

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. И. МЕЧНИКОВА
Институт математики, экономики и механики
Кафедра компьютерной алгебры и дискретной математики

С.В.ФЕДОРОВСКИЙ

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ.

Методические указания для студентов 1 курса направления подготовки
050102 «компьютерная инженерия»

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ.

Методические указания для студентов 1 курса направления подготовки 050102 «компьютерная инженерия».-32с.

Составитель: Федоровский С.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры компьютерной алгебры и дискретной математики ИМЭМ

Рецензенты: Евтухов В.М. д.ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений ИМЭМ

Кореновский А.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа ИМЭМ

Рекомендовано к печати

*Ученым советом ИМЭМ Одесского национального
университета имени И. И. Мечникова
протокол № 1 от 19 сентября 2013 г.*

.

Содержание

Введение	4
1. Полные системы булевых функций.....	5
Суперпозиция булевых функций.....	5
Замыкание. Свойства замыкания.....	5
Полные системы. Первый критерий полноты.....	6
Независимые системы БФ. Базисы.....	7
2. Замечательные классы БФ	8
Классы T_0, T_1 . Теоремы о классах T_0, T_1	8
Класс линейных функций L . Теорема о классе L	10
Класс самодвойственных функций S . Теорема о классе S	11
Класс монотонных функций M . Критерий. Теорема о классе M ..	14
3. Теорема Поста (второй критерий полноты).....	18
Лемма 3.1 (о функциях, не сохраняющих константы).....	18
Лемма 3.2 (о построении константы).....	19
Лемма 3.3 (о «скачке» немонотонной функции).....	20
Лемма 3.4 (о построении отрицания).....	21
Лемма 3.5 (о построении конъюнкции).....	21
Теорема 3.1 (критерий Поста). Следствия.....	22
Пример.....	26
Задачи для самостоятельного решения.....	29
Рекомендуемая литература.....	32

Введение

Настоящие методические указания предназначены для студентов первого курса ИМЭМ направления подготовки 6.050102 «компьютерная инженерия». Курс дискретной математики на этом направлении читается в первом и во втором семестре. Материал курса разбит на четыре модуля. Предлагаемые методические указания содержат материал четвертого модуля - второго во втором семестре. Количество отводимых на курс дискретной математики учебных часов явно недостаточно для подробного и обстоятельного изучения тем этого курса. Этот факт и новизна материала (нет необходимой базы со средней школы) вызывают у студентов трудности в процессе изучения дискретной математики. Для устранения этого пробела и для облегчения процесса обучения студентам предлагается подробное изложение темы «Полные системы булевых функций» с доказательством большинства необходимых теорем, решением иллюстрирующих примеров. В конце даются задачи для самостоятельного решения с указанием ответов и приводится список рекомендуемой литературы.

Предлагаемые методические указания несомненно будут полезны и студентам направлений подготовки 6.040301 «прикладная математика» и 6.040201 «математика», изучающих дискретную математику на первом курсе в ИМЭМ.

1. Полные системы булевых функций.

Определение 1.1.

Пусть $f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m \in P_2$, где $f^n = f^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и

$$\bigvee_{i=1}^m : g_i^m = g_i^m(y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Тогда функция $F^m = F^m(y_1, y_2, \dots, y_m) = S^{n+1}(f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m) =$

$f^n(g_1^m(y_1, y_2, \dots, y_m), g_2^m(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^m(y_1, y_2, \dots, y_m))$ называется суперпозицией исходных булевых функций (БФ) в указанном порядке.

Замечание 1.1. В теории булевых функций операции алгебры высказываний (АВ) над формулами АВ рассматриваются и понимаются как соответствующие суперпозиции булевых функций, представленных формулами. Например,

$$\overline{xy} \rightarrow (\overline{x} \leftrightarrow yz) = S^3(x \rightarrow y, \overline{xy}, \overline{x} \leftrightarrow yz) = \rightarrow (\overline{xy}, \overline{x} \leftrightarrow yz).$$

В дальнейшем, говоря о булевых функциях, мы подразумеваем, что они заданы формулами.

Определение 1.2.

Пусть $H = \{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \mid f_i \in P_2; i, n \in \mathbb{N}\}$ - произвольное множество (конечное или нет) булевых функций. Тогда множество всевозможных суперпозиций ф-ций из H называется замыканием H и обозначается $[H]$.

Очевидные свойства замыкания:

1. $H \subseteq [H]$;
2. $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow [H_1] \subseteq [H_2]$;
3. $[[H]] = [H]$;
4. $[H_1] \cup [H_2] \subseteq [H_1 \cup H_2]$;
5. $[H_1 \cap H_2] \subseteq [H_1] \cap [H_2]$.

Определение 1.3. Система БФ называется полной, если её замыкание равно множеству всех без исключения БФ. Т.о.

$$H = \{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \mid f_i \in P_2; i, n \in \mathbb{N}\} - \text{полная} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [H] = P_2.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, конечные полные системы.

Теорема 1.1 (Первый критерий полноты).

Пусть даны две системы булевых функций

$$H = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} - \text{полная и } G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}.$$

Тогда система G будет полной системой тогда и только тогда, когда любая функция полной системы H выражается некоторой суперпозицией функций из G , т.е.

$$([G] = P_2) \Leftrightarrow (\forall_{i \in 1, n} \forall_{f_i \in H} f_i \in [G]).$$

Доказательство:

Необходимость ($\Rightarrow$). Нужно доказать: $([G] = P_2) \Rightarrow (\forall_{i \in 1, n} \forall_{f_i \in H} f_i \in [G])$.

Имеем:

$$\left. \begin{array}{l} [G] = P_2 \\ H \subseteq P_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (H \subseteq [G]) \Rightarrow (\forall_{f_i \in H} f_i \in [G])$$

И необходимость доказана.

Достаточность ($\Leftarrow$). Нужно доказать: $(\forall_{i \in 1, n} \forall_{f_i \in H} f_i \in [G]) \Rightarrow ([G] = P_2)$.

Имеем:

$$(\forall_{i \in 1, n} \forall_{f_i \in H} f_i \in [G]) \Rightarrow (H \subseteq [G]) \xrightarrow{\text{свойство 2 замыканий}} ([H] \subseteq [G]).$$

Поскольку H , по условию, полная, то $[H] = P_2$ и, следовательно, имеем $P_2 \subseteq [G]$.

Обратное включение $[G] \subseteq P_2$ очевидное, ибо P_2 содержит все без исключения БФ, а значит и функции из $[G]$. Имеем:

$$\left. \begin{array}{l} P_2 \subseteq [G] \\ [G] \subseteq P_2 \end{array} \right\} \Rightarrow ([G] = P_2)$$

Т.е. система G - полная. Теорема доказана.

Примеры.

1. Система $H = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ - полная, т.к. всякую булеву функцию можно представить некоторой формулой алгебры высказываний (АВ) не содержащей (в силу определения формулы АВ) других операций, кроме операций указанной системы. Таким образом,

$$[H] = [\{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}] = P_2,$$

т.е. H - полная;

2. Поскольку $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$, то функция

$$(x \leftrightarrow y) \in [\{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \}] = [H_1].$$

Остальные функции системы H предыдущего примера содержатся в H_1 . Таким образом, $H \subseteq [H_1]$. Поскольку H - полная (см. предыдущий пример), то в силу первого критерия полноты имеем - систе-

ма $H_1 = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \}$ - полная.

Упражнения: Используя первый критерий полноты доказать полноту систем:

$$\{ \neg, \wedge, \vee \}, \{ \neg, \wedge \}, \{ \neg, \vee \}, \{ \neg, \rightarrow \}, \{ \wedge, +, 1 \}, \{ \downarrow \}, \{ \setminus \}.$$

Определение 1.4.

Система БФ называется **независимой**, если ни одна из ее функций не может быть выражена суперпозицией остальных функций этой системы, т.е.

$$(H = \{ f_1, f_2, \dots, f_n \} \text{ - независимая}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \bigvee_{i \in \{1, n\}} \bigvee_{f_i \in H} f_i : f_i \notin [H \setminus \{f_i\}]$$

Определение 1.5.

Система БФ называется **базисом**, если она является полной и никакая её собственная подсистема полной не является (т.е. если она полная и независимая).

2. Замечательные классы БФ.

Определение 2.1.

Множество булевых функций, которые на нулевом наборе значений переменных принимают значение ноль, называется **классом функций сохраняющих ноль** и обозначается T_0 , т.е.

$$T_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in P_2 \mid f(\tilde{0}) = 0\}.$$

Определение 2.2.

Множество булевых функций, которые на единичном наборе значений переменных принимают значение единица, называется **классом функций сохраняющих единицу** и обозначается T_1 , т.е.

$$T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in P_2 \mid f(\tilde{1}) = 1\}$$

Теорема 2.1 (о классе T_0).

Пусть $T_0^{(n)}$ - множество функций класса T_0 , которые зависят от n переменных. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $T_0 \neq \emptyset$;
2. T_0 - замкнут ($T_0 = [T_0]$);
3. $|T_0^{(n)}| = 2^{2^n - 1}$ (т.е. половина всех без исключения БФ от n переменных принадлежит классу T_0).
4. $[T_0] \neq P_2$.

Доказательство.

1. Нуль-функция ($\text{const } 0$) принадлежит классу T_0 , а потому $T_0 \neq \emptyset$.
2. Рассмотрим произвольную совокупность функций класса T_0 :

$$f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m \in T_0.$$

Построим их суперпозицию в указанном порядке и покажем, что она принадлежит классу T_0 . Имеем:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = S^{n+1}(f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m) = f^n(g_1^m(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^m(y_1, y_2, \dots, y_m)).$$

Тогда

$$F(0, 0, \dots, 0) = f^n(g_1^m(0, 0, \dots, 0), \dots, g_n^m(0, 0, \dots, 0)) = f^n(0, 0, \dots, 0) = 0$$

и, следовательно, $F \in T_0$. Значит, $[T_0] \subseteq T_0$. Обратное включение $T_0 \subseteq [T_0]$ очевидное.

Таким образом, $T_0 = [T_0]$, т.е. класс T_0 замкнут.

3. Рассмотрим таблицу произвольной функции $f^{(n)}$ из $T_0^{(n)}$:

$$f^{(n)} : 0 f_1 f_2 \dots f_{2^n-2} f_{2^n-1}.$$

Поскольку первое место таблицы занято нулем (значение $f^{(n)}$ на нулевом наборе значений переменных), то таблица $f^{(n)}$ определяется двоичным набором $(f_1, f_2, \dots, f_{2^n-2}, f_{2^n-1})$ из B^{2^n-1} . Поэтому

$$|T_0^{(n)}| = |B^{2^n-1}| = 2^{2^n-1}.$$

4. $\text{Const } 1 \notin T_0$. Поэтому $[T_0] \neq P_2$ и теорема доказана.

Теорема 2.2 (о классе T_1).

Пусть $T_1^{(n)}$ - множество функций класса T_1 , которые зависят от n переменных. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $T_1 \neq \emptyset$;

2. T_1 - замкнут ($T_1 = [T_1]$);

3. $|T_1^{(n)}| = 2^{2^n-1}$ (т.е. половина всех без исключения БФ от n пере-

менных принадлежит классу T_1).

4. $[T_1] \neq P_2$.

Доказательство.

1. $\text{Const } 1$ принадлежит классу T_1 , а потому $T_1 \neq \emptyset$.

2. Рассмотрим произвольную совокупность функций класса T_1 :

$$f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m \in T_1.$$

Построим их суперпозицию в указанном порядке и покажем, что она принадлежит классу T_1 . Имеем:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = S^{n+1}(f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m) = f^n(g_1^m(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^m(y_1, y_2, \dots, y_m)).$$

Тогда

$$F(1, 1, \dots, 1) = f^n(g_1^m(1, 1, \dots, 1), \dots, g_n^m(1, 1, \dots, 1)) = f^n(1, 1, \dots, 1) = 1$$

и, следовательно, $F \in T_1$. Значит, $[T_1] \subseteq T_1$. Обратное включение $T_1 \subseteq [T_1]$ очевидное.

Таким образом, $T_1 = [T_1]$, т.е. класс T_1 замкнут.

3. Рассмотрим таблицу произвольной функции $f^{(n)}$ из $T_1^{(n)}$:

$$f^{(n)} : f_0 f_1 f_2 \dots f_{2^n-2} 1.$$

Поскольку последнее место таблицы занято единицей (значение $f^{(n)}$ на единичном наборе значений переменных), то таблица $f^{(n)}$ определяется двоичным набором $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{2^n-2})$ из B^{2^n-1} . Поэтому

$$|T_1^{(n)}| = |B^{2^n-1}| = 2^{2^n-1}.$$

4. $\text{Const } 0 \notin T_1$. Поэтому $[T_1] \neq P_2$ и теорема доказана.

Определение 2.3.

Множество булевых функций, многочлен Жегалкина которых линейный (не содержит конъюнкций переменных), называется классом линейных функций и обозначается L , т.е.

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in P_2 \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n; n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Теорема 2.3 (о классе L).

Пусть $L^{(n)}$ - множество функций класса L , которые зависят от n переменных. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1. $L \neq \emptyset$;*
- 2. L - замкнут ($L = [L]$);*
- 3. $|L^{(n)}| = 2^{n+1}$*
- 4. $[L] \neq P_2$.*

Доказательство.

1. Тожественная функция x принадлежит L , а потому $L \neq \emptyset$.
2. Рассмотрим произвольную совокупность функций класса L :

$$f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m \in L.$$

Построим их суперпозицию в указанном порядке и покажем, что она принадлежит классу L . Пусть

$$f^{(n)} = f^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n;$$

$$g_i^{(m)} = g_i^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_m) = b_{0i} + b_{1i} y_1 + \dots + b_{mi} y_m, \quad \forall i \in \overline{1, n}$$

Имеем:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = S^{n+1}(f^{(n)}, g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \dots, g_n^{(m)}) = f^{(n)}(g_1^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_m)) =$$

$$a_0 + a_1(b_{01} + b_{11}y_1 + \dots + b_{m1}y_m) + \dots + a_n(b_{0n} + b_{1n}y_1 + \dots + b_{mn}y_m) =$$

$$(a_0 + a_1 b_{01} + \dots + a_n b_{0n}) + (a_1 b_{11} + \dots + a_n b_{1n})y_1 + \dots + (a_1 b_{m1} + \dots + a_n b_{mn})y_m =$$

$$c_0 + c_1 y_1 + \dots + c_m y_m, \quad \text{где } c_0 = a_0 + a_1 b_{01} + \dots + a_n b_{0n} \text{ и}$$

$$c_i = a_1 b_{i1} + \dots + a_n b_{in}, \quad \forall i \in \overline{1, m}$$

и, следовательно,

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = S^{n+1}(f^{(n)}, g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \dots, g_n^{(m)}) = f^{(n)}(g_1^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_m)) \in L.$$

Значит, $[L] \subseteq L$. Обратное включение $L \subseteq [L]$ очевидное. Таким образом, $L = [L]$ и класс L замкнут.

3. Рассмотрим произвольную функцию $f^{(n)}$ из $L^{(n)}$.

$$f^{(n)} = f^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

Поскольку всякий многочлен Жегалкина однозначно определяется двоичным набором своих коэффициентов, то

$$f^{(n)} = f^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \text{ однозначно определяется двоич-}$$

ным набором $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ из B^{n+1} . Следовательно

$$|L^{(n)}| = |B^{n+1}| = 2^{n+1}.$$

4. Конъюнкция $x \notin L$. Поэтому $[L] \neq P_2$ и теорема доказана.

Определение 2.4.

Множество булевых функций, каждая из которых совпадает с двойственной ей функцией (самодвойственных), называется классом самодвойственных функций и обозначается S , т.е.

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in P_2 \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \dots, x_n); n \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 2.4 (о классе S).

Пусть $S^{(n)}$ - множество функций класса S , которые зависят от n переменных. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $S \neq \emptyset$;
2. S - замкнут ($S = [S]$);
3. $|S^{(n)}| = 2^{2^{n-1}}$
4. $[S] \neq P_2$.

Доказательство.

1. Из определения двойственной функции

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\overline{\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}}}$$

сразу следует, что для самодвойственной функции ($f = f^*$) имеет место

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{\overline{\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}}} \quad \text{или} \quad \overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}),$$

т.е. всякая самодвойственная функция на противоположных наборах значений переменных принимает противоположные значения. Поскольку в таблице БФ противоположные наборы расположены симметрично относительно середины таблицы, то признаком самодвойственной функции является антисимметрия ее таблицы относительно середины таблицы, т.е. таблица всякой самодвойственной функции от n переменных имеет вид

$$f : f_0 \ f_1 \ f_2 \dots \overline{f_2} \ \overline{f_1} \ \overline{f_0}.$$

Таким свойством обладает, например, таблица тождественной функции x . Поэтому x принадлежит классу S . Значит $S \neq \emptyset$.

2. Рассмотрим произвольную совокупность функций класса S :

$$f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m \in S.$$

Построим их суперпозицию в указанном порядке и покажем, что она принадлежит классу $\mathcal{S}$. Имеем:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = S^{n+1}(f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m) = f^n(g_1^m(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^m(y_1, y_2, \dots, y_m)).$$

Тогда

$$F^*(y_1, y_2, \dots, y_m) = \overline{f^n(g_1^m(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_m}), \dots, g_n^m(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_m}))}$$

Навесим по два отрицания на функции $g_i^m(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_m})$, $i = \overline{1; n}$. Получим

$$F^*(y_1, y_2, \dots, y_m) = \overline{\overline{f^n(g_1^m(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_m}), \dots, g_n^m(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_m}))}}.$$

Последовательно применяя теперь определение двойственной функции и, учитывая самодвойственность функций $f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m$, получим:

$$\begin{aligned} F^*(y_1, y_2, \dots, y_m) &= \overline{\overline{f^n((g_1^m(y_1, y_2, \dots, y_m))^*, \dots, (g_n^m(y_1, y_2, \dots, y_m))^*)}} = \\ &= \overline{\overline{f^n(g_1^m(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^m(y_1, y_2, \dots, y_m))}} = (f^n)^*(g_1^m(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^m(y_1, y_2, \dots, y_m)) = \\ &= f^n(g_1^m(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^m(y_1, y_2, \dots, y_m)) = F(y_1, y_2, \dots, y_m). \end{aligned}$$

Следовательно, $F \in \mathcal{S}$. Тем самым $[S] \subseteq \mathcal{S}$. Обратное включение $\mathcal{S} \subseteq [S]$ очевидное. Таким образом, $\mathcal{S} = [S]$ и класс $\mathcal{S}$ замкнут.

3. В силу отмеченного ранее свойства антисимметричности таблиц самодвойственных функций их таблицы

$f : f_0 f_1 f_2 \dots f_{2^{n-1}-1} \overline{f_{2^{n-1}-1}} \dots \overline{f_2} \overline{f_1} \overline{f_0}$ однозначно определяются двоичными

наборами значений этих функций, например, $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{2^{n-1}-1})$ первой половины таблицы. Длина этих наборов равна 2^{n-1} . Поэтому

$$|S^{(n)}| = |B^{2^{n-1}}| = 2^{2^{n-1}}.$$

4. Конъюнкция $xy \notin \mathcal{S}$. Поэтому $[S] \neq P_2$ и теорема доказана.

Определение 2.5.

*Пусть $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^n$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Набор $\tilde{\alpha}$ **предшествует** набору $\tilde{\beta}$, если в каждой позиции компоненты набора $\tilde{\alpha}$ не*

превышают компонент набора $\tilde{\beta}$. Обозначается этот факт $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$.

Итак,

$$\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall_{i=1;n} \alpha_i \leq \beta_i.$$

Замечание 2.1. Отношение предшествования на булевом кубе B^n является обычным отношением частичного порядка, поскольку рефлексивно, транзитивно и антисимметрично (убедиться в этом самостоятельно). Это отношение на B^n не является линейным порядком.

Например, на B^3 наборы $\tilde{\alpha}_1 = (0,1,0)$ и $\tilde{\beta}_1 = (1,1,0)$ сравнимы между собой (причем $\tilde{\alpha}_1 \preccurlyeq \tilde{\beta}_1$), а наборы $\tilde{\alpha}_2 = (0,1,1)$ и $\tilde{\beta}_2 = (1,0,1)$ несравнимы между собой, т.к. $\tilde{\alpha}_2 \not\preccurlyeq \tilde{\beta}_2$ и $\tilde{\beta}_2 \not\preccurlyeq \tilde{\alpha}_2$. Если $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, то будем говорить, что набор $\tilde{\alpha}$ «меньше» набора $\tilde{\beta}$ (или набор $\tilde{\beta}$ «больше» набора $\tilde{\alpha}$).

Определение 2.6.

Булева функция f называется **монотонной**, если на «больших» наборах значений переменных она принимает не меньшие значения, т.е.

$$f = f^n - \text{монотонная} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^n} : ((\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}) \Rightarrow (f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta}))).$$

Определение 2.7.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) булевой функции называется **позитивной**, если она не содержит отрицаний переменных.

Определение 2.8.

Множество монотонных булевых функций называется **классом монотонных функций** и обозначается M , т.е.

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in P_2 \mid f - \text{монотонная}\}.$$

Теорема 2.5 (критерий монотонности).

Булева функция f - монотонная тогда и только тогда, когда эта функция - функция-const или у нее существует позитивная ДНФ, т.е.

$$(f \in M) \Leftrightarrow (f = 1 \vee f = 0 \vee (\exists \text{ ДНФ}(f) : \text{ДНФ}(f) - \text{позитивная})) .$$

Доказательство.

1. Необходимость ($\Rightarrow$). Нужно доказать:

$$(f \in M) \Rightarrow (f = 1 \vee f = 0 \vee (\exists \text{ ДНФ}(f) : \text{ДНФ}(f) - \text{позитивная})) .$$

Воспользуемся методом математической индукции по количеству n существенных переменных функции.

База индукции. При $n = 0$ функция f является константой, т.е.

$f = 1 \vee f = 0$ и, тем самым, утверждение верное.

Предположение индукции. Пусть для всякой монотонной функции f , зависящей от $n = k$ существенных переменных, утверждение верное, т.е. $\exists \text{ ДНФ}(f) : (\text{ДНФ}(f) - \text{позитивная})$.

Шаг индукции. Пусть $f = f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$ зависит от $k+1$ существенной переменной и является монотонной. В силу теоремы о дизъюнктивном разложении имеет место разложение f по переменной x_{k+1} :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) = \overline{x_{k+1}} f(x_1, x_2, \dots, x_k, 0) \vee x_{k+1} f(x_1, x_2, \dots, x_k, 1).$$

Рассмотрим функции

$$f_0(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_k, 0) \text{ и } f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_k, 1).$$

Покажем, что функции f_0 и f_1 – монотонные. Пусть

$$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^k; \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \text{ и } \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}.$$

Тогда $\tilde{\alpha}_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, i) \leq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, i) = \tilde{\beta}_i, i \in \{0, 1\}$.

В силу монотонности функции f : $f_i(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}_i) \leq f(\tilde{\beta}_i) = f_i(\tilde{\beta})$. Следовательно, функции f_0 и f_1 – монотонные. Покажем, что $f_0 \rightarrow f_1 = 1$. Если

$$f_0 \rightarrow f_1 \neq 1, \text{ то } \exists \tilde{\alpha} \in B^k : f_0(\tilde{\alpha}) \rightarrow f_1(\tilde{\alpha}) = 0 \text{ или}$$

$$f_0(\tilde{\alpha}) = f_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0) = 1 \text{ и}$$

$$f_1(\tilde{\alpha}) = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 1) = 0. \text{ Тогда}$$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0) > f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 1), \text{ что противоречит монотонности функ-$$

ции f . Таким образом, $f_0 \rightarrow f_1 = 1$. Имеем далее

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) &= \overline{x_{k+1}} f(x_1, x_2, \dots, x_k, 0) \vee x_{k+1} f(x_1, x_2, \dots, x_k, 1) = \overline{x_{k+1}} f_0 \vee x_{k+1} f_1 = \\
(\overline{x_{k+1}} f_0 \vee x_{k+1} f_1)(f_0 \rightarrow f_1) &= (\overline{x_{k+1}} f_0 \vee x_{k+1} f_1)(\overline{f_0} \vee f_1) = \overline{x_{k+1}} f_0 f_1 \vee x_{k+1} \overline{f_0} f_1 \vee x_{k+1} f_1 = \\
\overline{x_{k+1}} f_0 f_1 \vee x_{k+1} f_1 &= f_1(\overline{x_{k+1}} f_0 \vee x_{k+1}) = f_1(f_0 \vee x_{k+1}).
\end{aligned}$$

Поскольку функции f_0 и f_1 – монотонные и зависят от k существенных переменных, то в силу предположения индукции у них существуют позитивные ДНФ. Используя их в последнем соотношении, придем к позитивной ДНФ для f . Шаг индукции доказан.

Вывод. $\forall f \in P_2 : (f \in M) \Rightarrow (f = 1 \vee f = 0 \vee (\exists \text{ ДНФ}(f) : \text{ДНФ}(f) - \text{позитивная}))$.

2. Достаточность ($\Leftarrow$). Нужно доказать:

$$(f = 1 \vee f = 0 \vee (\exists \text{ ДНФ}(f) : \text{ДНФ}(f) - \text{позитивная})) \Rightarrow (f \in M).$$

Доказательство. Случаи $f = 1 \vee f = 0$ очевидные. Пусть у функции

$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существует позитивная ДНФ. Рассмотрим произвольный набор $\tilde{\alpha} \in B^n$. Если $f(\tilde{\alpha}) = 0$, то для всех наборов $\tilde{\beta}$, таких, что $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, неравенство $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$ выполняется независимо от того, какое значение принимает f на наборе $\tilde{\beta}$. Если же $f(\tilde{\alpha}) = 1$, то в позитивной ДНФ(f) существует элементарная конъюнкция $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, принимающая на наборе $\tilde{\alpha}$ значение **1**. Тогда в наборе $\tilde{\alpha}$ на местах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ стоит **1**. Для всякого набора $\tilde{\beta}$, такого, что $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, в наборе $\tilde{\beta}$ на местах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ тогда тоже должна стоять **1**. Но тогда на таком наборе $\tilde{\beta}$ отмеченная ранее элементарная конъюнкция $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ будет также равна **1** и, следовательно, $f(\tilde{\beta}) = 1$. Таким образом, и в этом случае неравенство $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$ выполняется для всякого набора $\tilde{\beta}$, такого, что $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$. В итоге, для функции f имеет место $\forall_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^n} : (\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}) \Rightarrow (f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta}))$, т.е. функция f – монотонная. Достаточность доказана.

Теорема 2.6 (о классе M).

Пусть $M^{(n)}$ - множество функций класса M , которые зависят от n переменных. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $M \neq \emptyset$;
2. M - замкнут ($M = [M]$);
3. $2^{C_n^{[n/2]}} \leq |M^{(n)}| \leq 3^{C_n^{[n/2]}}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
4. $[M] \neq P_2$.

Доказательство.

1. Функции-константы 0 и 1 монотонные, т.е. $0 \in M$ и $1 \in M$. Значит $M \neq \emptyset$.
2. Рассмотрим произвольную совокупность функций класса M :

$$f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m \in M.$$

Построим их суперпозицию в указанном порядке и покажем, что она принадлежит классу M . Имеем:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = S^{n+1}(f^n, g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m) = f^n(g_1^m(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_n^m(y_1, y_2, \dots, y_m)).$$

Выберем два произвольных набора

$$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^m, \quad \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$$

таких, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$. Рассмотрим значения $F(\tilde{\alpha})$ и $F(\tilde{\beta})$, и сравним их.

Имеем:

$$F(\tilde{\alpha}) = f^n(g_1^m(\tilde{\alpha}), \dots, g_n^m(\tilde{\alpha})); \quad F(\tilde{\beta}) = f^n(g_1^m(\tilde{\beta}), \dots, g_n^m(\tilde{\beta})).$$

Поскольку $g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m \in M$ и $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, то $g_1^m(\tilde{\alpha}) \leq g_1^m(\tilde{\beta}); \dots; g_n^m(\tilde{\alpha}) \leq g_n^m(\tilde{\beta})$.

Следовательно, $(g_1^m(\tilde{\alpha}), \dots, g_n^m(\tilde{\alpha})) \leq (g_1^m(\tilde{\beta}), \dots, g_n^m(\tilde{\beta}))$. Тогда, учитывая монотонность f^n , получим $f^n(g_1^m(\tilde{\alpha}), \dots, g_n^m(\tilde{\alpha})) \leq f^n(g_1^m(\tilde{\beta}), \dots, g_n^m(\tilde{\beta}))$. Таким образом, $F(\tilde{\alpha}) \leq F(\tilde{\beta})$, т.е. $F(y_1, y_2, \dots, y_m)$ - монотонная.

Тем самым $[M] \subseteq M$. Обратное включение $M \subseteq [M]$ очевидное. Следовательно, $M = [M]$ и класс M замкнут.

3. $2^{C_n^{[n/2]}} \leq |M^{(n)}| \leq 3^{C_n^{[n/2]}}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (без доказательства).

4. Функция отрицание $\bar{x}$ не является монотонной, а потому

$[M] \neq P_2$. Теорема доказана.

3. Теорема Поста (второй критерий полноты).

Лемма 3.1 (о функциях, не сохраняющих константы).

С помощью функций f_0 и f_1 , не сохраняющих соответственно 0 и 1, и тождественной функции x могут быть построены либо обе константы, либо одна из констант и функция отрицание, либо функция отрицание. Иначе:

$$\left. \begin{matrix} f_0 \notin T_0 \\ f_1 \notin T_1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \{0,1\} \subseteq [\{f_0, f_1\}]; \\ \{const, \bar{x}\} \subseteq [\{f_0, f_1\}]; \\ \{\bar{x}\} \subseteq [\{f_0, f_1\}]. \end{matrix} \right.$$

Доказательство.

1. Используя функцию f_0 , построим новую функцию $\varphi(x)$ от одной переменной, отождествив все переменные функции f_0 с x :

$$\varphi(x) = S^{n+1}(f_0^n, x, \dots, x) = f_0(x, x, \dots, x).$$

Поскольку $f_0 \notin T_0$, то $\varphi(0) = 1$. Для $\varphi(1)$ возможны два случая: либо $\varphi(1) = 0$, либо $\varphi(1) = 1$. Имеем:

$$\left[\begin{matrix} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \varphi(x) = \bar{x}; \quad \Rightarrow \left[\begin{matrix} \bar{x} \in [\{f_0\}]; \\ 1 \in [\{f_0\}]. \end{matrix} \right.$$

$$\left[\begin{matrix} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \varphi(x) = 1.$$

2. Если же воспользоваться функцией f_1 , то, аналогично предыдущему, можно построить функцию $\varphi(x)$ от одной переменной, отождествив все переменные функции f_1 с x :

$$\varphi(x) = S^{n+1}(f_1^n, x, \dots, x) = f_1(x, x, \dots, x).$$

Поскольку $f_1 \notin T_1$, то $\varphi(1) = 0$. Для $\varphi(0)$ возможны два случая: либо $\varphi(0) = 0$, либо $\varphi(0) = 1$. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \varphi(1) = 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(x) = \bar{x}; \quad \left[\begin{array}{l} \varphi(1) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(x) = 0. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{x} \in [\{f_1\}] \\ 0 \in [\{f_1\}]. \end{array} \right]$$

Объединяя теперь полученные результаты, заключаем:

$$\left. \begin{array}{l} f_0 \notin T_0 \\ f_1 \notin T_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{0, 1\} \subseteq [\{f_0, f_1\}]; \\ \{0, \bar{x}\} \subseteq [\{f_0, f_1\}]; \\ \{1, \bar{x}\} \subseteq [\{f_0, f_1\}]; \\ \{x\} \subseteq [\{f_0, f_1\}]. \end{array} \right]$$

и, тем самым, лемма доказана.

Лемма 3.2 (о построении константы).

С помощью несамодвойственной функции, тождественной функции x и функции отрицания может быть построена функция константы, т.е.

$$f_s \notin S \Rightarrow const \in [\{f_s, \bar{x}\}].$$

Доказательство.

Пусть f_s – несамодвойственная функция ($f_s \notin S$). Тогда существует такой набор значений переменных $\tilde{\alpha}$, что $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}})$. Пусть

$f_s = f_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Имеем:

$$f_s(\tilde{\alpha}) = f_s(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_s(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_n^1) = f_s(1^{\alpha_1}, 1^{\alpha_2}, \dots, 1^{\alpha_n});$$

$$f_s(\bar{\tilde{\alpha}}) = f_s(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = f_s(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0) = f_s(0^{\alpha_1}, 0^{\alpha_2}, \dots, 0^{\alpha_n}).$$

Используя функцию f_s и полученные выше соотношения, построим новую функцию $\varphi(x)$ от одной переменной $\varphi(x) = f_s(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n})$. Тогда

$$\varphi(0) = f_s(\bar{\tilde{\alpha}}) = f_s(\tilde{\alpha}) = \varphi(1).$$

Таким образом, построенная функция $\varphi(x)$ – это функция-const (0 или 1 неважно). Лемма доказана.

Определение 3.1. Два двоичных набора называются *соседними*, если они различаются только в одной компоненте, т.е.

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \wedge \tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} - \text{соседние}.$$

Лемма 3.3 (о «скачке» немонотонной функции).

Если функция не является монотонной, то существует пара соседних наборов, на которых эта функция претерпевает скачок, т.е. меняет свои значения с 1 (на меньшем наборе) на 0 (на большем), т.е.

$$f_M \notin M \Rightarrow \exists_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^n} : [(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} - \text{соседние}) \wedge (\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}) \wedge (f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}))].$$

Доказательство. Пусть $f_M \notin M$. Тогда существует такая пара наборов значений переменных $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ и $f_M(\tilde{\alpha}) > f_M(\tilde{\beta})$. Последнее неравенство выполняется только в том случае, когда $f_M(\tilde{\alpha}) = 1$, а $f_M(\tilde{\beta}) = 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ различаются в первых k компонентах. Тогда, поскольку $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, в наборе $\tilde{\alpha}$ эти компоненты равны 0, а в наборе $\tilde{\beta}$ они равны 1, т.е.

$$\tilde{\alpha} = (0, \dots, 0, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) \quad \text{и} \quad \tilde{\beta} = (1, \dots, 1, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Вставим $(k-1)$ набор между $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ так, чтобы в полученной последовательности наборов любые два рядом расположенных набора были соседними и каждый набор последовательности предшествовал ниже расположенным наборам. Имеем:

$$\tilde{\alpha} = (0, 0, \dots, 0, 0, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n);$$

$$\tilde{\alpha}_1 = (1, 0, \dots, 0, 0, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n);$$

$$\tilde{\alpha}_2 = (1, 1, \dots, 0, 0, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n);$$

.....

$$\tilde{\alpha}_{k-1} = (1, 1, \dots, 1, 0, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n);$$

$$\tilde{\beta} = (1, 1, \dots, 1, 1, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Поскольку на начальном наборе последовательности (наборе $\tilde{\alpha}$) функция равна единице, а на последнем (наборе $\tilde{\beta}$) равна нулю, то в указанной последовательности наборов обязательно найдется пара соседних наборов, на которых эта функция претерпевает скачок (меняет свои значения с 1 на меньшем наборе на 0 на большем).

Лемма доказана.

Лемма 3.4 (о построении отрицания).

С помощью констант, тождественной функции x и немонотонной функции может быть построена функция отрицание, т.е.

$$f_M \notin M \Rightarrow \bar{x} \in [1, 0, f_M].$$

Доказательство. Поскольку $f_M \notin M$, то в силу **Леммы 3.3** существует пара соседних двоичных наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ таких, что $f_M(\tilde{\alpha}) = 1$ и $f_M(\tilde{\beta}) = 0$. Используя функцию f_M построим новую функцию $\varphi(x)$ от одной переменной $\varphi(x) = f_M(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$. Тогда $\varphi(0) = 1$, а $\varphi(1) = 0$.

Таким образом, построенная функция $\varphi(x)$ - это функция-отрицание, т.е. $\varphi(x) = \bar{x}$. Лемма доказана.

Лемма 3.5 (о построении конъюнкции).

С помощью нелинейной функции, констант и, может быть, функции отрицания может быть построена функция конъюнкция, т.е.

$$f_L \notin L \Rightarrow xy \in [0, 1, \bar{x}, f_L].$$

Доказательство.

Поскольку $f_L \notin L$, то в многочлене Жегалкина для этой функции существует хотя бы одно слагаемое, содержащее конъюнкцию каких-то переменных. Не ограничивая общности, будем считать, что такими переменными являются x_1 и x_2 . Сгруппируем слагаемые многочлена Жегалкина, содержащие конъюнкцию $x_1 x_2$ и вынесем эту конъюнкцию за скобки. Затем сгруппируем слагаемые, содержащие x_1 и не содер-

жащие x_2 , и вынесем x_1 за скобки. Аналогично поступим со слагаемыми, содержащими x_2 . Все оставшиеся слагаемые объединим в одну группу. Получим:

$$f_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 f_1(x_3, x_4, \dots, x_n) + x_1 f_2(x_3, x_4, \dots, x_n) + x_2 f_3(x_3, x_4, \dots, x_n) + f_4(x_3, x_4, \dots, x_n)$$

Заметим, что $f_1(x_3, x_4, \dots, x_n)$ не является константой 0 (т.е. является функцией выполнимой) ибо в противном случае многочлен Жегалкина не содержал бы конъюнкцию $x_1 x_2$, а это бы противоречило условию.

Следовательно, существует такой набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$, на котором

$$f_1(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) = 1. \text{ Пусть } f_2(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) = a, f_3(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) = b,$$

$$f_4(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) = c. \text{ Тогда:}$$

$$f_L(x_1, x_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = x_1 x_2 + a x_1 + b x_2 + c = \varphi(x_1, x_2).$$

Имеем далее:

$$\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + b, x_2 + a) + ab + c = (x_1 + b)(x_2 + a) + a(x_1 + b) + b(x_2 + a) + ab = x_1 x_2.$$

Таким образом, $\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2$ и лемма доказана.

Теорема 3.1 (Критерий Поста полноты системы БФ).

Система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замечательных классов, т.е.

$$([R] = [\{g_1, g_2, \dots, g_k\}] = P_2) \Leftrightarrow \left(\bigvee_{K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}} K : R \notin K \right).$$

Доказательство.

1. Необходимость. Нужно доказать:

$$([R] = P_2) \Rightarrow \left(\bigvee_{K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}} K : R \notin K \right).$$

Докажем контрапозицию (от противного). Пусть утверждение

$\bigvee_{K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}} K : R \notin K$ неверное. Тогда верным будет утверждение

$\bigvee_{K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}} K : R \subseteq K$. Тогда, в силу свойств замыкания, $[R] \subseteq [K]$. Но каж-

дый из замечательных классов не является полным ($[K] \neq P_2$) и по-

этому $[R] \neq P_2$. Контрапозиция, а вместе с ней необходимость теоремы доказана.

2. Достаточность. Нужно доказать:

$$\left(\bigvee_{K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}} K : R \not\subseteq K \right) \Rightarrow ([R] = P_2) .$$

Условие $\bigvee_{K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}} K : R \not\subseteq K$ означает, что $(R \not\subseteq T_0) \wedge (R \not\subseteq T_1) \wedge (R \not\subseteq L) \wedge (R \not\subseteq S) \wedge (R \not\subseteq M)$, т.е. среди функций R есть хотя бы одна не сохраняющая ноль функция f_0 , хотя бы одна не сохраняющая единицу функция f_1 , хотя бы одна нелинейная функция f_L , хотя бы одна несамодвойственная функция f_S , хотя бы одна немонотонная функция f_M . Выберем эти функции. Ясно, что $\{f_0, f_1, f_L, f_S, f_M\} \subseteq R$. Воспользуемся теперь результатами доказанных ранее лемм 3.1; 3.2; 3.3; 3.5. Результаты сведем в таблицу (при этом стрелки передают словосочетание «будет получено множество функций», а над стрелками стоит обоснование такого получения):

$$\{f_0, f_1\} \xRightarrow{\text{Лемма 3.1}} \left[\begin{array}{l} \{0,1\} \xRightarrow{f_M, \text{Лемма 3.3}} \{0,1, \bar{x}\} \xRightarrow{f_L, \text{Лемма 3.5}} \{0,1, \bar{x}, xy\}; \\ \{const, \bar{x}\} \Rightarrow \{0,1, \bar{x}\} \xRightarrow{f_L, \text{Лемма 3.5}} \{0,1, \bar{x}, xy\}; \\ \{\bar{x}\} \xRightarrow{f_S, \text{Лемма 3.2}} \{\bar{x}, const\} \Rightarrow \{0,1, \bar{x}\} \xRightarrow{f_L, \text{Лемма 3.5}} \{0,1, \bar{x}, xy\}. \end{array} \right.$$

Таким образом, исходя из системы функций $\{f_0, f_1, f_L, f_S, f_M\}$, может быть построена система $\{0,1, \bar{x}, xy\}$. Иными словами, $\{0,1, \bar{x}, xy\} \subseteq [\{f_0, f_1, f_L, f_S, f_M\}]$. Система $\{0,1, \bar{x}, xy\}$ - полная, т.к. содержит полную подсистему $\{\bar{x}, xy\}$. Поскольку $\{f_0, f_1, f_L, f_S, f_M\} \subseteq R$, то $[\{f_0, f_1, f_L, f_S, f_M\}] \subseteq [R]$. В итоге имеем:

$$\{\bar{x}, xy\} \subseteq \{0,1, \bar{x}, xy\} \subseteq [\{f_0, f_1, f_L, f_S, f_M\}] \subseteq [R].$$

Но тогда

$$P_2 = [\{\bar{x}, xy\}] \subseteq [[R]] = [R], \text{ т.е. } P_2 \subseteq [R].$$

Обратное включение $[R] \subseteq P_2$ очевидное. Поэтому $[R] = P_2$ и достаточность теоремы доказана.

Теорема доказана полностью.

Замечание 3.1. Можно дать другую (эквивалентную предложенной ранее) формулировку критерия Поста полноты системы булевых функций, а именно:

Система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну функцию f_0 , не сохраняющую ноль; хотя бы одну функцию f_1 , не сохраняющую единицу; хотя бы одну нелинейную функцию f_L ; хотя бы одну несамоудовлетворяющую функцию f_S ; хотя бы одну немонотонную функцию f_M ; т.е.

$$[R] = P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f_0 : f_0 \in R \wedge f_0 \notin T_0; \\ \exists f_1 : f_1 \in R \wedge f_1 \notin T_1; \\ \exists f_L : f_L \in R \wedge f_L \notin L; \\ \exists f_S : f_S \in R \wedge f_S \notin S; \\ \exists f_M : f_M \in R \wedge f_M \notin M. \end{cases}$$

Следствие.

Всякий замкнутый класс R , отличный от P_2 , содержится по крайней мере в одном из пяти замечательных классов.

Доказательство.

Воспользуемся тем, что $(F = G) \Leftrightarrow (\bar{F} = \bar{G})$. Тогда утверждение теоремы Поста равносильно утверждению

$$[R] \neq P_2 \Leftrightarrow \exists_{K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}} K : R \subseteq K$$

И следствие доказано.

Теорема 3.2.

Из всякой полной системы БФ можно выделить полную подсистему, содержащую не более четырех функций.

Доказательство. В силу критерия Поста из всякой полной системы R можно выделить полную подсистему из пяти функций $\{f_0, f_1, f_L, f_S, f_M\}$.

Для функции f_0 возможны два варианта: ее значения на единичном наборе значений переменных – либо $f_0(\tilde{1}) = 0$, либо $f_0(\tilde{1}) = 1$. В первом случае f_0 не сохраняет 1 , т.е. f_0 можно использовать в качестве f_I и тогда система $\{f_0, f_L, f_S, f_M\}$ - полная. Во втором случае f_0 можно использовать в качестве f_S (т.к. $f_0(\tilde{0}) = f_0(\tilde{1})$) и f_M (т.к. $f_0(\tilde{0}) > f_0(\tilde{1})$) и тогда система $\{f_0, f_I, f_L\}$ - полная. Теорема доказана.

Определение 3.2.

Класс R булевых функций называется предполным (максимальным), если он неполный и $\forall f \notin R: [R \cup \{f\}] = P_2$.

Теорема 3.3.

В алгебре логики (в теории БФ) существуют только пять предполных (максимальных) классов, а именно T_0, T_1, L, S, M .

Доказательство.

- 1) Покажем сначала, что ни один из этих замечательных классов не содержится в другом. Для этого достаточно для каждого класса указать такую систему функций, которая принадлежит данному классу, но не входит целиком ни в один из остальных классов. Результаты сведем в следующую таблицу:

$\begin{array}{c} \notin \\ \hline \in \end{array}$	T_0	T_1	L	S	M
T_0		0	xy	0	$x+y$
T_1	1		xy	1	$1+x+y$
L	1	0		0	$x+y$
S	1	$\bar{x}$	$xy+xz+yz$		$\bar{x}$
M	$\bar{x}$	0	xy	0	

(здесь для каждой функции таблицы содержащая ее строка определяет класс, которому она принадлежит, а столбец – класс, которому она не принадлежит). Итак, ни один из пяти замечательных классов не содержится в другом.

2) Докажем, что все замечательные классы являются предполными. Пусть $R \in \{T_0, T_1, L, S, M\}$ и $f \notin R$. Тогда система $R \cup \{f\}$ – полная (поскольку R не входит в остальные четыре класