюватись на масштабованій програмно-апаратній платформі (сервери, операційні системи, системи

комунікації, СУБД). Оскільки варіантів конфігурації базового устаткування і програмного забезпечення може бути багато, то КІС має бути багатоплатформовою;

- *багатоплатформність*. В КІС виникає потреба в тому, щоб прикладна програма працювала на кількох апаратних і програмних платформах. При цьому мають бути забезпечені однакові інтерфейси та логіка роботи. Реалізувати прикладну програму одночасно в кількох середовищах нелегко. В зв'язку з цим з'явилися інтегровані програмні середовища розробки, які значно полегшують перенесення прикладних програм з одного середовища в інше. До них зокрема належать: Windows Open System (WOSA), Win32, загальне відкрите програмне середовище UNIX COSE App Ware Foundation тощо;

- *розподілені обчислення*. Це один із видів роботи в клієнт-серверній архітектурі, коли дані чи запити, які надходять з робочих станцій, розподіляються між кількома серверами, що забезпечує можливість багатозадачної роботи та оптимізацію використання обчислювальних ресурсів. Забезпечення розподіленої роботи і віддаленого доступу до документів – це обов'язкова вимога до інформаційних систем корпоративного рівня. Останнім часом невід'ємною складовою частиною цієї вимоги стала підтримка роботи в мережевій архітектурі.

Поєднання цих властивостей принципово відрізняє КІС від суми компонентів з тим же набором функцій і дозволяє справлятися з комплексом проблем, які складно вирішувати у разі безсистемної інформатизації бізнесу. У даному випадку під ***проблемою***

розуміється невідповідність між метою, що досягається економічним об'єктом, і бажаною метою, яку керівництво об'єкту хотіло б досягти. **Вирішенням проблеми** є набір і послідовність дій, які необхідно провести над економічним об'єктом, щоб привести його в стан, який забезпечує досягнення бажаної мети.

Корпоративні ІС можуть бути класифіковані і значно розрізнятися за типами об'єктів управління, сфері застосування, характері й об'ємі вирішуваних завдань і інших ознаках. Як приклад можна привести наступну класифікацію.

Державні корпоративні ІС призначені для вирішення найважливіших народногосподарських проблем країни. На базі обчислювальних комплексів і економіко-математичних методів складають перспективні і поточні плани розвитку країни, розробляють державний бюджет і контролюють його виконання і тому подібне.

Регіональні корпоративні ІС призначені для виконання робіт з обробки інформації, яка потрібна для реалізації функцій управління регіоном, формування звітності і видачі оперативних даних місцевим і керівним державним і господарським органам.

Будь-яка КІС може бути піддана аналізу, побудована і керована на основі загальних принципів побудови систем.

До основних принципів побудови КІС відносяться:

1. Принцип інтеграції, що полягає в тому, що оброблювані дані вводяться в систему тільки один раз і потім багато разів використовуються для вирішення можливо більшого числа завдань; принцип одноразового зберігання інформації;

2. Принцип системності, що полягає в обробці даних у різних розрізах, щоб отримати інформацію, необхідну для прийняття рішень на всіх рівнях і у всіх функціональних підсистемах і підрозділах корпорації; увагу не тільки до підсистем, але і до зв'язків між ними; еволюційний аспект – все стадії еволюції продукту, в фундаменті КІС повинна лежати здатність до розвитку;

3. Принцип комплексності, що припускає автоматизацію процедур перетворення даних на всіх стадіях просування продуктів корпорації.

Таким чином, корпоративна інформаційна система може бути визначена з технічної точки зору як набір взаємозалежних компонентів, які збирають, обробляють, накопичують і розподіляють інформацію, щоб підтримати ухвалення рішень і управління в організації. На додаток до підтримки ухвалення рішень, координації й управління корпоративні інформаційні системи можуть також допомогти управлінцям проводити аналіз проблеми і виробляти рішення по їх усуненню.

Найбільш значущими характеристиками КІС є:

1. Архітектура інформаційної системи – склад елементів та їх взаємодія;
2. Мережеві технології, їх масштаби та топологія мережі;
3. Функціональна структура управління, реалізована в інформаційній системі (склад підсистем, комплексів завдань);
4. Організаційна форма зберігання інформації (централізована або розподілена база даних);
5. Пропускна здатність системи – швидкість обробки

транзакцій;

6. Обсяг інформаційного сховища даних;
7. Системи документів і документообіг;
8. Кількість користувачів КІС;
9. Інтерфейс користувача і його можливості;
10. Типові інформаційні технології процесів збирання, передачі, обробки, зберігання, вилучення, поширення інформації.
11. Забезпечення повного циклу управління в масштабах корпорації: нормування, планування, облік, аналіз, регулювання на основі зворотного зв'язку в умовах інформаційної та функціональної інтеграції;
12. Територіальна розподіленість і значні масштаби системи та об'єкта управління;
13. Неоднорідність складових технічного та програмного забезпечення структурних компонентів системи управління;
14. Єдиний інформаційний простір для вироблення управлінських рішень, що об'єднує управління фінансами, персоналом, постачанням, збутом і процес управління виробництвом;
15. Функціонування в неоднорідному обчислювальному середовищі на різних обчислювальних платформах;
16. Реалізація управління в реальному масштабі часу;
17. Висока надійність, безпека, відкритість і масштабованість інформаційних компонентів.

Серед переваг впровадження КІС можна відмітити наступні:

1. Отримання достовірної та оперативної інформації про діяльність усіх підрозділів компанії;

2. Підвищення ефективності управління компанією;
3. Скорочення витрат робочого часу на виконання робочих операцій;
4. Підвищення загальної результативності роботи за рахунок більш раціональної її організації.

4.3. Організація інформаційної бази систем обробки економічної інформації

Будь-який економічний об'єкт є підсистемою більшої системи, тобто відкритою системою. Наприклад, підприємство як економічна система є підсистемою соціально-економічної системи регіону, а економічна система регіону – підсистемою державної соціально-економічної системи. Це призводить до того, що перед підприємством можуть ставитися завдання і не економічного характеру. Отже, інформація, яка необхідна для управління підприємством, являє собою різні повідомлення економічного, технічного, технологічного, політичного, соціального, юридичного, демографічного та іншого змісту. Але все ж найбільший обсяг припадає на техніко-економічну інформацію, тобто інформацію, яка описує бізнес-процеси – це сукупність взаємопов'язаних заходів або робіт, спрямованих на створення певного продукту або послуги для споживачів і отримання прибутку. Отримання прибутку, у свою чергу, забезпечує досягнення і інших цілей: соціальних, екологічних та ін.

Таким чином, отримання всіх показників за результатами діяльності підприємства і їх оцінка в основному базуються на економічній інформації, а основним джерелом економічної

інформації є система бухгалтерського обліку та аналізу – облікова інформація.

4.3.1. Облікова інформація, її зміст і формалізація

Облікова інформація – це безпосереднє відображення виконаних на підприємстві господарських операцій, тобто це «історична» інформація про процеси, які вже відбулися.

Облікова інформація характеризується двома основними ознаками: *якісною* (дозволяє класифікувати її по області знань, видів і категорій функцій управління і т. п.) і *кількісною* (є способом оцінки або вимірювання, на основі якого можливе встановлення її обсягу і трудомісткості збору, зберігання і фіксації, а також технологією обробки). Характерними *особливостями облікової інформації* є: великі обсяги, багаторазові повтори циклів отримання і перетворення в певні часові періоди (місяць, квартал, рік і т. п.), значна питома вага логічних і математичних операцій при обробці.

Перевагою облікової інформації є те, що вона дозволяє відображати діяльність економічного об'єкта через систему числових показників, більш того, числові оцінки, які характеризують конкретні факти, предмети, явища, господарські операції та т. п. економічного об'єкта, можуть бути виражені в одній і тій же одиниці виміру – грошовому еквіваленті і, отже, піддаються формалізації.

Формалізація – це етап системного дослідження, на якому сформульована в змістовному описі основна гіпотеза про механізм досліджуваного процесу функціонування системи і його закономірностях набуває строго логічну і кількісну форму причинно-

наслідкових відносин, тобто «формалізований» означає записаний у вигляді формул і, отже, передбачає для аналізу системи використання комп'ютерних технологій і обчислювальних систем.

Формалізований опис, а також комп'ютерна система обробки облікової інформації для оцінки діяльності підприємства і прогнозування подальшої діяльності передбачає наступну *логічну структуру реєстрованої інформації*:

- **Дані** – це символи (літери, цифри, знаки), які зафіксовані на матеріальному носії (базі даних), містять інформацію і призначені для її обробки;
- **Атрибут (реквізит)** – це елементарна частина даних, які розподіляються на ознаки і основи. **Реквізити-основи** відображають кількісну сторону предметів і явищ, **реквізити-ознаки** – їх якісну сторону. Над реквізитами-ознаками здійснюються логічні операції (впорядкування, пошук, угруповання і т. п.), а над реквізитами-основами – арифметичні операції. Атрибути мають такі характеристики: *назва, позначення у формулах, ідентифікатор, тип, формат, довжину, точність*. Назва атрибута є природною, тобто відповідає його змістові. *Позначення в формулах*, – як правило, це один символ кирилиці або латинського алфавіту. Прийнято позначати атрибути-основи великими буквами, атрибути-ознаки – малими. Позначення використовуються при розробці математичного опису алгоритму (формалізованого опису показників). *Ідентифікатор* – це внутрішнє ім'я атрибута при створенні бази даних (ім'я поля бази даних). *Тип* – атрибути бувають кількісні (планові, фактичні, розрахункові, нормативні та ін.) і якісні (групувальні, довідкові).

Формат – це тип поля в базі даних (текстове, числове, грошове, логічне, дата/час, примітка і т. п.). Можливість використання того чи іншого формату атрибута залежить від використання конкретної системи управління базою даних, тобто від того, які типи полів вона підтримує. *Довжина* – максимальна кількість знаків, яку може займати значення атрибута. *Точність* – ця характеристика властива для кількісних атрибутів. Точність дорівнює кількості знаків після десяткового дробу;

- ***Економічний показник*** – структурна одиниця, яка характеризує будь-який конкретний об'єкт управління з кількісної та якісної сторони, він складається з реквізитів-основ і реквізитів-ознак, достатніх для створення елементарного документа (товарообіг підприємства за місяць);

- Набір взаємопов'язаних даних однієї форми з усіма її значеннями являє собою ***масив даних*** (сукупність даних про рух товарів на підприємстві);

- Сукупність масивів даних, яка стосується однієї і тієї ж ділянки управлінської роботи, називають ***інформаційним потоком***;

- Сукупність інформації про об'єкт управління являє ***інформаційну базу***.

4.3.2. Носії облікової інформації та їх класифікація в автоматизованих системах бухгалтерського обліку

Раціональна побудова ***Автоматизованої Системи Бухгалтерського Обліку*** (АСБО) потребує класифікації облікової інформації, яка ділиться на:

– *вхідну* (сукупність даних, які необхідні для вирішення завдань обліку: первинні і накопичені дані обліку, дані попередніх звітних періодів, постійні нормативно-довідкові дані);

– *вихідну* (дані, отримані як результат рішення облікових завдань і призначені для безпосереднього виконання функцій обліку);

– *проміжну* (дані, які є результатом рішення одних завдань і використовуються для вирішення інших завдань).

Сукупність трьох видів інформації, яка організована певним чином і зафіксована на машинних носіях, утворює **інформаційну базу** (ІБ) або **базу даних** (БД).

Дані в ІБ організуються і зберігаються в певному порядку, тому вона складається з: *бази даних > файлів > записів > агрегатів даних > полів > символів*.

Символ – найнижчий елемент, який може бути виражений цифрою, буквою, службовим або спеціальним знаком.

Поле – це об'єднання символів, яке створює мінімальний семантичний (смисловий) масив (товар, кількість, ціна).

Агрегат даних – це поіменна сукупність двох і більше елементів нижчого рівня (дата народження, адреса).

Запис – це поіменна сукупність полів, об'єднаних за змістовним принципом, яка є об'єктом і результатом одного кроку обробки даних (оклад службовця, код запчастини).

Файл – це поіменна сукупність записів масиву даних для об'єктів одного типу, яка містить поза програмою зовнішньої пам'яті ЕОМ і доступні програми за допомогою спеціальних операцій (запчастини).

База даних – це поіменна сукупність взаємопов'язаних файлів з мінімальною надмірністю, яка призначена для одночасного користування багатьма користувачами (робота і кадри).

Як і в будь-якій автоматизованій паспортній системі управління та обробки інформації, так і в АСБО велике значення має класифікація облікової інформації, оформлена у вигляді класифікатора.

Класифікатор – систематизований перелік найменованих об'єктів, кожному з яких у відповідність присвоєно унікальний код.

Класифікація об'єктів бухгалтерського обліку (матеріалів, виробів, підрозділів підприємства, працівників, рахунків бухгалтерського обліку та ін.) проводиться згідно з правилами розподілу заданої множини об'єктів на підмножини (*класифікаційні угруповання*) відповідно до встановлених ознак їх відмінності або подібності.

Класифікатор є стандартною кодовою мовою документів, фінансових звітів та автоматизованих систем. Класифікація облікових об'єктів сприяє їх систематизації, обробці, більш глибокому вивченню і створенню єдиних класифікаторів однорідних об'єктів для різних підприємств. Відомі дві системи класифікації об'єктів бухгалтерського обліку: ієрархічна і фасетна.

Під *ієрархічним методом класифікації* розуміється метод, при якому задана множина послідовно ділиться на підпорядковані підмножини, поступово конкретизуючи об'єкт класифікації. При цьому підставою розподілу служить деяка вибрана ознака. Сукупність одержаних угруповань при цьому утворює ієрархічну

деревоподібну структуру у вигляді розгалуженого графа, вузлами якого є угруповання.

Вибір послідовності ознак залежить, перш за все, від характеру інформації. При побудові класифікації вибір послідовності ознак залежить від ймовірності звернення до тої чи іншої ознаки. При цьому найбільш імовірним зверненнями повинні відповідати вищі рівні класифікації.

Фасетний метод класифікації: метод класифікації, при якому задана множина об'єктів класифікації ділиться на незалежні підмножини за різними ознаками класифікації, тобто має на увазі паралельний поділ множини об'єктів на незалежні класифікаційні угруповання. При цьому не передбачається жорсткої класифікаційної структури і наперед побудованих кінцевих угруповань. Класифікаційні угруповання утворюються шляхом комбінації значень, узятих з відповідних фасетів. Послідовність розташування фасетів при утворенні класифікаційного угруповання задається *фасетною формулою*. Кількість фасетних формул визначається можливими поєднаннями ознак.

До класифікатора, побудованого на фасетному методі класифікації, пред'являються наступні вимоги:

1. Повинен дотримуватися принцип не перетинання фасета, тобто склад ознак одного фасета не повинен повторюватися в інших фасетах цього ж класу;
2. До складу класифікатора повинні бути включені тільки такі фасети і ознаки, які необхідні для вирішення конкретних завдань.

Бухгалтерський облік як процес в АСБО складається з трьох стадій:

- *первинний облік* – передбачає формування первинних документів (первинних доказів, які застосовують на стадії первинного обліку). У АСБО мають електронну форму і зберігаються в базі даних як допоміжні файли первинного обліку. Можуть бути виведені на екран монітора для перегляду, коригування, передачі в інші підсистеми, можуть бути роздруковані і отримані на паперовому носії;

- *поточний облік* – передбачає формування облікових регістрів (вторинних доказів, які застосовують на стадії поточного обліку). У АСБО отримують електронну форму при їх формуванні. Вони, як правило, не зберігаються в базі даних, оскільки формуються практично миттєво. Кожен такий документ будується за формою заздалегідь розробленого макета, де передбачений алгоритмічний зв'язок з масивом господарських операцій і, відповідно, системою синтетичних аналітичних рахунків. У паперовому вигляді такі документи, на відміну від традиційних (ручних) форм обліку, як правило, не формуються. Формалізація документів поточного обліку є довільною і визначається бухгалтерськими програмами, потребами користувачів облікової інформації, особливостями бухгалтерського обліку того чи іншого підприємства, бухгалтерською наукою;

- *підсумковий (узагальнюючий) облік* – передбачає складання звітності (теоретичних доказів, які застосовують на стадії підсумкового обліку). У АСБО мають електронну форму і зберігаються в базі даних як допоміжні файли вихідних (звітних)

документів. Вони можуть бути виведені на екран монітора для перегляду, коригування, передачі в інші підсистеми, можуть бути роздруковані і отримані на паперовому носії.

Важливим компонентом системи подання та інтерпретації облікових даних, які використовуються при створенні АСБО, є *модель документообігу*. В існуючих програмах бухгалтерського обліку застосовуються такі *моделі інтерпретації документів*:

Доповнення до господарських операцій – застосовується в програмах, де найважливіша складова інформаційної бази – це масив господарських операцій з певними бухгалтерськими проводками. Документи тут трактуються як вхідні форми первинного обліку, їх побудова проводиться автоматично або за запитом після введення даних про господарську операцію. Первинні документи зберігаються в базі даних і алгоритмічного зв'язку з господарськими операціями і рахунками бухгалтерського обліку не мають.

Засоби формування записів масиву господарських операцій – характерні для програм, в яких первинний документ не тільки формальна основа для формування бухгалтерських проводок господарських операцій. У таких програмах існує певний набір форм документів, які визначають структуру введення інформації. За даними, введенними на основі макета певного документа, програма формує відповідні для документа записи масиву господарських операцій. Після цього документ втрачає зв'язок з господарськими операціями. Документ розглядається як допоміжний засіб ведення записів масиву господарських операцій.

Допоміжні інформаційні об'єкти – модель передбачає застосування технологій проведення первинних документів, тобто автоматичного відображення господарської операції в інформаційній базі в системі рахунків бухгалтерського обліку.

Повна модель документообігу – ця модель не передбачає принципу взаємозв'язку документів і записів масиву господарських операцій, а передбачає обслуговування системи зв'язку між документами різних типів. Базовим елементом є документ разом з набором унікальних зв'язків з іншими документами. При такій системі документообігу бухгалтерські записи є вторинною інформацією.

У АСБО можливі три варіанти реєстрації облікових даних:

- 1) реєстрація ведеться в первинному документі з наступним перенесенням цих даних на машинний носій;
- 2) реєстрація ведеться одночасно в первинному документі і на машинному носії (створюється електронний макет документа);
- 3) реєстрація даних тільки на машинному носії, переважна більшість первинних документів при цьому надходить по електронним комунікаційних каналах зв'язку.

Носії фактичної облікової інформації можуть бути: паперові, накопичувальні на дисках, накопичувальні на жорстких магнітних дисках, накопичувальні на магнітних дисках. Сьогодні паперові документи – це найбільш поширені носії облікової інформації. Можливе оформлення операцій без паперових документів, коли вихідна інформація по каналах зв'язку надходить в комп'ютер в електронному вигляді і формує електронний первинний документ – це найбільш

перспективний шлях розвитку автоматизованої форми ведення бухгалтерського обліку та подальшого складання фінансової звітності.

4.3.3. Класифікація комп'ютерних програм бухгалтерського обліку

З точки зору розробників програмного забезпечення якнайповнішою є класифікація програм бухгалтерського обліку, яка склалася при проведенні конкурсів програмного забезпечення. Ця класифікація об'єднує в собі критерії для групування, як за призначенням, так і за способом реалізації бухгалтерських функцій і розмірами підприємств:

Програми для ведення домашньої бухгалтерії – з їх допомогою ПК можна використовувати для обліку особистих доходів і витрат, планування сімейного бюджету (включно з довгостроковими вкладеннями), складання особистих податкових декларацій.

Міні-бухгалтерія це програма, яка призначена для використання одним або декількома працівниками в бухгалтеріях невеликих підприємств. Такі програми не мають чіткої спеціалізації за ділянками обліку. Вони реалізують функції ведення синтетичного і підсумкового аналітичного обліку, дозволяють вводити господарські операції і обробляти їх (сортувати, здійснювати пошук необхідної інформації і т. п.), формувати невеликий набір первинних документів і звітних форм.

Універсальні бухгалтерські системи (міді-бухгалтерії) – це програми, орієнтовані на бухгалтерії малих і середніх за розмірами підприємств, які в спрощеному варіанті забезпечують ведення всіх ділянок обліку. Такі системи поєднують всі облікові функції, в тому

числі функції кількісного обліку, і, як правило, розраховані для роботи на одному комп'ютері. Винятком є розрахунок заробітної плати, який виконується окремо. Деякі програми цього класу призначені для роботи на кількох комп'ютерах в локальній мережі.

Локальні автоматизовані робочі місця призначені для виконання окремих облікових завдань – обліку праці та заробітної плати, основних засобів, ТМЦ і т. п., охоплюють окремі ділянки бухгалтерії і, як правило, не пов'язані між собою. АРМ мають високий рівень спеціалізації і тому можуть ефективно автоматизувати окремі частини бухгалтерії без формування зведеної звітності.

Комплекси пов'язаних автоматизованих робочих місць орієнтовані на використання в бухгалтеріях з кількістю працівників більше 8 при чіткому розподілі функцій між ними. Комплекс складається з набору АРМ, кожне з яких реалізує функції окремих ділянок обліку. Кожна така програма розрахована на специфіку облікових робіт і орієнтована на персонал з невисокою бухгалтерською та комп'ютерною кваліфікацією. Як правило, АРМ комплекси підтримують розгорнутий аналітичний облік, мають глибоку спеціалізацію і встановлені на окремих ПК. Комплекс містить засоби об'єднання даних з різних АРМ, які необхідні для отримання зведених звітних форм. Об'єднання даних здійснюється за допомогою спеціалізованого центрального модуля – Головної книги. При об'єднанні даних обмін інформацією може здійснюватися як за допомогою накопичувачів інформації, так і в локальній мережі.

Керуючі системи являють собою повні системи організаційного управління з елементами бухгалтерського обліку, планування,

діловодства, а також модулями прийняття рішень і деякими іншими. Бухгалтерська складова програми в даному випадку не є головною. Більш важливим є взаємозв'язок всіх складових системи, можливість ефективного управління підприємством, допомога у вирішенні головного завдання бізнесу – отримання прибутку.

Фінансово-аналітичні системи є різноманітними програмами фінансового аналізу на основі бухгалтерських даних, за допомогою яких автоматизуються завдання зовнішнього і внутрішнього аудиту.

Правові бази даних – це впорядковані довідкові системи, які містять підібрані в тематичному або хронологічному порядку законодавчі акти з питань податків, бухгалтерського обліку і т. п. Ці системи дозволяють швидко знаходити потрібні документи, оперативно відстежувати зміни і доповнення до нормативних документів. Вони мають опосередковане відношення до бухгалтерських програм. Хоча ця категорія програмного забезпечення була створена, перш за все, як допомога юристам, значна її частина орієнтована на таких користувачів як бухгалтери, фінансисти, економісти.

Рекомендована послідовність вибору облікової бухгалтерської програми є такою:

1. Визначення основних напрямів ведення обліку.
2. Визначення бюджету на впровадження комп'ютерної облікової програми.
3. Визначення переліку програм, які мають прийнятну функціональність і відповідають наявному технічному забезпеченню та бюджету витрат.

4. Отримання демонстраційних версій програм для ознайомлення з ними і оцінки їх придатності.

5. Оцінка придатності отриманих демонстраційних версій, визначення суми додаткових витрат на придбання облікової системи (налагодження, навчання персоналу, вдосконалення, розширення функціональних можливостей).

6. Вибір оптимального варіанту комп'ютерної системи і впровадження її на підприємстві.

4.3.4. Комп'ютерні форми бухгалтерського обліку

Протягом багатьох років головною ознакою форм бухгалтерського обліку вважали зовнішній вигляд реєстрів. Поняття облікового реєстра є невід'ємною складовою визначення форм обліку. Реєстр є вторинним джерелом інформації, призначений для формування заздалегідь встановленого переліку показників. В основу побудови реєстрів бухгалтерського обліку при паперових формах обліку покладений принцип надлишку, тобто всі дані, які можуть знадобитися, регламентно формуються і фіксуються в реєстрах. Реєстри мають багатоцільове призначення. У них формується інформація, необхідна функціональним службам для різноманітних цілей: проведення аналізу та виявлення резервів, заповнення форм звітності, контролю поточного і наступного, видачі довідок і т. п.

Форма обліку визначається також зв'язками між:

- реєстрами синтетичного та аналітичного обліку;
- реєстрами і звітністю;
- бухгалтерськими записами в реєстрах;

- реєстрами хронологічного і систематичного обліку;
- обліковими реєстрами і документами;
- проміжними підсумками та вихідними даними.

Структура кожної форми включає такі компоненти: тип запису (простий, подвійний), послідовність запису (систематична, хронологічна), узагальненість запису (синтетична, аналітична), повнота запису.

Однією з найголовніших ознак форми є технологічний процес обробки інформації, який залежить від складу технічних засобів, кваліфікації і структури бухгалтерського апарату, технології виробництва і т. п.

На розвиток форм бухгалтерського обліку впливають такі чинники:

1. Необхідність широкого поділу праці між обліковими працівниками;
2. Необхідність ведення детального аналітичного обліку (аналітичний облік пройшов три стадії розвитку: книжкова, карткова, комп'ютеризована);
3. Необхідність швидкого отримання результативної інформації.

Облікову роботу уповільнюють два моменти: арифметичний підрахунок і переписування. У зв'язку з цим говорять про «*проблеми ажуру*» в бухгалтерії.

Ажур – швидкість обробки облікових даних на шляху від реєстрації первинної інформації до формування звітів або такий стан облікових записів підприємства, при якому вони не відстають від

здійснених господарських операцій та дають правильну картину діяльності та фінансового стану підприємства.

Господарський ажур – така організація документування, при якій складання первинних документів відбувається одночасно із здійсненням господарських операцій або безпосередньо після їх здійснення.

Технологічний ажур – така організація роботи бухгалтерів, при якій первинні документи відносять до реєстрів обліку відразу після їх складання.

Повного ажуру досягти неможливо при паперових формах обліку, так як бухгалтерія оперує оформленими і перевіреними документами, для складання яких потрібно подолати певні перешкоди в часі і просторі.

В історії комп'ютерних форм обліку, в залежності від технічних засобів, які використовуються, можна виділити *чотири етапи*:

Етап 1. Використання перфораційних машин. Вперше новий підхід до організації бухгалтерського обліку при комплексній його механізації був розроблений в умовах застосування перфораційних обчислювальних машин в кінці 50-х років ХХ століття. Ця форма бухгалтерського обліку отримала назву таблично-перфокарточної. Вона була розроблена для підприємств, які використовували перфораційні машини, і передбачала перенесення даних з кожного документа на машинний носій – перфокарту. По кожній ділянці обліку: облік виробничих запасів, оплати праці, готової продукції і т. п., складалися масиви перфокарт. В основу комплексної механізації бухгалтерського обліку за таблично-перфокарточною формою був

покладений принцип безперервності обробки облікової інформації на обчислювальних пристроях при повній механізації всіх облікових робіт. Документи про господарські операції, оформлені, перевірені і прийняті для обробки, реєструвалися в спеціальному журналі прийому документів і реєстрації контрольних чисел, який був призначений для контролю за зберіганням цих документів і для перевірки повноти записів в табуляграмах. Зареєстровані документи передавалися на перфоратор для набивання перфокарт. Підготовлені перфокарти направлялися на обчислювальні машини, де відбувалося їх групування. Всі дані, записані за певний період, пропускалися через відповідний зчитуючий пристрій для друку інформації і підрахунку контрольних підсумків, при цьому друкувався Журнал операцій, який служив також контрольною табуляграмою. Після перевірки інформаційних масивів друкувалися робочі табуляграми, підсумки яких контролювалися перевіреними підсумками Журналу операцій. Після закінчення звітного періоду друкували табуляграми – оборотну відомість за синтетичними рахунками. Підсумки оборотних відомостей за аналітичними рахунками порівнювали з даними оборотної відомості за синтетичними рахунками. При складанні табуляграми – оборотної відомості за синтетичними рахунками автоматично виготовлялися носії з вихідним сальдо. Після отримання оборотної відомості складали баланс.

Етап 2. Використання комп'ютерів третього покоління (великих і середніх) і багатотермінальних обчислювальних систем. Впровадження в практику облікового процесу Електронно-обчислювальних машин типу «Урал», «Дніпро», «Мінськ» призвело

до створення таблично-автоматизованої форми обліку. У цій формі первинні дані, крім паперових носіїв, можуть відразу фіксуватися на машинних носіях, що дозволяє автоматизувати збір первинної інформації. На машинних носіях зберігається також поточна, нормативно-довідкова і вхідна інформація. Оскільки нормативно-довідкова інформація підлягає багаторазовому використанню, вона відноситься до спеціальних баз даних. Одним з найважливіших принципів цього етапу розвитку комп'ютерних форм обліку є використання режиму запиту з метою отримання звітів по необхідним показникам. З цією метою бухгалтер заповнює стандартний документ, в якому вказується вид запиту. Після цього комп'ютер надає необхідну інформацію.

Етап 3. Діалогово-автоматизована форма. Використання ПК зумовило виникнення діалогово-автоматизованої форми обліку, яка характеризується повною автоматизацією обробки і систематизації облікової інформації. При цьому будь-які дані можуть відображатися в обліку відразу ж після їх введення в інформаційну базу даних. Систематизація та узагальнення облікових і аналітичних даних, які містяться в інформаційній базі, здійснюється автоматично і відображається у вихідних даних обліку, контролю і аналізу. Узагальнення даних у синтетичному та аналітичному обліку здійснюється одночасно на підставі однієї і тієї ж інформації. Діалогово-автоматизована форма передбачає автоматизоване виконання завдань бухгалтерського обліку, як в регламентному, так і в запитному (інтерактивному) режимах. При використанні запитного режиму підвищується оперативність обліку, контролю і аналізу,

з'являється можливість отримання необхідних довідкових і аналітичних даних протягом звітного періоду, а не тільки по його закінченні. При цьому обсяг регламентно виданої користувачам інформації значно скорочується і обмежується лише даними, необхідними і достатніми для виконання конкретних управлінських робіт. При бажанні можна перевірити правильність розрахунків, отримати розшифровки кожного результату показника із зазначенням всієї вхідної інформації і порядку проведених в машині розрахунків.

Етап 4. Комп'ютерно-комунікаційна форма. Використання ПК, обчислювальних і комунікаційних мереж характеризує собою новий етап використання комп'ютерної техніки. Вони дозволяють ефективно поєднувати між собою можливості комп'ютерів і ліній зв'язку. База даних систем розташовується на одному комп'ютері – сервері локальної мережі. Використання єдиної бази даних потребує комунікацій між усіма комп'ютерами і сервером. Ці можливості надає локальна обчислювальна мережа. Форма обліку, яка базується на застосуванні комп'ютерів четвертого покоління і електронних засобів комунікацій називається комп'ютерно-комунікаційною формою обліку.

В умовах комп'ютеризації змінилося традиційне розуміння самого поняття «*регістр бухгалтерського обліку*». При паперових формах бухгалтерського обліку під регістром бухгалтерського обліку розуміють засіб, призначений для фіксації, накопичення, систематизації, узагальнення і відображення облікової інформації. В умовах комп'ютеризації бухгалтерського обліку стадія відображення облікової інформації, тобто надання систематизованих облікових

даних в зручному для користувача вигляді є самостійним процесом, який не пов'язаний зі стадіями накопичення, узагальнення та систематизації, так як це здійснюється в автоматичному режимі. Первинна бухгалтерська інформація накопичується в базі даних комп'ютерної системи, а узагальнюється та систематизується на рахунках, які представлені окремими комірками пам'яті комп'ютера і є ідеальними, з точки зору теорії бухгалтерського обліку, носіями ознак її осередка.

При комп'ютеризованому обліку будь-який матеріальний носій даних бухгалтерського обліку з теоретичної точки зору можна розглядати як реєстр, а значить будь-які електронні носії, за допомогою яких накопичується інформація, можна вважати реєстрами обліку. Регістри при комп'ютеризованому обліку перетворюються із засобів узагальнення і групування інформації в вихідні форми аналітичної спрямованості.

При застосуванні комп'ютерів реєстр втілює єдність трьох частин:

1. Комп'ютерної бази даних з певною структурою, яка призначена для накопичення і зберігання облікової інформації на технічних носіях.
2. Бухгалтерських рахунків, які представлені комірками оперативної пам'яті комп'ютера і служать для систематизації та узагальнення інформації.
3. Відеограм і машинограм, які призначені для відображення згрупованої та систематизованої облікової інформації.

Термін «*форма обліку*» передбачає лише технологію обробки інформації. Більш широким є поняття «*система бухгалтерського обліку*» – вона охоплює всі об'єкти обліку, які в ній відображаються, включаючи відображення в первинних документах, облікових регістрах і звітності. У ній можна чітко виділити поняття форми обліку, який відповідає рівню облікових регістрів.

В умовах комп'ютеризації поняття форми бухгалтерського обліку переходить в поняття *системи бухгалтерського обліку*, який має такі *характерні особливості*:

Комп'ютеризація охоплює всі без винятку етапи облікової обробки інформації (первинний, поточний, заключний).

Забезпечується оперативність (ажур) в двох аспектах: господарському і технологічному.

Отримання звітних показників відбувається в режимі «людина – комп'ютер».

Розподілена обробка облікових даних.

Можливість без паперового накопичення і передачі первинних облікових даних.

Крім того, система бухгалтерського обліку – складна трирівнева система, яка передбачає не тільки технологію переробки вхідної інформації у вихідну, а й визначення методики обліку, і організацію роботи облікових працівників.

ТЕМА 5. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ СИСТЕМ ОБРОБКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

5.1. Інформаційні технології в банківській сфері

В даний час розвиток банківського бізнесу без використання інформаційних технологій неможливий. Застосування даних технологій є одним з ключових чинників ефективності і конкурентоспроможності сучасного банку. Тому фінансові організації активно вкладають кошти в автоматизацію бізнес-процесів.

Інформаційна банківська технологія – це процес перетворення банківської інформації на основі методів збору, реєстрації, передачі, зберігання і обробки даних з метою забезпечення підготовки, прийняття та реалізації управлінського рішення з використанням засобів індивідуальної обчислювальної техніки. У фінансово-кредитній системі інформаційні банківські технології сприяють своєчасному і якісному виконанню банківських функцій, а також значно підвищують рівень управління як банківською системою в цілому, так і кожним банком, і є практичною реалізацією інформаційних банківських систем.

До основних банківських послуг, що надаються із застосуванням телекомунікаційного середовища Інтернет, відносяться:

– здійснення грошових переказів за допомогою міжнародних систем грошових переказів (SWIFT, Western Union, Money Gram International та ін.). Завдяки використанню сучасного обладнання, новітніх комп'ютерних технологій можна здійснювати відправлення грошових коштів у будь-яку точку світу в найкоротші терміни;

– безготівкові розрахунки з використанням пластикових карт, здійснювані за допомогою банкоматів. Сучасна банківська пластикова картка не тільки засіб для розрахунків, а й інструмент, який пов'язує воедино різні інформаційні програми та різні платіжні середовища: мережі мобільного зв'язку, Інтернет, електронні гроші і т. д. Банківські картки можуть бути використані при виплаті стипендій, заробітної плати, пенсій, отримання кредитів, а також з їх допомогою можна здійснювати розрахунки в міжнародному масштабі;

– обов'язковим елементом системи електронних платежів є банкомат, який здійснює видачу готівки з різних рахунків, прийом вкладів на рахунки, переказ грошей;

– віддалене банківське обслуговування клієнтів з використанням мережі Інтернет та мобільного телефону (Інтернет-банкінг, мобільний банкінг).

В даний час на ринку банківських технологій слід виділити наступні напрямки розвитку: система «Клієнт-банк», Інтернет-банкінг і мобільний банкінг.

За допомогою системи «Клієнт-банк» клієнти банку можуть здійснювати різні операції з дому або з офісу: управління рахунком, отримання інформації про стан рахунків і іншої банківської інформації, проведення платежів та оплата послуг з розрахункових та інших рахунків і з пластикових карт, а також проведення інших операцій.

Мобільний банкінг – отримання банківських послуг безпосередньо за допомогою мобільного телефону або ноутбука при

використанні технології бездротового доступу. Така технологія дозволяє передавати інформацію інтернет-сайтів на мобільні телефони з функцією виходу в Інтернет. Ця система надає ще більшу свободу доступу. Серед споживачів банківських послуг за допомогою мобільного телефону перше місце займають Скандинавські країни і, за оцінками експертів, в найближчому майбутньому більше 40 % клієнтів перейдуть на мобільне обслуговування своїх рахунків.

Найбільш перспективним напрямком розвитку банківських інформаційних технологій є Ітернет-банкінг, система якого складається з наступних елементів:

- клієнта, що використовує стандартний web-браузер, за допомогою якого здійснюється навігація в мережі, вибір послуг, заповнення форм, робота з базою даних, виконання операцій над даними за допомогою завантаженого програмного забезпечення, реєстрація клієнта і управління рахунком;

- web-сервера, що забезпечує надання списку послуг;

- сервера додатків, розташованого в банку, оброблюючого дані запитів клієнта і забезпечуючого взаємодію з автоматизованою банківською системою;

- сервера баз даних, що містить дані про стан рахунків і платежів клієнтів, нормативно-довідкову та іншу інформацію.

Таким чином, успішний розвиток банківської сфери безпосередньо залежить від якості використовуваних інформаційних технологій. Завдяки застосуванню сучасних інформаційних технологій і систем телекомунікацій банки мають можливість

розширити ринок банківських послуг, підвищити якість і культуру обслуговування клієнтів.

За якістю надаваних онлайнових послуг найбільш високий рейтинг за оцінками споживачів мають такі банки:

Security First Network Bank; Wells Fargo Bank; Citibank; Salem Five Cents Saving Bank; Bank of America. Найбільш широко банківські інтернет-послуги представлені в країнах Північної Європи – Фінляндії, Норвегії, Швеції. На сьогоднішній день безумовним лідером інтернет-банкінгу в Швеції визнаний Skandia Banken (підрозділ страхової групи Skandia). Що, безумовно, говорить про їх розвиненість і відповідність сучасним технологіям.

Вітчизняні ж банки також досить освоїли цю технологію і можуть надавати такі послуги (приклад банку «Приватбанк», «ВТБ», табл. 1). Отже, подібні послуги з кожним роком продовжують завойовувати все нові і нові країни, нові системи. Кількість клієнтів, які користуються і охочі користуватися даними послугами постійно зростає, і саме тому банкам варто розвивати і вдосконалювати цю послугу. Прогрес в області використання мережі Інтернет банками неминучий, пристосувавшись, банк буде мати достатні додаткові надходження, в іншому варіанті – зазнає колосальних збитків.

Види віртуальних банківських послуг

Розділ	Операції
1. Мій кабінет	Перегляд детальної інформації по картах, рахунках, депозитах; швидке проведення операцій; виконання сервісних операцій по продуктам: зміна назви продукту, установка ліміту по карті, блокування карти і отримання виписки за карткою/рахунком.
2. Карти	Представлений весь перелік Ваших відкритих карт. І ви можете переглянути деталі а також провести будь-яку дію над цією картою (встановити ліміти, заблокувати, зробити виписку).
3. Поточні рахунки	Ви знайдете перелік відкритих і закритих поточних рахунків. Переглядайте деталі і керуйте відкритими рахунками: міняйте назву, формуйте і отримуйте виписки.
4. Вклади	Пропонується повний перелік Ваших вкладів. Переглядайте деталі, міняйте назви, формуйте виписку. При бажанні можете налаштувати функцію автопродлонгації вкладу, змінити рахунок для виплати, оформити дострокове розірвання, поповнити вклад. Вам також доступний перегляд закритих вкладів.
5. Переводи	Користувач може створити свій власний шаблон для регулярних переказів і зберегти його на майбутнє.
6. Платежі та кредити	Ви можете оплачувати рахунки, а так само суми за кредитами.
7. Історія	Варто відзначити, так як цей розділ гарантує законність платежів, а так само може проінформувати користувача про махінації шахраїв.

5.2. Інформаційні системи і технології в інвестиційному аналізі

Інвестиції – запорука економічного розвитку і зростання національного доходу. Тому перед будь-якою державою і його регіонами поставлено завдання привернути в економіку необхідну кількість інвестиційних ресурсів.

Можливість залучення інвестицій доступна регіонам з достатнім інвестиційним потенціалом, який, у свою чергу, залежить від того, наскільки якісно оцінена інвестиційна привабливість підприємств та інвестиційних проектів, що знаходяться на території даного регіону. Цей трудомісткий процес вимагає залучення експертів, що володіють спеціальними знаннями в різних областях економіки. Такі кадри можуть бути надані консалтинговими фірмами, але вартість цих послуг багатьом підприємствам може бути недоступна. Тому актуальним стає самостійне навчання сучасним методам інвестиційного проектування і використання спеціальних комп'ютерних програм.

Програми інвестиційного аналізу призначені тільки для фінансових розрахунків, що є лише малою частиною роботи з підготовки бізнес-плану. Однак саме ця частина найбільше потребує автоматизації і виконати її без застосування тих чи інших програм дуже складно. До того ж область застосування деяких систем не обмежується формуванням фінансового плану – вони являють собою комплексні програми фінансового аналізу.

Принцип роботи всіх наведених нижче програм приблизно однаковий: введення набору параметрів, що характеризують проект; розрахунок і отримання в результаті фінансового звіту, дані якого можна досліджувати за допомогою присутніх у програмі аналітичних інструментів. Проте, існують і явні відмінності між цими програмами, які відображені в табл. 2.

**Порівняльна характеристика програмного забезпечення
інвестиційного аналізу**

Програма	Переваги	Недоліки
Comfar III Expert (UNIDO)	Висока якість методик. Логотип ООН. Якісне резюме проекту. Оригінальна навігація по вихідним даним.	Погана технічна реалізація. Відсутність будь-якої прив'язки до українського законодавства.
Project Expert (Експерт Системс)	Широкий функціональний спектр. Приємний інтерфейс, багатомовність.	Відсутність готових рішень. Надто велика увага до деталей.
Інвестор (ІНЕК)	Прихильність до російського законодавства. Опрацьованість методики.	Непридатність для роботи з іноземними інвесторами. Незручний інтерфейс. Поганий текстовий висновок.
Аналітик (ІНЕК)	Детально пророблена методика. Непоганий фінансовий висновок.	Відсутність можливості друку. Використання тільки російської мови. Непродуманий інтерфейс.
Альт-Інвест 3.0 (Альт)	Заснована на базі MS Excel. Легкість складання звітів.	Незручна робота з вихідними даними. Недостатні можливості опису проекту.

Підводячи підсумки проведеного порівняльного аналізу можна привести ряд висновків щодо даних комп'ютерних програм.

«Comfar III Expert» рекомендується для вивчення фінансового аналізу та підготовки проектів, що подаються іноземним інвесторам. Однак у програмі не опрацьований процес оподаткування, що може звести нанівець аналітичні можливості програми і результати проектування.

«Project Expert» – програма для професіоналів з високими вимогами до складності фінансових моделей. Вона надає великі можливості, але і пред'являє високі вимоги до користувача.

Програма «Інвестор» створена на основі російських стандартів обліку та аналізу і дозволяє персичному російському бухгалтеру підготувати бізнес-проект, не перевантажуючи зайвою інформацією. Для складних проектів програма функціонально не компетентна.

Програму «Аналітик» можна рекомендувати для експрес-аналізу проектів, відбору підприємств для детальної оцінки та інвестування. У цьому програма ідеальна по співвідношенню «ціна/якість».

«Альт-Інвест» – найбільш прийнятна програма для тих, хто збирається створювати свою методику і форми звітності, організовувати цикл підготовки документації за власними стандартами. Але готовими рішеннями програма не забезпечена.

Таким чином, на ринку інформаційних технологій представлено широкий спектр програм, які забезпечують прийняття рішень в сфері інвестицій. При виборі програмного забезпечення необхідно враховувати всі переваги і недоліки комп'ютерної програми, а також індивідуальні здібності і професійні навички працівника. Крім того, необхідно відзначити варіант використання декількох комп'ютерних програм інвестиційного аналізу для взаємного усунення недоліків та проведення комплексного аналізу з урахуванням всіх можливостей.

5.3. Засоби автоматизації процесу фінансового аналізу на підприємствах

Фінансовий аналіз відіграє важливу роль в успішному функціонуванні будь-якого підприємства. Такий аналіз дозволяє грамотно управляти підприємством, запобігати банкрутству і стежити за ефективністю діяльності. У сучасному світі, де активно

розвиваються інформаційні та комп'ютерні технології, все більше підприємств вдаються до автоматизації процесів управління. Спеціалізовані програми забезпечують високу результативність аналізу, зручність і економію часу аналітика.

Стрімкий розвиток комп'ютерних та інформаційних технологій внесли суттєві зміни в прийняття рішень, пов'язаних з фінансовими питаннями.

Система управління фінансами включає в себе:

- прийняття управлінських рішень таким чином, щоб це призвело до збільшення фінансових результатів підприємства;
- максимальне усунення кредитно-фінансової сфери від державного втручання, що дозволило утворити багатосекторні корпорації, які обслуговують фінансову галузь;
- вражаючий ріст масштабів використання комп'ютерів з метою управління фінансами;
- збільшення попиту на фінансові операції;
- рівень інфляції і наслідки її впливу на фінансовий сектор.

Для того, щоб прийняти рішення, пов'язане з фінансами, організації створюють внутрішню інформаційну мережу (локальні інформаційні системи), далі при необхідності, підключаються до корпоративних глобальних мереж. Наприклад, до таких як Корпоративна мережа ПАТ «Альфа-банк», а глобальною мережею буде виступати система телекомунікацій SWIFT.

Зараз можна зустріти різноманіття програмних розробок для зручності фінансових розрахунків, однак, вибір відповідного

програмного рішення є складним і заплутаним. Розглянемо деякі з найбільш популярних на вітчизняному ринку продуктів.

Audit Expert – аналітична система для діагностики, оцінки та моніторингу фінансового стану підприємства. Відмінною рисою даної програми є можливість переоцінки всіх фінансових показників, тобто здатність задати коригуючі показники для всіх аналізованих даних окремо. Audit Expert є дуже гнучкою програмою, так як дозволяє реалізувати власні методики для вирішення будь-яких завдань аналізу, діагностики і моніторингу фінансового стану. Також програма дає можливість автоматично отримати ряд експертних висновків про фінансовий стан, підготувати звіти з необхідними графіками і діаграмами. Не можна не згадати про можливість імпорту даних з інших систем, а також експорту результатів і графіків в MS Word.

Програмний продукт Альт-Фінанси призначений для виконання комплексної оцінки діяльності підприємства, виявлення основних тенденцій його розвитку, розрахунку базових нормативів для планування і прогнозування, оцінки кредитоспроможності підприємства. Дана програма також, як і попередня, характеризується гнучкістю, а саме можливістю вносити зміни, враховуючи свої вимоги або конкретні умови. Відмінною рисою продукту Альт-Фінанси є здатність виконувати фінансовий аналіз, використовуючи не тільки нові, але і старі форми фінансової звітності, а також швидкого перекладу із старого формату в новий.

«Олімп: ФінЕксперт» призначений для аналізу фінансового стану підприємства і дозволяє на базі зовнішньої бухгалтерської

звітності не тільки проводити повний аналіз поточного стану підприємства, але також отримувати з використанням експертних і математичних методів аналітичну оцінку варіантів його майбутнього розвитку. Як і попередня програма Фінексперт, дозволяє працювати зі старою і новою формою бухгалтерської звітності, а також перетворювати їх один в одного. Необхідно відзначити, що дана програма працює в середовищі MS Excel і дозволяє імпортувати дані, підготовлені в інших фінансових системах.

Таблиця 3

Порівняльна характеристика програмних продуктів

Критерій	Audit Expert	Альт-Фінанси	Олімп: Фін Експерт
Розрахунок стандартних фінансових показників ліквідності, фінансової стійкості, рентабельності діяльності та ділової активності підприємства.	+	+	+
Можливість прогнозування.	+	+	+
Можливість створення власних методик аналізу.	+	+(Починаючи з версії 2.0)	+
Повний переклад даних на англійську мову.	—	+	—
Можливість створення аналітичних звітів.	+	—	+
Можливість імпорту даних	+	+	+
Перевірка коректності введення даних	+	—	—

Досліджуючи три вищеописаних продукти, була складена порівняльна таблиця (табл. 3).

Таким чином, розглянуті програми мають широкий спектр можливостей для фінансового аналізу і зручні у використанні. Однак поки що немає такої програми, яка поєднувала б у собі всі переваги

автоматизованих систем. Проте, в залежності від користувача, його цілей і виду діяльності кожен зможе знайти відповідний програмний продукт на вітчизняному ринку.

5.4. Інформаційні технології пенсійного фонду

Пенсійний фонд в системі позабюджетних фондів посідає особливе місце. Фактично він є самостійною фінансово-кредитною установою, проте свої кошти може використовувати тільки в суворо визначених напрямках, за допомогою процедур, регламентованих країною. Країна визначає розміри пенсій, технології її нарахування та виплат.

Іншими словами, пенсійний фонд акумулює кошти, розміщує їх певним чином і здійснює виплату, гарантовану державою. Пенсійний фонд як елемент бюджетної системи виконує розподільну функцію і відповідно має такі рівні розподілів: регіональний, місцевий.

Основним завданням пенсійного фонду є управління бюджетом пенсійного фонду, що означає управління доходами і управління витратами.

Доходи бюджету складаються з надходження сум єдиного соціального податку, внесків на обов'язкові пенсійні страхування, засобів розміщення тимчасово вільних коштів, а також сум страхових внесків в накопичувальну частину трудової пенсії, сум санкцій, а також добровільних внесків юридичних і фізичних осіб. Контроль за надходженням коштів ведуть податкові органи відповідного рівня. Стягнення недоїмок і пені за страховими внесками органи пенсійного фонду здійснюють самостійно в судовому порядку.

Повний облік пенсійних доходів і витрат пенсійного фонду в цілому можливий тільки при наявності єдиної автоматизованої інформаційної системи. На даний момент йде активна розробка її функціональних елементів.

Розроблено системи для пенсійних органів місцевого самоврядування, які вирішують наступні завдання:

1. Збір анкетних даних, тобто реєстр застрахованих осіб.
2. Введення і обробка відомостей про стаж і доходи застрахованої особи.
3. Отримання виписок з особового рахунку зареєстрованої особи.
4. Обмін даними з базою даних регіонального рівня.
5. Ведення класифікаторів, підрозділів і співробітників пенсійного фонду, а також реєстрів застрахованих у пенсійному фонді даного регіону роботодавцем і формування статистичних звітів.

Якщо відомості про працівника подані в перший раз, то йому присвоюють індивідуальний номер зареєстрованого і видається свідоцтво. Відомості про зареєстрованого працівника заносяться в центр пенсійного фонду, де зберігаються дані про всіх зареєстрованих.

Далі роботодавець повідомляє регулярно в територіальне відділення пенсійного фонду відомості про стаж і про заробіток зареєстрованих осіб, самотійно виконує страхові внески за кожного працівника і передає ці відомості в пенсійний фонд. Ці відомості заносяться в автоматизовану інформаційну систему пенсійного фонду

і потім надходять у загальну інформаційну систему пенсійного фонду.

При необхідності програма дозволяє здійснювати контроль за правильністю сплати страхових внесків кожним роботодавцем.

Також автоматизована інформаційна система пенсійного фонду дозволяє проводити статистичний аналіз роботи пенсійного фонду і формувати необхідні звіти в автоматичному режимі.

Облік витрат пенсійного фонду здійснюється за допомогою автоматизованої системи «Призначення і виплати пенсій та допомог».

Програма написана в середовищі Clipper і призначена для секторів районного рівня в децентралізованому режимі.

Програма виконує наступні функції:

1. Ведення карток пенсійних справ:

- призначення пенсій та допомог;
- корекція і перерахунок пенсій;
- розрахунок стажу, середнього заробітку;
- розрахунок підвищень і надбавок;
- видача протоколів;
- видача довідок про стаж, заробіток, утриманні.

2. Ведення картотеки одержувачів аліментів та допомог.

3. Реєстрація виконавчих документів по установам і доплат і щомісячний розрахунок виплачуваної суми пенсії з урахуванням цих сумм.

4. Видача необхідних документів для виплати пенсії: відомості, разові доручення у відділення зв'язку, списки одержувачів пенсії, філії ощадбанку і розпорядження на разові поштові перекази.

5. Формування платіжних доручень для розрахунків із ощадбанком і відділеннями зв'язку.

6. Масовий перерахунок пенсій при їх індексації, ведення районних коефіцієнтів і т. д.;

7. Видача первинної інформації з призначення і виплати пенсії.

8. Формування форм державної статистичної звітності.

9. Інші допоміжні функції.

Програмне забезпечення призначене для роботи в середовищі Windows і забезпечує одночасне виконання декількох додатків.

5.5. Сучасні інформаційні технології управління підприємством

Створення сучасного підприємства – складний і тривалий процес, який умовно можна розділити на два взаємопов'язані етапи. Перший – формування виробничо-управлінської структури, що породжує потужні потоки економічної інформації (див. тему 4). Другий – формування структури, що управляє цими потоками, тобто інформаційної системи підприємства, головним завданням якої є вироблення управлінських рішень. Таким чином, управлінська діяльність виступає в сучасних умовах як один з найважливіших факторів функціонування і розвитку підприємства і представляє собою цінний ресурс підприємства, поряд з фінансовими, матеріальними, людськими та іншими ресурсами.

В даний час основними класами інформаційних систем, що використовуються в практиці роботи вітчизняних і зарубіжних підприємств, є: системи планування потреби підприємства в

матеріалах MRP і всіх ресурсах (матеріалах, потужностях та фінансах) MRPII; системи обліку, планування і контролю діяльності підприємства ERP; системи управління взаєминами з клієнтами CRM; програмне забезпечення для подання звітності до контролюючих органів та обміну юридично значущими первинними документами між контрагентами в електронному вигляді «MEDOC»; системи управління бізнес-процесами, як процесного управління підприємством ELMA BPM. Розглянемо докладніше ці системи.

MRP-системи (Material Requirements Planning) представляють собою програмні засоби, що автоматизують весь процес планування потреби сировини і матеріалів для виробництва. Головне досягнення MRP-систем – мінімізація витрат, пов'язаних зі складськими запасами. У MRP-системі основний акцент робиться на використанні інформації про постачальників, замовників і виробничих процесах для управління потоками матеріалів і комплектуючих. Партії вихідних матеріалів і комплектуючих плануються до вступу на підприємства відповідно до часу, коли вони будуть потрібні для виготовлення збірних частин і вузлів. У свою чергу, частини і вузли виробляються і доставляються до остаточної збірки в необхідний час. Готова продукція виробляється і доставляється замовникам відповідно до узгоджених зобов'язань. Застосування MRP-систем виправдано для підприємств з відносно тривалим циклом виробництва складних виробів і конструкцій, що складаються з численних вузлів і комплектуючих. Основна ідея MRP-систем полягає в тому, що будь-яка облікова одиниця матеріалів або комплектуючих, необхідних для виробництва складних виробів і

конструкцій, повинна бути наявною в потрібний час і в потрібній кількості для реалізації основного виробничого плану по випуску готової продукції.

Вихідну інформацію для MRP-системи надає виробничий план-графік, що формується MPS-системою (Master Production Schedule). На підставі MPS визначається кількісний склад кінцевих виробів для кожного періоду часу планування. На підставі цих даних MRP-система виконує наступні основні операції:

- до складу кінцевих виробів додаються запасні частини, не включені в MPS;
- для MPS і запасних частин визначається загальна потреба в матеріальних ресурсах відповідно до відомості матеріалів і складом виробу з розподілом за періодами часу планування;
- загальна потреба матеріалів коригується з урахуванням стану запасів для кожного періоду часу планування;
- здійснюється формування замовлень на поповнення запасів з урахуванням необхідних часів випередження.

Система MRPII (Manufactory Resource Planing), здатна планувати всі виробничі ресурси підприємства: сировину; матеріали; обладнання з його реальною продуктивністю; трудовитрати. Відмінність систем MRP і MRPII полягає в тому, що перша система здійснює планування в основному матеріальних потреб для виробництва, а система MRPII призначена для планування всіх ресурсів підприємства для реалізації виробничого плану.

ERP-системи (Enterprise Resource Planning) представляють собою програмні засоби, що автоматизують весь процес обліку,

планування і контролю на підприємствах, з'явилися на початку 90-х років. В принципі вони реалізують той же стандарт управління підприємством, що і MRPII, однак на принципово новій технічній платформі обробки інформації. Ефективно використовуючи ERP-системи, підприємства застосовують різні технології управління, які можна розглядати як інтегровану сукупність наступних основних підсистем: управління фінансами; управління проектами; управління сервісним обслуговуванням; управлінням якістю; управління персоналом. Кожна з перерахованих підсистем може включати в себе функціональні блоки, які також можуть бути оформлені у вигляді окремих підсистем. Наприклад, підсистема управління матеріальними потоками, як правило, включає в себе функціонально закінчений блок «Управління транспортом» для складання графіків і транспортних схем доставки, планування і управління транспортом. Більшість із зазначених підсистем має функціональність, що дозволяє здійснити планування матеріально-технічних ресурсів і потужностей і трансформувати у відповідні потреби в грошових ресурсах. Функціональність підсистем управління реалізацією ERP-системи, як правило, орієнтується на різні види виробничої діяльності підприємства, до основних з яких можна віднести наступні: дискретне виробництво; процесне виробництво; реалізація проектів. Перші два види припускають опис в системі складу виробу, що випускається, і технології виробництва. Останній вид більшою мірою орієнтований на планування робіт і ресурсів для реалізації довгострокових проектів. Слід зазначити також, що для підприємства з дискретним виробництвом характерна наявність можливості більш

точного і простого визначення специфікації матеріалів і комплектуючих і більш високого ступеня пророкування властивостей продукції, що випускається, порівняно з процесним виробництвом, наприклад, такими як підприємства харчової, хімічної і фармацевтичної промисловості.

Система управління взаємовідносинами з клієнтами CRM (Customer Relationship Management) і її сучасна інтерпретація CRM-система Бітрікс 24 – це комплекс інструментів, що відмінно підходить для потреб малого та великого бізнесу. CRM-система призначена для автоматизації стратегій взаємодії з замовниками (клієнтами); зокрема, для підвищення рівня продажів, оптимізації маркетингу і поліпшення обслуговування клієнтів шляхом збереження інформації про клієнтів і історію взаємин з ними, встановлення і поліпшення бізнес-процесів і подальшого аналізу результатів. Основною метою впровадження, як правило, ставиться збільшення ступеня задоволеності і лояльності клієнтів за рахунок аналізу накопиченої інформації про клієнтську поведінку, регулювання тарифної політики, налаштування інструментів маркетингу. Завдяки застосуванню автоматизованої централізованої обробки даних з'являється можливість ефективно і з мінімальною участю співробітників враховувати індивідуальні потреби замовників, а за рахунок оперативності обробки – здійснювати раннє виявлення ризиків і потенційних можливостей. Основні джерела економічного ефекту від впровадження CRM-систем: збільшення кількості клієнтів, що обслуговуються одним менеджером зі збуту; зниження втрат клієнтів, з якими менеджер або співробітники інших

підрозділів компанії забули вчасно зв'язатися; зниження втрат через неможливість клієнта вчасно зв'язатися з компанією; можливість відсікання «холодних» клієнтів; зниження вимог до кваліфікації персоналу; підвищення обсягу продажів. Систематизуючи і накопичуючи інформацію – клієнтську базу, шаблони документів, листування з клієнтами – програма дає нам можливість не втратити клієнта з відходом менеджера і зможе швидко і на будь-якому етапі підключити іншого співробітника до роботи за проектом. Цей підхід має на увазі, що при взаємодії з клієнтом співробітникові компанії доступна вся необхідна інформація про взаємини з цим клієнтом і рішення приймається на основі цієї інформації (інформація про рішення, у свою чергу, теж зберігається). Серед принципових вигод від впровадження CRM-системи особливо можна виділити наступні:

- збільшення розміру виручки;
- зниження витрат на обслуговування продажів і клієнтське обслуговування;
- розширення можливостей компанії по залученню нових клієнтів і утримування вже придбаних;
- підвищення цінності клієнта для компанії;
- підвищення рівня послуг без залучення додаткових витрат.

Таким чином, інвестиції в CRM-системи можна розглядати не стільки як інвестиції в обладнання і програмне забезпечення, скільки як інвестиції в довгострокові відносини з клієнтами, а інформаційні технології, що дозволяють підприємству ефективно будувати взаємовідносини з клієнтами, є пріоритетними.

Програма M.E.DOC (My Electronic Document) розроблена українськими програмістами під керівництвом Олесі Линник в 2010 році і призначена для подачі звітності в усі контролюючі органи України (ДФСУ, ДССУ, ПФУ, ФСС з ТВП, ДКСУ, міністерства і відомства), для реєстрації податкових накладних та юридично значущого електронного документообігу. Крім того, програма надає модулі для нарахування зарплати, звітності великих компаній з розгалуженою структурою підрозділів і роботи банків.

Розробник програми надає код доступу кожному підприємству. Якщо в програму не введений код доступу, тоді вона буде працювати в демонстраційній версії, яка дозволяє ознайомитися з функціональними можливостями програми, але функції експорту, відправки електронною поштою і друк документів будуть недоступні.

Слід визначити, що програма має як готові рішення для основних потреб користувачів, так і додаткові модулі. Структура програми має наступний вигляд:

- Рішення M.E.DOC-Держава – подача всіх видів звітності в усі контролюючі органи, реєстрація податкових накладних в Єдиному реєстрі податкових накладних та обмін ними з контрагентами.

- Рішення M.E.DOC-Бізнес – обмін первинними бухгалтерськими документами з контрагентами.

- Модуль M.E.DOC-Акциз та ТТН – для роботи з системою електронного адміністрування реалізації палива та поводження з товарно-транспортними накладними.

- Модуль M.E.DOC-Зарплата – розрахунок і нарахування заробітної плати співробітникам, облік і управління персоналом.

- Модуль М.Е.DOC-Корпорація – консолідація звітності підприємств з розгалуженою структурою.

Одним з найбільш ефективних модулів програми М.Е.DOC для управління підприємством є модуль «Електронний документообіг». Цифровий документ – аналог звичайного документа, створений за допомогою спеціального програмного забезпечення, яке також може використовуватися для його модифікації і зберігання (в єдиній базі даних). Для запевнення і підтвердження електронного документа використовується спеціальний шифр і особливий цифровий підпис.

Перевагами цифрового документообігу є:

1. Отримання доступу до єдиної бази цифрових документів, яка дозволяє повністю оптимізувати і автоматизувати процес їх обліку, фільтрації та розподілу по даті, часу і т. д.

2. Створення різних первинних документів, використовуючи спеціальні шаблони.

3. Організація роботи з різними цифровими документами.

4. Можливість взаємодіяти з базою документів на відстані (віддалено).

5. Обмеження доступу тим чи іншим користувачам до конкретних документів.

6. Проведення аудиту цифрової документації за допомогою різних вбудованих інструментів програми.

7. Використання класифікаторів і довідників при роботі з цифровою документацією.

8. Можливість оперативного внесення виправлень і правок у цифровому документі.

9. Внутрішній і зовнішній обмін документами.

10. Використання електронного цифрового підпису для захисту документів від несанкціонованого доступу, перегляду та зміни.

За безпеку електронного документообігу відповідають спеціальні шифри і цифрові підписи, які видаються учасникам цього процесу особливим уповноваженим органом України. Ці засоби захисту перешкоджають будь-якому несанкціонованому доступу до документа з боку третьої сторони. Більше того, програмний продукт М.Е.DOC успішно пройшов всі перевірки та експертизи ДССЗІ України, тому може без будь-яких проблем використовуватися на сучасних підприємствах.

Відповідно до законодавства України, всі електронні документи наділені тими ж правами, що і їх паперові аналоги, тому ви нічим не будете ризикувати, якщо почнете їх використовувати на своєму підприємстві.

Робота системи управління бізнес-процесами ELMA BPM заснована на простій ідеї: на етапі впровадження системи здійснюється моделювання бізнес-процесів організації за допомогою наочних діаграм.

Потім ці діаграми завантажуються в комп'ютерну систему і стають здійснимими, тобто програма дозволяє відстежити і проконтролювати виконання бізнес-процесів в реальній практиці роботи підприємства.

Такий підхід дозволяє максимально наблизити реальне виконання бізнес-процесів в організації до їх ідеальної моделі, яка спочатку розроблялася.

Завдання, одержувані користувачами в рамках виконання бізнес-процесів, оформлені в веб-інтерфейсі інформаційної системи ELMA BPM у вигляді окремих сторінок (картка завдання), на яких приведена вся необхідна виконавцю інформація для прийняття рішення і виконання поставленого завдання.

Від виконавця може знадобитися введення деяких даних – в цьому випадку картка завдання буде містити відповідні поля, заповнення яких може бути при необхідності обов'язковим. Тобто всю роботу за дорученням користувач завжди виконує в одному місці – на картці завдання; тут же він отримує всі необхідні для цього ресурси.

Також після виконання свого доручення користувач не повинен замислюватися про те, хто і які дії в рамках даного бізнес-процесу повинен виконувати – ці питання додаток ELMA BPM бере на себе.

Всі завдання, які не потребують праці реальних співробітників організації, виконуються додатком ELMA BPM автоматично практично миттєво: визначення ходу виконання бізнес-процесу (в тому числі за деякими умовами), розсилка повідомлень, виконання сценаріїв і т. п.

Функції системи можна розділити на 4 основні групи:

- Моделювання бізнес-процесів здійснюється у графічному редакторі Дизайнер ELMA, який входить в поставку системи.
- Автоматизація виконання процесів здійснюється відповідно до її графічної моделі від стартової події, слідуючи по ланцюжку переходів, до кінцевого результату. Учасники процесу автоматично

отримують завдання у веб-інтерфейсі системи, коли виконання процесу доходить до відповідного кроку.

- Автоматизований моніторинг і контроль виконання процесів. У разі прострочення завдання підлеглим, керівник отримує повідомлення. Він може в будь-який момент відстежити, на якій стадії знаходиться виконання процесу, і подивитися зведені звіти, які автоматично формуються в системі.

- Швидка оптимізація процесів. Досить внести зміни в графічну модель, і вже з наступного запуску процесу співробітники будуть отримувати завдання відповідно до нової схеми.

Розглядаючи можливості використання перерахованих вище інформаційних систем, можна прийти до висновку про те, що вони можуть поліпшити такі показники ефективності бізнесу:

- підвищити ефективність всього виробничого процесу в цілому;
- оптимізувати виробничі процеси і виробничі операції;
- знизити витрати, пов'язані з управлінням виробництва, зменшити собівартість продукції;
- поліпшити якість обслуговування клієнтів і замовників, взаємини з постачальниками і контролюючими органами, збільшити число клієнтів;
- оптимізувати управління обіговими коштами за рахунок значного зменшення складських запасів.

ТЕМА 6. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПО УПРАВЛІННЮ ЕКОНОМІКОЮ

6.1. Особливості економіко-математичного комп'ютерного моделювання

Ухвалення оптимальних рішень з управління складними економічними системами завжди було і залишається найважливішим аспектом людської діяльності (див. розділ 3.6). Існують різні підходи до прийняття оптимальних рішень: на основі аналітичних здібностей, здорового глузду, інтуїції і досвіді керівника; колективні методи – метод «мозкової атаки», «мозковий штурм» та ін. Однак практика управління складними економічними системами в усіх областях та на всіх рівнях потребує широкого і ефективного використання кількісних математичних методів. *Математична теорія прийняття оптимальних (раціональних, цілеспрямованих) рішень називається теорією дослідження операцій.*

У зв'язку з таким підходом до дослідження операцій ми будемо дотримуватися наступного визначення:

Дослідження операцій – це розділ прикладної математики, який займається розробкою і застосуванням методів знаходження рішень управління організаційними системами на основі математичного моделювання, статистичного моделювання і різних евристичних підходів в різних областях людської діяльності.

У наведеному визначенні система потрібна для детального попереднього аналізу реального явища. Природа систем, що фігурують в наведеному визначенні під ім'ям «організаційних», може бути будь-якою, а їх загальні математичні моделі знаходять

застосування не тільки при вирішенні виробничих і економічних задач, але і в біології, соціологічних дослідженнях і інших практичних сферах. Математика проводить кількісний і якісний аналіз системи, допомагає передбачити, як поведе себе система в різних умовах, і дає рекомендації для прийняття найкращого рішення.

Сучасні методи знаходження оптимальних рішень орієнтовані на використання комп'ютерних засобів. Це дає можливість втілювати економіко-математичне моделювання не тільки за допомогою економіко-математичної моделі, яка докладно розглянута в розділі 3.6, але і за допомогою імітаційної моделі.

Економіко-математичне моделювання полягає у використанні методів і засобів математичного моделювання для дослідження економічних об'єктів і явищ.

Економіко-математична модель – це математичний опис досліджуваного економічного об'єкта або явища (процесу).

Імітаційна модель є окремою програмою або сукупністю програм, що дозволяють за допомогою послідовності обчислень і графічного відображення їх результатів, відтворювати (імітувати) процеси функціонування об'єкта за умови впливу на об'єкт різних, як правило, випадкових факторів.

Імітаційне моделювання як вид комп'ютерного моделювання економіки застосовується з початку 1960-х рр.

Суть імітаційного моделювання полягає в тому, щоб якомога точніше, повніше, наочніше відобразити модельований об'єкт і динаміку його функціонування. По можливості потрібно якомога менше деформувати структуру об'єкта, т. е. бажано, щоб в моделі всі

частини об'єкта мали реальне відображення, а потоки інформації про них представляли реальні потоки замовлень, ресурсів, людей, ідей і т. п. Це побажання виконується найбільшою мірою, якщо основу побудови імітаційної моделі складають системний аналіз об'єкта, що моделюється і системний синтез його моделі.

Процедура побудови імітаційних моделей з використанням системного підходу передбачає виконання таких етапів:

1. Змістовний опис об'єкта моделювання у вигляді системи, постановка задачі і формулювання цілей.

2. Формалізація завдання, побудова структури моделі, визначення цільових функцій і критеріїв досягнення цілей.

3. Вибір методів моделювання для конкретних елементів системи, що моделюється.

4. Побудова моделі, розробка моделюемого алгоритму і апробація на контрольному прикладі, необхідне коригування моделі.

5. Моделювання системи, включаючи планування імітаційних реалізацій, імітування вхідних і керуючих сигналів, перешкод, пробних і несанкціонованих дій на ті чи інші атрибути системи, обчислення різних статистичних характеристик.

6. Аналіз результатів моделювання, вибір найбільш ефективної структури і стратегії поведінки модельованої системи з урахуванням найбільш ймовірних вхідних або збурюючих впливів.

7. Підготовка звіту про імітаційне моделювання в термінах даного об'єкта або процесу і планування впровадження результатів моделювання в практику.

Як приклад одного з перших застосувань імітаційного моделювання (спільно з розширеним кібернетичним підходом) для аналізу економічних явищ розглянемо динамічну модель, запропоновану професором МТІ Джеєм Форрестером. Відповідно до цієї моделі, промислове підприємство можна представити структурною схемою з рядом рівнів (резервуарів), пов'язаних шістьма потоками. П'ять з них – це керовані потоки: матеріали, замовлення, грошові кошти, обладнання та робоча сила.

Шостий потік – інформаційний, зв'язує п'ять інших потоків і виконує функцію зворотного зв'язку.

Структурна схема потоків моделює діяльність підприємства, доповнюється системою досить простих алгебраїчних рівнянь, які дозволяють представити в кількісному вираженні динаміку, т. е. зміни, що відбуваються в процесі протікання цих потоків. Подібна математична модель підприємства дозволяє оцінити, яким чином система буде реагувати на введення тих чи інших даних (збурюючих впливів) при різних параметрах запізнень і підсилень.

Методика побудови та аналізу динамічної моделі підприємства, по Форрестеру, включає наступні шість етапів:

1. Визначається конкретне виробничо-господарське питання, яке підлягає аналізу методом динамічного аналізу.

2. Формулюються (в вербальному вираженні) основні зв'язки або причинно-наслідкові залежності, які характеризують структуру досліджуваної системи, і представляються у вигляді графічної схеми потоків.

3. Виконується побудова математичної моделі, причому кожна частина цієї моделі створюється на основі графічної схеми, виражає зміст попереднього етапу.

4. Проектується поведінка модельованої системи або її зміни у часі.

5. Виконується імітація динаміки системи на ЕОМ. Результати обчислень, отримані при прогоні програми, порівнюються з наявними даними в аналогічних реальних процесах.

6. Виконується коригування моделі шляхом включення в неї переглянутих параметрів або заходів з наступним моделюванням на ЕОМ для визначення їх впливу на кінцеві результати.

Таким чином, методика динамічного моделювання, запропонована Форрестером, дозволяє імітувати діяльність підприємства на ЕОМ із залученням математичної моделі, що складається з безлічі послідовно розв'язуваних рівнянь. Наявність у імітаційної моделі контурів зворотного зв'язку дозволяє відстежувати періодичні коливання рівня запасів матеріалів, обсягів вироблення і чисельності робочої сили при випадкових змінах попиту на продукцію підприємства.

Основні поняття дослідження операцій

Наведемо визначення основних понять, використовуваних при опису моделей і методів дослідження операцій.

Операція – будь-яка керована дія (захід), спрямована на досягнення мети. Результат операції залежить від способу її організації та проведення, інакше – від вибору деяких змінних параметрів.

Всякий певний вибір змінних параметрів, які забезпечуються досягненням мети, називається **рішенням**. Рішення, які з тих чи інших міркувань є найкращими за всі інші, вважаються **оптимальними**. Тому *основним завданням дослідження операцій* є попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень.

Слід звернути увагу на те, що саме *прийняття рішень виходить за рамки дослідження операцій і відноситься до компетенції ОПР*, яке може враховувати й інші міркування, відмінні від математично обґрунтованих.

Загальна постановка задачі дослідження операцій

Математичні моделі можна розділити на *однокритеріальні* і *багатокритеріальні*, які, у свою чергу, поділяються на:

- детерміновані;
- стохастичні (імовірнісні);
- невизначені.

У однокритеріальних моделях використовується єдиний критерій ефективності, а в багатокритеріальних – два і більше.

В **детермінованих моделях** випадкові або невідомі чинники не враховуються. В **стохастичних моделях** невідомі фактори враховуються і являють собою випадкові величини, для яких відомі функції розподілу і різні статистичні характеристики, такі як математичне очікування, дисперсія, середньоквадратичне відхилення і т. п. В **невизначених моделях** або, точніше, в **моделях з елементами невизначеності** використовуються випадкові чинники, але статистичних даних по ним немає, оскільки відсутні умови для їх збору.

При побудові детермінованих моделей завдань дослідження операцій випадкові або невизначені фактори не враховуються. Всі інші фактори, що входять до опису операції, можна розділити на наступні дві групи:

- **постійні фактори**, або параметри моделі (умови проведення операції), на які ми впливати не можемо, але зобов'язані враховувати.
- **залежні фактори**, або керуючі змінні (елементи рішення), які в певних межах ми можемо вибирати на свій розсуд.

6.2. Приклади побудови економіко-математичних моделей

6.2.1. Економіко-математична модель управління портфелем активів

Розглянемо проблему прийняття інвестором рішення про вкладення наявного у нього капіталу з максимальною для нього вигодою. Набір характеристик потенційних об'єктів для інвестування, що мають кодові назви від *A* до *F*, задається наступною таблицею.

Назва	Прибутковість (в %)	Термін викупу (рік)	Надійність (в балах)
<i>A</i>	5,5	2022	5
<i>B</i>	6,0	2026	4
<i>C</i>	8,0	2031	2
<i>D</i>	7,5	2023	3
<i>E</i>	5,5	2021	5
<i>F</i>	7,0	2024	4

Припустимо, що при ухваленні рішення про придбання активів повинні бути дотримані умови:

- a) Сумарний обсяг капіталу, який повинен бути вкладений, становить \$ 100 000;
- b) Частка коштів, вкладена в один об'єкт, не може перевищувати чверті від всього обсягу;

с) Більше половини всіх коштів повинні бути вкладені в довгострокові активи (припустимо, на даний момент до таких належать активи з терміном погашення після 2025 г.);

d) Частка активів, що мають надійність менш ніж 4 бали, не може перевищувати третини від сумарного обсягу.

Приступимо до написання економіко-математичної моделі для даної ситуації. Тут ОС – інвестор; мета – максимізація доходу від інвестицій; прийняття рішення для ОС полягає у визначенні обсягів інвестування в той чи інший об'єкт. Всі внутрішні параметри управління портфелем активів є заданими (т. е. не носять випадковий характер) і з плином часу залишаються незмінними. Отже, ми маємо справу зі статичною, детермінованою математичною моделлю.

Після виявлення найважливіших факторів потрібно проаналізувати, які параметри відомі (задані), які параметри є невідомими величинами; якими з параметрів ми можемо управляти (керовані або контрольовані), а якими не можемо (некеровані або неконтрольовані параметри).

У розглянутому прикладі відомими є такі параметри: прибутковість, надійність, терміни викупу. Всі ці параметри є неконтрольованими факторами, але так як вони задані точно, то це фіксовані неконтрольовані фактори. Шуканими є обсяги інвестицій. Ці параметри можна вважати керованими (стратегією), так як ОС сама визначає їх величину (виходячи з реальних умов). Позначимо керовані параметри як $x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F$. Тоді сумарний прибуток P від розміщених активів, яку отримає інвестор, може бути представлена у вигляді:

$$P = 0,055x_A + 0,06 x_B + 0,08 x_C + 0,075 x_D + 0,055 x_E + 0,07x_F. \quad (6.1)$$

На наступному етапі моделювання ми повинні формально описати перераховані вище обмеження а) – d) на керовані змінні (структуру портфеля).

а) Обмеження на сумарний обсяг активів:

$$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F \leq 100\,000. \quad (6.2)$$

б) Обмеження на розмір частки кожного активу:

$$x_A \leq 25\,000, x_B \leq 25\,000, x_C \leq 25\,000, x_D \leq 25\,000, \\ x_E \leq 25\,000, x_F \leq 25\,000. \quad (6.3)$$

в) Обмеження, пов'язане з необхідністю вкладати половину коштів в довгострокові активи:

$$x_B + x_C \leq 50\,000. \quad (6.4)$$

г) Обмеження на частку ненадійних активів:

$$x_C + x_D \leq 33\,000. \quad (6.5)$$

Нарешті, система обмежень відповідно до економічного змісту завдання повинна бути доповнена умовами невід'ємності для шуканих змінних:

$$x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0, x_D \geq 0, x_E \geq 0, x_F \geq 0. \quad (6.6)$$

Вирази (6.1) – (6.6) утворюють економіко-математичну модель поведінки інвестора. В рамках цієї моделі може бути поставлена задача оптимізації цільової функції (6.1) – пошуку таких значень змінних $x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F$, при яких досягається найбільше значення прибутку (т. е. цільової функції (6.1)) і одночасно виконуються обмеження на структуру портфеля активів (6.2) – (6.6).

Перейдемо тепер до розгляду більш загальних моделей і задач.

6.2.2. Економіко-математична модель виробничого планування

Нехай є деякий економічний об'єкт (підприємство, цех, артіль і т. п.), який може виробляти деяку продукцію n видів. В процесі виробництва допустимо використання m видів ресурсів (сировини). Застосовувані технології характеризуються нормами витрат одиниці сировини на одиницю виробленого продукту. Позначимо через a_{ij} кількість i -го ресурсу ($i = 1, \dots, m$), який витрачається на виробництво одиниці j -го продукту ($j = 1, \dots, n$). Тоді все ресурсні витрати a_{ij} розглянутого підприємства (об'єкта) на виготовлення продукції можна представити у вигляді прямокутної матриці A розмірності m на n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тут вектор-стовпець:

$$a^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

матриці A є все ресурсні витрати у виробництві j -го продукту, а вектор-рядок матриці A – витрати i -го ресурсу на всю продукцію, що випускається $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$.

Якщо j -й продукт виробляється в кількості x_j , то в рамках описаних вище технологій ми повинні витратити $a_{1j}x_j$ першого ресурсу, $a_{2j}x_j$ – другого і так далі: $a_{mj}x_j$ – m -го. Зведений план виробництва по всіх продуктах може бути представлений у вигляді n -

мірного вектора-рядка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (або вектора-стовпця). Тоді загальні витрати по i -му ресурсу на виробництво всіх продуктів можна виразити у вигляді суми $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, що представляє собою скалярний твір i -го вектора-рядка a_i матриці A і вектора-стовпця x . Очевидно, що будь-яка реальна виробнича система має обмеження на ресурси, які вона витрачає в процесі виробництва. В рамках моделі, що викладається, ці обмеження породжуються m -мірним вектором-рядком $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ (або вектором-стовпцем), де b_i – максимальна кількість i -го ресурсу, який можна витратити у виробничому процесі. У математичній формі дані обмеження представляються у вигляді системи m нерівностей:

Застосовуючи правила матричної алгебри, систему (6.7) можна записати в короткій формі, представивши ліву частину як твір матриці A на вектор-стовпець x , а праву – як вектор-стовпець b :

До системи (6.8) також повинні бути додані природні обмеження на неотрицательность компонентів плану виробництва: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ або, що те ж саме,

Позначивши через c_j ціну одиниці j -го продукту, отримаємо вираз сумарного доходу від виконання плану виробництва, що задається вектором x :

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = c \cdot x. \quad (6.10)$$

Тут $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – вектор, кожна координата якого є вартість одиниці відповідного продукту, що випускається, а $c \cdot x$ – скалярний добуток векторів c і x .

Формули (6.7) – (6.10) є не чим іншим, як найпростішою економіко-математичною моделлю, яка описує окремі сторони функціонування деякого економічного об'єкта, поведінкою якого ми хочемо керувати. В рамках даної моделі, взагалі кажучи, можна поставити різні цілі (завдання), але, швидше за все, самою «природною» буде мета пошуку такого плану виробництва $x \in R^n$, який дає найбільше значення сумарного доходу, т. е. функції (6.10), яка розглядається як цільова функція і одночасно задовольняє системі обмежень (6.7) – (6.9). Коротко таке завдання (оптимізація цільової функції) можна записати в наступному вигляді:

$$f(x) = c \cdot x \rightarrow \max, \text{ де } x \in D = \{x \in R^n | A \cdot x \leq b, x \geq 0\}. \quad (6.11)$$

Незважаючи на явну умовність ситуації, що розглядається і уявну простоту завдання (6.11), її рішення є далеко не тривіальним і багато в чому стало практично можливим тільки після розробки спеціального математичного апарату. Істотним достоїнством використовуваних тут методів вирішення є їх універсальність,

оскільки до моделі (6.11) можуть бути зведені дуже багато як економічних, так і неекономічних проблем.

6.2.3. Економіко-математична модель транспортної задачі

Розглянемо проблему організації перевезення певного продукту між пунктами його виробництва, кількість яких рівно m , і n пунктами споживання. Кожен i -й пункт виробництва ($i = 1, 2, \dots, m$) характеризується запасом продукту, $a_i \geq 0$, а кожен j -й пункт споживання ($j = 1, 2, \dots, n$) – потребою в продукті $b_j \geq 0$. Мережа доріг, що з'єднує систему розглянутих пунктів, моделюється за допомогою матриці C розмірності m на n , елементи c_{ij} якої представляють собою норми витрат на перевезення одиниці вантажу з пункту виробництва i в пункт споживання j . План перевезення вантажу в даній транспортній мережі представляється у вигляді масиву елементів розмірності $m \cdot n$:

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{in}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}). \quad (6.12)$$

В (6.12) план перевезень x може розглядатися як вектор, що розпадається на m груп по n елементів у кожній, причому i -я група відповідає обсягам вантажу, що вивозяться з i -го пункту виробництва в усі можливі пункти споживання. Якщо реальне перевезення між пунктами i та j відсутнє, то вважають $x_{ij} = 0$.

Обмеження на можливі значення $x \in R^{mn}$ мають вигляд:

1. Обмеження на задоволення потреб у всіх пунктах споживання:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, (j = 1, 2, \dots, n). \quad (6.13)$$

2. Обмеження на можливості вивезення запасів з усіх пунктів виробництва:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.14)$$

3. Умови невід'ємності компонентів вектора плану x :

$$x_{ij} \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m), (j = 1, 2, \dots, n). \quad (6.15)$$

Суттєвою характеристикою описуваної моделі є співвідношення параметрів a_i і b_j . Якщо сумарний обсяг виробництва дорівнює сумарному обсягу споживання, а саме,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

то система називається збалансованою. При виконанні умови збалансованості розумно накладати такі обмеження на сумарне ввезення і вивезення вантажу, при яких повністю вивозиться весь вантаж і не залишається незадоволених потреб, т. е. умови (6.13) і (6.14) набувають форму рівності.

За аналогією із завданням виробничого планування припустимо, що витрати на перевезення прямо пропорційні кількості вантажу, що перевозиться. Тоді сумарні витрати на перевезення в системі матимуть вигляд:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}. \quad (6.16)$$

Цільова функція (6.16) і описані вище обмеження, записані в формі:

$$D = \left\{ x \in R^{m \cdot n} \left| \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}; \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; x_{ij} \geq 0 \right. \right\}$$

задають транспортну збалансовану *економіко-математичну модель*. На її основі може бути сформульована оптимізаційна задача мінімізації сумарних витрат на перевезення:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min, x \in D, \quad (6.17)$$

яка в літературі отримала назву транспортної збалансованої задачі в матричній постановці.

6.2.4. Економіко-математична модель використання потужностей підприємства

Підприємству заданий план виробництва продукції за часом і номенклатурі: потрібно за час T випустити $n_1, n_2, \dots, n_k$ одиниць продукції $P_1, P_2, \dots, P_k$. Продукція виробляється на верстатах $S_1, S_2, \dots, S_m$, для кожного з яких відомі продуктивність a_{ij} (т. е. число одиниць продукції P_j , яке можна зробити на верстаті S_i за одиницю часу) і витрати b_{ij} на виготовлення продукції P_j на верстаті S_i в одиницю часу.

Необхідно скласти такий план роботи верстатів (т. е. розподілити випуск продукції між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

Складемо економіко-математичну модель задачі. Позначимо x_{ij} – час, протягом якого верстат S_i буде зайнятий виготовленням продукції P_j ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$).

Так як час роботи кожного верстата обмежений і не перевищує T , то справедливі такі нерівності:

[illegible]

Для виконання плану випуску по номенклатурі необхідно, щоб виконувалися наступні рівності:

[illegible]

Крім того, за умовою задачі:

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k). \quad (6.20)$$

Витрати на виробництво всієї продукції повинні бути мінімальні:

$$f(x) = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \cdots + b_{1k}x_{1k} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22} + \cdots + b_{2k}x_{2k} + \cdots + b_{m1}x_{m1} + b_{m2}x_{m2} + \cdots + b_{mk}x_{mk} \rightarrow \min. \quad (6.21)$$

Економіко-математична модель задачі про використання потужностей (завантаженні устаткування) набуде вигляду: *знайти таке рішення:*

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k}, \dots, x_{m1}, x_{m12}, \dots, x_{mk}),$$

яке задовольняє системам (6.18) і (6.19) і умові (6.20), при якому цільова функція (6.21) приймає мінімальне значення.

Як ми вже говорили, будь-яка задача дослідження операцій є оптимізаційною, тобто полягає у виборі серед деякої множини допустимих стратегій тих, які можна в тому чи іншому сенсі кваліфікувати як оптимальні для значення цільової функції, що

відбиває мету управління системою. Всі завдання прийняття оптимальних рішень можна класифікувати відповідно до виду цільової функції, розмірністю і змістом векторів a і x , що відображають відповідно неконтрольовані і керовані параметри. Розглянемо основні принципи такої класифікації.

6.3. Моделювання споживчого вибору

6.3.1. Функція корисності

При побудові моделі споживчого вибору будемо вважати, що споживач має доход I , який він цілком витрачає на придбання благ (продуктів, товарів та ін.). Враховуючи структуру цін, доход і власні переваги, споживач купує певну кількість благ, і математична модель такої поведінки називається *моделлю споживчого вибору*.

Вибір споживача (індивідуума) характеризується відношенням переваги, суть якого полягає в наступному. Вважається, що споживач про кожні два набори може сказати, що або один з них більш бажаний, ніж інший, або споживач не бачить між ними різниці.

На безлічі споживчих наборів визначена функція звана *функцією корисності споживача*.

Функція корисності являє собою залежність між кількісно вираженою задоволеністю споживача використаними благами U і обсягами споживання цих благ $x_1, x_2, \dots, x_n$: $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Якщо набір благ $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ краще набору благ $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, то $U(A) > U(B)$.

Оскільки корисність є суб'єктивним поняттям, і кожен споживач має, взагалі кажучи, свою функцію корисності, то це означає, що для

функції корисності спочатку не визначені: а) «точка відліку», тобто нульовий рівень корисності; б) «шкала», тобто одиниця виміру задоволеності. Отже, будь-яка функція, яка збільшується від $U(x)$, $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ також може виражати корисність блага, наприклад, $\tilde{U}(x) = aU(x) + b, a, b > 0 \leftrightarrow U(x)$, тобто лінійна функція задоволеності від функції корисності також є функція корисності.

Залежність корисності від кількості споживаного блага x_i при фіксованій кількості споживання інших благ (рис. 8) називається **кривою корисності** $U(x_i)$.

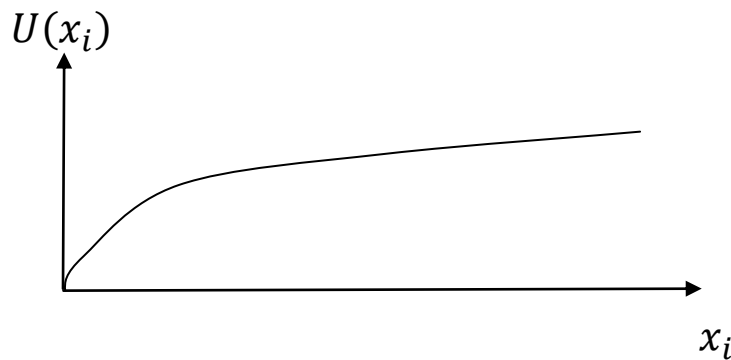


Рис. 8. Крива корисності

Вигляд залежності значення $U(x_i)$ від об'єму споживання i -го блага при постійних об'ємах споживання благ характеризує **гранична корисність** i -го блага:

$$MU_i = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Гранична корисність являє собою приріст корисності набору благ при збільшенні обсягу споживання i -го блага на одиницю.

Для подальшого детального вивчення моделі споживчого вибору скористаємося моделлю з двома видами благ. Така модель зручна, перш за все, можливістю графічної інтерпретації, зберігаючи при цьому всі важливі якості загальної моделі.

Функція корисності $U = U(x_1, x_2)$ для даної моделі має такі властивості:

1) Зростання споживання одного продукту при постійному споживанні іншого продукту веде до зростання споживчої оцінки, тобто, якщо $x_1^2 > x_1^1$, то $U(x_1^2, x_2) > U(x_1^1, x_2)$ і гранична корисність $\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0$; якщо $x_2^2 > x_2^1$, то $U(x_1, x_2^2) > U(x_1, x_2^1)$ і гранична корисність $\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0$.

2) Гранична корисність кожного продукту зменшується, якщо об'єм його споживання зростає, тобто $\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0$; $\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0$.

3) Гранична корисність кожного продукту збільшується, якщо зростає кількість іншого продукту, тобто $\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} > 0$.

Дана властивість справедлива не для всіх благ: якщо блага можуть повністю заміщати одне одного в споживанні, властивість 3) не виконується. Таким чином, припущення 3) вводиться не завжди, але воно гарантує опуклість вниз ліній байдужості.

Лінія, що з'єднує споживані набори (x_1, x_2) , що мають один і той же рівень задоволення потреб індивідуума $U(x_1, x_2) = \text{const}$, тобто ізолінія функції корисності (крива сталої корисності) називається **лінією (кривою) байдужості**. Множина ліній байдужості називається **картою ліній байдужості**. На рис. 9 показано фрагмент карти ліній байдужості.

Лінії байдужості, що відповідають різним рівням задоволення потреб U, U_1, U_2 , не дотикаються і не перетинаються. Якщо лінія байдужості розташована вище і правіше, тим більшого рівня

задоволення потреб вона відповідає: $U < U_1 < U_2$ (рис. 9). Умови 1), 2) и 3) означають, що лінія байдужості спадає і строго опукла до початку координат (до точки 0).

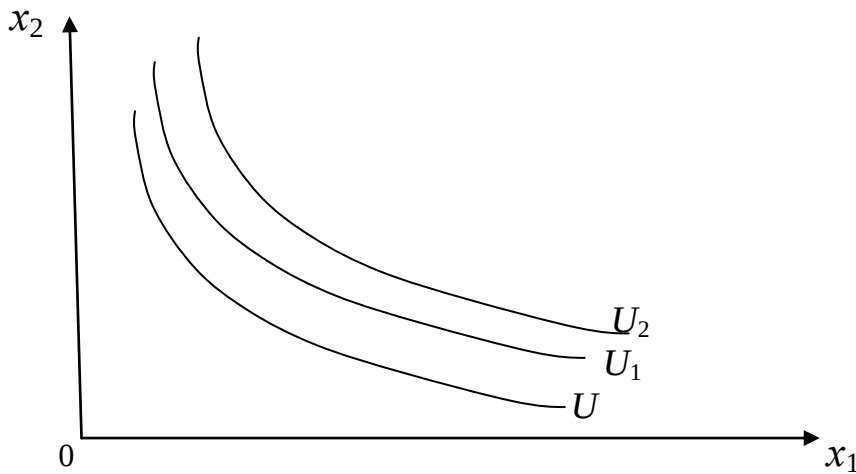


Рис. 9. Криві байдужості ($U < U_1 < U_2$)

Розглянемо фіксовану лінію байдужості U . Якщо рухатись уздовж лінії рівня, то приріст функції $U(x_1, x_2)$ дорівнює нулю, і,

отже, $dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0$. Звідси отримуємо

рівність $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}}$. Звідси виходить важлива приблизна рівність

$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \approx \frac{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = \frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}}$. Відношення $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ показує, наскільки

індивідуум повинен збільшити (зменшити) споживання другого продукту, якщо він зменшив (збільшив) споживання першого продукту на одиницю без зміни рівня задоволення своїх потреб.

Тому дріб $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ прийнято називати нормою заміни першого продукта

другим на споживчому наборі (x_1, x_2) , а похідну $-\frac{dx_2}{dx_1}$ – граничною нормою заміни першого продукту другим.

Прикладом функції корисності може бути

$$U(x_1, x_2) = a_1 \ln(x_1 - \bar{x}_1) + a_2 \ln(x_2 - \bar{x}_2),$$

де $a_1 > 0, a_2 > 0, x_1 > \bar{x}_1 \geq 0, x_2 > \bar{x}_2 \geq 0$.

Дійсно, маємо: $\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{a_1}{x_1 - \bar{x}_1} > 0; \quad \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{a_2}{x_2 - \bar{x}_2} > 0;$

$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -\frac{a_1}{(x_1 - \bar{x}_1)^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -\frac{a_2}{(x_2 - \bar{x}_2)^2} < 0$, тобто виконано властивості 1) і 2) функції корисності. Властивість 3) не виконано, так як змішані другі частинні функції корисності $U(x_1, x_2)$ дорівнюють нулю.

6.3.2. Задача споживчого вибору

Завдання споживчого вибору, або інакше кажучи, задача раціональної поведінки споживача на ринку полягає у виборі такого споживчого набору (x_1^*, x_2^*) , який максимізує його функцію корисності при заданому бюджетному обмеженні.

Бюджетне обмеження означає, що грошові витрати на товари не можуть перевищувати грошового доходу, тобто $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$, де p_1 і p_2 – ринкові ціни однієї одиниці першого і другого продуктів відповідно, а I – дохід індивідуума, який він готовий витратити на придбання першого і другого продуктів.

Функціонально завдання (математична модель завдання) має вигляд:

$$U(x_1, x_2) \rightarrow \max; p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Допустима множина (тобто множина набору благ, доступних для споживача) є трикутник, обмежений осями координат і бюджетної прямої $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ (рис. 10).

На цій множині потрібно знайти точку, що належить кривій байдужості з максимальним рівнем корисності. Пошук цієї точки можна інтерпретувати графічно як послідовний перехід на лінії все більш високого рівня корисності (вправо – вгору) до тих пір, поки ці лінії мають спільні точки з допустимою множиною.

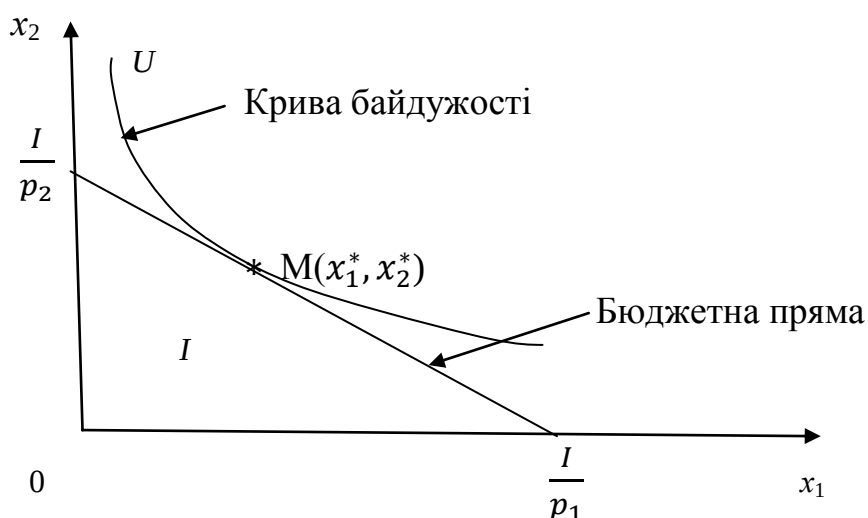


Рис. 10

6.3.3. Рішення задачі споживчого вибору і його властивості

Набір (x_1^*, x_2^*) , який є рішенням задачі споживчого вибору, прийнято називати **оптимальним** для споживача, або **локальною ринковою рівновагою споживача**.

Якщо на якомусь споживчому наборі (x_1, x_2) бюджетне обмеження $p_1x_1 + p_2x_2 \leq I$ буде виконуватися у вигляді строгої нерівності, то ми можемо збільшити споживання будь-якого з продуктів і тим самим збільшити функцію корисності. Отже, набір

(x_1^*, x_2^*) , який максимізує функцію корисності, повинен повертати бюджетне обмеження в рівність, тобто $p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = I$.

Графічно це означає, що рішення (x_1^*, x_2^*) задачі споживчого вибору має лежати на бюджетній прямій (див. рис. 10), яку найзручніше провести через точки перетину з осями координат, де весь дохід витрачається на один продукт $(0, \frac{I}{p_2})$ и $(\frac{I}{p_1}, 0)$.

Отже, задачу споживчого вибору можна замінити задачею на умовний екстремум (бо рішення (x_1^*, x_2^*) цих двох задач одне і те ж):

$$U(x_1, x_2) \rightarrow \max; \text{ за умови } p_1 x_1 + p_2 x_2 = I.$$

Умови $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ в граничній точці (x_1^*, x_2^*) виконуються автоматично, витікаючи з властивостей функції корисності $U(x_1, x_2)$.

Для вирішення цієї задачі на умовний екстремум застосуємо метод множників Лагранжа.

Випишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \mu) = U(x_1, x_2) + \mu(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I).$$

Знаходимо її перші часткові похідні по змінним x_1, x_2, μ і прирівнюємо їх до нуля:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \mu)}{\partial x_1} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \mu p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \mu)}{\partial x_2} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \mu p_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \mu)}{\partial \mu} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0.$$

Виключивши з отриманої системи трьох рівнянь з трьома невідомими параметр μ , отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими x_1 і x_2 :

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{p_1}{p_2} = 0;$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0.$$

Вирішення цієї системи рівнянь і є рішення (x_1^*, x_2^*) завдання споживчого вибору (за винятком спеціальних випадків, які розглядаються в спеціальній літературі).

Підставивши рішення (x_1^*, x_2^*) в перше рівняння системи, отримаємо, що в точці локальної ринкової рівноваги індивідуума відношення граничних корисностей $\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^*} = U'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)$ і $\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^*} = U'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)$ продуктів дорівнює відношенню ринкових цін p_1 і p_2 на ці продукти:

$$\frac{U'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{U'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{p_1}{p_2}.$$

У зв'язку з тим, що відношення $\frac{U'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{U'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}$ дорівнює граничній нормі заміни першого продукту другим в точці локального ринкової рівноваги (x_1^*, x_2^*) , з останньої рівності випливає, що ця гранична норма дорівнює відношенню ринкових цін $\frac{p_1}{p_2}$ на продукти. Наведений результат відіграє важливу роль в економічній теорії.

Геометрично рішення (x_1^*, x_2^*) можна інтерпретувати як точку дотику лінії байдужості функції корисності $U(x_1, x_2)$ з бюджетною прямою $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$ (див. рис. 10). Це визначається тим, що

відношення $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}}$ показує тангенс кута нахилу лінії

рівня функції корисності, а відношення $-\frac{p_1}{p_2}$ представляє тангенс кута нахилу бюджетної прямої. Оскільки в точці споживчого вибору (або локальної ринкової рівноваги) вони рівні, в цій точці відбувається дотик даних двох ліній.

$$\text{Із співвідношень } -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \approx \frac{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = \frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} \text{ і } \frac{U'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{U'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{p_1}{p_2} \text{ виходить,}$$

що $-\frac{\Delta x_2^*}{\Delta x_1^*} \approx \frac{p_1}{p_2}$, тобто відношення (зі знаком мінус) кінцевих (відносно невеликих) змін Δx_2^* і Δx_1^* обсягів продуктів в локальній ринковій рівновазі (x_1^*, x_2^*) приблизно дорівнює відношенню ринкових цін p_1 і p_2 на продукти. Ця рівність дозволяє давати наближені оцінки відношенню ринкових цін, якщо відомі кінцеві зміни обсягів продуктів щодо споживчого набору, придбаного споживачем, тобто набору, який природно слід тлумачити як оптимальний для споживача. Координати x_1^* і x_2^* рішення (x_1^*, x_2^*) задачі споживчого вибору є функції параметрів p_1 , p_2 і I : $x_1^* = x_1^*(p_1, p_2, I)$; $x_2^* = x_2^*(p_1, p_2, I)$. Отримані функції називаються **функціями попиту** на перший і другий продукт відповідно. Важливою властивістю функцій попиту є їх однорідність нульової ступеня щодо цін і доходу, тобто значення функції попиту інваріантні по відношенню до пропорційних змін цін і доходу:

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1^*(\beta p_1, \beta p_2, \beta I) = x_1^*(p_1, p_2, I); \\ x_2^* &= x_2^*(\beta p_1, \beta p_2, \beta I) = x_2^*(p_1, p_2, I), \end{aligned}$$

для будь-якого числа $\beta > 0$. Це означає, що якщо всі ціни і дохід зміняться в одне і те ж число раз, величина попиту на продукт (перший або другий – байдуже) залишиться незмінною.

До сих пір ми розглядали типову модель споживчого вибору з двома видами благ. Тепер перейдемо до розгляду загальної задачі споживчого вибору з довільним числом товарів і її рішення за допомогою множників Лагранжа.

6.3.4. Загальна модель споживчого вибору

Нехай задана цільова функція переваги споживача $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_i – кількість i -го блага, вектор цін $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ і дохід I . Записавши бюджетне обмеження і обмеження на невід'ємність, отримуємо завдання $U(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max$ за умов: $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; $p \cdot x = p_1 x_1 + p_2 x_2, \dots, p_n x_n \leq I$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Для цього завдання функція Лагранжа і її часткові похідні визначаються наступними виразами:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = U(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu(p_1 x_1 + p_2 x_2, \dots, p_n x_n - I).$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} + \mu p_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

В точці екстремума, тобто в точці $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ локальної ринкової рівноваги всі часткові похідні функції Лагранжа дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i^*} + \mu p_i = U'_{x_i^*} + \mu p_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Звідси витікає, що для всіх благ x_i^* і x_j^* в точці x^* локальної ринкової рівноваги виконується рівність:

$$\frac{U'_{x_i^*}}{U'_{x_j^*}} = \frac{p_i}{p_j},$$

яка отримана після перенесення других доданків необхідних умов у праву частину рівності і ділення i -ї рівності на j -ту. Отже, в точці оптимума відношення граничних корисностей будь-яких двох благ дорівнює відношенню їх ринкових цін. Цю рівність можна переписати в іншій формі:

$$\frac{U'_{x_i^*}}{p_i} = \frac{U'_{x_j^*}}{p_j}.$$

Ця рівність означає, що додаткова корисність, яка припадає на додаткову одиницю грошових витрат в точці оптимуму, однакова за всіма видами благ. Якби це було не так, то, принаймні, одну грошову одиницю можна було б розподілити так, щоб зріс добробут (значення функції корисності) споживача. Якщо для деяких x_i^* і x_j^* маємо $\frac{U'_{x_i^*}}{p_i} > \frac{U'_{x_j^*}}{p_j}$, то деяку кількість грошей можна перерозподілити від i -го блага j -му, збільшивши рівень добробуту. Тепер в якості прикладу отримаємо функцію попиту для конкретної функції споживчої переваги, званої функцією Стоуна. Ця функція має вигляд:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\beta_i} \rightarrow \max.$$

Тут a_i – мінімально необхідна кількість i -го блага, яке купується в будь-якому випадку і не є предметом вибору. Для того, щоб набір $\{a_i\}$ міг бути повністю придбаний, необхідно, щоб дохід I був більше $\sum_{i=1}^n p_i a_i$, де $p_i a_i$ – кількість грошей, необхідна для покупки цього набору. Коефіцієнти ступеня $\beta_i > 0$ характеризують відносну «цінність» благ для споживача.

Додавши до цільової функції $U(x) \rightarrow \max$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $x_i \geq 0$ бюджетні обмеження $\sum_{i=1}^n p_i a_i \leq I$ отримаємо задачу, звану моделлю Стоуна. Прирівнявши нулю часткові похідні функції Лагранжа по змінним x_i , отримуємо для всіх i від 1 до n : $\frac{\beta_i U(x)}{x_i - a_i} + \mu p_i = 0$, звідки $x_i = a_i - \frac{\beta_i U(x)}{\mu p_i}$. До цих умов додається рівність $\sum_{i=1}^n p_i x_i - I = 0$, виконання якої еквівалентне рівності нулю похідної функції Лагранжа по змінній μ . Помноживши кожен i -у умову на μp_i і підсумувавши їх по i , маємо

$$\sum_{i=1}^n \beta_i U(x) + \sum_{i=1}^n \mu p_i x_i - \sum_{i=1}^n \mu p_i a_i = 0.$$

Оскільки в точці оптимуму бюджетне обмеження виконується як рівність, замінимо $\sum_{i=1}^n p_i x_i$ на I . Отримаємо $\frac{U(x)}{\mu} = \frac{I - \sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i}$. Звідси маємо функцію попиту:

$$x_i = a_i - \frac{\beta_i (I - \sum_{i=1}^n p_i a_i)}{p_i \sum_{i=1}^n \beta_i}.$$

Цю функцію легко запам'ятати наступним чином. Спочатку купується мінімально необхідна кількість кожного блага a_i . Потім розраховується сума грошей, що залишається після цього, яка розподіляється пропорційно «ваг» важливості β_i . Розділивши кількість грошей на ціну p_i , отримуємо ту, що додатково купується, понад мінімум, кількість i -го блага і додаємо її до a_i .

Для того, щоб описати більш різноманітні форми поведінки попиту на різні товари, модель повинна включати інші, більш складні види цільової функції переваги. Наприклад, при функції переваги:

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{a-b} (x_1 + a - b)^{-b} \text{ (де } a \text{ і } b \text{ – параметри)}$$

функція попиту має вигляд: $x_1 = \frac{aI}{I+bp_1}$ – типова функція попиту для предметів першої необхідності і $x_2 = \frac{I(I+p_2(b-a))}{I+bp_2}$ – типова функція попиту для предметів розкоші.

6.4. Моделювання банківських операцій

Будь-яка фінансово-кредитна операція, інвестиційний проект або комерційна угода передбачають наявність ряду умов їх виконання, з якими згодні сторони, що беруть у ній участь. До таких умов відносяться наступні кількісні дані: грошові суми, тимчасові параметри, процентні ставки і деякі інші додаткові величини. Кожна з перерахованих характеристик може бути представлена самим різним чином. Наприклад, платежі можуть бути одноразовими (разовими), постійними або змінними в часі. Існує більше десятка видів процентних ставок і методів нарахування відсотків. Час встановлюється у вигляді фіксованих термінів платежів, інтервалів вступів доходів, моментів погашення заборгованості і так далі. В рамках однієї фінансової операції перераховані показники утворюють деяку систему (фінансову проблему), що взаємопов'язана, підпорядкована відповідній логіці.

У зв'язку з множинністю параметрів такої системи кінцеві конкретні результати (окрім елементарних ситуацій) часто не очевидні. Більш того, зміна значення навіть однієї величини в системі більшою або меншою мірою, але обов'язково позначиться на результатах відповідної операції. Звідси з очевидністю витікає, що

такі системи можуть і мають бути об'єктом додатка кількісного фінансового аналізу – об'єктом математичного моделювання. Перевірені практикою методи такого математичного моделювання та вирішення фінансових проблем складають предмет фінансової математики.

Кількісний фінансовий аналіз застосовується як в умовах визначеності, так і невизначеності. У першому випадку мається на увазі, що дані для побудови математичної моделі фінансової операції заздалегідь відомі і фіксовані, наприклад, при випуску звичайних облігацій однозначно обумовлюються всі параметри – термін, купонна прибутковість, порядок викупу. Побудова математичної моделі фінансової операції помітно ускладнюється, коли доводиться враховувати невизначеність – динаміку грошового ринку (рівень процентної ставки, коливання валютного курсу та ін.), поведінку контрагента.

До основних завдань фінансової математики при побудові математичних моделей фінансових операцій відносяться:

- вимір кінцевих фінансових результатів операції (угоди, контракту) для кожної з сторін-учасниць;
- розробка планів виконання фінансових операцій, в тому числі планів погашення заборгованості;
- вимір залежності кінцевих результатів операції від основних її параметрів;
- визначення допустимих критичних значень цих параметрів і розрахунок параметрів еквівалентної (беззбиткової) зміни початкових умов операції.

Величезне значення у фінансових розрахунках, а, отже, і в математичних моделях банківських операцій відіграє фактор часу. У практичних фінансових операціях суми грошей незалежно від їх призначення або походження так чи інакше, але обов'язково, пов'язують з конкретними моментами часу або періодами часу. Для цього в контрактах фіксуються відповідні терміни, дати, періодичність виплат. Фактор часу, особливо в довгострокових операціях, грає не меншу, а іноді навіть і більшу роль, ніж розміри грошових сум. Необхідність обліку тимчасового чинника в математичному моделюванні впливає із сутності фінансування, кредитування та інвестування і виражається в принципі *нерівноцінності грошей, що належать до різних моментів часу*, або в іншому формулюванні – *принципі зміни цінності грошей у часі*. Так, ви всі на своєму життєвому досвіді переконалися, що 1000 гривень, отримані через 5 років, не рівноцінні цій же сумі, що надійшла сьогодні, навіть, якщо не брати до уваги інфляцію і ризик їх неотримання. При наявності інфляції вплив фактора часу багаторазово посилюється.

Методи кількісного аналізу фінансових операцій істотно залежать від науково-технічного прогресу. Останнім часом багато нововведень прямо або побічно пов'язані з комп'ютеризацією фінансово-банківською діяльністю. Можливості комп'ютеризації та досягнення в ряді областей знань (системний аналіз, інформатика, експертні системи, лінійне і нелінійне програмування та інше) дозволили помітно осучаснити як технологію фінансово-банківської справи, так і вживаний у кількісному фінансовому аналізі фінансово-

математичний, аналітичний апарат.

Знання методів, застосовуваних у фінансовій математиці, необхідно при безпосередній роботі в будь-якій сфері фінансів і кредиту, в тому числі і на етапі розробки умов контрактів. Не можна обійтися без них при фінансовому проектуванні, а також при порівнянні та виборі довгострокових інвестиційних проектів. Фінансові обчислення (математичні моделі) є необхідною складовою розрахунків в довгостроковому особистому страхуванні, наприклад, проектуванні та аналізі стану пенсійних фондів (розрахунок тарифів, оцінка здатності фондів виконувати свої зобов'язання перед пенсіонерами і т. д.), довгостроковому медичному страхуванні.

Як приклад математичного моделювання банківських операцій розглянемо дисконтування – це приведення вартості грошової суми, віднесеної до майбутнього моменту часу, до вартості на поточний момент часу. Це робиться, наприклад, при економічній оцінці ефективності інвестицій, обліку векселів або при прибутковому підході до оцінки вартості бізнесу.

Дисконтування відображає той економічний факт, що сума грошей, яку ми маємо зараз, має більшу реальну вартість, ніж рівна їй сума, яка з'явиться в майбутньому. Це обумовлено декількома причинами, наприклад:

- Наявна сума може принести прибуток, наприклад, будучи покладена на депозит в банку.
- Купівельна спроможність наявної суми буде зменшуватися через інфляцію.
- Завжди є ризик неотримання передбачуваної суми.

Термін «дисконтування» вживається і в більш широкому сенсі – як засіб визначення будь-якої вартісної величини, що відноситься до майбутнього, на більш ранній момент часу.

Залежно від виду процентної ставки застосовуються два методи дисконтування – *математичне дисконтування* і банківський (комерційний) облік. У першому випадку застосовується ставка нарахування, тобто ефективна процентна ставка, у другому – облікова ставка.

Математичне дисконтування

Припустимо, що в майбутньому в момент часу $t > 0$ ми повинні будемо виплатити деяку суму $C(t)$. Визначимо, якою сумою $C(0)$ потрібно розташовувати в даний час $t_0 = 0$, щоб виплатити суму $C(t)$, якщо ефективна процентна ставка нарахування відсотків за одиницю часу дорівнює i і з плином часу не змінюється.

Під *ефективною процентною ставкою* i розуміється відносна величина доходу за розглянутий проміжок часу $(t, t + \Delta t)$ – відношення доходу $\Delta C(t)$ (процентних грошей) до суми боргу $C(t)$: $i = \frac{\Delta C(t)}{C(t)}$. На основі домовленої ефективної процентної ставки i сума доходу на тимчасовому інтервалі Δt складе $\Delta C(t) = C(t) \cdot i$. На практиці ефективну процентну ставку прийнято виражати у відсотках: $i \% = i \cdot 100 \%$. Наприклад, $i \% = 22 \%$, отже, ефективна процентна ставка $i = 0,22$. Ефективна процентна ставка – один з найважливіших елементів комерційних, кредитних або інвестиційних контрактів. Вона не залежить від величини інвестованої суми, а

визначається ефективністю, з якою інвестуються гроші і приносять прибуток (дохід) на одну вкладену грошову одиницю.

Існують дві схеми обчислення доходу $\Delta C(t)$ на об'єднаному інтервалі $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, метод простих і складних відсотків:

1. Принцип простих відсотків припускає, що відсотки на першому Δt_1 і другому Δt_2 тимчасових інтервалів нараховуються тільки на основний капітал $C(t)$, т. е. $\Delta C_1(t) = C(t) \cdot i_1$, $\Delta C_2(t) = C(t) \cdot i_2$. Тому $\Delta C(t) = \Delta C_1(t) + \Delta C_2(t) = C(t) \cdot (i_1 + i_2)$. Відповідно, підсумкова процентна ставка j на часовому проміжку $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ складе $j = \frac{\Delta C(t)}{C(t)} = i_1 + i_2$.

Якщо сума $C(t)$ інвестується не на два, а на n послідовних проміжків часу $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$, з ефективними процентними ставками $i_1, i_2, \dots, i_n$ відповідно, то капітал $C(t)$ за проміжок часу $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n$ перетвориться в суму:

$$C(t + \Delta t) = C(t) \cdot (1 + i_1 + i_2 + \dots + i_n), \quad (6.22)$$

і дохід (відсотки) на часовому інтервалі $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n$ складе:

$$\Delta C(t) = C(t + \Delta t) - C(t) = C(t) \cdot (i_1 + i_2 + \dots + i_n),$$

а підсумкова процентна ставка: $j = i_1 + i_2 + \dots + i_n$.

За умови рівних процентних ставок $i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$ на всіх часових проміжках $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \dots = \Delta t_n = \Delta t_0$ нарахування відсотків $\Delta C(t)$ за проміжок часу $\Delta t = n \cdot \Delta t_0$ складе $\Delta C(t) = C(t) \cdot n \cdot i$, а підсумкова процентна ставка: $j = n \cdot i$, де $n = t / \Delta t_0$ – кількість укладених в часі t нарахування відсотків за ставкою i проміжків Δt_0 .

2. Принцип складних відсотків передбачає, що відсотки на другому часовому проміжку Δt_2 нараховуються не тільки на основний

капітал $C(t)$, а й на вже зароблені відсотки $\Delta C_1(t)$ на першому часовому інтервалі Δt_1 . Тому в кінці другого інтервалу часу Δt_2 основний капітал $C(t)$ виросте до величини:

$$C(t + \Delta t) = C(t) + C(t) \cdot i_1 + (C(t) + C(t) \cdot i_1) \cdot i_2 = C(t) \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2).$$

Відповідно, підсумкова процентна ставка j на часовому проміжку $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ визначається з умови:

$$1 + j = (1 + i_1)(1 + i_2), \text{ т. е. } j = i_1 + i_2 + i_1 i_2.$$

Якщо сума $C(t)$ інвестується не на два, а на n послідовних проміжків часу $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$, з ефективними процентними ставками $i_1, i_2, \dots, i_n$ відповідно, то капітал $C(t)$ за проміжок часу $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n$ перетвориться в суму:

$$C(t + \Delta t) = C(t) \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \dots \cdot (1 + i_n), \quad (6.23)$$

і процентні гроші на тимчасовому інтервалі $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n$ складуть:

$$\Delta C(t) = C(t + \Delta t) - C(t) = C(t) \cdot ((1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \dots \cdot (1 + i_n) - 1),$$

а підсумкова процентна ставка $j = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \dots \cdot (1 + i_n) - 1$.

За умови рівних процентних ставок $i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$ на всіх часових проміжках $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \dots = \Delta t_n = \Delta t_0$ нараховані відсотки $\Delta C(t)$ за проміжок часу $\Delta t = n \cdot \Delta t_0$ складуть $\Delta C(t) = C(t) \cdot ((1 + i)^n - 1)$, а підсумкова процентна ставка $j = (1 + i)^n - 1$.

Розгляд почнемо з дисконтування за простою ставкою. Тоді з формули накопичення за простими відсоткам $C(t) = C(0) \cdot (1 + t \cdot i)$ випливає, що для того, щоб в момент часу t можна було б виплатити суму $C(t)$ в початковий момент часу $t_0 = 0$ необхідно розташовувати сумою $C(0) = C(t) \cdot (1 + t \cdot i)^{-1}$. Величину $r_n(t, i) = (1 + t \cdot i)^{-1}$ називають

дисконтним або дисконтуючим множителем за ставкою нарощування простих відсотків.

Тепер перейдемо до розгляду, коли нарахування відсотків при математичному дисконтуванні відбувається по складній процентній ставці i яка з плином часу не змінюється. У цьому випадку, щоб до моменту t мати в точності суму $C(t)$ в даний час $t_0 = 0$ потрібно мати у своєму розпорядженні суму $C(0) = C(t) \cdot (1 + i)^{-t}$, так як після інвестування на час t сума $C(0)$ перетвориться в суму $C(0) \cdot (1 + i)^t = C(t)$. Величину $r_c(t, i) = (1 + i)^{-t} = v^t$ називають дисконтним або дисконтуючим множителем за ставкою нарощування складних відсотків.

Величину $v = (1 + i)^{-1}$ називають коефіцієнтом дисконтування (обліку) по складним відсоткам. З її допомогою формулу для наведеної (сучасної) вартості $C(0)$ по складним відсоткам можна записати у вигляді $C(0) = C(t) \cdot v^t$. Величину v можна висловити і через інтенсивність відсотків $\delta = \ln(1 + i)$: $v = (1 + i)^{-1} = \exp(-\delta)$. Дисконтируючий множник $r_c(t, i) = (1 + i)^{-t}$ за складними відсотками відрізняється від множника $r_n(t, i) = (1 + t \cdot i)^{-1}$ за простими відсотками.

Дисконтируючий множник $r(t, i)$ по ефективній процентній ставці показує, яку частку становить первісна величина суми $C(0)$ в остаточній сумі $C(t)$: $r(t, i) = C(0)/C(t)$.

Як було вже сказано, різницю $\Delta C(t) = C(t) - C(0)$ можна розглядати не тільки як відсотки, нараховані на $C(0)$ за час t , а й як дисконт з суми $C(t)$. За допомогою множників, що дисконтуються $r(t, i)$ дисконт $\Delta C(t) = C(t) - C(0) = C(t) \cdot (1 - r(t, i))$. Відповідно для

простих відсотків $\Delta C(t) = C(t) \cdot (1 - (1 + t \cdot i)^{-1}) = \frac{C(t) \cdot t \cdot i}{(1 + t \cdot i)}$, для складних – $\Delta C(t) = C(t) \cdot (1 - (1 + i)^{-t}) = C(t) \cdot (1 - v^t)$.

Грошові суми $C(t)$ в момент t і $C(0)$ в момент $t_0 = 0$ називаються еквівалентними за ставкою порівняння i , а формула порівняння грошових сум $C(t_0) = C(t) \cdot r(t, i)$ (або $C(t) = C(t_0) \cdot M(t, i)$) в будь-які моменти часу t і t_0 називається *математичним дисконтированием по дискретній процентній ставці*.

У разі, коли процентна ставка i з плином часу безперервно змінюється і для нарощення по складним відсоткам необхідно застосовувати безперервну процентну ставку $\delta = \delta(t)$, тоді дисконтируючий множник $r(t, \delta) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \delta(z) dz\right)$. Дана операція, зворотна безперервному нарощенню, називається *безперервним математичним дисконтированием за інтенсивними відсоткам*, а величина $r(t, \delta)$ – *дисконтуючим множником за безперервною відсотковою ставкою*.

Банківське дисконтування по обліковій ставці

Сформулюємо одне із завдань банківського дисконтування по ефективній обліковій ставці. Припустимо, що в момент $t_0 = 0$ ми беремо в банку позику (кредит) на суму $C(0)$. Тоді в момент $t = 1$ (наприклад, через рік) ми повинні повернути банку суму, $C(1) = C(0) \cdot (1 + i)$, яка складається з двох частин: повернення основного капіталу $C(0)$ і відсотків на капітал $\Delta C(1) = C(0) \cdot i$, з ефективною процентною ставкою i на цей період.

В принципі банк може зажадати від нас, щоб належні йому відсотки $P(1) = \Delta C(1) = C(1) - C(0) = C(0) \cdot i$ на момент часу $t = 1$ ми

виплатили наперед в момент $t_0 = 0$ отримання позики. Така фінансова операція називається утриманням відсотків. В цьому випадку процентну суму $P(1) = C(0) \cdot i$, яка повинна бути виплачена банку в момент $t = 1$, необхідно привести до моменту, $t_0 = 0$, при цьому вийде сума $P(0) = C(0) \cdot i \cdot (1 + i)^{-1}$. Тому, якщо відсотки на капітал повинні бути виплачені заздалегідь, в момент $t_0 = 0$ отримання позики, то ці відсотки, що виплачуються вперед, складають частку $d = i/(1 + i)$ від суми позики $C(0)$, т. е. $P(0) = C(0) \cdot d$. Величина d називається *ефективної обліковою ставкою* за одиницю часу. Вона показує, яку частку становлять утримані відсотки від суми позики, виданої на одиницю часу і зазвичай задається у відсотках: $d \% = (P(0)/C(0)) \cdot 100 \%$. Тепер, після того як ми виплатили заздалегідь банку належні йому відсотки в сумі $P(0) = C(0) \cdot d$ на момент отримання позики, то після закінчення терміну позики один рік ми повертаємо банку лише суму позики $C(0)$.

Ефективна облікова ставка d дозволяє також розрахувати відсотки $P(1) = \Delta C(1) = C(1) - C(0)$ на момент часу $t = 1$, т. е. дисконт з суми $C(1)$ на момент часу $t_0 = 0$: $\Delta C(1) = C(1) \cdot d = C(0) \cdot i$, а також величину позики $C(0) = C(1) - \Delta C(1) = C(1) \cdot (1 - d)$ за відомою сумою $C(1)$ погашення позики на момент часу $t = 1$.

Ефективна облікова ставка d може бути виражена і через коефіцієнт дисконтування $v = (1 + i)^{-1} = \exp(-\delta)$:

$$d = 1 - (1 + i)^{-1} = 1 - e^{-\delta}.$$

Припустимо тепер, що сума $C(0)$ дається банком на час $1/p$ з завчасною виплатою відсотків. При цьому ефективна процентна ставка на одиницю часу дорівнює j , а ефективна процентна ставка на

період $1/p$ дорівнює $i^{(p)} = j_p^*/p$, де j_p^* – номінальна процентна ставка на одиницю часу. Як було вже встановлено раніше, для нарахування за простими відсотками ефективна і номінальна відсоткові ставки збігаються, тобто $j_p^* = j$ и $i_n^{(p)} = j/p$. Тому, сума $P(1/p) = \Delta C(1/p) = C(1/p) - C(0)$, яка повинна бути виплачена в момент $t = 1/p$ у вигляді відсотків обчислюється за формулою $P(1/p) = C(0) \cdot j/p$. Якщо її привести до моменту $t_0 = 0$, то вона перетвориться в суму $P(0) = C(0) \cdot (j/p) \cdot (1 + j/p)^{-1} = C(0) \cdot j/(p + j)$. Звідси ефективна облікова ставка $d_n^{(p)}$ за час $1/p$ при нарахуванні простих відсотків дорівнює $j/(p + j)$: $d_n^{(p)} = j/(p + j)$. Оскільки із ефективної облікової ставки в одиницю часу $d = j/(1 + j)$ виходить, що $j = d/(1 - d)$, тоді для ефективної облікової ставки $d_n^{(p)}$ за проміжок часу $1/p$ отримаємо формулу, що встановлює зв'язок між $d_n^{(p)}$ і d :

$$d_n^{(p)} = \frac{j}{p+j} = \frac{\frac{d}{1-d}}{p+\frac{d}{1-d}} = \frac{d}{p(1-d)+d} = \frac{d}{p-(p-1)d}. \quad (6.24)$$

У разі нарахування складних відсотків і якщо при цьому ефективна процентна ставка на одиницю часу дорівнює j , а номінальна процентна ставка на одиницю часу дорівнює j_p^* , то ефективна процентна ставка на період $1/p$ дорівнює $i_c^{(p)} = j_p^*/p = (1 + j)^{1/p} - 1$. Отже, в разі складних відсотків сума $P(1/p)$, яка повинна бути виплачена в момент $t = 1/p$ у вигляді відсотків обчислюється за формулою $P(1/p) = C(0) \cdot [(1 + j)^{1/p} - 1]$. Якщо її привести до моменту $t_0 = 0$, то вона перетвориться в суму $P(0) = C(0) \cdot i_c^{(p)} \cdot (1 + j)^{-1/p} = C(0) \cdot (1 - (1 + j)^{-1/p})$. Звідси ефективна облікова ставка $d_c^{(p)}$ за час $1/p$ при

нарахуванні складних відсотків дорівнює $1 - (1 + j)^{-1/p}$: $d_c^{(p)} = 1 - (1 + j)^{-1/p}$. Тепер з урахуванням того, що $j = d/(1 - d)$, для ефективної облікової ставки $d_c^{(p)}$ за час $1/p$ отримаємо формулу:

$$d_c^{(p)} = 1 - (1 + j)^{-1/p} = 1 - (1 + d/(1 - d))^{-1/p} = 1 - (1 - d)^{1/p}. \quad (6.25)$$

Однак у фінансовій математиці прийнято працювати не з ефективними (реальними) обліковими ставками $d^{(p)}$ за час $1/p$, а з так званими *номінальними* (умовними, неіснуючими реально) *обліковими ставками* $d^{*(p)} = p \cdot d^{(p)}$, віднесеними як і d на одиницю часу. Тоді з урахуванням формул (6.24) і (5.25) для простих і складних відсотків відповідно, маємо:

$$d_n^{*(p)} = p \cdot d_p = p \cdot \frac{d}{p - (p-1)d}; \quad (6.26)$$

$$d_c^{*(p)} = p \cdot d_p = p \cdot \left(1 - (1 - d)^{\frac{1}{p}}\right). \quad (6.27)$$

Величину облікової ставки $d^{*(p)}$, віднесеної на одиницю часу, називають *номінальною обліковою ставкою*, яка нараховується з частотою p .

Номінальна облікова ставка $d^{*(p)}$, віднесена на одиницю часу як для простих (6.26), так і складних (6.27) відсотків завжди більше реальної ефективної облікової ставки d , віднесеної на одиницю часу. Розглянемо це на конкретному прикладі. Нехай річна ефективна процентна ставка $j = 0,25$ ($j\% = 25\%$) і відсотки нараховуються поквартально, тобто $p = 4$. При цьому річна ефективна облікова ставка $d = j/(1 + j) = 0,2$, а ефективні облікові ставки на проміжку часу $1/p$ за простими відсоткам згідно з (6.24) $d_n^{(p)} = \frac{d}{p - (p-1)d} =$

$\frac{0,2}{4-(4-1)0,2} \approx 0,0588$, по складним відсоткам згідно з (6.25) $d_c^{(p)} = 1 - (1 - d)^{1/p} \approx 0,05426$. У цьому випадку річна номінальна облікова ставка, отримана згідно з (6.26) $d_n^{*(p)} = 4 \cdot 0,0588 = 0,2352$, а з (5.23) $d_c^{*(p)} = 4 \cdot 0,05426 = 0,217$.

Тепер розглянемо ситуацію, коли банківське дисконтування відбувається не на одиницю часу або за ефективною обліковою ставкою d , або за номінальними обліковими ставками $d_n^{*(p)}$ і $d_c^{*(p)}$, заданими на одиницю часу, а на n одиничних проміжків часу. У цьому випадку, крім ефективної облікової ставки d , номінальних облікових ставок $d_n^{*(p)}$ і $d_c^{*(p)}$ для дисконтування застосовуються також проста і складна облікові ставки. Якщо нараховуються прості відсотки, то дисконтування проводиться за *простою обліковою ставкою* d_n . Якщо нараховуються складні відсотки, то – по *складній обліковій ставці* d_c . Крім цього, при використанні цих облікових ставок необхідно також враховувати, скільки разів на одиницю часу проводиться дисконтування. Розглянемо застосування простої та складної облікових ставок на наступному прикладі. Припустимо, що власник векселя, за яким йому після закінчення терміну t векселя повинні виплатити суму $C(t)$, продає його в момент часу $t_0 = 0$, наприклад, банку раніше дати погашення векселя на n одиниць часу, тобто $t - t_0 = t = n$. Природно, банк придбає його у власника за ціною $C(0)$ яка, менше суми $C(t) = C(n)$, зазначеної на векселі, тобто купує (враховує) його з дисконтом. Розмір дисконту $\Delta C(0) = C(n) - C(0)$, або сума обліку, нараховується на суму $C(n)$, що підлягає сплаті в кінці терміну n векселя на момент обліку векселя в банку $t_0 = 0$.

1. Дисконтування здійснюється за простою обліковою ставкою d_n , яка нараховується один раз в одиницю часу на n одиничних проміжків часу. В цьому випадку дисконтування n раз за простою обліковою ставкою d_n проводиться весь час з суми $C(n)$ і, отже, розмір дисконту $\Delta C(n)$, або сума обліку, становить $C(n) \cdot n \cdot d_n$: $\Delta C(n) = C(n) \cdot n \cdot d_n$, де n – термін від моменту обліку до дати погашення векселя. Таким чином,

$$C(0) = C(n) - \Delta C(n) = C(n) - C(n) \cdot n \cdot d_n = C(n) \cdot (1 - n \cdot d_n). \quad (6.28)$$

Тут $(1 - n \cdot d_n)$ є дисконтним множником $r(n, d_n)$ за простою обліковою ставкою d_n : $r(n, d_n) = (1 - n \cdot d_n)$. З формули (6.28) випливає, що при $n > 1/d_n$ величина дисконтного множника за простою обліковою ставкою $r(n, d_n)$ і, отже, сума $C(0)$ стане негативною. Інакше кажучи, при відносно великому терміні векселя облік його може привести до нульової або навіть негативною сумі $C(0)$, що позбавлене сенсу. Наприклад, при $d_n \% = 20 \%$ вже п'ятирічний термін достатній для того, щоб власник векселя нічого не отримав при його обліку. Така ситуація не виникає при дисконтуванні n раз по ефективної облікової ставки d , яка нараховується один раз на одиницю часу. Дійсно, розмір дисконту $\Delta C(n) = C(n) - C(0)$ в цьому варіанті розрахунку визначається за формулою $\Delta C(n) = C(n) \frac{ni}{1+ni} = C(n) \frac{nd}{1+(n-1)d}$ і при $n \rightarrow \infty$ отримуємо, що $\Delta C(n) \rightarrow C(n)$. Тут $i = \frac{d}{1-d}$ ефективна процентна ставка на одиницю часу, а проста облікова ставка $d_n = \frac{i}{1+ni} = \frac{d}{1+(n-1)d}$.

Проста облікова ставка d_n іноді застосовується і при розрахунку нарощеної суми $C(n)$. Зокрема, в цьому виникає необхідність при визначенні суми $C(n)$, яку треба проставити у векселі, якщо задана поточна сума боргу $C(0)$, або інакше – сучасна вартість векселя $C(0)$. Нарощена сума $C(n)$ в цьому випадку визначається з формули (5.17): $C(n) = C(0) \cdot (1 - n \cdot d_n)^{-1}$. Множник нарощення $M_n(n, d_n)$ за простою обліковою ставкою тут дорівнює $(1 - n \cdot d_n)^{-1}$.

Зауважимо, що при $n \rightarrow 1/d_n$ нарощена сума стає нескінченно великим числом, а при $n > 1/d_n$ розрахунок позбавлений сенсу, так як нарощена сума стає негативним числом. Така ситуація не виникає при дисконтуванні n раз по ефективній обліковій ставці d , яка нараховується один раз на одиницю часу: при будь-якому терміні n нарощена сума $C(n)$ більше нуля. Дійсно, множник нарощення $M_n(n, d)$ в цьому варіанті розрахунку визначається за формулою $M_n(n, d) = 1 + n \cdot i = \frac{1+(n-1)d}{1-d}$ і при $d < 1$ для будь-якого $n > 1$, $M_n(n, d) > 0$ і, отже, нарощена сума $C(n)$ завжди більше нуля. Тут $i = \frac{d}{1-d}$ – ефективна процентна ставка на одиницю часу.

2. Дисконтування відбувається по складній обліковій ставці d_c , яка нараховується один раз на одиницю часу. В цьому випадку дисконтування на n одиничних проміжків часу здійснюється наступним чином. Кожен раз облікова ставка d_c застосовується не до первісної суми $C(n)$, яка дисконтується (як з простої облікової ставки), а до суми, дисконтированої на попередньому кроці часу. Тому дисконтування по складній обліковій ставці d_c здійснюється за формулою:

$$C(0) = C(n) \cdot (1 - d_c)^n. \quad (6.29)$$

З формули (6.29) випливає, що дисконтируючий множник $r(n, d_c)$ по складній обліковій ставці d_c дорівнює $(1 - d_c)^n$. Розмір дисконту: $\Delta C(n) = C(n) - C(0) = C(n) \cdot (1 - (1 - d_c)^n)$. Множник нарощення: $M_c(n, d_c) = (1 - d_c)^{-n}$.

Наведемо приклад використання складної і простої облікових ставок. Боргове зобов'язання на суму 5 млн. грн., термін оплати якого настає через 5 років, продано з дисконтом по складній обліковій ставці 15 % річних. Який розмір, отриманої за борг суми $C(0)$ і величина дисконту $\Delta C(n)$ (в тис. грн.)?

При використанні складної облікової ставки, маємо: $C(0) = C(n) \cdot (1 - d_c)^n = 5000 \cdot (1 - 0,15)^5 = 2218,5$ тис. грн.; $\Delta C(n) = C(n) - C(0) = 5000 - 2218,5 = 2781,5$ тис. грн.

Якщо застосувати просту облікову ставку того ж розміру, то:
 $C(0) = 5000 \cdot (1 - 5 \cdot 0,15) = 1250$ тис. грн.;

$$\Delta C(n) = 5000 - 1250 = 3750 \text{ тис. грн..}$$

Як впливає з наведеного прикладу, дисконтування по складній обліковій ставці вигідніше для боржника, ніж за простою обліковою ставкою. Сказане стає зрозумілим при порівнянні формул для дисконтних множників: $r(n, d_n) = (1 - n \cdot d_n)$ и $r(n, d_c) = (1 - d_c)^n$. Відповідно до першої з наведених формул значення дисконтного множника $r(n, d_n)$ рівномірно зменшується в міру зростання n і досягає нуля при $n = 1/d_n$. Згідно з другою – множник $r(n, d_c)$ експоненціально зменшується і досягає нуля лише в межі, при $n \rightarrow \infty$. Величини дисконтних множників $r(n, d_n)$ и $r(n, d_c)$ при застосуванні

простої d_n і складної d_c облікових ставок, відповідно, показані на рис. 11.

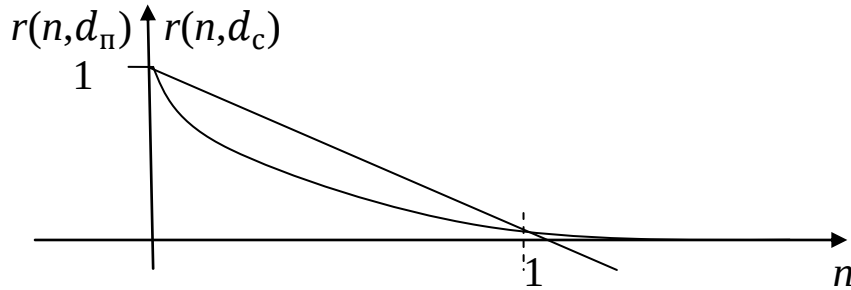


Рис. 11

3. Дисконтування проводиться не один, а m раз в одиницю часу на n одиничних проміжках часу, тобто кожен раз на часовому проміжку $1/m$ облік здійснюється за обліковою ставкою $d^{(m)} = \frac{d^{*(m)}}{m}$, де $d^{*(m)}$ – номінальна облікова ставка на одиницю часу, яка нараховується з частотою m . В цьому випадку для простої облікової ставки $d_n^{(m)}$, що нараховується з частотою m при нарахуванні її $n \cdot m$ раз, отримуємо:

$$C(0) = C(n) \cdot \left(1 - n \cdot m \cdot \frac{d_n^{*(m)}}{m} \right) = C(n) \cdot \left(1 - n \cdot d_n^{*(m)} \right).$$

Тут $d_n^{*(m)}$ – номінальна облікова ставка на одиницю часу, яка нараховується з частотою m за простою облікової ставки $d_n^{(m)}$ на часовому проміжку $1/m$.

Звідси для дисконтного множника за простою обліковою ставкою, отримуємо: $r_n(n, d_n^{*(m)}) = \left(1 - n \cdot d_n^{*(m)} \right)$, а для множника нарощення: $M_n(n, d_n^{*(m)}) = \left(1 - n \cdot d_n^{*(m)} \right)^{-1}$.

Для складної облікової ставки $d_c^{(m)}$ при нарахуванні її $n \cdot m$ раз, отримуємо:

$$C(0) = C(n) \cdot \left(1 - \frac{d_c^{*(m)}}{m}\right)^{mn}.$$

Звідси для дисконтного множника за складною обліковою ставкою, отримуємо: $r_c(n, d_c^{*(m)}) = \left(1 - \frac{d_c^{*(m)}}{m}\right)^{mn}$, а для множника нарощення: $M_c(n, d_c^{*(m)}) = \left(1 - \frac{d_c^{*(m)}}{m}\right)^{-mn}$.

Якщо задана ефективна облікова ставка d на одиницю часу, то номінальні облікові ставки $d_n^{*(m)}$ і $d_c^{*(m)}$ на одиницю часу можна визначити з формул (6.26) і (6.27) за умови, що $p = m$. З цих формул випливає, що для простої облікової ставки:

$$d_n^{*(m)} = m \cdot \frac{d}{m - (m-1)d},$$

а для складної облікової ставки:

$$d_c^{*(m)} = m \cdot (1 - \sqrt[m]{1-d}).$$

Як ми вже говорили, будь-яка задача дослідження операцій є оптимізаційною, тобто полягає у виборі серед деякої множини тих допустимих стратегій, які можна в тому чи іншому сенсі кваліфікувати як оптимальні для значення цільової функції. Всі завдання прийняття оптимальних рішень можна класифікувати, відповідно до виду цільової функції, розмірністю і змістом векторів a і x , що відображають відповідно неконтрольовані і керовані параметри.

Розглянемо основні принципи такої класифікації.

6.5. Класифікація завдань дослідження економіко-математичних моделей

Отже, ми познайомилися із загальною економіко-математичною моделлю і основним завданням її дослідження, що складається в порівнянні між собою стратегій і виборі з них найкращої в тому чи іншому сенсі. Це завдання для загальної економіко-математичної моделі є занадто складним, щоб для нього можна було отримати конкретні результати. Тому в загальному випадку можна говорити тільки про принципи порівняння стратегій, пов'язаних з вибором виду оцінки ефективності, і відповідних їм понять оптимальності. Методи ж знаходження оптимальних стратегій, без яких не можна говорити про практичне використання теорії дослідження операцій, для загальної моделі не існують. Тому в дослідженні операцій виділяють класи завдань, що представляють собою окремі випадки основного завдання, для яких такі методи можуть бути створені.

Найбільш просту групу завдань дослідження операцій складають такі завдання, в яких неконтрольованих факторів немає або є тільки фіксовані неконтрольовані фактори, а критерій ефективності (як правило, однокритеріальний) задається числовою функцією.

Розділ дослідження операцій, присвячений вивченню подібних завдань, називається математичним програмуванням, а самі завдання – завданнями математичного програмування. В даному випадку поняття програмування вживається в значенні планування (на відміну від програмування для ЕОМ).

Внутрішня класифікація в розділі математичного програмування пов'язана вже з видом цільової функції і простору стратегій.

Якщо цільова функція являє собою числову лінійну функцію від змінних, що описують стратегії, а простір стратегій задається системою лінійних обмежень, тобто багатогранною множиною, то ми отримуємо завдання лінійного програмування.

Якщо, виходячи із змістовного сенсу завдання, її рішення мають бути цілими числами, то отримуємо задачу цілочисельного програмування. Зазвичай в цілочисельних задачах критерій і інші обмеження (крім умови цілочисельності) припускають лійними, тому цілочисельні завдання можна віднести умовно до лінійного програмування.

Якщо цільова функція або обмеження, які визначають простір стратегій, є нелійними функціями, то маємо задачу нелінійного програмування. Зокрема, якщо простір стратегій має властивості опуклості, тобто є опуклою багатогранною множиною, то таке завдання називається завданням опуклого програмування.

Якщо в задачі математичного програмування є змінна часу і критерій ефективності виражається не в явному вигляді як функція від стратегій, а побічно через рівняння, що описують розвиток процесу протікання операції в часі, то таке завдання ставиться до динамічного програмування.

Лінійне програмування (включаючи цілочисельне програмування), нелінійне програмування (включаючи класичні екстремальні задачі і опукле програмування) і динамічне

програмування складають основні підрозділи математичного програмування.

Математичні моделі досліджуваних операцій можуть включати сукупність (комплекс) приватних (локальних) критеріїв ефективності. Кожен локальний критерій характеризує деяку локальну мету прийнятого рішення. Випадок відсутності єдиного критерію можна трактувати як прийняття рішень в умовах невизначеності мети. Вибір оптимального рішення по комплексу декількох критеріїв, тобто коли прийняття рішення оцінюється сукупністю критеріїв, які можуть відрізнятися своїми коефіцієнтами відносної важливості (ефективностями) є завданням багатокритеріальної (векторної) оптимізації.

В цьому випадку область допустимих рішень може бути розбита на дві непересічні частини:

- область згоди, в якій якість рішення може бути покращена одночасно по всіх локальних критеріях або без зниження рівня будь-якого з критеріїв;
- область компромісів, в якій поліпшення якості рішення по одним локальним критеріям призводить до погіршення якості рішення по іншим.

Очевидно, що оптимальне рішення може належати тільки області компромісів, так як в області згоди рішення може і повинно бути покращено за відповідними критеріями. Вибір області компромісу здійснюється суб'єктивно, що звужує область можливих рішень. Основні схеми вибору компромісу, припускають спочатку,

що всі локальні критерії нормалізуються, т. е. приводяться до однакової розмірності або перетворюються до безрозмірної величини.

При наявності неконтрольованих факторів більш складних видів (випадкових, коли відомо їх імовірнісний розподіл і невизначених, коли їх імовірнісний розподіл невідомо) виникають інші класи задач, які вирішуються методами стохастичного програмування.

Серед завдань з невизначеними неконтрольованими факторами найцікавішими є такі завдання, в яких невизначеність пов'язана з діями інших розумних учасників операції, які переслідують свої цілі. Розділ дослідження операцій, що займається вивченням подібних завдань, називається теорією ігор. Ігрові завдання також мають свою класифікацію, відповідно до якої виділяється кілька підрозділів теорії ігор.

Слід зазначити, що практично завжди при прийнятті управлінських рішень має місце ситуація неоднозначності результату як наслідок неповноти інформації про зовнішнє середовище. У цьому випадку говорять про прийняття рішень в ситуації ризику, або управлінні ризиком. В силу вище викладеного неповнота інформації пов'язана з наявністю випадкових або невизначених неконтрольованих чинників. Іноді ризик розуміють у вузькому сенсі як сукупність різних обставин і умов, що створюють обстановку, для якої є можливість визначити ймовірність здійснення того чи іншого результату. З такої точки зору визначеність і невизначеність є два крайніх випадки повноти вихідних даних, а ризик – проміжна ситуація.

Серед завдань дослідження операцій з випадковими неконтрольованими факторами можна виділити задачі масового обслуговування. Ці завдання характеризуються певним видом критеріїв ефективності і випадкових величин, які відображають їх змістовний сенс.

В даному посібнику ми розглянемо з математичного програмування лише деякі моменти лінійного програмування, що становить основу математичного програмування.

ТЕМА 7. МЕТОДИ ВІДШУКУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ ДЛЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ: ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. Постановка завдання лінійного програмування (ЗЛП)

Лінійне програмування (ЛП) – математична дисципліна, присвячена теорії і методам відшукування екстремальних (найбільших і найменших) значень цільової функції математичної моделі на множинах n -мірного векторного простору R^n , коли цільова функція і всі функції обмежень лінійні, а всі змінні – дійсні числа.

Даною математичною моделлю описується множина економічних завдань, які і послужили основою створення математичного апарату лінійного програмування, наприклад, завдання, розглянуті нами в розділі 6.2.

Багато властивостей задач лінійного програмування можна інтерпретувати також як властивості «багатогранників» в n -мірних просторах і таким чином геометрично формулювати і доводити їх.

У загальному вигляді математична модель задачі лінійного програмування (надалі ЗЛП) може бути сформульована як задача знаходження екстремального значення $f(x)$ цільової лінійної числової функції f :

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min), \quad (7.1)$$

де, $f(x) \in R, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset R^n$.

Область визначення D задається розв'язуваною системою рівностей і нерівностей, що є обмеженнями, що накладаються на змінні цільової функції:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq; =; \geq) b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_j \in R, \quad \forall j = \overline{1, n} \quad (7.2)$$

і, можливо, обмеженнями:

$$x_{j_1} \geq 0, x_{j_2} \geq 0, x_{j_3} \geq 0, \dots, x_{j_k} \geq 0, \quad k \leq n. \quad (7.3)$$

Умови (7.3) називають умовами *невід'ємності*. Якщо система (7.2) нерозв'язна, то D порожня множина. Щодо направлення знака нерівності в системі (7.2) будемо припускати, що ліва частина менше або дорівнює правій. Домогтися цього можна, помноживши на (-1) обидві частини тих нерівностей, які мають протилежний знак.

Додатково слід зауважити, що вибір типу шуканого екстремуму (максимуму або мінімуму) також носить відносний характер. Так, завдання пошуку максимуму значення лінійної цільової функції

$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ еквівалентне задачі пошуку мінімуму значення функції $-f(x) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$.

Часто умови задачі (7.1) – (7.3), що містить обмеження лише типу нерівностей, буває зручно записувати в скороченій матричній формі:

$$f(x) = c \cdot x \rightarrow \max (\min), x \in D = \{x \in R^n | A \cdot x \leq b, x \geq 0\},$$

де $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ і $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектори з простору R^n , $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ – вектор з простору R^m , $A = (a_{ij})$ – речова матриця розмірності $m \times n$. Умова $x \geq 0$ означає, що на всі координати вектора x накладені обмеження невід'ємності: $x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n}$.

Завдання лінійного програмування, записані у формі (7.1) – (7.3), називають *загальним завданням лінійного програмування* (ЗЗЛП).

Якщо всі обмеження в задачі лінійного програмування є рівняннями і на всі змінні x_j накладено умови невід'ємності, а значення $f(x)$ лінійної цільової функції f максимізується, то вона називається задачею лінійного програмування у *канонічній формі*, або *канонічною задачею лінійного програмування* (КЗЛП). У матричній формі КЗЛП можна записати в наступному вигляді:

$$f(x) = c \cdot x \rightarrow \max, x \in D = \{x \in R^n | A \cdot x = b, x \geq 0\}. \quad (7.4)$$

Оскільки будь-яка оптимізаційна задача однозначно визначається цільовою функцією f і областю її визначення D , на якій відшукується екстремум, будемо позначати цю задачу парою (D, f) .

Може виникнути питання: чи потрібні спеціалізовані методи для вирішення розглянутих завдань? Чи не можна, як це прийнято в математиці, просто продиференціювати $f(x)$ по аргументам x_j , прирівняти похідні нулю і вирішити отриману систему рівнянь?

Виявляється цього зробити не можна! Оскільки цільова функція f лінійна з коефіцієнтами, відмінними від нуля, тому її похідні по всім змінним постійні числові значення, відмінні від нуля. У зв'язку з цим максимум (мінімум) значення $f(x)$ лінійної цільової функції f досягається на межі області її визначення D , тобто там, де починають діяти обмеження (7.2) і (7.3). Для вирішення таких завдань і створений математичний апарат лінійного програмування, який дозволяє знайти, якщо воно існує, оптимальне рішення $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ на межі області визначення D , для якого значення $f(x)$ лінійної функції f досягає максимуму або мінімуму:

$$\max f(x) (\min f(x)) = f(x^*).$$

Домовимося щодо термінології, яка використовується в подальшому і є загальноприйнятою в теорії лінійного програмування.

Всякий вектор x з простору R^n називається *планом* ЗЛП.

Рішення, яке задовольняє обмеженням (7.2) і (7.3), тобто міститься в області визначення D , називається *допустимим планом*. Сама область D всіх рішень обмежень (7.2) і (7.3), інакше *область допустимих рішень* (ОДР) ЗЛП, називається при цьому *областю допустимих планів*. Оптимальне рішення x^* , при якому значення цільової функції досягає екстремального значення, тобто рішення, що задовольняє умові $\max f(x)$ (або $\min f(x)$) $= f(x^*)$ називається *оптимальним планом*. Величина $f^* = f(x^*)$ називається *оптимальним значенням цільової функції*.

Рішенням ЗЛП називається пара (x^*, f^*) , що складається з оптимального плану і оптимального значення цільової функції, а *процес вирішення* полягає в знаходженні ОДР, тобто множини всіх

рішень системи обмежень (7.2) і (7.3), або області допустимих планів ЗЛП і процесу оптимізації для визначення (x^*, f^*) .

Переважає більшість відомих методів вирішення завдань лінійного програмування призначені для канонічних задач. Тому початковий етап рішення будь-якої загальної задачі лінійного програмування зазвичай пов'язаний з приведенням її до деякої еквівалентної канонічної задачі.

Загальна ідея переходу від ЗЗЛП до КЗЛП досить проста:

– обмеження у вигляді нерівностей перетворюються в рівняння за рахунок додавання фіктивних невід'ємних змінних $x'_i, (i = \overline{1, m})$, які одночасно входять в цільову функцію з коефіцієнтом 0, тобто не впливають на її значення;

– змінні, на які не накладено умова позитивності, представляються у вигляді різниці двох нових невід'ємних змінних: $x_j = \bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j \ (\bar{x}_j \geq 0, \bar{\bar{x}}_j \geq 0)$.

Проілюструємо застосування цих інструкцій на прикладі. Нехай задана задача лінійного програмування (D, f) у загальній формі з цільовою функцією:

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 \rightarrow \max,$$

і множиною допустимих планів D , визначеною системою рівнянь і нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7, \\ -3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 4x_5 \leq 2, \\ 3x_1 - 5x_3 + 6x_4 - 2x_5 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді відповідно до сформульованих правил еквівалентна канонічна задача матиме вигляд (D', f') , де:

$$f'(x') = 5x_1 + 3\bar{x}_2 - 3\bar{\bar{x}}_2 + x_3 + 2\bar{x}_4 - 2\bar{\bar{x}}_4 - 2\bar{x}_5 + 2\bar{\bar{x}}_5 + 0x'_1 + 0x'_2 \\ \rightarrow \max,$$

а множина D' визначена як:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4\bar{x}_2 - 4\bar{\bar{x}}_2 + 5x_3 = 7, \\ -3\bar{x}_2 + 3\bar{\bar{x}}_2 + 4x_3 - 5\bar{x}_4 + 5\bar{\bar{x}}_4 - 4\bar{x}_5 + 4\bar{\bar{x}}_5 + x'_1 = 2, \\ 3x_1 - 5x_3 + 6\bar{x}_4 - 6\bar{\bar{x}}_4 - 2\bar{x}_5 + 2\bar{\bar{x}}_5 + x'_2 = 4, \\ x_1 \geq 0, \bar{x}_2 \geq 0, \bar{\bar{x}}_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \bar{x}_4 \geq 0, \bar{\bar{x}}_4 \geq 0, \bar{x}_5 \geq 0, \bar{\bar{x}}_5 \geq 0, \\ x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0. \end{cases}$$

В реальних задачах часто на змінні накладаються обмеження виду $\beta_j \leq x_j \leq \gamma_j$, де $\beta_j \geq 0$ і $\gamma_j \geq 0$ (вони називаються двосторонніми обмеженнями). Розглянемо, як чинити в цьому випадку. Введемо змінну $x'_j = x_j - \beta_j$. Тоді буде $x'_j \geq 0$, що дає обмеження у стандартній формі. Вводячи додаткову невід'ємну змінну $x''_j = \gamma_j - x_j$, можна записати двостороннє обмеження $\beta_j \leq x_j \leq \gamma_j$ у вигляді:

$$x'_j + x''_j = \gamma_j - \beta_j, \quad x'_j \geq 0, \quad x''_j \geq 0 \quad (7.5)$$

Після того, як у вихідних співвідношеннях замість x_j буде підставлено вираз $x_j = x'_j + \beta_j$ і додано обмеження (7.5), завдання придбає канонічний вигляд.

Неважко помітити, що «платою» за перехід від загальної форми завдання лінійного програмування до канонічної є зростання її розмірності, що, за інших рівних умов, є фактором, що ускладнює процес вирішення.

7.2. Основні поняття лінійної алгебри і опуклого аналізу, що застосовуються в теорії математичного програмування

Коротко нагадаємо деякі фундаментальні визначення та теореми лінійної алгебри і опуклого аналізу, які широко застосовуються при вирішенні проблем як лінійного, так і нелінійного програмування.

Фундаментальним поняттям лінійної алгебри є *лінійний речовий простір* над полем R дійсних чисел. Під ним мається на увазі множина K , яка наділена внутрішнім законом $(+)$ – складання і зовнішнім законом $(\cdot)$ – множення на дійсне число з поля R , що мають такі властивості:

1. Додавання на множині K наділене внутрішнім законом комутативності групи. $\forall x \in K, \forall y \in K$ і $\forall z \in K$ маємо:

$$x + y = y + x;$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$\exists e \in K$, такий, що $x + e = e + x = x$ (нейтральний елемент відносно операції),

$\exists \bar{x} \in K$, такий що $\bar{x} + x = e$ (симетричний елемент відносно операції).

2. Зовнішній закон множення, таким що $\forall x \in K, \forall y \in K$ і $\forall \lambda \in R, \forall \mu \in R$ маємо:

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y;$$

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x;$$

$$\lambda \cdot (\mu x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x;$$

$$\varepsilon \cdot x = x, \text{ де } \varepsilon = 1 \text{ є нейтральний елемент множення в полі } R.$$

Елементи з векторного простору K називаються векторами (або точками), а його складові – координатами вектора.

Окремими випадками речових скінченновимірних лінійних просторів є: R^n – вектор $\vec{a}$, в якому є упорядкована сукупність будь-яких n дійсних чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$: $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, які є його координатами, а n називається розмірністю простору; V_3 – вектором $\vec{a}$, в якому є вільний вектор в геометричному просторі. Вільний вектор – множина колінеарних спрямованих відрізків в геометричному тривимірному просторі, рівних по модулю і спрямованих в одну сторону. Встановивши ізоморфізм між лінійними просторами V_3 і R^3 над полем R за допомогою декартової прямокутної системи координат або ортонормованого базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ у тривимірному геометричному просторі в R^3 вільний вектор $\vec{a}$ відображається впорядкованою трійкою чисел (a_1, a_2, a_3) .

Вектор $\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_m \vec{a}_m$, що належить тому ж векторному простору K називається **лінійною комбінацією** системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ або говорять також, що вектор $\vec{b}$, розкладений по векторах $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ з коефіцієнтами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, або що вектор $\vec{b}$, породжений системою векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$. Вся множина векторів, породжених лінійної комбінацією системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називається її **лінійною оболонкою**. Лінійна оболонка будь-якої системи векторів може бути породжена тільки всіма лінійно незалежними векторами, що містяться в даній системі. Кількість всіх лінійно незалежних векторів в системі називається її **рангом**.

Система векторів лінійного простору $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називається

лінійно залежною, якщо існують такі коефіцієнти $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, нерівні одночасно нулю, що їх лінійна комбінація $\beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_m \vec{a}_m$ дорівнює нульовому вектору (вектору, всі координати якого дорівнюють нулю). В іншому випадку систему $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називають **лінійно незалежною**, тобто лінійна комбінація даних векторів може бути рівною нульовому вектору тільки при нульових коефіцієнтах $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$.

Максимально можлива кінцева кількість n векторів, які можуть утворювати лінійно незалежну систему в даному лінійному просторі, називають **розмірністю кінцевомірного простору**, а будь-яку систему $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ лінійно незалежних векторів в кількості, що дорівнює розмірності, – **базисом простору**. Основна властивість базису полягає в тому, що будь-який вектор $\vec{a}$ лінійного простору може бути представлений у вигляді лінійної комбінації векторів базису цього простору і це уявлення єдине: $\vec{a} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \dots + \gamma_n \vec{e}_n$. Коефіцієнти $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ розкладання вектора $\vec{a}$ по базису називаються його **координатами по базису**. Базис дозволяє для будь-якого кінцевомірного речового лінійного простору розмірності n над полем R , якої би природи воно не було, встановити ізоморфізм з речовим лінійним простором R^n . І тому, коли вивчаються тільки їх властивості, пов'язані з операціями додавання і множення на число, їх можна замінювати лінійними просторами R^n .

Будь-яка підмножина даного лінійного простору, яка сама має властивості лінійного простору, називається його **лінійним підпростором**. Наприклад:

- R^m є векторний підпростір простору R^n для будь-якого $m < n$ і,

у свою чергу, R^n є підпростір R^{n+1} ;

- V_1 – лінійний простір колінеарних вільних векторів є підпростір V_2 – лінійного простору компланарних вільних векторів, який, у свою чергу, є підпростір V_3 ;
- лінійна оболонка будь-якої ненульової системи векторів в лінійному просторі є підпространством цього простору.

Множина H , що отримується зсувом деякого кінцевомірного лінійного простору $L \subset R^n$ на вектор $\vec{a} \in R^n$: $H = L + \vec{a}$, називається **аффінною множиною (простором)**. Якщо фундаментальною властивістю будь-якого лінійного простору або підпростору є приналежність йому нульового вектора, то для афінної множини це не завжди так. На координатній площині xOy в геометричному просторі прикладом лінійного підпростору V_1 є пряма, що проходить через початок координат, а афінної множини – будь-яка пряма на цій площині. В орієнтованому геометричному просторі хуз підпространством V_2 є площина, що проходить через початок координат, а афінної множини – будь-яка площина в геометричному просторі. Характеристичною властивістю афінної множини є приналежність їй будь-якої прямої, що з'єднує дві будь-які його точки. Розмірність афінної множини співпадає з розмірністю того лінійного підпростору, зсувом якого воно отримано.

Аффінною множиною є і множина рішень спільної, невизначеної, неоднорідної системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з речовими коефіцієнтами і n невідомими $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$.

Множина рішень H такої системи може бути представлена у вигляді $H = \vec{y}_1 + L$, де $\vec{y}_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1) \in R^n$, – часткове

рішення неоднорідної системи, L – множина рішень відповідної однорідної системи. Множина L рішень однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь складає лінійний підпростір в лінійному просторі R^n над полем R розмірністю $n - r$, де ранг основної матриці розмірністю $m \times n$ системи $r < n$. Будь-яке рішення $\vec{y}_0 \in L$ записується у вигляді розкладання його по базисним (фундаментальним) рішенням: $\vec{y}_{01}, \vec{y}_{02}, \vec{y}_{0(n-r)} \in L$: $\vec{y}_0 = \mu_1 \vec{y}_{01} + \mu_2 \vec{y}_{02} + \dots + \mu_r \vec{y}_{0(n-r)}$.

Отже, множина рішень H є афінною множиною в просторі R^n , так як вона отримана в результаті зсуву лінійного простору $L \subset R^n$ на вектор $\vec{y}_1 \in R^n$.

Якщо розглядається деякий лінійний простір R^n , то афінні множини розмірності 1, що належать цьому простору, називаються *прямими*, а розмірності $(n - 1)$ – *гіперплощинами*. Так, R^1 і R^3 є відповідно прямою і гіперплощиною для R^4 . Будь-яка гіперплощина ділить лінійний простір на два півпростори.

Множина V векторів (точок) лінійного простору R^n називається *опуклою*, якщо вона містить відрізок прямої, що з'єднує дві її будь-які точки, або, іншими словами, з того, що $\forall \vec{a} \in V$ и $\forall \vec{b} \in V$, випливає, що $\vec{x} = (1 - \lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b} \in V$, де $0 \leq \lambda \leq 1$. Афінна множина є опуклою множиною.

Лінійна комбінація $\beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_m \vec{a}_m$ векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називається *опуклою*, якщо $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \geq 0$ і $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m = 1$.

Множину, що містить всі можливі опуклі комбінації точок деякої множини M , називають **опуклою оболонкою** даної множини. Можна показати, що опукла оболонка множини M є найменшою **опуклою множиною**, що містить M .

Опукла оболонка кінцевої множини точок називається **опуклим багатогранником**, а непорожній перетин кінцевого числа замкнутих напівпросторів – **багатогранною опуклою множиною**. На відміну від опуклого багатогранника вона може бути необмеженою.

Точка δ опуклої множини V називається його **кутовою (крайньою)** точкою, якщо вона не є внутрішньою точкою ні для якого відрізка, кінці якого належать множині V . Кутові точки опуклого багатогранника є його **вершинами**, а сам він – **опуклою оболонкою** своїх вершин.

Множина K називається **конусом** з вершиною в точці x_0 , якщо $x_0 \in K$, і з того, що деяка точка x_1 належить K ($x_1 \in K$), випливає, що в K міститься і промінь, що починається в x_0 і проходить через x_1 , тобто:

$$\{x \in R^n | x = (1 - \mu)x_0 + \mu x_1, \mu \geq 0\} \subset K$$

або:

$$\{x \in R^n | x = x_0 + \mu(x_1 - x_0), \mu \geq 0\} \subset K.$$

Опукла оболонка кінцевої множини променів, що виходять з однієї точки, називається **багатограним опуклим конусом** з вершиною в даній точці.

7.3. Графічний метод рішення ЗЛП на координатній площині $x_1 O x_2$.

Розглянемо наступний приклад. Нехай дана задача максимізації значення лінійної цільової функції:

$$f(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

область D допустимих планів якої задається наступною системою нерівностей:

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

Так як кількість змінних в нерівностях, що задають область допустимих планів D завдання, дорівнює двом x_1 і x_2 , то її можна зобразити на координатній площині $x_1 O x_2$ (рис. 12).

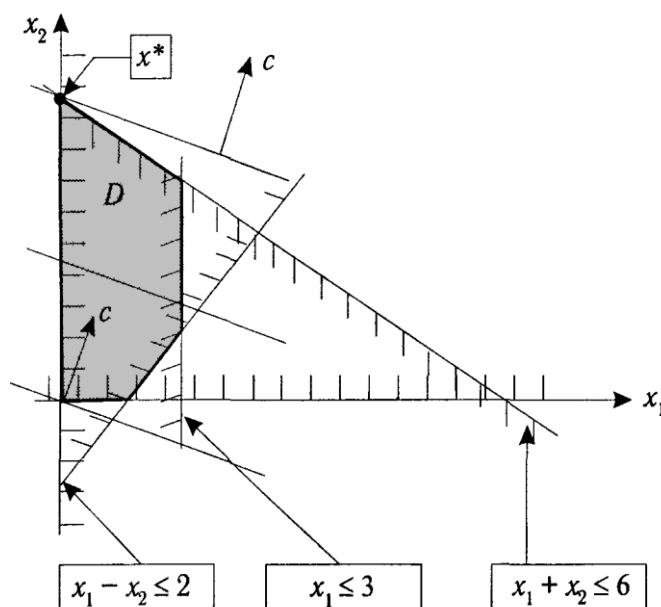


Рис. 12

На рис. 12 показано, що кожна нерівність визначає деяку напівплощину. Відповідні області для кожного обмеження відзначені штрихами. Визначення цих областей розглянемо на прикладі

нерівності $x_1 - x_2 \leq 2$. Поклавши рівність в цій умові: $x_1 - x_2 = 2$, ми тим самим на координатній площині $x_1 O x_2$ визначимо пряму лінію. Найлегше побудувати цю пряму можна по двох точках, в якості яких найзручніше вибрати точки перетину прямої з осями координат. В даному випадку це: $(x_1 = 2; 0)$ і $(0; x_2 = -2)$. Ця побудована пряма розбиває всю площину на дві півплощини. В одній її частині $x_1 - x_2 \leq 2$, а в іншій навпаки $x_1 - x_2 \geq 2$. Дізнатися, в який півплощині який знак має місце найпростіше, подивившись, якій нерівності задовольняє якась точка площини, наприклад, початок координат, тобто точка $(0,0)$. У даному випадку ця точка задовольняє нерівності $x_1 - x_2 \leq 2$. Отже, і всі крапки напівплощини, що містить точку $(0,0)$ задовольняють цій нерівності. Перетин D даних напівплощин (тобто множина точок, які одночасно належать кожній з них) є областю допустимих планів задачі. Слід звернути увагу на обмеження $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Вони з усієї координатної площини $x_1 O x_2$ вирізають лише її першу чверть. Поведінка в області D значення цільової функції $f(x) = x_1 + 3x_2$ в рамках двовимірної ілюстрації може бути охарактеризована за допомогою ліній рівня.

Нагадаємо, що **лінією рівня функції** називається множина точок з її області визначення, в яких функція приймає одне і те ж фіксоване значення. Вектор, орієнтований перпендикулярно лініям рівня, що вказує напрямом найбільш швидкого зростання значення $f(x)$ скалярної функції, називається **градієнтом функції** і позначається $\nabla f(x)$ (або $\text{grad } f(x)$). Для числової функції f багатьох змінних

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вектор $\nabla f(x)$ являє собою n -мірний вектор з координатами $\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right).$$

Для числової лінійної функції f двох змінних x_1 і x_2 лінія рівня являє собою пряму лінію на координатній площині $x_1 O x_2$, і якщо вона задається рівнянням $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \text{const}$, то координати градієнта $\nabla f(x)$ є коефіцієнти лінійної комбінації цієї функції: $\nabla f(x) = (c_1, c_2) = c$.

Таким чином, з геометричної точки зору завдання максимізації зводиться до визначення такої точки області D , через яку проходить лінія рівня, що відповідає найбільшому з можливих значень. Останнє означає, що для знаходження точки екстремуму в задачі лінійного програмування ми повинні спочатку побудувати лінію рівня для деякого довільного значення цільової функції, наприклад, що проходить через початок координат, поклавши $f(x) = 0$. Потім необхідно здійснювати її паралельне пересування (так, щоб вона залишалася перпендикулярній вектору $\nabla f(x) = c = (c_1, c_2)$ до тих пір, поки не досягнемо такої точки області допустимих планів D , з якої зміщення в напрямку вектора $\nabla f(x) = c = (c_1, c_2)$ було б неможливо. Такий метод вирішення отримав назву **графічного або першої геометричної інтерпретації**.

Зауважимо, що рішення задачі пошуку мінімуму лінійної функції здійснюється аналогічно, з тією лише різницею, що рух по лініях рівня повинно проводити в напрямку, протилежному градієнту

цільової функції, тобто по вектору $-\nabla f(x) = (-c_1, -c_2)$. Як приклад розглянемо задачу про фарбу.

Для фарбування приміщення необхідно купити 15 кг фарби. Цю фарбу можна купити в банках двох типів: по 1,5 кг вартістю 10 гривень кожна або в банках вагою 0,9 кг вартістю 8,5 гривень. Для перевезення використовується ящик, в який може вміститися 8 банок першого типу або 25 банок другого типу.

Необхідно дати математичне формулювання завдання мінімізації вартості покупки. Знайти, скільки цілих банок кожного типу треба купити.

Необхідно дати графічну інтерпретацію рішення. Порівняти з рішенням, яке вийде, якщо банка фарби першого типу буде коштувати 17 гривень.

Рішення

Позначимо x_1 – кількість банок першого типу, x_2 – кількість банок другого типу. Так як кількість купленої фарби не повинна бути менше 15 кг, то $1,5x_1 + 0,9x_2 \geq 15$.

Кожна банка першого типу займає $1/8$ об'єму ящика, а другого $1/25$ частину, тому обмеження на об'єм ящика можна виразити таким чином: $\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{25}x_2 \leq 1$.

Вартість покупки позначимо L , вона дорівнює $L = 10x_1 + 8,5x_2$. Отримуємо завдання (D, f) ЛП, задане математичною моделлю:

$$f(x) = L = 10x_1 + 8,5x_2 \rightarrow \min,$$

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 \left| \begin{array}{l} 1,5x_1 + 0,9x_2 \geq 15, \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{25}x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

Якщо банки розкривати не можна, то необхідно додати обмеження: x_1 і x_2 – натуральні числа. У цьому випадку це завдання лінійного цілочисельного програмування.

Розглянемо рівності:

$$1,5x_1 + 0,9x_2 = 15 \text{ або } \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{16,7} = 1,$$

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{25} = 1.$$

Це канонічні рівняння прямих ліній. Побудуємо їх (рис. 13).

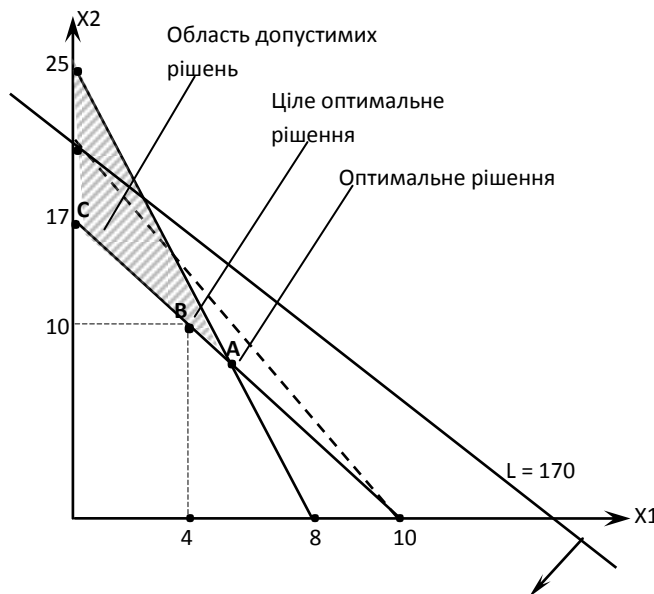


Рис. 13

Перевіряючи приналежність точки $(0,0)$ півплощини, заданої кожною з нерівностей визначаємо область допустимих рішень. На рис. 13, ця область заштрихована.

Зобразимо лінію постійного рівня цільової функції $L = \text{const}$. Візьмемо, наприклад, $L = 170$, отримаємо рівняння прямої $170 = 10x_1 + 8,5x_2$. Наведемо його до канонічної форми і побудуємо $\frac{x_1}{17} + \frac{x_2}{20} = 1$.

Переконаємося, що якщо $L \rightarrow \min$, то ця пряма рухається паралельно самій собі до початку координат. Оптимальною точкою буде точка виходу цієї прямої з області допустимих рішень.

Очевидно, що точка A є оптимальною для випадку, коли банки можна розкривати (x_1 і x_2 можуть бути нецілі), а точка B – оптимальна точка для цілого рішення.

Знайдемо координати точки A , вирішивши спільно рівняння:

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 0,9x_2 = 15, \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{25}x_2 = 1. \end{cases}$$

отримаємо; $x_1^* = 5,8$; $x_2^* = 7,1$; $L^* = 118,35$.

Зауважимо, що для цілого рішення «округлене» рішення $x_1 = 6$; $x_2 = 7$ не є допустимим (не задовольняє обмеженню $\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{25}x_2 \leq 1$).

Оптимальний цілий розв'язок, який є останнім при виході прямої рівня $f(x) = 10x_1 + 8,5x_2 = \text{const}$, знаходимо з цілих допустимих рішень. Це точка B з координатами $x_1 = 4$; $x_2 = 10$; $L = 125$.

Якщо вартість банки фарби першого типу підвищиться до 17 гривень, то цільова функція буде $f(x) = L = 17x_1 + 8,5x_2 \rightarrow \min$.

Побудуємо лінію постійного рівня для $L = 170$: $\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{20} = 1$. На рис. 13 ця лінія зображена пунктиром.

Очевидно, що оптимальна точка буде в точці C : $x_1 = 0$; $x_2 = 16,6$.

Ціле оптимальне рішення буде $x_1 = 0$; $x_2 = 17$; $L' = 144,5$.

Відповідь:

1) Якщо банки можна розкривати, то необхідно взяти:

- 5,8 банок першого типу;
- 7,1 банок другого типу;
- вартість $L^* = 118,35$.

2) Якщо банки розкривати не можна, то необхідно взяти:

- процес 4 банки першого типу;
- 10 банок другого типу;
- вартість $L = 125$.

Якщо вартість банки першого типу стане 17 гривень, то оптимальне рішення зміниться: $x_1 = 0$; $x_2 = 17$; $L' = 144,5$.

На рис. 12 і рис. 13 зображені деякі окремі випадки, для яких рішення ЗЛП досягається в кутовій точці області допустимих планів D , яка представляє собою обмежений опуклий багатокутник. Неважко уявити, що можливі й інші варіанти. Вони зображені на рис. 14.

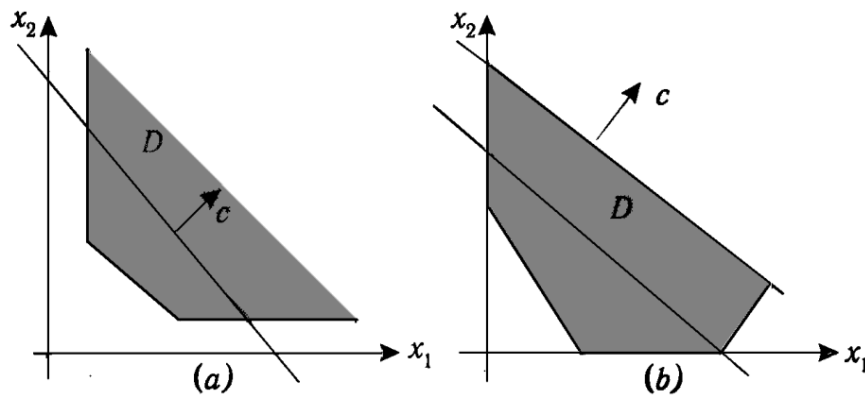


Рис. 14

Рис. 14(a) ілюструє ситуацію необмеженості області допустимих планів D цільової функції, тобто скільки б ми не переміщалися по лініях рівня в напрямку вектора $\nabla f(x) = (c_1, c_2) = c$, значення $f(x)$ цільової функції буде зростати. Подібна ситуація, наприклад, вийде, якщо в розглянутому вище прикладі (рис. 8) прибрати обмеження $x_1 + x_2 \leq 6$. Частина, що залишилася, буде необмеженим опуклим багатокутником.

У разі, зображеному на рис. 14(b), лінія рівня, що відповідає максимальному значенню $f(x)$, стосується межі множини D , і, відповідно, всі точки, що лежать на цій межі, є оптимальними планами.

На прикладі розглянутих вище завдань сформулюємо *алгоритм графічного рішення подібного типу завдань лінійного програмування (в тому числі цілочисленного)*:

1. На площині задати систему координат $x_1 O x_2$ і побудувати на ній прямі лінії для кожної нерівності системи обмежень при заміні її на рівність.

2. Знайти на координатній площині область допустимих рішень (планів) D системи обмежень задачі. Подальше рішення можливо якщо ОДР обмежена.

3. Побудувати пряму рівня для заданого значення цільової функції $f(x)$ і на ній вказати напрямок переміщення її у напрямку вектора $\text{grad } f(x)$ в разі, якщо завдання вирішується на максимум цільової функції і в протилежному напрямку, якщо – на мінімум.

4. Перемістити лінію рівня цільової функції у напрямку $\text{grad } f(x)$ (або в протилежному напрямку для завдання на мінімум) через область D допустимих рішень, щоб вона з січної стала дотичною до ОДР і проходила через найбільш віддалену (або найбільш близьку) від початку координат точку. Ця точка буде точкою екстремуму, тобто рішенням завдання.

Якщо лінія рівня цільової функції паралельна одній зі сторін ОДР, то екстремум досягається у всіх точках відповідної сторони, а завдання лінійного програмування має незліченну множину рішень.

5. Знайти координати точки екстремуму і значення цільової функції в ній. Якщо отримані значення нецілочисельні, а в задачі потрібно знайти цілочисельне рішення, то необхідно перейти до наступного кроку.

6. Виділити в ОДР щодо точки екстремуму область D^* , яка містить оптимальне цілочисельне рішення задачі і обмежену округленими цілочисельними значеннями координат точки екстремуму.

7. Знайти кутові точки області D^* з цілими значеннями шуканих змінних, підставити в рівняння цільової функції і знайти її значення.

Максимальне з отриманих значень цільової функції і буде рішенням завдання.

У всіх розглянутих ілюстраціях допустимі плани ЗЛП представлялися у вигляді деякої багатогранної опуклої множини на площині. Таке їх подання в літературі отримало назву *першої геометричній інтерпретації завдання лінійного програмування*.

Зауважимо також, що аналогічним чином можуть бути побудовані інтерпретації ЗЛП для випадку тривимірного простору R^3 , де множині D буде відповідати певний обмежений або необмежений багатогранник, а поведінка цільової функції буде характеризуватися поверхнями (площинами) рівня.

Незважаючи на свою очевидну обмеженість, графічний метод рішення ЗЛП часто виявляється корисним. Зокрема, він може бути застосований не лише до завдань з двома змінними та обмеженнями у вигляді нерівностей, але і до канонічних завдань виду (7.4), у яких $n - r = 2$, де n – кількість змінних, а r – ранг матриці A обмежень – кількість лінійно незалежних рядків або стовпців в матриці.

Нехай $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ є значення цільової функції КЗЛП, а область допустимих планів D задається системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

[illegible]

за умови, що $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Згідно з умовою ранг r основної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ дорівнює $n - 2$. Отже, в цій системі $n - 2$ базисні

змінні, коефіцієнти при яких становлять базисний мінор матриці A , можна висловити через лінійні функції двох вільних змінних, коефіцієнти яких не входять в базисний мінор. Нехай цими вільними змінними є x_1 і x_2 , тоді, розв'язавши систему щодо базисних змінних, отримаємо $x_3 = \varphi_1(x_1, x_2)$, $x_4 = \varphi_2(x_1, x_2)$, ..., $x_n = \varphi_{n-2}(x_1, x_2)$, де $\varphi_1(x_1, x_2)$ – лінійні невід'ємні функції. Підставивши ці значення в цільову функцію, і провівши перетворення, ми отримаємо еквівалентну задачу з цільовою функцією двох змінних $f'(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, яку можна вирішити графічно.

Перш ніж перейти до завдань з будь-якою кількістю змінних сформулюємо деякі теореми, що відображають фундаментальні властивості задач лінійного програмування і лежать в основі методів їх вирішення. Вони по суті узагальнюють, у випадку задач з будь-якою кількістю змінних, ті властивості, які ми спостерігали в двовимірному випадку:

Теорема 7.3.1. Якщо цільова функція f приймає максимальне значення в деякій точці множини допустимих планів D , то вона приймає це значення і в деякій кутовій точці даної множини;

Теорема 7.3.2. Якщо цільова функція f приймає максимальне значення в декількох точках множини D , то вона приймає це ж значення в будь-якій точці, що є їх опуклою комбінацією.

7.4. Базисні рішення і друга геометрична інтерпретація канонічної ЗЛП

Розглянемо канонічну задачу лінійного програмування:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max;$$

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{.....} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\};$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Позначимо через a_j стовпці матриці обмежень

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і будемо розглядати їх як вектори простору}$$

$R^m: a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}), \quad j = \overline{1, n}.$ Тоді кожному допустимому плану КЗЛП – n -мірному вектору $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ – відповідає невід’ємна лінійна комбінація стовпців $a_j, j = \overline{1, n}$, яка рівна стовпцю $b \in R^m$.

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b. \quad (7.6)$$

Таке уявлення обмежень КЗЛП зазвичай називають *векторною формою запису*. У координатній матричній формі рівність (7.6) в просторі вектор-рядків має вид $xA = b$ (тут x – матриця рядок розміру $1 \times n$, b – матриця стовпець розміру $m \times 1$). Вектори a_j , $j = \overline{1, n}$ будемо називати *векторами вимог (умов)* завдання (D, f) , вектор b – *вектором обмежень*, а матрицю A – *матрицею векторів вимог (умов)*. Множина всіх невід'ємних лінійних комбінацій стовпців a_j з геометричної точки зору може бути представлена як багатогранна випуклість, натягнута на систему векторів a_j в просторі

R^m , або як підмножина лінійної оболонки, породженої системою векторів a_j , $j = \overline{1, n}$ з невід'ємними коефіцієнтами.

Відповідно, питання про існування допустимого плану завдання (D, f) рівнозначне питанню про приналежність вектора b даному конусу або лінійної оболонки, породженої системою векторів a_j , $j = \overline{1, n}$, а компоненти x_j деякого допустимого плану $x \in D$ є не чим іншим, як коефіцієнтами розкладання вектора обмежень задачі b по векторах вимог a_j .

Таке уявлення КЗЛП отримало назву *другої геометричної інтерпретації*.

Надалі без обмеження спільності можемо припускати, що число рівнянь m , які задають множину допустимих планів D , менше або дорівнює числу змінних n задачі ($m \leq n$) і дорівнює рангу матриці A системи обмежень. Дійсно, якщо це не так, то або система рівнянь обмежень $Ax = b$ (тут x і b – матриці стовпці розміру $n \times 1$ і $m \times 1$, відповідно) несумісна (і, отже, множина D пуста), або містить надлишкові (лінійно залежні) рівняння.

Отже, ранг матриці A системи обмежень дорівнює m , отже, в системі вектор стовпців $a_1, a_2, \dots, a_n$ міститься m лінійно незалежних стовпців матриці A і вони утворюють базис в просторі R^m , і для подання вектора b у вигляді лінійної комбінації досить лише цих лінійно незалежних стовпців, а не всіх вектор-стовпців матриці A системи обмежень так, як це представлено в розкладанні (7.6). Це означає, що інші стовпці увійдуть у дане розкладання (7.6) з нульовими коефіцієнтами. Якщо до того ж коефіцієнти лінійної

комбінації виявляться невід'ємними, то ми отримуємо так званий базисний допустимий план x , у якого не більше m компонентів відмінні від нуля. Сформулюємо визначення базисного плану більш строго, оскільки це одне з фундаментальних понять теорії лінійного програмування.

► Нехай задана деяка канонічна ЗЛП (D, f) , $A = (a_{ij})$ – матриця системи обмежень задачі розмірності $m \times n$, і $\theta = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}\}$ – лінійно незалежна система стовпців матриці A , утворююча базис R^m . Позначимо множину номерів стовпців, що входять в систему θ , через $N(\theta) = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. План x називається *базисним планом* задачі (D, f) , якщо його компоненти, що відповідають базисним стовпцям і називаються базисними компонентами, більше або дорівнюють нулю ($x_j \geq 0, j \in N(\theta)$), а всі інші компоненти (*небазисні*) – дорівнюють нулю ($x_j = 0, j \notin N(\theta)$).

► Базисний план x називається *невиродженим*, якщо всі його базисні компоненти строго позитивні, і *виродженим* в протилежному випадку.

На закінчення сформулюємо теорему, яка трактує поняття базисного плану в термінах першої геометричної інтерпретації КЗЛП.

Теорема 7.4.1. Кожен допустимий базисний план є кутовою точкою множини допустимих планів D .

Справедливо і зворотне твердження:

Якщо x – кутова точка множини D , то вона є допустимим базисним планом задачі (D, f) .

На завершення параграфа необхідно відзначити практичне значення встановленого зв'язку між кутовими точками і допустимими базисними рішеннями. Він дозволяє формалізувати (і тим самим істотно спростити) процес переходу від однієї кутової точки до іншої або, що те ж саме, переходу від одного допустимого базисного плану до іншого і служить основою найбільш відомого і широко застосовуваного на практиці для вирішення загального завдання ЛП симплекс-методу.

Метод є універсальним, так як дозволяє вирішити практично будь-яке завдання лінійного програмування.

7.5. Симплекс-метод знаходження оптимального рішення канонічної ЗЛП

7.5.1. Основні етапи симплекс-методу

Симплекс-метод є класичним методом вирішення ЗЛП, що отримав також в літературі назву *методу послідовного поліпшення плану*. Оптимальне рішення ЗЛП відшукується шляхом послідовного цілеспрямованого перебору вершин багатокутника допустимих рішень або, що те ж саме, шляхом переходу від одного допустимого базисного плану до іншого.

Ідея такого переходу від одного допустимого базисного плану до іншого, при якому відбувається «покращення» значення цільової функції, може бути продемонстрована за допомогою рис. 15 для випадку, коли ранг матриці A системи обмежень $m = 2$.

Якщо вектор обмежень b належить конусу, натягнутому на деякі два базисних вектора умов $\{a_{j_1}, a_{j_2}\}$, то існує такий базисний план x з базисними компонентами x_{j_1}, x_{j_2} , що $b = x_{j_1} a_{j_1} + x_{j_2} a_{j_2}$. Зрозуміло,

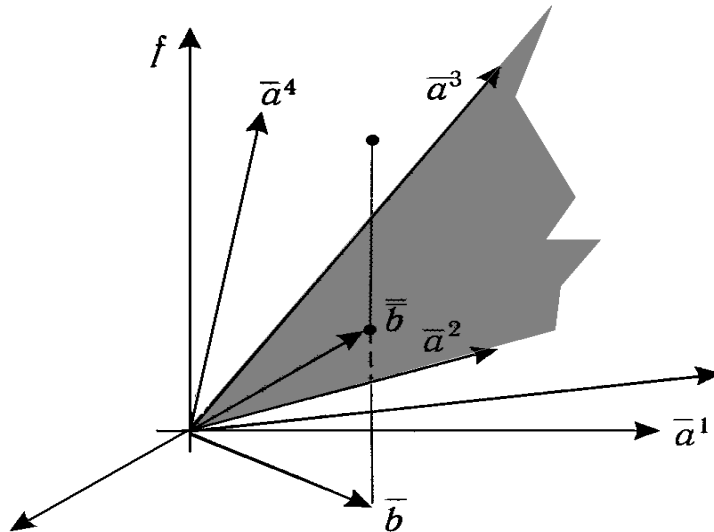


Рис. 15

таких планів може бути декілька, залежно від вибору системи базисних векторів. Щоб розрізняти їх за відповідною величиною значення цільової функції $f(x) = c_{j_1} x_{j_1} + c_{j_2} x_{j_2}$, вводяться так звані *розширені вектори умов і обмежень*. У загальному випадку розширений стовпець умов $\bar{a}_j$ отримуємо з'єднанням коефіцієнта цільової функції c_j і стовпця a_j :

$$\bar{a}_j = (c_j, a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}), \quad (7.7)$$

розширений вектор обмежень визначимо як $\bar{b} = (0, b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Надалі для зручності нумерації елементів будемо вважати, що коефіцієнт цільової функції c_j є нульовим елементом j -го розширеного стовпця умов, тобто $a_{0j} = c_j$. При зображенні розширених векторів нульова координата відкладається вздовж вертикальної осі – *осі аплікату*.

Розглянемо також вектор:

$$\overline{\overline{b}} = x_{j_1} \overline{a}_{j_1} + x_{j_2} \overline{a}_{j_2}, \dots, x_{j_m} \overline{a}_{j_m}. \quad (7.8)$$

Геометрично визначення вектора $\overline{\overline{b}}$ означає, що він належить лінійній оболонці системи векторів $\overline{a}_{j_1}, \overline{a}_{j_2}, \dots, \overline{a}_{j_m}$, а вектор $\overline{b}$ служить його проекцією. Нульова координата $\overline{\overline{b}}_0$ вектора $\overline{\overline{b}}$ має вигляд:

$$\overline{\overline{b}}_0 = x_{j_1} a_{0j_1} + x_{j_2} a_{0j_2}, \dots, x_{j_m} a_{0j_m} = f(x), \quad (7.9)$$

і дорівнює значенню цільової функції для обраного базисного плану.

З геометричної ілюстрації виходить, що для вирішення завдання ми повинні серед векторів a_j вибрати такий набір $\{a_{j_1}, a_{j_2}\}$, щоб пряма, проведена через кінець вектора $\overline{b}$ паралельно осі аплікат, перетинала конус, натягнутий на систему відповідних розширених стовпців $\{\overline{a}_{j_1}, \overline{a}_{j_2}\}$, в «найвищій» точці.

На рис. 15 виділено конус, натягнутий на систему розширених стовпців $\{\overline{a}^2, \overline{a}^3\}$, що відповідають поточному допустимому базису. Неважко помітити, що даний базис не є оптимальним, наприклад, для базиса $\{\overline{a}^3, \overline{a}^4\}$ точка перетину відповідного конуса і прямої буде знаходитися вище. Можна, навпаки, вказати базис з «найгіршим» значенням цільової функції: $\{\overline{a}^1, \overline{a}^2\}$.

Нарешті, розглянута геометрична інтерпретація КЗЛП ілюструє і загальну ідею критерію, який використовується в симплекс-методі для визначення оптимальності (або неоптимальності) поточного плану: якщо існують вектори-стовпці, що лежать вище площини, що

проходить через вектори поточного базису, то він не є оптимальним і може бути «поліпшеним».

З обчислювальної точки зору критерій оптимальності в симплекс-методі реалізується через знаходження спеціальних оцінок для небазисних векторів-стовпців щодо поточного базису.

Для зручності подальшого викладу введемо деякі позначення. З огляду на те, що симплекс-метод являє собою деякий ітеративний обчислювальний процес, то через q будемо позначати номер чергової (поточної) ітерації. Відповідно, набір базисних стовпців, одержуваних на q -й ітерації, буде позначатися як $\beta^{(q)}$:

$$\beta^{(q)} = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}\}. \quad (7.10)$$

Для того, щоб було легше відрізнити номер ітерації q від номерів компонентів матриць і векторів, він поміщений вгорі і взятий в круглі дужки. Нумери стовпців, що входять в базис, позначимо через $N(\beta^{(q)})$, а саме:

$$N(\beta^{(q)}) = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}. \quad (7.11)$$

При цьому $N_r(\beta^{(q)}) = j_r$ – номер стовпця, що займає r -у позицію в базисі. Тоді поточний базисний план x має вигляд: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_j = 0$ для $j \notin N(\beta^{(q)})$.

Позначимо через $\Delta(\beta^{(q)})$ матрицю, складену з стовпців $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}\}$, що утворюють базис, через $\bar{\Delta}(\beta^{(q)})$ матрицю, утворену з відповідних розширених стовпців і доповнену зліва стовпцем спеціального виду:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(q)}) = \begin{pmatrix} -1 & c_{j_1} & c_{j_2} & \dots & c_{j_m} \\ 0 & a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{mj_1} & a_{mj_2} & \dots & a_{mj_m} \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

а через $\Delta^{-1}(\beta^{(q)})$, $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$ – матриці, зворотні по відношенню до них. Також представляється зручним ввести окремі позначення для елементів матриці $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$: $\delta_i(\beta^{(q)})$ – i -й рядок матриці $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$, $i \in \overline{0, m}$; $\delta_{ij}(\beta^{(q)})$ – елемент матриці $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$, що знаходиться в i -му рядку j -го стовпчика, $i \in \overline{0, m}$, $j \in \overline{0, m}$.

Розширений вектор обмежень $\bar{b}$ представляється у вигляді лінійної комбінації розширених векторів умов з коефіцієнтами, рівними базисним компонентам поточного базисного плану:

$$\bar{b} = x_{j_1} \bar{a}_{j_1} + x_{j_2} \bar{a}_{j_2} + \dots + x_{j_m} \bar{a}_{j_m}.$$

Якщо інтерпретувати компоненти векторів $\bar{a}_j$ і $\bar{b}$ як координати в ортогональному базисі, то їх стовпці координат щодо довільного базису $\beta^{(q)}$, доповненого одиничним вектором $(-1, 0, \dots, 0)$, спрямованим протилежно осі аплікат, матимуть вигляд:

$$\bar{a}_j(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{a}_j, \quad (\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{b}, \quad (7.13)$$

а для розширеної матриці завдання в цілому можна записати:

$$\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}.$$

Нульовий рядок даної матриці $a_{0j}(\beta^{(q)})$ містить координати розширених векторів умов по осі аплікат. Згідно з побудовою, елементи цього рядка мають такі знаки:

$a_{0j}(\beta^{(q)}) < 0$ – для розширених векторів умов, розташованих вище площини, натягнутої на систему розширених базисних векторів;

$a_{0j}(\beta^{(q)}) > 0$ – для розширених векторів умов, розташованих нижче площини, натягнутої на систему розширених базисних векторів;

$a_{0j}(\beta^{(q)}) = 0$ – для розширених базисних векторів.

Підсумовуючи сказане, сформулюємо **критерій оптимальності допустимого базисного плану** в симплекс-методі:

► план є оптимальним, якщо для всіх $j \in \overline{0, n}$; $a_{0j}(\beta^{(q)}) \geq 0$, і неоптимальним в іншому випадку, тобто, якщо існує таке $l \in \overline{0, n}$, що $a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0$.

Значення $a_{0j}(\beta^{(q)})$ також називають *оцінками* стовпців матриці A щодо поточного базису або симплекс-різницями.

У разі неоптимальності поточного базису в алгоритмі симплекс-методу здійснюється перехід до наступного базису. Це робиться за рахунок виведення одного стовпчика з базису і введення іншого. Для забезпечення поліпшення значення цільової функції в базис повинен бути введений вектор-стовпець, що має негативну оцінку. Якщо таких стовпців декілька, то для введення *рекомендується вибирати стовпець, що має максимальну по модулю оцінку*. Відзначимо, що дане правило носить відносний характер і не гарантує найкращого вибору стовпчика, що вводиться. Одночасно на цій стадії потрібно прийняти рішення про те, який стовпець слід вивести з базису. Зробити це потрібно таким чином, щоб новоформований базис опинився допустимим. Дана вимога може бути легко проілюстрована для випадку $m = 2$. Наприклад, на рис. 16 вектори $\{a^2, a^3\}$ утворюють допустимий базис, а вектори $\{a^3, a^4\}$ – неприпустимий, так як

розкладання b по a^3 і a^4 містить один негативний компонент плану, що суперечить умовам КЗЛП.

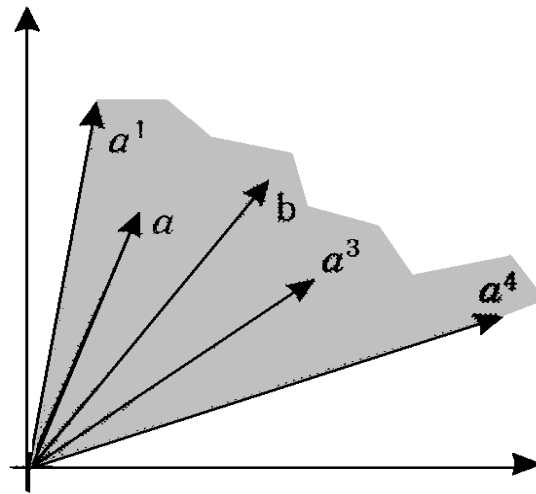


Рис. 16

Можна довести, що допустимість базису, до якого здійснюється перехід, забезпечується таким *правилом виведення стовпця з поточного базису*:

► для стовпця l , який претендує на введення в базис, і вектора обмежень b розглядаються співвідношення:

$$\lambda_i = \frac{b_i(\beta^{(q)})}{a_{il}(\beta^{(q)})}, \text{ де } i \in \{\overline{1, m} | a_{il}(\beta^{(q)}) > 0\}.$$

i визначається такий рядок r , що:

$$\lambda_r = \min_i \{\lambda_i\}. \quad (7.14)$$

Отриманий індекс r визначає номер стовпця в $N(\beta^{(q)})$, виведеного з базису, а саме, $N_r(\beta^{(q)})$.

Таким чином, якщо базис на q -й ітерації включав стовпці з номерами $N(\beta^{(q)}) = \{j_1, j_2, \dots, j_{r-1}, j_r, j_{r+1}, \dots, j_m\}$, то базис на ітерації $q + 1$ складатиметься зі стовпців з номерами: $N(\beta^{(q)}) = \{j_1, j_2, \dots, j_{r-1}, j_l, j_{r+1}, \dots, j_m\}$.

Окремо слід обговорити той випадок, коли стовпчик $a_l(\beta^{(q)})$, який претендує на введення в базис, не містить позитивних компонентів ($a_l(\beta^{(q)}) \leq 0$). Це означає, що цільова функція в задачі не обмежена на множини допустимих значень, тобто може досягати скільки завгодно великого значення. Останнє, очевидно, означає завершення процесу обчислень через *відсутність оптимального плану*. Геометрично ситуація, коли $a_l(\beta^{(q)}) \leq 0$, відповідає тому, що вісь ординат виявляється всередині конуса, натягнутого на систему розширених стовпців $\bar{a}_j$, а значить, пряма, проведена через кінець вектора b паралельно осі аплікату, одного разу «увійшовши» в цей конус, більш ніколи з нього «не виходить».

Взагалі кажучи, після переходу від базису $\beta^{(q)}$ до базису $\beta^{(q+1)}$ ми можемо заново сформувати матриці $\Delta^{-1}(\beta^{(q+1)})$, $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q+1)})$ і, обчисливши $\bar{A}(\beta^{(q+1)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q+1)}) \bar{A}$, робити висновки про його оптимальність. Однак, з огляду на те, що $\beta^{(q+1)}$ відрізняється від $\beta^{(q)}$ всього лише одним стовпцем, з точки зору техніки обчислень представляється раціональним безпосередньо переходити від $\bar{A}(\beta^{(q)})$ і $\bar{b}(\beta^{(q)})$ до $\bar{A}(\beta^{(q+1)})$ і $\bar{b}(\beta^{(q+1)})$. Справа в тому, що у матриць типу $\bar{A}(\beta^{(q)})$ стовпці, що відповідають базисним векторам, складаються з нулів, за винятком одного елемента, рівного одиниці. Позиція цього ненульового елемента визначається порядковим номером базисного стовпчика в $N(\beta^{(q)})$. Тому для отримання матриці $\bar{A}(\beta^{(q+1)})$ досить за допомогою лінійних операцій над рядками матриці $\bar{A}(\beta^{(q)})$

привести її стовпець, відповідний вектору, що вводиться в базис, до «базисного» виду.

Для цього застосовується *перетворення Жордана-Гаусса* (так званий метод повного виключення). В даному випадку воно полягає в тому, що ми повинні «заробити» одиницю на місці елемента $a_{rl}(\beta^{(q)})$ (він зазвичай називається *провідним*) і нулі на місці інших елементів стовпця $a_l(\beta^{(q)})$ (нагадаємо, що l – номер стовпця, що вводиться в базис, а r – номер рядка в симплекс-таблиці, яка визначає номер стовпчика, що виводиться з базису). Перше досягається за допомогою розподілу r -го рядка на провідний елемент, друге – шляхом додавання знову отриманого r -го рядка, помноженого на відповідний коефіцієнт, до інших рядків матриці $\bar{A}(\beta^{(q)})$.

Формально результат виконання даного перетворення над елементами $\bar{A}(\beta^{(q)})$ і $\bar{b}(\beta^{(q)})$ може бути виражений в наступному вигляді:

$$a_{rj}(\beta^{(q+1)}) = \frac{a_{rj}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})}, j \in \overline{0, n}; \quad (7.15)$$

$$b_r(\beta^{(q+1)}) = \frac{b_r(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})}; \quad (7.16)$$

$$a_{ij}(\beta^{(q+1)}) = a_{ij}(\beta^{(q)}) - a_{il}(\beta^{(q)}) \frac{a_{rj}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})}, i \in \overline{0, m}, i \neq r, \\ j \in \overline{1, n}; \quad (7.17)$$

$$b_i(\beta^{(q+1)}) = b_i(\beta^{(q)}) - a_{il}(\beta^{(q)}) \frac{b_r(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})}, i \in \overline{0, m}, i \neq r. \quad (7.18)$$

Слід особливо відзначити сенс елементів вектора $\bar{b}(\beta^{(q)})$. Його нульовий компонент $\bar{b}_0(\beta^{(q)})$ відповідно до побудови містить значення цільової функції, що досягається нею на поточному плані:

$$f(x(\beta^{(q)})) = \bar{b}_0(\beta^{(q)}), \quad (7.19)$$

а інші елементи – ненульові компоненти цього плану:

$$x_{N_{i(\beta^{(q)})}}(\beta^{(q)}) = b_i(\beta^{(q)}), i \in \overline{1, m}. \quad (7.20)$$

Назва методу походить від поняття симплекса. Нагадаємо, що *m-симплексом* називають опуклий багатогранник, афінна оболонка якого є афінною множиною розмірності *m*. *Афінною оболонкою* множини називають найменшу афінну множину, в якій міститься дана множина. В даному випадку можна вважати, що система розширених базисних стовпців $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}$, розглянутих як точки в R^{m+1} , породжує $(m-1)$ -мірний симплекс в просторі R^{m+1} .

На закінчення цього пункту узагальнимо викладені питання і наведемо *схему алгоритму симплекс-методу для розв'язання задачі максимізації*. Вона включає одноразово виконуваний 0-етап і повторюваний кінцеве число разів 1-етап (стандартну ітерацію).

0-етап. Знаходження допустимого базисного плану (див. розділ 7.5.5). Результатом 0-етапу є допустимий базисний план $x(\beta^{(1)})$, а також відповідні йому матриця $\bar{A}(\beta^{(1)})$ і вектор $\bar{b}(\beta^{(1)})$, які будуть використані на першій ітерації. Вважаємо номер поточної ітерації *q* рівним 1 і переходимо до I-етапу.

I-етап. Стандартна ітерація алгоритму – виконується для чергового базисного плану $x(\beta^{(q)})$.

1. Перевірка оптимальності поточного базисного плану: здійснюється перегляд рядка оцінок $a_0(\beta^{(q)})$. Можливі два варіанти:

1'. $a_0(\beta^{(q)}) \geq 0$ – план, що відповідає поточному базису завдання, *оптимальний*. Обчислювальний процес закінчений. Відповідно до формул (7.20) і (7.19) виписуються оптимальний план завдання $x^* = x(\beta^{(q)})$ й значення цільової функції $f(x^*) = f(x(\beta^{(q)}))$.

1". У рядку оцінок $a_0(\beta^{(q)})$ існує, щонайменше, один елемент $a_{0j}(\beta^{(q)}) < 0$, той, що має негативну оцінку. Отже, план $x(\beta^{(q)})$ – *неоптимальний*. Вибирається стовпець з номером l , що має мінімальну (максимальну по абсолютній величині) негативну оцінку:

$$a_{0l}(\beta^{(q)}) = \min_{j: a_{0j}(\beta^{(q)}) < 0} \{a_{0j}(\beta^{(q)})\}.$$

Він називається *провідним* і повинен бути введений в черговий базис. Переходимо до пункту 2° алгоритму.

2°. Визначення стовпця, що виводиться з базису. Розглядається провідний стовпець $a_l(\beta^{(q)})$. Можливі два варіанти:

2'. Для всіх $i \in \overline{1, m}$ $a_{il}(\beta^{(q)}) \leq 0$. Робиться висновок про *необмеженість* цільової функції і завершується обчислювальний процес.

2". Існує, принаймні, один рядок з номером $i \in \overline{1, m}$, для якого $a_{il}(\beta^{(q)}) > 0$. Згідно з правилом (7.14) визначаються місце r і номер $N_r(\beta^{(q)}) = j_r$, для стовпця, що виводиться з базису. Переходимо до пункту 3° алгоритму.

3°. Перерахунок елементів матриці $\bar{A}$ і стовпчика $\bar{b}$ щодо нового базису. Відповідно до формул (7.15) – (7.18) здійснюємо розрахунок

елементів матриці завдання $\bar{A}$ і вектора обмежень $\bar{b}$ щодо базису $\beta^{(q+1)}$, який виходить після введення в базис $\beta^{(q)}$ стовпчика a_l і виведенням з нього стовпчика a_r . Вважаємо номер поточної ітерації $q = q + 1$ і переходимо до першого пункту алгоритму.

Примітка. Якщо цільова функція вимагає знаходження мінімального значення, то критерієм оптимальності задачі є відсутність позитивних оцінок $a_{0j}(\beta^{(q)})$ в рядку цільової функції при всіх $j = 1, 2, \dots, n$.

7.5.2. Таблична реалізація симплекс-методу

З точки зору забезпечення раціональності і наочності обчислювального процесу виконання алгоритму симплекс-методу зручно оформляти у вигляді послідовності таблиць. У різних джерелах наводяться різні модифікації симплекс-таблиць, що відрізняються одна від одної розташуванням окремих елементів. Однак всі вони базуються на одних і тих же принципах. Зупинимося на структурі таблиці, показаної на рис. 17.

$$T^{(q)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & b_0(\beta^{(q)}) & a_0(\beta^{(q)}) \\ \hline N(\beta^{(q)}) & b(\beta^{(q)}) & A(\beta^{(q)}) \\ \hline \end{array}$$

Рис. 17

Симплекс-таблиця $T^{(q)}$, зображена на рис. 17, відповідає допустимому базису КЗЛП $\beta^{(q)}$, що отримується на q -й ітерації. Стовпець $N(\beta^{(q)})$ містить номери базисних стовпців (в тій послідовності, в якій вони входять в базис), стовпець $b(\beta^{(q)})$ –

компоненти вектора обмежень щодо поточного базису $\beta^{(q)}$, $A(\beta^{(q)})$ – компоненти матриці завдання щодо поточного базису $\beta^{(q)}$. Нарешті, в рядку $a_0(\beta^{(q)})$ знаходяться поточні оцінки стовпців, а осередок $b_0(\beta^{(q)})$ містить значення цільової функції, що досягається для поточного плану.

Безумовно, слід додати, що таблична модифікація симплекс-методу має важливе практичне значення не стільки як зручна форма організації ручного підрахунку, скільки як основа для реалізації даного алгоритму в рамках програмного забезпечення ЕОМ.

7.5.3. Приклад рішення ЗЛП симплекс-методом

Розглянемо на конкретному прикладі процес вирішення КЗЛП табличним симплекс-методом. Нехай дана канонічна задача ЛП:

$$f(x) = 50x_1 - 10x_2 + 6x_3 + 40x_4 - 30x_5 \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 14, \\ -2x_1 + 3x_3 - x_4 = 17, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \quad (7.21)$$

Як видно, стовпці матриці системи обмежень

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ з номерами } \{5, 2, 3\} \text{ є лінійно}$$

незалежними. І можна отримати розкладання за даними стовпцями

вектора обмежень $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix}$ з позитивними коефіцієнтами:

$$b = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 14 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{17}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Останнє означає, що стовпці $\{5, 2, 3\}$ утворюють допустимий базис, з якого можна почати вирішення задачі. З стовпців, що входять в базис, з урахуванням нульових елементів формується матриця $\bar{\Delta}(\beta^{(1)})$ і зворотна по відношенню до неї $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)})$:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(1)}) = \begin{pmatrix} -1 & -30 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) = \begin{pmatrix} -1 & -30 & -10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи їх, за формулами $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$ і $\bar{b}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{b}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \bar{A}(\beta^{(1)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) \bar{A} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -30 & -10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 & -10 & 6 & 40 & -30 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -104 & 0 & 0 & -82 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}; \\ \bar{b}(\beta^{(1)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) \times \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & -30 & -10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -466 \\ 12 \\ 14 \\ 17/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Використовуючи отримані значення $\bar{A}(\beta^{(1)})$ і $\bar{b}(\beta^{(1)})$, заповнюємо симплекс-таблицю $T^{(1)}$, яка відповідає першій ітерації ($q = 1$).

$$T^{(1)} = \begin{array}{c|ccc|cccc} & & -466 & -104 & 0 & 0 & -82 & 0 \\ \hline 5 & 12 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 14 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 17/3 & -2/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}.$$

Оскільки рядок оцінок $a_0(\beta^{(1)})$ (підкреслений пунктирною лінією) в першому і четвертому стовпцях містить негативні елементи ($a_{01}(\beta^{(1)}) = -104$, $a_{04}(\beta^{(1)}) = -82$) план $x(\beta^{(1)}) = (0, 14, 17/3, 0, 12)$ не є оптимальним, і значення цільової функції $f(x(\beta^{(1)})) = -466$ може бути покращено. Дотримуючись рекомендації п. 1" алгоритму симплекс-методу, вважаємо номер введеного в черговий базис стовпця $l = 1$ ($|-104| > |-82|$). Розглядаємо *провідний* стовпець (виділено рамкою)

$$a_1(\beta^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Він містить два позитивних елемента. Застосовуючи рекомендацію п. 2" алгоритму, отримуємо $\lambda_1 = 12/1 = 12$, $\lambda_2 = 14/2 = 7$, і, отже, $r = 2$. Отже, стовпець з номером $N_2(\beta^{(1)}) = 2$ повинен бути виведений з базису. Таким чином, отримуємо черговий

допустимий базис завдання $N(\beta^{(2)}) = \{5, 1, 3\}$ і переходимо до ітерації $q = 2$.

$$\bar{\Delta}(\beta^{(2)}) = \begin{pmatrix} -1 & -30 & 50 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(2)}) = \begin{pmatrix} -1 & -30 & 42 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи їх, за формулами $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$ і $\bar{b}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{b}$ отримуємо:

$$\bar{b}(\beta^{(2)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(2)}) \times \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & -30 & 42 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 262 \\ 5 \\ 7 \\ 31/3 \end{pmatrix};$$

$$\bar{A}(\beta^{(2)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(2)}) \bar{A} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -30 & 42 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 50 & -10 & 6 & 40 & -30 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 52 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи отримані значення $\bar{A}(\beta^{(2)})$ і $\bar{b}(\beta^{(2)})$, заповнюємо симплекс-таблицю $T^{(2)}$, відповідну другій ітерації ($q = 2$).

$$T^{(2)} = \begin{array}{c|ccccc|c} & 262 & 0 & 52 & 0 & -30 & 0 \\ \hline 5 & 5 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 31/3 & 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \end{array}.$$

В ході виконання другої ітерації знову-таки визначаються стовпець $l = 4$, що вводиться (виділено рамкою), та виведений $r = 5$. Перейшовши до ітерації $q = 3$ для базису $N(\beta^{(2)}) = \{4, 1, 3\}$, маємо:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(3)}) = \begin{pmatrix} -1 & 40 & 50 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(3)}) = \begin{pmatrix} -1 & 30 & 12 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи їх, за формулами $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$ і $\bar{b}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{b}$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\bar{A}(\beta^{(3)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(3)}) \bar{A} = \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 30 & 12 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} 50 & -10 & 6 & 40 & -30 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{b}(\beta^{(3)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(3)}) \times \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & 30 & 12 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 562 \\ 10 \\ 2 \\ 31/3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Використовуючи отримані значення $\bar{A}(\beta^{(3)})$ і $\bar{b}(\beta^{(3)})$, заповнюємо симплекс-таблицю $T^{(3)}$, відповідну третій ітерації ($q = 3$)

$$T^{(3)} = \begin{array}{c|ccccc} & 562 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 10 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 31/3 & 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \end{array}.$$

Як видно з $T^{(3)}$, рядок оцінок містить тільки невід'ємні значення, тому досягнутий базис $N(\beta^{(3)}) = \{4, 1, 3\}$ є оптимальним. У підсумку ми отримуємо, що вектор $x^* = (2, 0, 31/3, 10, 0)$ є оптимальним планом (точкою максимуму) завдання, максимальне значення цільової функції дорівнює $f^* = f(x^*) = 562$, а рішення КЗЛП має вигляд $((2, 0, 31/3, 10, 0); 362)$.

7.5.4. Збіжність симплекс-методу. Виродженість в задачах ЛП

Найважливішою властивістю будь-якого обчислювального алгоритму є *збіжність*, тобто можливість отримання в ході його застосування шуканих результатів (із заданою точністю) за кінцеве число кроків (ітерацій).

Легко помітити, що проблеми зі збіжністю симплекс-методу потенційно можуть виникнути на етапі вибору значення r (п. 2") в разі, коли однакові мінімальні значення відношень:

$$\lambda_i = \frac{b_i(\beta^{(q)})}{a_{il}(\beta^{(q)})}, \text{ де } i \in \{\overline{1, m} | a_{il}(\beta^{(q)}) > 0\}$$

будуть досягнуті для кількох рядків таблиці $T^{(q)}$ одночасно. Тоді на наступній ітерації стовпець $b(\beta^{(q+1)})$ буде містити нульові елементи.

Нагадаємо, що:

► *допустимий базисний план канонічної задачі ЛП, відповідний базису $\beta^{(q)}$, називається **виродженим**, якщо деякі його базисні компоненти дорівнюють нулю, а вектор $b(\beta^{(q)})$ містить нульові елементи.*

Завдання ЛП, що має вироджені плани, називається ***виродженим***. При «виході» на вироджений план ми фактично

отримуємо розкладання стовпця b по системі з меншої, ніж m , кількості стовпців a_j і, отже, позбавляємося можливості коректно визначити, введення якого стовпця в базис призведе до зростання значення цільової функції. Подібні ситуації, в кінцевому рахунку, можуть привести до зациклення обчислювального процесу, тобто нескінченного перебору одних і тих же базисів.

З точки зору першої геометричній інтерпретації ЗЛП ситуація виродженості означає, що через деяку кутову точку багатогранної множини допустимих планів задачі, відповідної поточному базисному плану, проходить більш ніж m гіперплоскостей обмежень завдання. Іншими словами, одне або кілька обмежень в даній точці є надлишковими. Останнє надає привід для роздумів про економічну сторону проблеми виродженості як проблеми наявності надлишкових обмежень і, в деяких випадках, визначає шляхи її вирішення.

З точки зору другої геометричної інтерпретації ЗЛП виродженість означає «потрапляння» лінії, що проходить через вершину вектора b паралельно осі аплікат, в ребро конуса, натягнутого на систему розширених векторів поточного базису. Так, у випадку, зображеному на рис. 18, ця лінія потрапляє в ребро, яке визначається вектором $\bar{a}^{j_2}$, тобто, не дивлячись на те, що поточний базис містить стовпці $\bar{a}^{j_1}$ і $\bar{a}^{j_2}$, для подання вектора b досить тільки одного $\bar{a}^{j_2}$.

З даної інтерпретації випливає і ідея методу вирішення вироджених задач ЛП, який отримав назву *методу збурень*: при

виході на вироджений план здійснюється незначний зсув вектора b і виродженність (як це видно з ілюстрації) усувається.

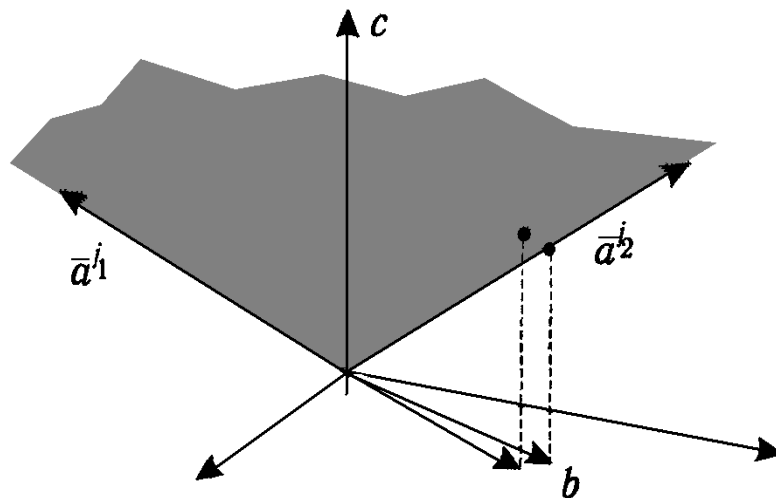


Рис. 18

Необхідно, однак, сказати, що розглянута тут проблема зациклення для більшості практично значимих завдань є досить рідкісною і малоймовірною. Більш того, вона дуже часто вирішується за рахунок помилок заокруглень при виконанні розрахунків на ЕОМ.

7.5.5. Знаходження допустимого базисного плану в задачах ЛП

У розглянутому вище прикладі вихідний базисний план, необхідний для початку обчислень по симплекс-методу, був підібраний за рахунок особливостей матриці умов. Дійсно, дана матриця вже містила необхідну кількість «майже базисних» стовпців. Очевидно, що для переважної більшості завдань ЛП неможливо так само відразу і в явному вигляді вказати вихідний допустимий базисний план. Взагалі кажучи, існують різні прийоми вирішення даного завдання. Ми зупинимося на одному з них, що отримав назву *метод мінімізації нев'язок*. Його сильною стороною, безумовно, є універсальність. Хоча, в деяких окремих випадках, він може виявитися занадто громіздким.

Ідея методу мінімізації нев'язок полягає в побудові відповідного допоміжного завдання, для якого можна в явному вигляді вказати вихідний базисний план, і вирішенні його за допомогою процедури симплекс-методу.

Не применшуючи спільності, можна вважати, що вектор обмежень у вихідній задачі невід’ємний, тобто $b_i \geq 0$, $i \in \overline{1, m}$. Тоді для КЗЛП максимізації функції:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (7.22)$$

на множині $D \subset R^n$, що визначається обмеженнями:

[illegible]

будується допоміжна задача:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n - 1x_{n+1} - 1x_{n+2} - \cdots - 1x_{n+m} \rightarrow \\ &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (7.23)$$

[illegible]

Як видно з (7.22), (7.23), завдання $(\tilde{D}, \tilde{f})$ відрізняється від завдання (D, f) матрицею, одержуваною в результаті додавання до вихідної матриці A одиничної матриці, якій відповідають додаткові (фіктивні) змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$. Даним змінним (власне кажучи, їх і називають *нев'язками*) в цільовій функції відповідають коефіцієнти (-1) , а змінним $x_1, x_2, \dots, x_n$, які є загальними для обох завдань, – нульові коефіцієнти. Суттєвою особливістю є наявність в

ній очевидного вихідного базису, утвореного доданими стовпчиками, і відповідного плану з базисними компонентами $x_{n+i} = b_i \geq 0, i \in \overline{1, m}$. В силу структури цільової функції $\tilde{f}$ в процесі пошуку її максимуму процедурою симплекс-методу фіктивні змінні (нев'язки) x_{n+i} повинні мінімізуватися бажано до нуля, що може бути досягнуто за рахунок послідовного перекладу їх в небазисні компоненти плану. Якщо в оптимальному плані $\tilde{x}$, отриманому в результаті рішення допоміжної задачі, останні m компонентів (тобто невід'язки) дорівнюють нулю, то його початкові n компонентів задовольняють системі обмежень, що визначають область D , і легко (простим відкиданням невід'язок) може бути перетворений в стартовий допустимий план основного завдання (D, f) . При цьому всі рядки симплекс-таблиці, отриманої на останній ітерації допоміжного завдання (за винятком нульового), можуть бути перенесені в першу таблицю основного завдання. Елементи ж нульового рядка для знову формованої симплекс-таблиці обчислюються за формулами:

$$a_{0j}(\beta^{(1)}) = -c_j + c(\beta^{(*)})a_j(\beta^{(*)}), \quad (7.24)$$

$$b_0(\beta^{(1)}) = c(\beta^{(*)})b(\beta^{(*)}), \quad (7.25)$$

де $(\beta^{(*)})$ – базис, отриманий на останній ітерації допоміжного завдання.

У разі, коли оптимальний план $\tilde{x}$ допоміжного завдання все ж містить нерівні нулю фіктивні компоненти ($\tilde{f}(\tilde{x}) < 0$), ми приходимо до висновку про відсутність допустимих планів у вихідній задачі (D, f) , тобто $D = \emptyset$.

7.6. Модифікований симплекс-метод

7.6.1. Обчислювальна схема, заснована на перетворенні зворотних матриць

Аналізуючи обчислювальну процедуру симплекс-методу з позицій оцінки трудомісткості, неважко помітити, що найбільш критичним в цьому плані є етап перерахунку значень A і b при переході від одного базисного плану до іншого (п. 3° алгоритму). Однак в тому випадку, коли число обмежень завдання m явно менше кількості змінних n , можна домогтися суттєвої «економії», виконуючи на черговій ітерації q перетворення Жордана - Гаусса не над матрицею $\bar{A}(\beta^{(q)})$, а над матрицею $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$. При цьому враховується і те, що при необхідності, застосовуючи формулу $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$, завжди можна отримати $\bar{A}(\beta^{(q)})$ по $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$. Більш того, для виконання описаних вище дій симплекс-процедури нам насправді не була потрібна матриця $\bar{A}(\beta^{(q)})$ цілком. Реально в ній використовувалися тільки рядок оцінок $a_0(\beta^{(q)})$ і ведучий стовпець $a_l(\beta^{(q)})$. Дані міркування покладені в основу обчислювальної схеми симплекс-методу, заснованої на перетворенні зворотних матриць, яку також називають *модифікованим симплекс-методом*. Вперше даний алгоритм був запропонований в 1951 р. в роботах Л. В. Канторовича.

Обчислювальній схемі модифікованого симплекс-методу відповідає система таблиць T_1 і $T_2^{(q)}$ (рис. 19 и рис. 20). Таблиця T_1 (рис. 19) є спільною для всіх ітерацій і служить для отримання рядка оцінок поточного базисного плану $a_0(\beta^{(q)})$. Якщо позначити

через $\delta_i(\beta^{(q)})$, $i \in \overline{0, m}$. рядки матриці $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$, то з $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$, зокрема, випливає, що:

$$a_0(\beta^{(q)}) = \delta_0(\beta^{(q)}) \bar{A}. \quad (7.26)$$

Як видно з рис. 19, T_1 складається з трьох блоків:

- в центрі міститься матриця $\bar{A}$;
- в лівому блоці таблиці на кожній ітерації дописують нульові рядки матриці $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$ для поточного базису;
- нижній блок, розташований під матрицею $\bar{A}$, на кожній ітерації доповнюється рядком оцінок поточного плану, обчисленим за формулою (7.26).

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \delta_0(\beta^{(1)}) & \bar{A} \\ \hline \dots\dots\dots & \\ \hline \delta_0(\beta^{(q)}) & \\ \hline & a_0(\beta^{(q)}) \\ \hline & \dots\dots\dots \\ \hline & a_0(\beta^{(1)}) \\ \hline \end{array}$$

Рис. 19

Симплекс-таблиця $T_2^{(q)}$, зображена на рис. 20, відповідає допустимому базису КЗЛП $\beta^{(q)}$, що отримується на q -й ітерації.

$$T_2^{(q)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & b_0(\beta^{(q)}) & & & \\ \hline N(\beta^{(q)}) & b(\beta^{(q)}) & \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) & \bar{a}_l & \bar{a}_l(\beta^{(q)}) \\ \hline \end{array}.$$

Рис. 20

Стовпець $N(\beta^{(q)})$ містить номери базисних стовпців (в послідовності входження в базис); стовпець $b(\beta^{(q)})$ – компонента

вектора обмежень щодо поточного базису $\beta^{(q)}$; $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$ – матриця, зворотна по відношенню до матриці розширених стовпців поточного базису $\beta^{(q)}$; графа $\bar{a}_l$ – містить розширений вектор умов, що вводиться в базис на поточній ітерації, а наступна графа – координати $\bar{a}_l(\beta^{(q)})$ цього ж стовпчика в поточному базисі $\beta^{(q)}$.

За аналогією з розділом 7.5.1 опишемо формальну схему алгоритму модифікованого симплекс-методу.

0-етап. Знаходження допустимого базисного плану

1. Для пошуку допустимого базису може бути застосований метод мінімізації нев'язок, розглянутий в розділі 7.5.5. При цьому для вирішення допоміжної задачі використовується процедура модифікованого симплекс-методу. В результаті 0-етапу ми отримуємо допустимий базисний план $x(\beta^{(q)})$ і відповідні йому матрицю $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)})$ і вектор $\bar{b}(\beta^{(1)})$.

2. Заповнюємо центральну частину таблиці T_1 , яка містить матрицю $\bar{A}$.

3. Вміст матриці $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)})$ і вектора $\bar{b}(\beta^{(1)})$, отриманих на етапі пошуку допустимого базисного плану, переноситься в таблицю $T_2^{(1)}$.

4. Вважаємо номер поточної ітерації q рівним 1 і переходимо до I-етапу.

I-етап. Стандартна ітерація алгоритму – виконується для чергового базисного плану $x(\beta^{(q)})$.

1°. *Перевірка оптимальності поточного базисного плану.* Вміст нульового рядка таблиці $T_2^{(q)} - \delta_0(\beta^{(q)})$ переписується у відповідну

графу таблиці T_1 . За формулою (7.26) розраховуємо і заповнюємо рядок $a_0(\beta^{(q)})$. Здійснюємо перегляд рядка оцінок $a_0(\beta^{(q)})$. Можливі два варіанти:

1'. $a_0(\beta^{(q)}) \geq 0$ – план, що відповідає поточному базису завдання, **оптимальний**. Обчислювальний процес закінчений. Відповідно до формул (7.19) і (7.18) виписуються оптимальний план завдання $x^* = x(\beta^{(q)})$ і оптимальне значення цільової функції $f(x^*) = f(x(\beta^{(q)}))$.

1''. У рядку оцінок $a_0(\beta^{(q)})$ існує, щонайменше, один елемент $a_{0j}(\beta^{(q)}) < 0$, що має негативну оцінку. Отже, план $x_0(\beta^{(q)})$ **неоптимальний**. Вибирається номер l , відповідний елементу, що має мінімальну (максимальну по абсолютній величині) негативну оцінку:

$$a_{0l}(\beta^{(q)}) = \min_{j: a_{0j}(\beta^{(q)}) < 0} \{a_{0j}(\beta^{(q)})\}.$$

l -й стовпець матриці $\bar{A}$ стає провідним і повинен бути введений в черговий базис. Переходимо до пункту 2° алгоритму.

2°. *Визначення стовпця, що виводиться з базису*. Перепишуємо провідний стовпець $\bar{a}_l$ з таблиці T_1 в поточну таблицю $T_2^{(q)}$. За формулою $\bar{a}_l(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})\bar{a}_l$ заповнюємо відповідний стовпець в таблиці $T_2^{(q)}$. Можливі два варіанти:

2'. Для всіх $i \in \overline{1, m}$ $a_{il}(\beta^{(q)}) \leq 0$. Робиться висновок про *необмеженість цільової функції* і завершується обчислювальний процес.

2". Існує, принаймні, один індекс $i \in \overline{1, m}$, для якого $a_{il}(\beta^{(q)}) > 0$. Згідно з правилом (7.14) визначаються місце r і номер $N_r(\beta^{(q)}) = j_r$, для стовпця, що виводиться з базису. Переходимо до пункту 3° алгоритму.

3°. *Перерахунок щодо нового базису елементів стовпця b і матриці $\bar{\Delta}^{-1}$.* Перехід до нового базису $\beta^{(q+1)}$, який виходить введенням в базис $\beta^{(q)}$ стовпчика a_l і виведенням з нього стовпчика a_r , здійснюється за формулами, аналогічними формулами (7.15) – (7.18). Вони мають вигляд:

$$b_r(\beta^{(q+1)}) = \frac{b_r(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})}; \quad (7.27)$$

$$(\beta^{(q+1)}) = \frac{\delta_{rj}(\beta^{(q)})}{a_{rj}(\beta^{(q)})}, j \in \overline{0, m}; \quad (7.28)$$

$$b_i(\beta^{(q+1)}) = b_i(\beta^{(q)}) - b_r(\beta^{(q)}) \frac{a_{ij}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})}, i \in \overline{0, m}, i \neq r; \quad (7.29)$$

$$\delta_{ij}(\beta^{(q+1)}) = \delta_{ij}(\beta^{(q)}) - \delta_{rj}(\beta^{(q)}) \frac{a_{il}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})}, i \in \overline{1, m},$$

$$i \neq r, j \in \overline{1, m}. \quad (7.30)$$

Вважаємо номер поточної ітерації q рівний $q + 1$ і переходимо до першого пункту алгоритму.

7.6.2. Приклад рішення ЗЛП модифікованим симплекс-методом

Наведемо рішення розглянутого раніше завдання (7.21), заснованого на використанні процедури модифікованого симплекс-методу. За аналогією з розділом 7.5.3 воно починається з вибору

очевидного вихідного базису, утвореного стовпцями $\{5, 2, 3\}$. Для нього вже були обчислені $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$ і $\bar{b}(\beta^{(q)})$, тому заповнення початкових таблиць T_1 і $T_2^{(1)}$ не становить труднощів (рис. 21).

$T_1 =$	-1 -30 -10 2				50	-10	6	40	-30
	-1 -30 42 2				1	0	0	1	1
	-1 30 12 2				2	1	0	1	0
					-2	0	3	-1	0
					-104	0	0	-82	0
					0	52	0	-30	0
					0	22	0	0	0

$T_2^{(1)} =$		-466	-1	-30	-10	2	50	-104
	5	12	0	1	0	0	1	1
	2	14	0	0	1	0	2	2
	3	17/3	0	0	0	1/3	-2	-2/3

Рис. 21

На першій ітерації ми переписуємо нульовий рядок $\delta_0(\beta^{(0)}) = (-1, -30, -10, 2)$ з таблиці $T_2^{(1)}$ в T_1 і, помноживши її на матрицю $\bar{A}$, отримуємо рядок оцінок $a_0(\beta^{(1)}) = \delta_0(\beta^{(1)})\bar{A} = (-104, 0, 0, -82, 0)$.

Так як $a_0(\beta^{(1)})$ містить негативні елементи, то робимо висновок про неоптимальність плану відповідного базису $\beta^{(1)}$, і, вибравши найменшу негативну оцінку (-104) , отримуємо номер стовпчика, що вводиться в базис, $l = 1$.

Перепишемо стовпець $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ з таблиці T_1 в $T_2^{(1)}$ і

перераховуємо його координати щодо поточного базису, множимо матрицю $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$, розташовану в таблиці $T_2^{(1)}$ зліва, на $\bar{a}_1$.

Після заповнення таблиці $T_2^{(1)}$ даними по стовпцю, що вводиться в новий базис, можна перейти до визначення номера виведеного стовпчика. Ця процедура здійснюється в повній аналогії зі звичайним симплекс-методом. Розглянувши відносини елементів $\bar{b}(\beta^{(1)})$ і $a_{il}(\beta^{(1)})$ для $\{i \in \overline{1, m} | a_{il}(\beta^{(1)}) > 0\}$ і визначивши мінімальне з них ($\lambda_2 = 14/2$), знаходимо, що $r = 2$. Отже, стовпець з номером $N_2(\beta^{(q)}) = 2$ повинен бути виведений з базису. Таким чином, отримуємо черговий допустимий базис завдання з $N(\beta^{(2)}) = \{5, 1, 3\}$.

$$T_2^{(2)} = \begin{array}{c|ccccccc} & 262 & -1 & -30 & 42 & 2 & 40 & -30 \\ \hline 5 & 5 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ \hline 1 & 7 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ \hline 3 & 31/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1 & 0 \end{array},$$

Рис. 22

Застосувавши формули (7.28) – (7.30), переходимо до симплекс-таблиці, що відповідає другій ітерації $T_2^{(2)}$ (рис. 22), і вважаємо індекс поточної ітерації $q = 2$.

Повторюючи ті ж самі дії (їх легко простежити по приведеним тут таблицям $T_2^{(2)}$ і $T_2^{(3)}$), на третій ітерації ми отримаємо оптимальний план завдання і оптимальне значення цільової функції, які витягуються з другого стовпця таблиці $T_2^{(3)}$ (рис. 23). Легко помітити, що в процесі вирішення ми «пройшли» по тій же самій послідовності допустимих базисних планів, яка зустрічалася в розділі 2.5.3.

$$T_2^{(3)} =$$

	562	-1	30	12	2
4	10	0	2	-1	0
1	2	0	-1	1	0
3	31/3	0	0	1/3	1/3

Рис. 23

На завершення підкреслимо, що в силу наведених вище переваг саме модифікований симплекс-метод реально застосовується в програмному забезпеченні, призначеному для вирішення канонічних задач лінійного програмування. Істотною перевагою модифікованого симплекс-методу є також те, що він дозволяє одночасно знайти оптимальні плани як прямої, так і двоїстої задачі.

[illegible]

Правила побудови задачі, двоїстої по відношенню до загальної задачі ЛП, наочно представлені схемою, показаною на рис. 24.

c_1	$\dots$	c_j	c_{j+1}	$\dots$	c_n
-------	---------	-------	-----------	---------	-------

$\rightarrow \max$
 $\min$
 $\uparrow$

y_1
$\dots$
y_i
y_{i+1}
$\dots$
y_m

a_{11}	$\dots$	a_{1j}	$a_{1(j+1)}$	$\dots$	a_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{i1}	$\dots$	a_{ij}	$a_{i(j+1)}$	$\dots$	a_{in}
$a_{(i+1)1}$	$\dots$	$a_{(i+1)j}$	$a_{(i+1)(j+1)}$	$\dots$	$a_{(i+1)n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{m1}		a_{mj}	$a_{m(j+1)}$		a_{mn}

b_1
$\dots$
b_i
b_{i+1}
$\dots$
b_m

x_1	$\dots$	x_j	x_{j+1}	$\dots$	x_n
-------	---------	-------	-----------	---------	-------

Рис. 24

З наведеного визначення випливає важлива властивість – *симетричність* відношення подвійності, тобто завдання, двоїсте по відношенню до двоїстої $((D^*)^*, (f^*)^*)$, співпадає з прямою (вихідною) задачею (D, f) :

$$((D^*)^*, (f^*)^*) = (D, f).$$

Тим самим має сенс говорити про пару взаємно двоїстих задач, при побудові яких необхідно дотримуватися наступних умов:

1. Якщо пряма задача вирішується на максимум, то двоїста задача вирішується на мінімум; якщо пряма задача вирішується на мінімум, то двоїста – на максимум.

2. Вектор-рядок коефіцієнтів цільової функції c і вектор-стовпець обмежень b міняються місцями. У задачі на максимум обмеження нерівності мають вигляд $\leq$, а в завданні на мінімум – $\geq$.

3. Матриця обмежень завдання A транспонується.

4. Множина індексів змінних, на які накладена умова позитивності в прямій задачі, наприклад, $x_j \geq 0$ чи $y_i \geq 0$, визначають номери обмежень, що мають форму нерівностей в двоїстій задачі на мінімум $a_j \cdot y \geq c_j$ або $a_i \cdot x \leq b_i$, а на максимум $a_j \cdot y \leq c_j$ або $a_i \cdot x \geq b_i$, в іншому випадку – як обмежена рівність.

5. Множина номерів обмежень, що мають форму нерівностей в прямій задачі (наприклад, $a_i \cdot x \leq b_i$ або $a_j \cdot y \geq c_j$), визначають множину індексів змінних, на які накладається умова невід'ємності, в двоїстій задачі ($y_i \geq 0$ або $x_j \geq 0$). Відповідно, якщо будь-яке обмеження прямої задачі записано як рівність, то на відповідну змінну двоїстої задачі умова невід'ємності не накладається.

Розглянемо процес побудови двоїстої задачі на конкретному прикладі. Нехай задана загальна задача ЛП (D, f) :

$$f(x) = 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 - 3x_5 \rightarrow \max, x \in D,$$

$$D = \left\{ x \in R^5 \left| \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 2, \\ 5x_2 + x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 3x_5 \leq 5, \\ x_2 \geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

Тоді двоїстою до неї буде задача (D^*, f^*) :

$$f^*(y) = 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \rightarrow \min, y \in D^*,$$

$$D^* = \left\{ y \in R^3 \left| \begin{array}{l} 4y_1 + 2y_3 = 5, \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq -2, \\ -y_1 + y_2 + 6y_3 = 7, \\ y_1 - 6y_2 + y_3 = 4, \\ 2y_2 - 3y_3 \geq -3, \\ y_1 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

У матричній формі пара двоїстих загальних задач ЛП (за умови, коли всі обмеження мають форму нерівностей і всі змінні x_j невід'ємні) може бути коротко записана як:

$$1) f(x) = c \cdot x \rightarrow \max, D = \{x \in R^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$$

і

$$f^*(y) = y \cdot b \rightarrow \min, D^* = \{y \in R^m | yA \geq c, y \geq 0\};$$

$$2) f(x) = c \cdot x \rightarrow \min, D = \{x \in R^n | Ax \geq b, x \geq 0\}$$

і

$$f^*(y) = y \cdot b \rightarrow \max, D^* = \{y \in R^m | yA \leq c, y \geq 0\}.$$

Тут матриця обмежень A має розмірність $m \times n$.

Якщо пряма задача (D, f) і двоїста їй (D^*, f^*) задані канонічно, то в матричній формі вони відповідно приймають вид:

$$1) f(x) = c \cdot x \rightarrow \max, D = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\};$$

$$f^*(y) = y \cdot b \rightarrow \min, D^* = \{y \in R^m | yA \geq c\}.$$

$$2) f(x) = c \cdot x \rightarrow \min, D = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\};$$

$$f^*(y) = y \cdot b \rightarrow \max, D^* = \{y \in R^m | yA \leq c\}.$$

Рішення двоїстих задач взаємопов'язані і цей взаємозв'язок відбивається в теоремах подвійності.

7.7.2. Теорема подвійності і їх застосування

Фундаментальні властивості, що встановлюють взаємозв'язок рішень прямої і двоїстої задач ЛП, можуть бути сформульовані у вигляді наведених нижче тверджень. Їх зазвичай називають теоремами подвійності.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з двоїстих задач має оптимальне рішення $\tilde{x}$, то і інше завдання має оптимальне рішення $\tilde{y}$, причому екстремальні значення цільових функцій збігаються: $f(\tilde{x}) = f^*(\tilde{y})$.

Справедливо і зворотне твердження. Якщо для деяких допустимих планів x і y взаємно двоїстих задач (D, f) і (D^*, f^*) виконується рівність $f(\tilde{x}) = f^*(\tilde{y})$, то $\tilde{x}$ і $\tilde{y}$ є оптимальними планами для цих завдань.

Друга теорема двоїстості. Якщо одна з двоїстих задач нерозв'язна внаслідок необмеженості цільової функції на множині допустимих рішень, то система обмежень іншої задачі суперечлива, і вона не має допустимих планів.

Третя теорема двоїстості. Нехай $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ і $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ – оптимальні плани канонічної задачі (D, f) і двоїстої по відношенню до неї задачі (D^*, f^*) . Якщо j -а компонента плану x^* строго позитивна ($x_j^* > 0$), то відповідне j -е обмеження двоїстої задачі виконується як рівність: $a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \dots + a_{mj}y_m^* = c_j$; якщо ж j -й компонент плану x^* має нульове значення ($x_j^* = 0$), то j -е

обмеження двоїстої задачі виконується як нерівність: $a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \dots + a_{mj}y_m^* \geq c_j$.

Доведення

Вектори x^* й y^* , будучи допустимими планами відповідних завдань, задовольняють умовам: $Ax^* = b$, $x^* \geq 0$ і $y^*A - c \geq 0$. Знайдемо скалярний добуток:

$$(y^*A - c)x^* = (y^*A)x^* - cx^* = y^*(Ax^*) - cx^* = y^*b - cx^*.$$

Згідно з першою теоремою, оптимальні значення цільових функцій взаємно двоїстих задач збігаються, тобто $y^*b = cx^*$. Останнє означає, що $(y^*A - c)x^* = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* - c_j)x_j^* = 0$. Однак скалярний добуток двох невід'ємних векторів може дорівнювати нулю тільки в тому випадку, коли всі попарні добутки їх відповідних координат дорівнюють нулю. Отже, якщо $x_j^* > 0$, то $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* - c_j = 0$, якщо ж $x_j^* = 0$, то можливо $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* - c_j \geq 0$, що і стверджується в теоремі.

Зауваження. Дане твердження можна сформулювати і в такий спосіб. Для того щоб плани x^* і y^* – пари двоїстих канонічних задач (D, f) і (D^*, f^*) – були оптимальними, необхідно, щоб виконувалися наступні умови:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* - c_j \right) = 0,$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* - b_i \right) = 0.$$

З цих умов випливає, що якщо будь-яка нерівність системи обмежень в одній з канонічних задач не обертається в сувору рівність оптимальним планом цього завдання, то відповідний елемент оптимального плану двоїстої задачі повинен дорівнювати нулю. Якщо який-небудь елемент оптимального плану однієї з канонічних задач є позитивним, то відповідне обмеження в двоїстому завданні її оптимальним планом має звертатися в сувору рівність:

якщо, $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$ то $x_j^* = 0$;

якщо, $x_j^* > 0$ то $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* = c_j, j = 1, 2, \dots, n$;

якщо, $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$, то $y_i^* = 0$;

якщо, $y_i^* > 0$ то $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* = b_i, i = 1, 2, \dots, m$.

Практичне значення теорем подвійності полягає в тому, що вони дозволяють замінити процес вирішення основного завдання на рішення двоїстої, яке в певних випадках може виявитися більш простим. Наприклад, завдання, область допустимих значень якого описується двома рівняннями, що зв'язують шість змінних ($m = 2, n = 6$), не може бути вирішене графічним методом. Однак даний метод може бути застосований для вирішення двоїстої до неї задачі, яка має тільки дві змінні.

7.7.3. Економічна інтерпретація двоїстої задачі ЛП

Традиційна економічна інтерпретація двоїстої задачі ЛП базується на моделі *найпростішої задачі виробничого планування*, описаної нами в розділі 6.2.2. Ці задачі економічно можуть бути сформульовані наступним чином.

Пряма задача: скільки і якої продукції x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) треба виробити, щоб при заданих цінах одиниці продукції c_i , обсягах наявних ресурсів b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) і нормах витрати ресурсів a_{ij} максимізувати випуск продукції у вартісному вигляді.

Двоїста задача: якою має бути оцінка одиниці кожного ресурсу y_j ($j = 1, 2, \dots, m$), щоб при заданих b_j , c_i і a_{ij} мінімізувати загальну оцінку витрат на всі ресурси.

Розглянемо економічну інтерпретацію двоїстої задачі ЛП на конкретному прикладі. Підприємство виробляє продукцію двох видів $j = 1, 2$, використовуючи при цьому три види сировини $i = 1, 2, 3$. Запаси сировини b_1, b_2, b_3 , норми витрат i -ї сировини на одиницю продукції j -го виду a_{ij} , ціна одиниці продукції j -го виду c_j грош. од. задані таблицею 7.1.

Таблиця 7.1

Витрати сировини на одиницю продукції						Обсяг запасів сировини			Ціна на од. продукції	
a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36

Необхідно:

- 1) Скласти математичну модель прямої та двоїстої задач.
- 2) Знайти план виробництва, який забезпечує максимальний прибуток підприємству і величину прибутку.
- 3) Дати економічну інтерпретацію отриманих прямої і двоїстої задач.

Рішення

- 1) Математична модель прямої задачі:

$$f(x) = 24x_1 + 36x_2 \rightarrow \max,$$

$$D = \left\{ x \in R^2 \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 18, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 93, \\ x_1 + 4x_2 \leq 48, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

Тут x_1 – кількість продукції виробленої першим підприємством,
 x_2 – другим підприємством.

Математична модель двоїстої задачі:

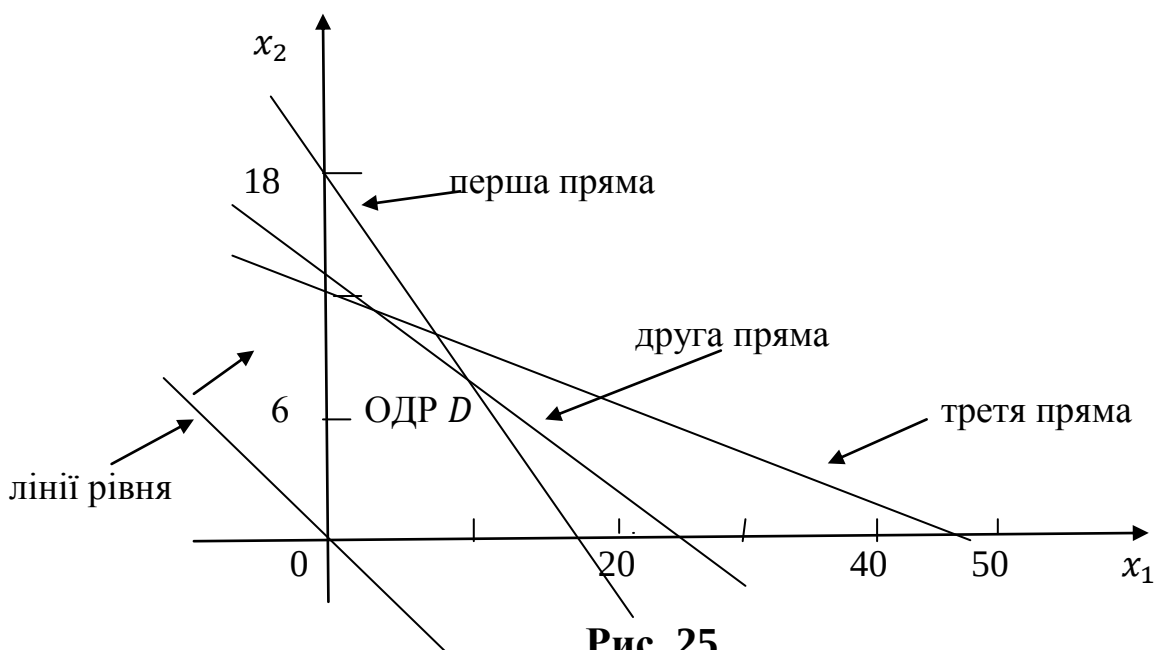
$$f^*(y) = 18y_1 + 93y_2 + 48y_3 \rightarrow \min,$$

$$D^* = \left\{ y \in R^3 \left| \begin{array}{l} y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 24, \\ y_1 + 7y_2 + 4y_3 \geq 36, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

Тут y_1 – вартість одиниці першої сировини, y_2 – другої, y_3 – третьої.

2) Оптимальний план виробництва визначимо двома способами:

а) графічним методом, б) симплекс-методом.



а) Задаємо на площині прямокутну систему координат $x_1 O x_2$, та будуємо прямі для кожного лінійного рівняння системи обмежень (рис. 25).

Перша пряма: $x_1 + x_2 = 18$, в канонічному вигляді:

$$\frac{x_1}{18} + \frac{x_2}{18} = 1.$$

Друга пряма: $4x_1 + 7x_2 = 93$, в канонічному вигляді:

$$\frac{x_1}{23,25} + \frac{x_2}{13,29} = 1.$$

Третя пряма: $x_1 + 4x_2 = 48$, в канонічному вигляді:

$$\frac{x_1}{48} + \frac{x_2}{12} = 1.$$

Визначаємо область допустимих рішень D . Так як $x_1, x_2 \geq 0$, то ОДР D буде обмежена координатними осями Ox_1 і Ox_2 та побудованими першою, другою та третьою прямими (рис. 25). Точка $(0,0)$ належить D .

Знаходимо координати двох точок лінії рівня для заданого значення цільової функції $24x_1 + 36x_2 = 0$ (перша точка: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$, друга точка: $x_1 = -9$; $x_2 = 6$), будуємо пряму лінію цього рівня і вказуємо стрілочкою напрямок її переміщення (рис. 25).

Переміщуємо пряму лінію рівня через ОДР D до тих пір, поки вона не стане скісною до неї. Цією точкою є точка перетину першої і другої прямих. Координати цієї точки x_1^* і x_2^* є рішеннями системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1^* + x_2^* = 18, \\ 4x_1^* + 7x_2^* = 93. \end{cases}$$

Знаходимо координати цієї точки і значення цільової функції в ній:

$$x_1^* = 11; x_2^* = 7, f(11; 7) = 24 \cdot 11 + 36 \cdot 7 = 516.$$

Отримано цілочисельний оптимальний план, задача вирішена.
Переходимо до рішення прямої задачі симплекс-методом.

б) Наведемо математичну модель прямої задачі до канонічного виду та введемо додаткові змінні $x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0$:

$$f(x) = 24x_1 + 36x_2 + 0x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3 \rightarrow \max,$$

$$D = \left\{ x \in R^5 \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x'_1 = 18, \\ 4x_1 + 7x_2 + x'_2 = 93, \\ x_1 + 4x_2 + x'_3 = 48, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

Як видно, стовпці матриці обмежень $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ з

номерами $\{3, 4, 5\}$ являються лінійно незалежними. Можна отримати розкладення по даним стовпцям вектора обмежень з позитивними коефіцієнтами. Останнє означає, що стовпці $\{3, 4, 5\}$ утворюють допустимий базис, з якого можна почати рішення задачі.

Із стовпців, що входять в базис, з урахуванням нульових елементів формується матриця $\bar{\Delta}(\beta^{(1)})$ і зворотня по відношенню до неї $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)})$:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(1)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи їх, за формулами $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$ і $\bar{b}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{b}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\bar{A}(\beta^{(1)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) \bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 & 36 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -24 & -36 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\end{aligned}$$

$$\bar{b}(\beta^{(1)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 93 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 93 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи отримані значення $\bar{A}(\beta^{(1)})$ і $\bar{b}(\beta^{(1)})$, заповнюємо симплекс-таблицю $T^{(1)}$, що відповідає першій ітерації ($q = 1$) (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

Базис	$\bar{b}(\beta^{(1)})$	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	Стовпець відносин
	0	-24	-36	0	0	0	$a_0(\beta^{(1)})$
3	18	1	1	1	0	0	18
4	93	4	7	0	1	0	93/7
5	48	1	4	0	0	1	12

Оскільки рядок оцінок $a_0(\beta^{(1)})$ в перших двох стовпцях містить негативні елементи ($a_{01}(\beta^{(1)}) = -24$, $a_{02}(\beta^{(1)}) = -36$), отже, план $x(\beta^{(1)}) = (0, 0, 18, 93, 48)$ не є оптимальним, і значення цільової функції $f(x(\beta^{(1)})) = 0$ може бути покращено. Слідуючи рекомендації п. 1" алгоритму симплекс методу, вважаємо номер ведучого (в табл. 7.2 він виділений рамкою), що вводиться в черговий базис стовпця $l = 2$ (тому що $|-24| < |-36|$) і визначаємо згідно з

рекомендацією п. 2" алгоритму номер r стовпця виведеного з базису. Для цього розглядаються відношення відповідних елементів стовпця обмежень і провідного стовпця, що претендує на введення в базис. Значення цих відношень занесені в табл. 7.2. Мінімальне значення цього відношення відповідає базисному стовпцю $j = 5$, отже, $r = 5$. Таким чином, поліпшений допустимий базис утворюють стовпці $\{3, 4, 2\}$ і ми переходимо до другої ітерації ($q = 2$).

З стовпців, що входять в новий базис будемо матрицю $\bar{\Delta}(\beta^{(2)})$ і зворотню по відношенню до неї $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(2)})$:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(2)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(2)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи їх, за формулами $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$ і $\bar{b}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{b}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \bar{A}(\beta^{(2)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(2)}) \bar{A} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 & 36 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 9/4 & 0 & 0 & 1 & -7/4 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\bar{b}(\beta^{(2)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(2)}) \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 93 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 432 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи отримані значення $\bar{A}(\beta^{(2)})$ і $\bar{b}(\beta^{(2)})$, заповнюємо симплекс таблицю $T^{(2)}$, відповідну другій ітерації ($q = 2$) (табл. 7.3).

Таблиця 7.3

Базис	$\bar{b}(\beta^{(2)})$	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	Стовпець відносин
	432	-15	0	0	0	9	$a_0(\beta^{(2)})$
3	6	3/4	0	1	0	-1/4	8
4	9	9/4	0	0	1	-7/4	4
2	12	1/4	1	0	0	1/4	48

План $x(\beta^{(2)}) = (0, 12, 6, 9, 0)$ не є оптимальним ($a_{01}(\beta^{(2)}) = -15 < 0$), і значення цільової функції $f(x(\beta^{(2)})) = 432$ може бути покращено. Як випливає з таблиці 7.3 номер *ведучого* (в табл. 7.3 він виділений рамкою), що вводиться в черговий базис стовпця $l = 1$, а номер стовпця, виведеного з базису $r = 4$. Переходимо до третьої ітерації ($q = 3$).

З стовпців, що входять в новий базис $\{3, 1, 2\}$, з урахуванням нульових елементів формується матриця $\bar{\Delta}(\beta^{(3)})$ і зворотна по відношенню до неї $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(3)})$:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(3)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 24 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(3)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 20/3 & -8/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4/9 & -7/9 \\ 0 & 0 & -1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи їх, за формулами $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$ і $\bar{b}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{b}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\bar{A}(\beta^{(3)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(3)}) \bar{A} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 20/3 & -8/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4/9 & -7/9 \\ 0 & 0 & -1/9 & 4/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 & 36 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 4/9 & -7/9 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 & 4/9 \end{pmatrix}; \\ \bar{b}(\beta^{(3)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(3)}) \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 20/3 & -8/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4/9 & -7/9 \\ 0 & 0 & -1/9 & 4/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 93 \\ 48 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 492 \\ 3 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Використовуючи отримані значення $\bar{A}(\beta^{(3)})$ і $\bar{b}(\beta^{(3)})$, заповнюємо симплекс таблицю $T^{(3)}$, відповідну третій ітерації ($q = 3$) (табл. 7.4).

Таблиця 7.4

Базис	$\bar{b}(\beta^{(3)})$	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	Стовпець відносин
	492	0	0	0	20/3	-8/3	$a_0(\beta^{(3)})$
3	3	0	0	1	-1/3	1/3	9
1	4	1	0	0	4/9	-7/9	
2	11	0	1	0	-1/9	4/9	99/4

План $x(\beta^{(3)}) = (4, 11, 3, 0, 0)$ не є оптимальним ($a_{05}(\beta^{(3)}) = -8/3 < 0$), і значення цільової функції $f(x(\beta^{(2)})) = 492$ може бути покращено. Як впливає з таблиці 7.4 номер *ведучого* (в табл. 7.4 він виділений рамкою), що вводиться в черговий базис стовпця $l = 5$, а номер стовпця, виведеного з базису $r = 3$. Переходимо до четвертої ітерації ($q = 4$).

З стовпців, що входять в новий базис $\{5, 1, 2\}$, з урахуванням нульових елементів формується матриця $\bar{\Delta}(\beta^{(4)})$ і зворотна по відношенню до неї $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(4)})$:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(4)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 24 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(4)}) = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -4/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи їх, за формулами $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$ і $\bar{b}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{b}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \bar{A}(\beta^{(4)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(4)}) \bar{A} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -4/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 & 36 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b}(\beta^{(4)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(4)})\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -4/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 93 \\ 48 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 516 \\ 9 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Використовуючи отримані значення $\bar{A}(\beta^{(3)})$ і $\bar{b}(\beta^{(3)})$, заповнюємо симплекс таблицю $T^{(4)}$, відповідну четвертій ітерації ($q = 4$) (табл. 7.5).

Таблиця 7.5

Базис	$\bar{b}(\beta^{(3)})$	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	Стовпець відносин
	516	0	0	8	4	0	$a_0(\beta^{(3)})$
5	9	0	0	3	-1	1	
1	11	1	0	0	7/3	0	
2	7	0	1	0	-4/3	0	

Оскільки рядок оцінок $a_0(\beta^{(4)})$ не містить негативні елементи, отже, план $x(\beta^{(4)}) = (11, 7, 0, 0, 9)$ є оптимальним, і значення цільової функції $f(x(\beta^{(4)})) = 516$ є максимальним.

Перейдемо тепер до розгляду двоїстої задачі (D^*, f^*) . Для знаходження її оптимального рішення $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$, яке означає, що залишків ресурсів не буде, скористаємося теоремами подвійності. Оптимальним рішенням прямої задачі (D, f) є $x_1^* = 11$, $x_2^* = 7$ од. продукту. Відповідно до третьої теореми подвійності, так як $x_1^* > 0$ і $x_2^* > 0$, отже, оптимальне рішення (y_1^*, y_2^*, y_3^*) двоїстої задачі має задовольняти системі рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 = 24, \\ y_1 + 7y_2 + 4y_3 = 36 \end{cases}$$

і мінімізувати функцію $f^*(y) = 18y_1 + 93y_2 + 48y_3$.

Зв'язок між завданнями двоїстої пари полягає в тому, що, вирішуючи симплексним методом одну з них, автоматично отримуємо рішення іншої. Для цього достатньо скористатися відповідністю змінних прямої і двоїстої завдань у останній симплекс-таблиці.

x_1	x_2	...	x_n	x'_1	x'_2	...	x'_i
x'_1	x'_2	...	x'_n	y_1	y_2	...	y_i

Згідно з таблицею 7.5 оптимальним планом двоїстої задачі (y_1^*, y_2^*, y_3^*) є план $(8, 4, 0)$.

Перевірка виконання першої теореми подвійності підтверджує це:

$$f^*(y^*) = 18 \times 8 + 93 \times 4 + 48 \times 0 = 516 = f(x^*).$$

Рішення двоїстої задачі:

$$f^*(y) = 18y_1 + 93y_2 + 48y_3 \rightarrow \min,$$

$$D^* = \left\{ y \in R^3 \left| \begin{array}{l} y_1 + 4y_2 + y_3 = 24, \\ y_1 + 7y_2 + 4y_3 = 36, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

проведемо також симплекс-методом.

Як видно, стовпці матриці обмежень $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ з номерами $\{1, 2\}$ є лінійно незалежними. І можна отримати розкладання за даними колонки вектора обмежень $\begin{pmatrix} 24 \\ 36 \end{pmatrix}$ з позитивними коефіцієнтами 8 і 4. Останнє означає, що стовпці $\{1, 2\}$

утворюють допустимий базис, з якого можна почати вирішення завдання.

З стовпців, що входять в базис формується матриця $\bar{\Delta}(\beta^{(1)})$ і зворотна по відношенню до неї $\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)})$:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(1)}) = \begin{pmatrix} -1 & 18 & 93 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 0 & 7/3 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи їх, за формулами $\bar{A}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{A}$ і $\bar{b}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \bar{b}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \bar{A}(\beta^{(1)}) &= \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) \bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 0 & 7/3 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 & 93 & 48 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\bar{b}(\beta^{(1)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 0 & 7/3 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 516 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи отримані значення $\bar{A}(\beta^{(1)})$ і $\bar{b}(\beta^{(1)})$, заповнюємо симплекс таблицю $T^{(1)}$, відповідну першій ітерації ($q = 1$) (табл. 7.6).

Таблиця 7.6

Базис	$\bar{b}(\beta^{(1)})$	y_1	y_2	y_3	Стовпець відносин
	516	0	0	-9	$a_0(\beta^{(1)})$
1	8	1	0	-3	
2	4	0	1	1	

Оскільки рядок оцінок $a_0(\beta^{(1)})$ не містить позитивних елементів (нагадаємо, задача вирішується на мінімум), отже, план $y(\beta^{(1)}) = y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (8, 4, 0)$ дійсно є оптимальним.

Переходимо до третього пункту – економічної інтерпретації отриманих рішень прямої і двоїстої задач.

3) Для вилучення максимального прибутку підприємству необхідно виготовляти $x_1^* = 11$ од. продукції першого виду і $x_2^* = 7$ од. продукції другого виду. При цьому максимальна прибуток підприємства складе $f(x^*) = 24 \times 11 + 36 \times 7 = 516$ грош. од.

Сировина першого типу коштує 8 грош. од., другого типу – 4 грош. од., її витрачено в повному обсязі. Третій тип сировини повністю не витрачено і його залишилося в кількості 9 од.:

$$48 - x_1^* - 4x_2^* = 48 - 39 = 9.$$

7.8. Поняття цілочисельного завдання ЛП

Багато задач ЛП характеризуються тим, що змінні x_j цільової функції (в силу тих чи інших об'єктивних властивостей, наприклад, див. розділ 7.3) можуть приймати тільки цілі значення. Цілочисельна задача лінійного програмування в канонічній формі має вигляд:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \times x_j \rightarrow \max,$$

$$D = \left\{ x \in R^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \times x_j = b_i, i \in 1:m, x_j \in Z_0^+ \right. \right\},$$

де $Z_0^+ = (0, 1, 2, \dots)$ – множина невід'ємних цілих чисел.

Принципова складність, що викликається наявністю умов цілочисельності в системі обмежень оптимізаційної задачі, полягає в тому, що в значній кількості випадків неможливо замінити дискретну задачу її безперервним аналогом і, знайшовши відповідне рішення, округлити його компоненти до найближчих цілих значень. Приклад, показаний на рис. 26, демонструє, що при округленні оптимального плану x^* звичайної задачі ЛП до цілих значень виходить точка, яка не належить області допустимих планів задачі D .

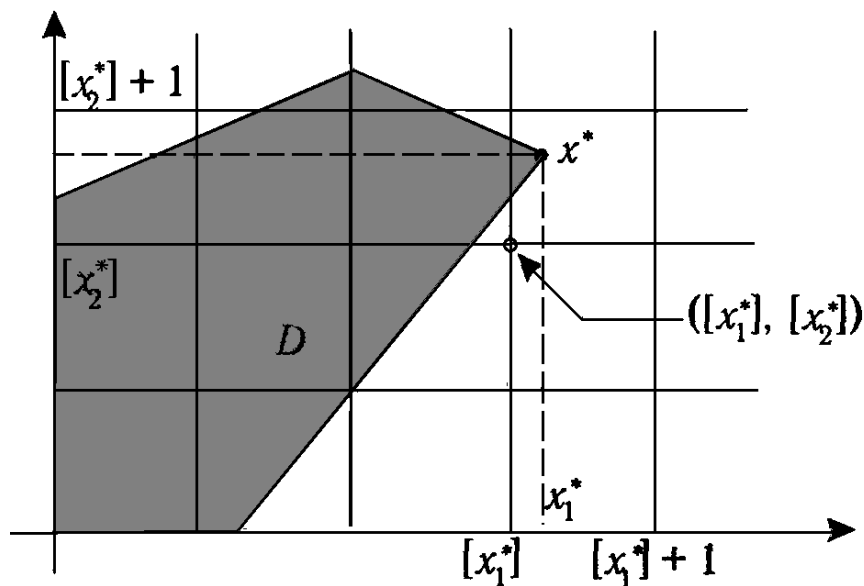


Рис. 26

Тут $[x^*]$ – ціла частина числа x^* . Окремо слід додати, що якщо навіть оптимальний план безперервної задачі, округлений до цілих значень компонентів, виявиться припустимим, то цільова функція може вести себе так, що її значення буде на ньому істотно «гірше», ніж на оптимальному плані цілочисельної задачі. Перераховані проблеми визначили необхідність розробки спеціальних методів вирішення цілочислових задач. Пропонуємо читачеві самостійно ознайомитися з цими методами в спеціальній літературі.

7.9. Транспортна задача і методи її вирішення

Симплекс – метод, розглянутий нами в попередніх розделах, носить універсальний характер і призначений для вирішення дуже широкого кола завдань ЛП. Платою за таку універсальність найчастіше є зниження його ефективності, що виражається в повільній збіжності, високому обсязі обчислень і т. ін. У той же час існують такі класи задач, для яких в силу їх специфіки розроблені більш прості методи вирішення. До класу таких завдань відносяться транспортні та мережеві завдання, розгляду яких і присвячений наступний розділ навчального посібника.

7.9.1. Транспортна задача і її властивості

Повернемося до *транспортної збалансованої задачі в матричній постановці*, про яку ми вже згадували в розділі 6.2.3 при розгляді питань побудови математичних моделей. Нагадаємо постановку транспортної збалансованої задачі в матричній постановці:

Є m пунктів $A_1, A_2, \dots, A_m$ відправлення, в кожному з яких зосереджено певну кількість вантажу $(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Вантаж однорідний, величина a_i називається *запасом*. Є n пунктів призначення $B_1, B_2, \dots, B_n$, де потрібна кількість вантажу $(b_1, b_2, \dots, b_n)$; величина b_j – *заявка*. Відома вартість перевезення c_{ij} – з i -го пункту в j -ий пункт (у вартість перевезення може входити і вартість вантажу).

Вихідні дані транспортної задачі прийнято записувати у вигляді таблиці, наприклад, рис. 27.

c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...
c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
b_1	b_2	...	b_n	

Рис. 27

Потрібно скласти такий план перевезення вантажу, щоб запаси a_i були повністю вичерпані, заявки b_j виконані в повному обсязі, і загальна вартість перевезення була б мінімальною.

Змінними (невідомими) транспортної задачі (плану) є $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ – обсяги перевезень від кожного i -го постачальника j -му споживачеві, що записуються у вигляді матриці перевезень:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Дане завдання зводиться до визначення такого оптимального плану $x^* = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{in}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn})$ перевезень, що розглядається як вектор з простору $R^{m \cdot n}$, координати якого дорівнюють кількості вантажу x_{ij} , що перевозиться з пунктів A_i в пункти B_j , який мінімізує цільову функцію $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min, x \in D, \quad (7.33)$$

на множині допустимих планів:

$$D = \left\{ x \in R^{m \cdot n} \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m; \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \right\} \quad (7.34)$$

при дотриманні умови балансу

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (7.35)$$

Дана математична модель транспортної збалансованої задачі називається *закритою*.

Якщо ж задача перевезення вантажу незбалансована, наприклад, одна з систем обмежень множини допустимих планів (7.34) є нерівністю:

$$D = \left\{ x \in R^{m \cdot n} \left| \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, j = 1, 2, \dots, n; \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m; x_{ij} \geq 0 \right. \right\},$$

або

$$D = \left\{ x \in R^{m \cdot n} \left| \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n; \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m; x_{ij} \geq 0 \right. \right\},$$

і, отже, умова балансу не дотримується: $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, або $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то її математична модель називається *відкритою*. В цьому випадку незбалансоване завдання перевезення вантажу зводиться до транспортної збалансованої задачі додаванням відповідно фіктивного споживача з недостатнім обсягом поставки і нульовою вартістю перевезення або постачальника з надмірним обсягом продукту. Розподіл поставки фіктивному споживачеві

(постачальнику) йде в останню чергу. Тому в подальшому під *транспортною задачею* (слово *збалансованою* опускається) ми будемо розуміти проблему організації перевезення певного продукту між пунктами його виробництва A_i , кількість яких дорівнює m , і n пунктами споживання B_j , математична модель якої задана виразами (7.33), (7.34) і (7.35), тобто є збалансованою.

Транспортна задача є представником класу задач лінійного програмування і тому має всі якості лінійних оптимізаційних задач, але одночасно вона має і ряд додаткових корисних властивостей, які дозволили розробити спеціальні методи її вирішення. Особливості моделі транспортної задачі:

- наявність умови балансу призводить до того, що транспортна задача завжди має рішення;
- коефіцієнти при змінних x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ в системі рівнянь обмежень все дорівнюють одиниці;
- матриця обмежень задачі матиме розмірність $(m + n) \times mn$, тут $m + n$ – число всіх рівнянь, mn – кількість всіх змінних;
- матриці систем рівнянь в обмеженнях $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ і $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ мають ранги, рівні, відповідно, n і m ;
- ранг матриці обмежень транспортної задачі дорівнює $m + n - 1$, і її невироджений базисний план містить $m + n - 1$ ненульових компонент. Дійсно, якщо, з одного боку, підсумувати рівняння $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ по m , а з іншого – рівняння $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ по n , то в силу умови балансу отримаємо одне і те ж значення. З цього випливає, що одне з рівнянь в системі обмежень є лінійною комбінацією інших.

Таким чином, ранг матриці транспортної задачі дорівнює $m + n - 1$, і її невироджений базисний план повинен містити $m + n - 1$ ненульових компонент;

- число базисних і вільних змінних дорівнюють відповідно $(m + n - 1)$ і $mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$. Так як в оптимальному рішенні всі вільні змінні повинні бути рівні нулю, це означає, що більшість маршрутів не будуть задіяні. Якщо $m = 100$; $n = 100$; всього маршрутів (змінних) 10 000, але не більше 199 будуть задіяні.

Процес вирішення транспортної задачі зручно оформляти у вигляді послідовності таблиць, структура яких представлена на рис. 28.

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2	...	b_n	

Рис. 28

У ній виконуються і всі необхідні обчислення. Рядки *транспортної таблиці* відповідають пунктам виробництва (в останній клітині кожного рядка зазначений обсяг запасу продукту a_i), а стовпці – пунктам споживання (остання клітина кожного стовпця містить значення потреби b_j). Всі клітини таблиці (крім тих, які розташовані в нижній частині і правій колонці) містять інформацію про перевезення з i -го пункту в j -й: в лівому верхньому кутку

знаходиться ціна перевезення одиниці продукту c_{ij} , а в правому нижньому – значення обсягу перевезеного вантажу x_{ij} для даних пунктів. Клітини, які містять нульові перевезення ($x_{ij} = 0$), називають *вільними*, а ненульові ($x_{ij} > 0$) – *зайнятими*.

7.9.2. Побудова вихідного допустимого плану в транспортній задачі

За аналогією з іншими завданнями лінійного програмування рішення транспортної задачі починається з побудови допустимого базисного плану, який в подальшому оптимізується. Найбільш простий спосіб його знаходження ґрунтується на так званому *методі північно-західного кута*. Суть методу полягає в послідовному розподілі всіх запасів, наявних в першому, другому і т. д. пунктах виробництва, по першому, другому і т. д. пунктам споживання. Кожен крок розподілу зводиться до спроби повного вичерпання запасів в черговому пункті виробництва або до спроби повного задоволення потреб в черговому пункті споживання. На кожному кроці q величини поточних нерозподілених запасів позначаються $a_i^{(g)}$, а поточних незадоволених потреб – $b_j^{(g)}$. Побудова допустимого початкового плану, згідно з методом північно-західного кута, починається з лівого верхнього кута транспортної таблиці, при цьому вважаємо $a_i^{(0)} = a_i$, $b_j^{(0)} = b_j$. Для чергової клітини, розташованої в рядку i і стовпці j , розглядаються значення нерозподіленого запасу в i -му пункті виробництва та незадоволеної потреби j -му пункті споживання, з них обирається мінімальне і призначається в якості обсягу перевезення між даними пунктами: $x_{ij} = \min \{a_i^{(g)}, b_j^{(g)}\}$.

Після цього значення нерозподіленого запасу і незадоволених потреб у відповідних пунктах зменшуються на цю величину:

$$a_i^{(g+1)} = a_i^{(g)} - x_{ij}, \quad b_j^{(g+1)} = b_j^{(g)} - x_{ij}.$$

Очевидно, що на кожному кроці виконується хоча б одна з рівностей: $a_i^{(g+1)} = 0$, або $b_j^{(g+1)} = 0$. Якщо справедлива перша рівність, то це означає, що весь запас i -го пункту виробництва вичерпаний і необхідно перейти до розподілу запасу в пункті виробництва $i + 1$, тобто перейти до наступної клітки вниз по стовпчику. Якщо ж $b_j^{(g+1)} = 0$, то значить, повністю задоволена потреба для j -го пункту, після чого слідує перехід на клітку, розташовану праворуч по рядку. Знову обрана клітка стає поточною, і для неї повторюються всі перераховані операції.

Грунтуючись на умові балансу запасів і потреб (7.35), неважко довести, що за кінцеве число кроків ми отримаємо допустимий план. В силу тої ж умови число кроків алгоритму не може бути більше, ніж $m + n - 1$, тому завжди залишаться вільними (нульовими) $mn - (m + n - 1)$ клітин. Отже, отриманий план є базисним. Не виключено, що на деякому проміжному етапі поточний нерозподілений запас виявляється рівним поточній незадоволеній потребі ($a_i^{(g)} = b_j^{(g)}$). У цьому випадку перехід до наступної клітини відбувається в діагональному напрямку (одночасно змінюються поточні пункти виробництва і споживання), а це означає «втрату» однієї ненульової компоненти в плані або, іншими словами, виродженність побудованого плану.

Розглянемо застосування методу північно-західного кута на конкретному прикладі. Транспортна таблиця на рис. 29 містить умови деякої задачі, а в таблиці на рис. 30 показаний процес пошуку допустимого плану, включаючи послідовну зміну обсягу нерозподілених запасів і незадоволених потреб. Стрілки відображають траєкторію переходу по клітинам транспортної таблиці.

14	28	21	28	27
10	17	15	24	20
14	30	25	21	43
33	13	27	17	

Рис. 29

↓ 27				27
↓ 6 →	13 →	1 ↓		20
		26 ↓	→ 17	43
33	13	27	17	

Рис. 30

Таблиця на рис. 31 містить як умови задачі, так і допустимий план у відповідності з таблицею на рис. 28.

14 27	28 0	21 0	28 0	27
10 6	17 13	15 1	24 0	20
14 0	30 0	25 26	21 17	43
33	13	27	17	

Рис. 31

Отриманий план містить $m + n - 1 = 3 + 7 - 1 = 6$ з 12 відмінних від нуля перевезень: $x_{11} = 27$, $x_{21} = 6$, $x_{22} = 13$, $x_{23} = 1$, $x_{33} =$

26, $x_{34} = 17$ (позначені сірим кольором) і, отже, може розглядатися як вихідний невироджений базисний план перевезень зі значенням цільової функції

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} \cdot x_{ij} = 14 \cdot 27 + 10 \cdot 6 + 17 \cdot 13 + 15 \cdot 1 + 25 \cdot 26 + 21 \cdot 17 = 1891.$$

Особливістю допустимого плану, побудованого методом північно-західного кута, є те, що цільова функція на ньому бере значення, як правило, далеке від оптимального. Це відбувається тому, що при його побудові ніяк не враховуються значення вартості перевезень c_{ij} . У зв'язку з цим на практиці для отримання вихідного плану використовується інший спосіб – метод мінімального елемента, в якому при розподілі обсягів перевезень в першу чергу займаються клітини з найменшими цінами (рис. 32).

14 27	28 0	21 0	28 0	27
10 6	17 0	15 14	24 0	20
14 0	30 13	25 13	21 17	43
33	13	27	17	

Рис. 32

Отриманий план також містить $m + n - 1 = 3 + 7 - 1 = 6$ з 12 відмінних від нуля перевезень: $x_{11} = 27$, $x_{21} = 6$, $x_{23} = 14$, $x_{32} = 13$, $x_{33} = 13$, $x_{34} = 17$ (позначені сірим кольором) і, отже, також може розглядатися як вихідний невироджений базисний план перевезень, але вже з меншим значенням цільової функції:

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} \cdot x_{ij} = 14 \cdot 27 + 10 \cdot 6 + 15 \cdot 14 + 30 \cdot 13 + 25 \cdot 13 + 21 \cdot 17 = 1720.$$

На даному прикладі сформулюємо *алгоритм методу найменшого елемента*:

1. Збалансувати завдання (переконатися, що завдання збалансоване).

2. Визначити вільну клітину з найменшою вартістю перевезення. Якщо таких клітин кілька, то вибрати клітку з найбільшим потенційним вантажоперевезенням. Якщо і таких клітин декілька, то вибрати будь-яку з цих клітин.

3. В обрану клітку поставити максимально можливе вантажоперевезення для споживача від постачальника.

4. Перевірити, чи залишився нерозподілений вантаж у цього постачальника.

5. Якщо вантаж розподілений не повністю, то застосувати п. 2 щодо одного даного постачальника. Продовжувати до тих пір, поки вантаж цього постачальника не буде повністю розподілений.

Якщо вантаж постачальника розподілений повністю, перевірити, чи повністю задоволений обсяг споживача.

Якщо споживач повністю задоволений, то застосувати п. 2 щодо решти постачальників і потреб в таблиці.

Якщо обсяг споживача повністю не задоволений, тоді застосовується п. 2 щодо відповідного стовпця.

6. Перевірити план на виродженість. Кількість базисних клітин має бути рівним $r = m + n - 1$.

Якщо план вироджений, то слід поставити фіктивне значення вантажу так, щоб мати можливість знайти потенціали всіх базисних клітин (ставити нульову перевезення).

6. Перевірити план на оптимальність і по можливості далі його поліпшити, перейшовши до методу потенціалів.

7.9.3. Критерій оптимальності

Розглянемо більш докладно структуру матриці обмежень (7.34) транспортної задачі (D, f) : (7.33), (7.34), (7.35). Матриця обмежень має розмірність $(m + n) \times mn$, складається з нулів і одиниць і розпадається на дві групи однотипних блоків. Перша (верхня група) відповідає обмеженням b_j , $j = 1, 2, \dots, n$ на задоволення потреб в пунктах споживання, а друга (нижня) – обмеженням a_i , $i = 1, 2, \dots, m$ на обсяги вивезення з пунктів виробництва.

Побудуємо двоїсту задачу (D^*, f^*) . З урахуванням специфічної структури матриці транспортної задачі вектор двоїстих змінних матиме розмірність $m + n$, причому його компоненти, відповідні першій групі обмежень, позначимо через v_j , $j \in \overline{1, n}$, а другий – через u_i , $i \in \overline{1, m}$. Тоді двоїста задача буде мати вигляд:

$$f^*(u, v) = \sum_{j=1}^n v_j b_j + \sum_{i=1}^m u_i a_i \rightarrow \max;$$

$$D^* = \{u \in R^m, v \in R^n \mid v_j + u_i \leq c_{ij}, i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, n}\}. \quad (7.36)$$

Змінні u_i називають потенціалами пунктів виробництва, а v_j – *потенціалами пунктів споживання*.

Економічний сенс змінних двоїстої задачі:

u_i – умовна оцінка i -го постачальника (умовна плата постачальника перевізнику);

v_j – умовна оцінка j -го споживача (умовна плата споживача перевізнику).

Застосовуючи теореми подвійності (див. розділ 2.7.2, третя теорема), можна отримати критерій оптимальності для плану транспортної задачі:

► *Для того, щоб допустимий план транспортної задачі x_{ij} був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб знайшлися такі потенціали, для яких:*

$$v_j + u_i = c_{ij}, \quad \text{якщо } x_{ij} > 0, \quad (7.37)$$

$$v_j + u_i \leq c_{ij} \text{ або } \Delta_{ij} = v_j + u_i - c_{ij} \leq 0, \quad \text{якщо } x_{ij} = 0. \quad (7.38)$$

Дані умови мають змістовну економічну інтерпретацію. Згідно з умовою (7.37), для оптимальності плану перевезень потрібно, щоб на тих маршрутах, за якими дійсно перевозиться вантаж ($x_{ij} > 0$), плата за перевезення виробником і споживачем дорівнювала вартості перевезення, а там, де ці умови не виконуються, оцінка Δ_{ij} критерію (7.38) менше нуля, транспортування вантажу не провадиться ($x_{ij} = 0$).

Слід зазначити, що вибір знака двоїстих змінних довільний і їх економічна інтерпретація може відрізнитися від вищенаведеної. В більшості випадків компоненти, відповідні першій групі обмежень, позначають через $v_j, j \in \overline{1, n}$, а другий – через $(-u_i), i \in \overline{1, m}$ (в

подальшому і ми будемо дотримуватися цих позначень). Тоді двоїсте завдання і критерій оптимальності для плану транспортної задачі будуть мати вигляд:

$$f^*(u, v) = \sum_{j=1}^n v_j b_j - \sum_{i=1}^m u_i a_i \rightarrow \max,$$

$$D^* = \{u \in R^m, v \in R^n \mid v_j - u_i \leq c_{ij}, i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, n}\}; \quad (7.39)$$

$$v_j - u_i = c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} > 0, \quad (7.40)$$

$$v_j - u_i \leq c_{ij} \text{ або } \Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} \leq 0, \text{ якщо } x_{ij} = 0. \quad (7.41)$$

Дані умови критерію оптимальності (7.40) і (7.41) мають наступну змістовну економічну інтерпретацію. Потенціали u_i і v_j можна розглядати як ціни на вантаж, що перевозиться, в пунктах виробництва і споживання (це, до речі, пояснює те, навіщо знадобилося позначати відповідну двоїсту змінну через $(-u_i)$). Тоді, згідно з умовою (7.40), для оптимальності плану перевезень потрібно, щоб на тих маршрутах, за якими дійсно перевозиться вантаж, його ціна в пункті споживання зростала рівно на ціну його перевезення, а відповідно до умови (7.41) в оптимальному плані ціна вантажу в пункті споживання не може бути менше його ціни в пункті виробництва з урахуванням витрат на транспортування.

7.9.4. Алгоритм методу потенціалів для транспортної задачі

Критерій (7.37) – (7.38) або (7.40) – (7.41) покладено в основу одного з методів рішень транспортної задачі, що отримав назву *методу потенціалів*. Вперше він був запропонований в 1949 році Л. В. Канторовичем і М. К. Гавуріним. Пізніше на базі загальних ідей

лінійного програмування аналогічний метод був запропонований Дж. Данцигом.

Точно так само як транспортна задача є окремим випадком завдання ЛП, так і метод потенціалів, взагалі кажучи, може трактуватися як різновид симплексних процедур. Він являє собою ітеративний процес, на кожному кроці якого розглядається деякий поточний базисний план, перевіряється його оптимальність, і при необхідності визначається перехід до «кращого» базисного плану.

Алгоритм починається з вибору деякого допустимого базисного плану (методи його побудови були розглянуті в розділі 7.9.2). Якщо даний план не вироджений, то він містить $m + n - 1$ ненульових базисних клітин, і по ньому можна так визначити потенціали u_i і v_j , щоб для кожної базисної клітини (тобто, для тієї, в якій $x_{ij} > 0$) виконувалася умова (7.40): $v_j - u_i = c_{ij}$, якщо $x_{ij} > 0$.

Оскільки система (7.40) містить $m + n - 1$ рівнянь і $m + n$ невідомих, то один з потенціалів можна задати довільно (наприклад, прирівняти v_1 або u_1 , до нуля). Після цього інші невідомі u_i і v_j визначаються однозначно.

Розглянемо процес визначення потенціалів поточного плану транспортної задачі на прикладі. У таблиці на рис. 33 переписані умови задачі і її допустимий базисний план, побудований методом північно-західного кута (див. розділ 7.9.2, таблиця на рис. 31).

	$v_1 = 0$	$v_2 = 7$	$v_3 = 5$	$v_4 = 1$	
$u_1 = -14$	14 27	28 0	21 0	28 0	27
$u_2 = -10$	10 6	17 13	15 1	24 0	20
$u_3 = -20$	14 0	30 0	25 26	21 17	43
	33	13	27	17	

Рис. 33

Потенціал першого пункту споживання приймаємо рівним нулю ($v_1 = 0$). Тепер, знаючи його, ми можемо визначити потенціали для всіх пунктів виробництва, пов'язаних з першим пунктом ненульовими перевезеннями. В даному випадку їх два (це перший і другий пункти), отримуємо: $u_1 = v_1 - c_{11} = 0 - 14 = -14$; $u_2 = v_1 - c_{21} = 0 - 10 = -10$.

Маючи u_2 та враховуючи, що у другому рядку таблиці існують ще ненульові компоненти x_{22} і x_{23} , можна визначити $v_2 = u_2 - c_{22} = -10 + 17 = 7$ і $v_3 = u_2 - c_{23} = -10 + 15 = 5$, після чого з'являється можливість розрахувати $u_3 = v_3 - c_{33} = 5 - 25 = -20$ і, нарешті, $v_4 = u_3 - c_{34} = -20 + 21 = 1$. В результаті отримуємо повну систему потенціалів, показану в таблиці на рис. 33.

Для вільних клітин транспортної таблиці на рис. 33 обчислюються величини $\alpha_{ij} = v_j - u_i$, звані *різницями потенціалів* (або *оцінка* $\Delta_{ij} = \alpha_{ij} - c_{ij}$) і заносяться в таблицю. У таблиці на рис. 34 різниці потенціалів α_{ij} виписані для всіх небазисних клітин під цінами. Різницю потенціалів α_{ij} можна трактувати як збільшення ціни продукту при його перевезенні з пункту i в пункт j .

	$v_1 = 0$	$v_2 = 7$	$v_3 = 5$	$v_4 = 1$	
$u_1 = -14$	14 27	28 21	21 19	28 15	27
$u_2 = -10$	10 6	17 13	15 1	24 11	20
$u_3 = -20$	14 20	30 27	25 26	21 17	43
	33	13	27	17	

Рис. 34

Згідно з критерієм оптимальності (7.40) – (7.41), якщо всі $\alpha_{ij} \leq c_{ij}$ (оцінки $\Delta_{ij} \leq 0$), то план оптимальний, в іншому випадку, якщо існує хоча б одна різниця потенціалів $\alpha_{ij} > c_{ij}$ (оцінка $\Delta_{ij} > 0$), то він може бути поліпшений. Процес «поліпшення» плану полягає у визначенні клітин, що вводяться і виводяться, в чому простежується змістовна аналогія з відповідними пунктами симплекс-процедур.

Кандидатом на введення, очевидно, може бути будь-яка клітина, в якій $\alpha_{ij} > c_{ij}$, оскільки після введення в базис буде забезпечена рівність $\alpha_{ij} = c_{ij}$. Для визначеності зазвичай рекомендується брати ту клітку, в якій оцінка $\Delta_{ij} = \alpha_{ij} - c_{ij} > 0$ максимальна. У розглянутому нами прикладі це буде клітка (3;1) для якої $\Delta_{13} = 6$.

Клітина, що виводиться, визначається за допомогою так званого *ланцюжка перетворення плану*, який описує характер перерозподілу вантажних потоків. У відповідності з властивостями транспортної задачі для не виродженого базисного плану в поточній таблиці можна утворити замкнутий ланцюжок, що складається тільки з вертикальних і горизонтальних ланок, однією з вершин якого є обрана вільна клітина, а решта – зайняті клітини. У таблиці на рис. 35 показаний

ланцюжок перетворення поточного плану щодо введеної в нього клітини (3;1).

	$v_1 = 0$	$v_2 = 7$	$v_3 = 5$	$v_4 = 1$	
$u_1 = -14$	14 27	28 21	21 19	28 15	27
$u_2 = -10$	10 - 6	17 13	15 + 1	24 11	20
$u_3 = -20$	14 20 +	30 27	25 - 26	21 17	43
	33	13	27	17	

Рис. 35

Логіка алгоритму побудови ланцюжка досить проста: «вийшовши» з клітки (3;1) в горизонтальному напрямку, ми повинні «зупинитися» в тій зайнятій клітці плану, з якої зможемо рухатися далі по вертикалі. В даному прикладі цій вимозі задовольняють як клітина (3;3), так і клітина (3;4). Однак ланцюжок від (3;4) не може бути продовжений далі, в той час як, рухаючись від (3;3) по вертикалі до (2;3) і далі до (2;1), ми повертаємося до вихідної клітини (3;1) і утворюємо замкнутий цикл.

У побудованому ланцюжку, починаючи з введеної клітини (яка вважається першою), позначаються вершини: непарні – знаком «+», а парні знаком «-». Знаком «+» відзначаються ті клітини, в яких обсяги перевезень повинні збільшитися (такою, зокрема, є клітина, що вводиться в план, оскільки вона повинна стати базисною). Знаком «-» – ті клітини, в яких перевезення зменшуються з метою збереження балансу. Серед множини клітин, помічених знаком «-», вибирається клітина з найменшим значенням x_{ij} (позначимо його θ). Вона і стає кандидатом на висновок, бо зменшення обсягу перевезень на велику

величину може привести до негативних значень x_{ij} в інших «мінусових» клітках. Потім проводиться перерахунок плану по ланцюжку: до обсягів перевезень в клітинах, позначених знаком «+», додається обсяг θ , а з обсягів клітин, помічених знаком «-», він віднімається. В результаті введення однієї клітини і виведення іншої виходить новий базисний план, для якого на наступній ітерації описані вище дії повторюються.

У нашому прикладі знаком «-» позначені клітини (2;1) і (3;3), причому $x_{21} = 6$, $x_{33} = 26$. Обчисливши значення $\theta = \min \{x_{21}, x_{33}\} = 6$, здійснюємо перетворення і переходимо до наступного базисного плану, показаного на рис. 36.

	$v_1 = 0$	$v_2 = 13$	$v_3 = 11$	$v_4 = 7$	
$u_1 = -14$	14 - 27	28 27	21 + 25	28 21	27
$u_2 = -4$	10 4	17 13	15 7	24 11	20
$u_3 = -14$	14 + 26	30 27	25 - 20	21 17	43
	33	13	27	17	

Рис. 36

Для знову отриманого плану повторюються дії стандартної ітерації: розраховуються потенціали і оцінки для небазисних клітин транспортної таблиці. Як можна бачити, план на рис. 36 також не є оптимальним (в клітці (1;3) $\alpha_{ij} = 25 > c_{ij} = 21$), тому знову будемо ланцюжок перетворення плану і переходимо до наступного базисного плану (рис. 37).

	$v_1 = 0$	$v_2 = 9$	$v_3 = 7$	$v_4 = 7$	
$u_1 = -14$	14 27	28 23	21 20	28 21	27
$u_2 = -8$	10 8	17 13	15 7	24 15	20
$u_3 = -14$	14 26	30 23	25 21	21 17	43
	33	13	27	17	

Рис. 37

З транспортної таблиці на рис. 37 видно, що отриманий план перевезень:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 13 & 7 & 0 \\ 26 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

оптимальний, так як всі різниці потенціалів $\alpha_{ij} = v_j - u_i$ для небазисних клітин не перевищують відповідних цін c_{ij} . За цим планом обчислюється оптимальне (найменше) значення сумарних витрат на перевезення:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} \cdot x_{ij} = \\ &= 14 \cdot 7 + 21 \cdot 20 + 17 \cdot 13 + 15 \cdot 7 + 14 \cdot 26 + 21 \cdot 17 = \\ &= 1565. \end{aligned}$$

Методом потенціалів можливо рішення не тільки транспортних завдань, коли цільова функція мінімізується, а двоїста максимізується. Досить успішно метод потенціалів застосовується і для вирішення завдань, коли цільова функція максимізується, а двоїста мінімізується. Розглянемо це на наступному прикладі.

Студентські загони a_1 , a_2 і a_3 чисельністю відповідно 70, 99 і 80 чол. беруть участь в сільськогосподарських роботах. Для збирання

картоплі на полях b_1, b_2, b_3 , і b_4 необхідно виділити відповідно 47, 59, 49 і 43 чол. Продуктивність c_{ij} праці студента залежить від врожайності картоплі на j -му полі, з якого i -го він загону, і обчислюється в центнерах на людину за робочий день. Продуктивність представлена у вигляді матриці:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Потрібно:

1) розподілити студентів по полях так, щоб за робочий день було зібрано максимально можливу кількість картоплі. Розподіл студентів по полях визначається матрицею:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix};$$

2) визначити, скільки центнерів картоплі буде прибрано з чотирьох полів при оптимальному розподілі студентів, яке задається вектором:

$$x^* = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) \in R^{12}$$

Рішення методом потенціалів

1. Перевіряємо завдання на збалансованість. Загальна кількість осіб в студентських загонах 249 чол. на 51 чол. більше необхідної кількості осіб для збирання картоплі 198 чол.

Завдання є незбалансованим.

Щоб збалансувати завдання, додаємо фіктивне картопляне поле, для прибирання якого потрібно виділити $b_5 = 51$ чол.

Продуктивність праці студентів на фіктивному поле приймаємо рівною 0.

Складаємо вихідну таблицю збалансованого завдання (рис. 38).

Студентські загони	Кількість, чол.	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
		47	59	49	43	51
a_1	70	3	7	2	5	0
a_2	99	2	3	4	6	0
a_3	80	6	4	3	5	0

Рис. 38

Записуємо збалансовану математичну модель прямої і двоїстої задач.

Математична модель прямого збалансованого завдання:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} \cdot x_{ij} = \\
 &= 3x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24} \\
 &+ 6x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 5x_{34} \rightarrow \max, \\
 &x \in D;
 \end{aligned}$$

$$D = \left\{ x \in R^{15} \left| \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 70, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 99, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 80, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 47, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 59, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 49, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 43, \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} = 51, \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3; j = 1,2,3,4,5 \end{array} \right. \right\}$$

Математична модель двоїстого збалансованого завдання:

$$\begin{aligned}
 f^*(u, v) &= 47v_1 + 59v_2 + 49v_3 + 43v_4 + 51v_5 + 70u_1 + 99u_2 + 80u_3 \\
 &\rightarrow \min;
 \end{aligned}$$

$$D^* = \{u \in R^3, v \in R^5 \mid v_j + u_i \geq c_{ij}, i = 1,2,3; j = 1,2,3,4,5\}.$$

2. На відміну від транспортної задачі початковий опорний базисний план будуємо не методом найменшого елемента, а *методом максимального елемента*. Метод найбільшого елемента відрізняється від методу найменшого елемента лише п. 2 (див. *алгоритм методу найменшого елемента*). Для побудови початкового опорного базисного плану вільна клітина визначається не з найменшою вартістю, а з найбільшою. Побудований початковий опорний базисний план заносимо в таблицю на рис. 39.

Перевіряємо план на виродженість: $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$.

Кількість базисних клітин (виділені сірим кольором) дорівнює 7.

План не вироджений.

3	7 59	2	5 11	0	70
2 18	3	4 49	6 32	0	99
6 29	4	3	5	0 51	80
47	59	49	43	51	

Рис. 39

3. Перевіряємо опорний план на оптимальність. Задаємо $u_2 = 0$ (в цьому рядку найбільша кількість базисних клітин – 3), і з системи $m + n - 1$ рівнянь, записаних для базисних клітин виду $v_j + u_i = c_{ij}$ визначаємо значення всіх потенціалів і заносимо їх в таблицю на рис. 40: $v_1 = c_{21} - u_2 = 2$; $v_2 = c_{12} - u_1 = 8$; $v_3 = c_{23} - u_2 = 4$; $v_4 = 6$; $v_5 = -4$; $u_1 = c_{14} - v_4 = 1$; $u_3 = c_{31} - v_1 = 4$.

$$v_1 = 2 \quad v_2 = 8 \quad v_3 = 4 \quad v_4 = 6 \quad v_5 = -4$$

$u_1 = -1$	3 -2	7 59	2 1	5 $\boxed{-}$ 11 -5	0 $\boxed{+}$	70
$u_2 = 0$	2 $\boxed{-}$ 18 5	3	4 49	6 $\boxed{+}$ 32 -4	0	99
$u_3 = 4$	6 $\boxed{+}$ 29 8	4	3 5	5	0 $\boxed{-}$ 51	80
	47	59	49	43	51	

Рис. 40

Обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = v_j + u_i - c_{ij}$ для всіх незаповнених клітин і їх також заносимо в таблицю: $\Delta_{11} = v_1 + u_1 - c_{11} = -2$; $\Delta_{13} = v_3 + u_1 - c_{13} = 1$; $\Delta_{15} = v_5 + u_1 - c_{15} = -5$; $\Delta_{22} = 5$; $\Delta_{25} = -4$; $\Delta_{32} = 8$; $\Delta_{33} = 5$; $\Delta_{34} = 5$.

Критерій оптимальності для вирішення даної задачі відрізняється від критерію оптимальності для плану транспортної задачі і формулюється так:

► Для того, щоб допустимий план завдання x_{ij} був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб знайшлися такі потенціали, u_i , v_j , для яких:

$$v_j + u_i = c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} > 0, \quad (7.42)$$

$$v_j + u_i \geq c_{ij} \text{ або } \Delta_{ij} = v_j + u_i - c_{ij} \geq 0, \text{ якщо } x_{ij} = 0. \quad (7.43)$$

Знайдене опорне рішення не є оптимальним, тому що для $x_{ij} = 0$ є негативні оцінки, наприклад, $\Delta_{11} = v_1 + u_1 - c_{11} = -2 < 0$.

Переходимо до побудови наступного «поліпшеного» плану.

4. У новий базисний план вводиться вільна клітина (1;5) з найменшою оцінкою ($\Delta_{15} = -5$). Для визначення виведеної з

вихідного плану клітини будуємо по базисним клітинам замкнутий контур з початком і завершенням його у вільній клітці (1;5). У побудованому контурі, починаючи з введеної клітини (яка вважається першою), помічаємо вершини: непарні – знаком «+», а парні знаком «-» (див. рис. 40). Серед базисних клітин, помічених негативним знаком, вибирається клітина (1;4) з найменшим значенням змінної вихідного плану $x_{14} = 11$. Вона і стає кандидатом на висновок, а її значення $x_{14} = 11$ перерозподіляємо по вершинах побудованого контуру (там де «+» значення $x_{14} = 11$ додається, а там де «-» – віднімається). В результаті отримуємо новий допустимий базисний план (див. рис. 41).

	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 4$	$v_4 = 6$	$v_5 = -4$	
$u_1 = 4$	3 3	7 59	2 6	5 5	0 11	70
$u_2 = 0$	2 ┌-┐ 7	3 0	4 49	6 43	0 -4 ┌+┐	99
$u_3 = 4$	6 └+┘ 40	4 3	3 5	5 5	0 └-┘ 40	80
	47	59	49	43	51	

Рис. 41

Для новозбудованого базисного плану повертаємося до п. 3 і для нього повторюємо ітераційний цикл алгоритму.

5. Перевіряємо новий план на оптимальність. Задаємо $u_2 = 0$ (в цьому рядку найбільшу кількість базисних клітин – 3), визначаємо значення всіх потенціалів і заносимо їх в таблицю на рис. 41:

$$v_1 = c_{21} - u_2 = 2; \quad v_2 = c_{12} - u_1 = 3; \quad v_3 = c_{23} - u_2 = 4; \quad v_4 = 6; \\ v_5 = -4; \quad u_1 = c_{15} - v_5 = 4; \quad u_3 = c_{31} - v_1 = 4.$$

Обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = v_j + u_i - c_{ij}$ для всіх незаповнених клітин і їх також заносимо в таблицю на рис. 37:

$$\Delta_{11} = v_1 + u_1 - c_{11} = 3; \quad \Delta_{13} = v_3 + u_1 - c_{13} = 6; \quad \Delta_{14} = v_4 + u_1 - c_{15} = 5; \\ \Delta_{22} = 0; \quad \Delta_{25} = -4; \quad \Delta_{32} = 3; \quad \Delta_{33} = 5; \quad \Delta_{34} = 5.$$

Знайдений «покращений» план також не є оптимальним, тому що є негативні оцінки.

Переходимо до побудови наступного «поліпшеного» плану.

5. У новий базисний план вводиться вільна клітина (2;5) з найменшою оцінкою ($\Delta_{25} = -4$). Для визначення виведений з вихідного плану клітини будуємо замкнутий контур з початком і завершенням його у вільній клітці (2;5). У побудованому контурі, починаючи з введеної клітини (яка вважається першою), помічаємо вершини: непарні – знаком «+», а парні знаком «-» (див. рис. 41). Серед базисних клітин, помічених негативним знаком, вибирається клітина (2;1) з найменшим значенням змінної вихідного плану $x_{21} = 7$. Вона і стає кандидатом на висновок, а її значення $x_{21} = 7$ перерозподіляємо по вершинах побудованого контуру (там де «+» значення $x_{21} = 7$ додається, а там де «-» – віднімається). В результаті отримуємо новий допустимий базисний план (див. рис. 42).

	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 6$	$v_5 = 0$	
$u_1 = 0$	3 3	7 59	2 2	5 1	0 11	70
$u_2 = 0$	2 4	3 4	4 49	6 43	0 7	99
$u_3 = 0$	6 47	4 3	3 1	5 1	0 33	80
	47	59	49	43	51	

Рис. 42

Для новозбудованого базисного плану повертаємося до п. 3 і для нього повторюємо ітераційний цикл алгоритму.

7. Перевіряємо новий план на оптимальність. Задаємо $u_2 = 0$ (в цьому рядку найбільшу кількість базисних клітин – 3), визначаємо значення всіх потенціалів і заносимо їх в таблицю на рис. 42:

$$v_1 = c_{31} - u_3 = 6; \quad v_2 = c_{12} - u_1 = 7; \quad v_3 = c_{23} - u_2 = 4; \quad v_4 = 6; \\ v_5 = 0; \quad u_1 = c_{15} - v_5 = 0; \quad u_3 = c_{35} - v_5 = 0.$$

Обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = v_j + u_i - c_{ij}$ для всіх незаповнених клітин і їх також заносимо в таблицю на рис. 42:

$$\Delta_{11} = v_1 + u_1 - c_{11} = 3; \quad \Delta_{13} = v_3 + u_1 - c_{13} = 2; \quad \Delta_{14} = v_4 + u_1 - c_{15} = 1; \\ \Delta_{21} = 4; \quad \Delta_{22} = 4; \quad \Delta_{32} = 3; \quad \Delta_{33} = 1; \quad \Delta_{34} = 1.$$

Знайдений базисний план є оптимальним, так як немає негативних оцінок.

8. Визначаємо значення цільової функції для оптимального плану:

$$x^* = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) = \\ = (0, 59, 0, 0, 0, 0, 49, 43, 47, 0, 0, 0)$$

і оптимальних потенціалів

$$v^* = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (6, 7, 4, 6, 0), \quad u^* = (u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$$

прямої і двоїстої задачі:

$$f(x^*) = 7 \cdot 59 + 4 \cdot 49 + 6 \cdot 43 + 6 \cdot 47 = 1149;$$

$$f^*(u^*, v^*) = 47 \cdot 6 + 59 \cdot 7 + 49 \cdot 4 + 43 \cdot 6 = 1149.$$

Виходячи з першої теореми подвійності $f(x^*) = f^*(u^*, v^*)$ останній план оптимальний.

Аналіз рішення. 1. Щоб за робочий день було прибрано максимально можливу кількість картоплі, слід розподілити студентів по полях наступним чином:

– із загону a_1 виділити 59 чол. для збирання картоплі на полі b_2 , а 11 чол. залишити в загоні;

– із загону a_2 виділити 49 чол. для збирання картоплі на полі b_3 і 43 чол. для збирання картоплі на полі b_4 , а 7 чол. залишити в загоні;

– із загону a_3 виділити 47 чол. для збирання картоплі на полі b_1 , а 33 чол. залишити в загоні.

2. При цьому оптимальному розподілі студентів з чотирьох полів буде прибрано 1 149 центнерів картоплі.

Завершуючи розмову про метод потенціалів, слід окремо зупинитися на ситуації виникнення виродженого плану. Можливість отримання виродженого плану вже відзначалася при описі методу північно-західного кута. Неважко помітити, що вироджений план також може вийти на етапі перетворення поточного плану по ланцюжку: якщо однакове мінімальне значення буде досягнуто відразу на декількох клітинах, позначених знаком « $\rightarrow$ », то при відніманні переміщуваного по ланцюжку обсягу в новому плані буде менше ніж $m + n - 1$ ненульових компонент. Спосіб подолання виродженості в транспортній задачі досить простий, а саме:

пропонується доповнити поточний план необхідною кількістю нульових клітин (фіктивними перевезеннями) таким чином, щоб вони дозволяли розрахувати повну систему потенціалів, і далі діяти відповідно до правил описаного вище алгоритму. Фактично тут ми маємо справу не з чим іншим, як з аналогом методу збурень для транспортної задачі як окремого випадку ЗЛП. До такого висновку легко прийти, якщо покласти, що додаються фіктивні клітини містять деякий малий обсяг ε .

На розглянутих вище прикладах сформулюємо ітераційний алгоритм розв'язання задачі методом потенціалів:

1. Збалансувати завдання (переконатися, що завдання збалансоване). Дані завдання занести в вихідну таблицю. Записати збалансовану математичну модель прямої і двоїстої задач.

2. Якщо завдання для цільової функції вирішується на мінімум, а двоїстої на максимум, то методом найменшого елемента побудувати початковий опорний базисний план. Якщо ж завдання для цільової функції вирішується на максимум, а двоїстої на мінімум, то початковий опорний базисний план будується шляхом максимального елемента. Побудований початковий опорний базисний план занести в таблицю завдання. Переконатися, що побудований опорний базисний план невироджений.

3. Для всіх базисних клітин таблиці створити систему з $m + n - 1$ рівнянь виду $v_j + u_i = c_{ij}$ (або $v_j - u_i = c_{ij}$). Вибрати змінну u_i або v_j , якій відповідає найбільша кількість зайнятих (базисних) клітин, прирівняти її до нуля, вирішити систему рівнянь щодо u_i або v_j , знайти ці значення і занести їх в таблицю.

4. Для всіх вільних клітин з критерію оптимальності визначити оціночну різницю $\Delta_{ij} = \alpha_{ij} - c_{ij}$, де $\alpha_{ij} = v_j + u_i$ – сума потенціалів (або їх різницю $\alpha_{ij} = v_j - u_i$) занести ці дані в таблицю, щоб переглянути план на оптимальність.

Умови оптимальності: якщо завдання для цільової функції вирішується на мінімум, а двоїстої на максимум і для всіх вільних клітин виконується умова $\Delta_{ij} \leq 0$, то оптимальний план знайдений. Для випадку, коли задача для цільової функції вирішується на максимум, а двоїстої на мінімум, то в умові знак нерівності змінюється на протилежний: $\Delta_{ij} \geq 0$. Якщо хоча б для однієї клітини не виконується зазначена нерівність, то необхідно поліпшити опорний базисний план. Процес «поліпшення» плану полягає у визначенні клітин, що вводяться і виводяться в базисний план.

5. Якщо завдання для цільової функції вирішується на мінімум, а двоїстої на максимум, то в новий базисний план вводиться вільна клітина, де оцінка позитивна: $\Delta_{ij} = \alpha_{ij} - c_{ij} > 0$ і максимальна. Якщо таких клітин кілька, то вибирається будь-яка. Якщо ж завдання для цільової функції вирішується на максимум, а двоїстої на мінімум, то в новий базисний план вводиться вільна клітина, де оцінка негативна: $\Delta_{ij} = \alpha_{ij} - c_{ij} < 0$ і мінімальна. Якщо таких клітин декілька, то вибирається будь-яка.

6. Клітина, що виводиться, визначається за допомогою ланцюжка перетворення плану. У таблиці потрібно утворити замкнутий контур, що складається тільки з вертикальних і горизонтальних ланок, однією з вершин якої є обрана вільна клітина,

а решта – зайняті (базисні) клітини. «Вийшовши» з обраної вільної клітини ми повинні повернутись до вихідної клітини і утворити замкнутий цикл, при цьому контур змінює напрямок тільки в базисних клітинах, а в рядку і стовпці має бути парне число вершин.

7. У побудованому контурі, починаючи з введеної клітини (яка вважається першою), позначаються вершини: непарні – знаком «+», а парні знаком «-». Серед клітин, помічених негативним знаком, вибирається клітина з найменшим значенням змінної x_{ij} базисного плану. Вона і стає кандидатом на виведення, а її значення $x_{ij} = \theta$ перерозподіляється по іншим змінним базисного плану.

8. Шляхом перерозподілу по вершинах побудованого контуру значення $x_{ij} = \theta$ в клітці, яка виводиться з базисного плану, будується новий допустимий базисний план. Перерозподіл θ по вершинах контуру відбувається за наступним правилом: в клітинах, позначених знаком «+», значення θ додається до значення змінної базисного плану, а в клітинах, позначених знаком «-», значення θ віднімається. В результаті виведена з базисного плану клітина стає вільною, а перша клітина контуру – базисною зі значенням змінної базисного плану θ .

9. Для знову отриманого базисного плану в результаті введення однієї клітини і виведення іншої повертаємося до п. 3 алгоритму і дії стандартної ітерації повторюються до тих пір поки не отримаємо оптимальний базисний план транспортної задачі.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

ТЕМА 1. СУЧАСНЕ НАУКОВО-ТЕХНІЧНЕ УЯВЛЕННЯ ПРО ІНФОРМАЦІЮ

1. Розкрийте сучасний зміст поняття «інформація» і для чого вона призначена.
2. Дайте наукове визначення інформації і опишіть процес передачі інформації системою зв'язку.
3. Розкрийте зміст поняття «контекстний метод».
4. Дайте роз'яснення таких термінів як «інформаційний процес» і розкрийте особливості інформаційний процесу в комп'ютерній техніці.
5. Одиниці виміру обсягу текстової та відеоінформації в комп'ютерних системах.
6. Перерахуйте і дайте роз'яснення основних властивостей інформації.
7. Опишіть організаційно-логічну структуру інформації: дані, їх носії та обробка.
8. Дайте характеристику основних типових операцій з даними.

ТЕМА 2. ОРГАНІЗАЦІЙНО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ СТВОРЕННЯ ТА ФУНКЦІОНУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

9. У чому полягає системний підхід при аналізі інформаційних процесів?
10. У яких двох розуміннях вживається термін «система» і дайте в цих розуміннях визначення терміну «система»?
11. Інформаційні системи, їх структура і призначення.
12. Перерахуйте і дайте характеристику основних підсистем забезпечення роботи інформаційної системи будь-якого призначення?
13. Що необхідно для забезпечення роботи інформаційної системи будь-якого призначення?
14. Що розуміється під інформаційними ресурсами та інформаційними технологіями інформаційних систем?
15. За якими ознаками проводиться класифікація інформаційних систем?
16. Комп'ютерні інформаційні системи їх класифікація, переваги та недоліки.
17. Програмні та технічні засоби комп'ютерних інформаційних технологій і їх призначення.
18. Що розуміється під комп'ютерною програмою і основний перелік вимог до них.
19. Принципи проектування і створення комп'ютерних інформаційних систем.

ТЕМА 3. КЕРУЮЧІ ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ

20. Які існують методи прийняття управлінських рішень?
21. Що собою являє система управління, і які функції керуючої підсистеми?
22. Опишіть комунікаційну схему передачі інформації в системі управління.
23. У чому полягає формалізація управлінських інформаційних процесів для реалізації їх в ЕОМ?
24. За якими ознаками проводиться класифікація управлінських інформаційних процесів?
25. Опишіть узагальнену схему обробки інформації в системах управління.
26. Якими підпроцесами можна структурно представити інформаційний процес в системі управління?
27. У чому полягає сутність і мета інформаційного аналізу і синтезу системи управління, які їхні етапи і зміст?
28. В чому полягає зміст рішень наступних завдань аналізу систем управління: визначення функціональних особливостей системи; дослідження інформаційних характеристик системи?
29. Який порядок побудови концептуальної моделі керуючої інформаційної системи?
30. Опишіть структуру інформаційної системи управління, що самоорганізовується, і дайте роз'яснення її елементам.
31. У чому полягає сутність і мета параметричного аналізу і синтезу системи управління, які їхні етапи і зміст?

32. Оператор як модель для опису концепції вхід – вихід «чорного ящика».
33. Що таке «лінійний оператор»? За яких умов чорний ящик можна розглядати як лінійний оператор? Наведіть приклади.
34. Концепція «зворотного зв'язку» у керуючій інформаційній системі.
35. Математичний опис «зворотного зв'язку»: лінійний випадок – модель Мальтуса.
36. Нелінійний зворотний зв'язок – модель Ферхюлста.
37. Опишіть схему етапів операційного проекту з вивчення та вдосконалення системи управління.
38. Яким чином здійснюється оцінка діяльності керуючої інформаційної системи по досягненню мети, яка може бути виражена єдиним критерієм?
39. Наведіть схему операційного дослідження виробничого планування.
40. Яка мета моделювання в системному аналізі, і на які моменти слід звертати увагу при моделюванні?
41. Проілюструйте графічно весь цикл моделювання.
42. Що собою являє математична модель і її призначення?
43. Дайте роз'яснення змісту наукового поняття в терміні «цільова функція системи» і її призначення.
44. У чому полягає сенс оптимізації математичної моделі системи.
45. У чому полягає інформаційна безпека комп'ютерних систем управління.

ТЕМА 4. СИСТЕМИ ОБРОБКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ І ЇХ РОЛЬ В УПРАВЛІННІ ЕКОНОМІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

46. Уявіть економічний об'єкт – як об'єкт управління.

47. Уявіть економічний об'єкт – підприємство як систему управління і дайте їй характеристику.

48. Дайте роз'яснення таких термінів «економічний об'єкт», «підприємство».

49. Дайте роз'яснення терміну «економічна інформація», її особливостям і властивостям.

50. Економічна інформація – як необхідний елемент управління економічними об'єктами.

51. Економічний об'єкт – як система, її характеристики і в чому полягає поняття управління нею.

52. Перерахуйте і дайте роз'яснення основних завдань управління економічними системами.

53. Опишіть структуру системи управління економічними системами та дайте роз'яснення її елементів.

54. Опишіть структуру системи управління економічним об'єктом – підприємство.

55. Що являє собою інформаційна система управління економічним об'єктом її структура, цілі і завдання.

56. Визначте структуру інформаційної системи підприємства.

57. В чому полягає концепція зворотного зв'язку в економічних системах.

58. Системний підхід при проектуванні інформаційних економічних систем.

59. Що розуміється під проблемою і її рішенням для економічної системи?

60. В чому полягає системний підхід для аналізу економічного об'єкта?

61. Яким чином організовується зворотний зв'язок на підприємстві?

62. Дайте визначення поняття «комп'ютерна інформаційна система підприємства».

63. Розкрийте сучасний зміст поняття «корпорація», «корпоративне управління» і ресурси корпорацій.

64. Дайте визначення поняття «корпоративна інформаційна система», їх класифікації та характеристикам.

65. Які основні принципи побудови корпоративних інформаційних систем?

66. Що розуміється під проблемою і її рішенням для економічного об'єкта за допомогою корпоративної інформаційної системи?

67. Які цілі і завдання системи бухгалтерського обліку та аналізу?

68. Які характерні особливості притаманні сучасній системі бухгалтерського обліку?

69. Які основні вимоги пред'являються до облікової інформації, і якими ознаками вона характеризується?

70. Що розуміється під формалізацією облікової інформації?

71. Яка логічна структура облікової інформації, що реєструється в автоматизованій системі бухгалтерського обліку?

72. За яким принципом класифікується облікова інформація в базі даних автоматизованої паспортної системи бухгалтерського обліку?

73. В якій формі організуються і зберігаються дані в базі даних автоматизованої паспортної системи бухгалтерського обліку?

74. Яку роль відіграє класифікатор в автоматизованій системі бухгалтерського обліку?

75. Назвіть основні системи класифікації облікової інформації в автоматизованій системі бухгалтерського обліку і в чому їхня відмінність?

76. У чому полягають переваги та недоліки ієрархічної системи класифікації облікової інформації в автоматизованій системі бухгалтерського обліку?

77. У чому полягають переваги та недоліки офсетної системи класифікації облікової інформації в автоматизованій системі бухгалтерського обліку?

78. Які моделі інтерпретації документів обліку даних використовуються в автоматизованій паспортній системі бухгалтерського обліку?

79. Що таке облікова інформація, і яка її роль в системі управління?

80. За якими ознаками проводиться класифікація економічної інформації, її значення і використання.

81. Назвіть основні ознаки класифікації комп'ютерних облікових програм.

82. Чим відрізняється класифікація облікової інформації від її кодування?

ТЕМА 5. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ СИСТЕМ ОБРОБКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

83. Перерахуйте і дайте характеристику основних послуг, що надаються банками із застосуванням інформаційних технологій і телекомунікаційного середовища.

84. Перерахуйте і дайте характеристику основним видам віртуальних банківських послуг.

85. Дайте порівняльну характеристику програмного забезпечення інвестиційного аналізу.

86. Дайте порівняльну характеристику програмних продуктів фінансового аналізу на підприємствах.

87. Охарактеризуйте загальну інформаційну систему пенсійного фонду.

88. Які основні функції виконує програмне забезпечення "Призначення та виплати пенсій та допомог».

89. Дайте характеристику програмним продуктам управління підприємством: системи планування потреби підприємства в матеріалах MRP і всіх ресурсах MRPII, системи обліку, планування і контролю діяльності підприємства ERP, системи управління взаєминами з клієнтами CRM.

90. Які показники ефективності бізнесу можна поліпшити з використанням інформаційних систем MRP, MRPII, ERP і CRM, Бітрікс24?

91. Проведіть аналіз програми управління документообігом підприємства – MEDOC.

92. У чому полягає сутність і ціль цифрової інформатизації діяльності підприємства модулем «Електронний документообіг» програми MEDOC.

93. Дайте характеристику програмного забезпечення процесного управління підприємством ELMA BPM.

ТЕМА 6. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПО УПРАВЛІННЮ ЕКОНОМІКОЮ

94. Що являє собою математичне моделювання та математична модель, для якої мети вона використовується і їх класифікація.

95. В чому полягає суть математичного та імітаційного моделювання економічних систем?

96. Яка процедура побудови імітаційних моделей з використанням системного підходу?

97. Опишіть методику динамічного моделювання, запропоновану Форрестером, що дозволяє імітувати діяльність підприємства на ЕОМ.

98. Розкрийте зміст основних понять «дослідження операцій» і постановки завдання дослідження операцій.

99. Опишіть приклади використання концепції «вхід-вихід» при моделюванні економічних систем. Зокрема, чи використовується ця концепція в мікроекономіці? Відповідь аргументуйте.

100. Сформулюйте, що представляє собою цільова функція математичної моделі економічної системи?

101. У чому полягає принцип оптимальності допустимих стратегій (планів)?

102. На основі яких принципів здійснюється класифікація задач дослідження операцій?

103. На основі яких принципів здійснюється побудова оптимізаційної (операційної) моделі задач дослідження операцій?

104. Опишіть економіко-математичну модель управління портфелем активів.

105. Опишіть економіко-математичну модель виробничого планування.

106. Опишіть економіко-математичну модель транспортної задачі.

107. Опишіть економіко-математичну модель використання потужностей підприємства.

108. Що являє собою функція корисності споживача, і в чому полягають її особливості?

109. Що являє собою крива корисності і гранична корисність для конкретного блага споживання?

110. Перерахуйте основні властивості функції корисності для моделі споживчого вибору з двома видами благ.

111. Що називається лініями (кривими) байдужості, їх властивості та для яких цілей вони призначені?

112. У чому полягає задача раціональної поведінки споживача на ринку і геометрична інтерпретація цієї задачі для моделі споживчого вибору з двома видами благ?

113. Який набір завдання споживчого вибору прийнято називати оптимальним для споживача, або локальною ринковою рівновагою споживача і як його визначити?

114. В чому полягає суть математичного моделювання фінансових операцій?

115. Назвіть відомі Вам фінансові операції, для яких математичне моделювання є необхідною складовою розрахунків.

116. Сформулюйте одну з задач математичного дисконтування і запишіть математичну модель цієї задачі.

117. Сформулюйте одну з задач банківського дисконтування за обліковою ставкою і запишіть математичну модель цієї задачі.

118. Запишіть математичну модель банківського обліку векселя на будь-який момент часу в проміжку від його придбання і погашення.

119. На основі яких принципів здійснюється класифікація задач дослідження економіко-математичних моделей.

ТЕМА 7. МЕТОДИ ВІДШУКАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ ДЛЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ: ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

120. Сформулюйте задачу лінійного програмування і їх геометричну інтерпретацію, наведіть приклади.

121. Чим відрізняється спільне завдання лінійного програмування від канонічної задачі?

122. Яким чином загальну задачу лінійного програмування можна привести до канонічного виду?

123. Дайте визначення для наступних понять: план, допустимий план, оптимальний план, рішення оптимізаційної задачі.

124. Основні поняття лінійної алгебри, що застосовуються в теорії математичного програмування:

- лінійний простір R^n і V_3 над полем R дійсних чисел;
- лінійна оболонка системи векторів в лінійному просторі, її властивості і ранг;
- базис векторного простору і його властивості;
- ізоморфізм скінченновимірних лінійних просторів;
- афінна множина (простір) і її властивості;
- опукла множина;
- множина рішень спільної, невизначеної, неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з матеріальними коефіцієнтами і n невідомими $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$.

125. У чому полягає перша геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування?

126. У чому полягає друга геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування? У чому її відмінність від першої?

127. Який план називається базисним і метод його знаходження?

128. Який план задачі лінійного програмування називається виродженим, і якій ситуації в геометричній інтерпретації це відповідає?

129. Як з точки зору другої геометричної інтерпретації можна уявити процес пошуку оптимального плану в задачі лінійного програмування?

130. Сформулюйте критерій оптимальності допустимого базисного плану, застосовуваний в симплекс-методі.

131. Сформулюйте основні етапи стандартної ітерації симплекс-методу.

132. Який елемент симплекс-таблиці називається провідним?

133. За яких умов робиться висновок про необмеженість цільової функції в розв'язуваній задачі? Яка геометрична інтерпретація відповідає даному випадку?

134. Яке завдання лінійного програмування називається виродженим? За якими ознаками можна дізнатися, що поточний план є виродженим і яким шляхом це можна усунути?

135. Модифікований симплекс-метод. Перетворення Жордана-Гаусса.

136. Дайте визначення двоїстої задачі і її економічну інтерпретацію.

137. Сформулюйте теореми подвійності, що встановлюють взаємозв'язок рішень прямої і двоїстої задач ЛП.

138. Якими основними властивостями володіє пара двоїстих задач?

139. У чому полягає принципова складність, що викликається наявністю умов цілочисельності в системі обмежень оптимізаційної задачі ЛП?

140. Сформулюйте ітераційний алгоритм розв'язання оптимізаційної задачі ЛП методом потенціалів.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хоменко Л. Г. История отечественной кибернетики и информатики. – К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, 1998. – 455 с.
2. Бенько М. М. Інформаційні системи і технології в бухгалтерському обліку: монографія. – К.: Київ. Нац. Торг.-екон.ун-т, 2010. – 766 с.
3. Войтюшенко Н. М. Інформаційні системи і технології в обліку [Текст]: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів III-IV рівня акредитації / Н. М. Войтюшенко, Л. О. Цибульська; Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, каф. ІСТУ – Донецьк: ДонНУЕТ, 2009 – 340 с.
4. Івахненко С. В. Інформаційні технології в організації бухгалтерського обліку та аудиту: Навч. посіб. – 4-те вид., випр. і доп. – К.: Знання, 2008, С. 9 – 71.
5. Інформаційні системи і технології в обліку: навчальний посібник / Шквір В. Д., Загородній А. Г., Височан О. С. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2003, С. 9 – 27.
6. Клименко О. В. Інформаційні системи і технології в обліку. навчальний посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2008, С. 23 – 34.
7. Амириди Ю. В. Информационные системы в экономике. Управление эффективностью банковского бизнеса: учебник / Ю. В. Амириди, Е. Р. Кочанова, О. А. Морозова. – М.: Кнорус, 2011 – 176 с.
8. Королев М. И. Информационные системы в банковском

деле: учебное пособие / М. И. Королев, Д. М. Королев. – Белгород: БелГУ, 2011 – 293 с.

9. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Лань, – 2011. – 352 с.

10. Соколов Я. В. Основы теории бухгалтерского учёта. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 495 с.

11. Григорина С. В., Борисов А. Г. // Сучасний стан інформаційної безпеки: збірка матеріалів XIII Міжнародної науково-практичної конференції – М.: УГУФМТ 2010.

12. Соколовский С. «Банковская безопасность – 2012» – 2012. – №2 (40). – С. 22-23.

13. Пистунов И. М. Информационные системы в финансово-кредитных учреждениях: учебное пособие / М.: 2013. – 234 с.

14. Макаров С. И. Математика для экономистов: учебное пособие / С. И. Макаров. – 2-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2008. – 264 с.

15. Информационные системы в экономике: учебник К. В. Балдин, С. Н. Воробьев, В. Б. Уткин М.: Дашков и К, 2007.

16. Информационные системы и технологии в экономике и управлении / Под ред. В. В. Трофимова. – М.: Юрайт-Издат, 2012.

17. Горелик В. А. Исследование операций и методы оптимизации: учебник – М.: Издательский центр «Академия», 2013 – 272 с. (серия Бакалавриат).

18. Тюрин О. В., Ахмеров О. Ю. Теорія систем і системний аналіз в економіці: навчальний посібник // Одеса ОНУ, 2019, 172 с.

19. Тюрин О. В. Основи вищої математики: навчальний посібник // Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Частина 1. –

Одеса: Астропринт, 2005. – 215 с.

20. Тюрин О. В., Залецька І.О., Максимова Ю.О. Системи обробки економічної інформації: навч.-метод. посібник // Одеса 2020, 100 с.

21. Спицнадель В. Н. Основы системного анализа: учеб. пособие. // СПб.: «Изд. дом «Бизнес-пресса», 2000 г. – 326 с.

22. Буторин В. К. Введение в системный анализ : курс лекций. // Издание 2-е, переработанное и дополненное / Новокузнецк: НФИ КемГУ. – 2005. – 72 с.

23. Кричевский А. И Основы системного анализа: курс лекций. // Новосибирский государственный университет экономики и управления, 2009г. – 136 с.

24. Планкетт Л., Хейл Г. Выработка и принятие управленческих решений // М.: Экономика. – 2002. – 300 с.

25. Качала В. В. Основы теории систем и системного анализа : учебное пособие для вузов. // М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 216 с.

26. Черняк Ю. И. Анализ и синтез систем в экономике. // М.: Экономика, 1970. – 151 с.

27. Волкова В. Н., Денисов А. А. Основы теории систем и системного анализа: учебник. // Изд. 3-е переработанное и дополненное. СПб: Изд-во СПбГТУ, 2003. – 512 с.

28. Берталанфи Л. Общая теория систем – критический обзор // Исследование по общей теории систем. – М.: Прогресс, 1969. С. 23-82.

29. Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П. Введение в системный анализ. // М.: Высш. шк., 1989. – 367 с.

30. Диязитдинова А. Р., Кордонская И. Б. Общая теория систем и системный анализ: учебное пособие // Самара: ПГУТИ, 2017. – 125 с.
31. Чернышов В. Н., Чернышов А. В. Теория систем и системный анализ : учебное пособие // Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 96 с.
32. Черняк Ю. И. Системный анализ в управлении экономикой. // М.: Экономика, 1975. – 191 с.
33. Мухин В. И., Малинин В. С. Исследование систем управления : учебник для вузов. // М: Издательство «Экзамен», 2003. – 384 с.
34. Рогачев А. Информационные технологии в банках вчера и сегодня // Банковские технологии. – М., 2004. – № 8. – С. 7 – 14.
35. Мильнер Б. З., Евенко Л. И., Рапопорт В. С. Системный подход в организации управления // М.: Экономика. – 1983. – 355 с.
36. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем // М.: Наука, 1978. – 400 с.
37. Экономико-математические методы и модели. Под ред. А. В. Кузнецова, Минск, БГЭУ, 2000 г.
38. Черноиванова Е. А. Исследование операций и методы оптимизации: курс лекций, [учеб. пособие] / Саран. кооп. ин-т РУК. – Саранск: Принт-Издат, 2014. – 132 с.
39. Афанасьев М. Ю.. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с.
40. Буріменко Ю. І. Математичне програмування з розв'язуванням задач на комп'ютері: навч. посіб. для вищих

навчальних закладів / Буріменко Ю. І., Сінявський О. В., Щуровська А. Ю. – К.: Освіта України, 2010. – 200 с.

41. Федосеев В. В.. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов [и др.]; под ред. В. В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999. 391 с.

42. Евтеева Е. В. Использование информационных технологий в системе управления предприятия / Вестник Волжского университета им. В. Н. Татищева, № 2 (24), 2015 г.

43. Дерябин А. И., Лапин А. А. Информационные технологии в управлении предприятием // Молодежный научный форум: Технические и математические науки: электр. сб. ст. по материалам XXV студ. междунар. заочной науч.-практ. конф. – М.: «МЦНО». – 2015 – № 6(25).

Електронні інформаційні ресурси

1. Інформаційні системи фінансової спрямованості – [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://project93012.tilda.ws>.

2. Інформаційні технології у фінансовому менеджменті – [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://spbk-spo.com>.

3. Особливості глобалізації бізнес-процесів 2015 – [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://Деньги-Деньги.рф/>.

4. Абдуллина Р. Р. Інформаційні технології у банківській сфері [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://novainfo.ru/article/6500>.

5. Послуги приватного банкінга. ВТБ банк. [Електронний ресурс] – 14.05.17 – Режим доступу: https://vtb.ua/#private_banking.

6. Дмитро Рябих. Програми інвестиційного аналізу [Електронний ресурс]: Група ИНЭК. Електрон. текст. дані. – Режим доступу: <http://ines.ru/company/pressroom /smi/smi 00/program.php>.

7. Афян Е.В. Огляд інформаційних технологій використовуваних в управлінні фінансами на російських підприємствах [Електронний ресурс] – Режим доступа. – <http://www.scienceforum.ru/ 2014/pdf/985.pdf>.

СКОРОЧЕННЯ

ЕІ	– Економічна інформація
ІС	– Інформаційна система
ІТ	– Інформаційна технологія
ІП	– Інформаційний процес
ПК	– Персональний комп'ютер
АСУП	– Автоматизована система управління підприємством
УІС	– Управлінська інформаційна система
СУБД	– Система управління базою даних
СППР	– Система підтримки прийняття рішень
АРМ	– Автоматизоване робоче місце
ЕОМ	– Електронно-обчислювальна машина
ОПР	– Особа, що приймає рішення
ОС	– Оперуюча сторона
СУ	– Система управління
КІС	– Корпоративна інформаційна система
АСБО	– Автоматизовані системи бухгалтерського обліку
ІБ	– Інформаційна база (БД – База даних)
IDS	– Intrusion Detection Systems
ЛП	– Лінійне програмування
ЗЛП	– Завдання лінійного програмування
ЗЗЛП	– Загальне завдання лінійного програмування
КЗЛП	– Канонічне завдання лінійного програмування
ОДР	– Область допустимих рішень

Навчальне видання

**ТЮРИН ОЛЕКСАНДР ВАЛЕНТИНОВИЧ
АХМЕРОВ ОЛЕКСАНДР ЮРІЙОВИЧ**

СИСТЕМИ ОБРОБКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

В авторській редакції

Підп. до друку 18.05.2021. Формат 60х84/16

Умов.-друк. арк. 20,81. Тираж 30 прим.

Зам. № 2265.

Видавець і виготовлювач

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12

Тел.: (048)723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua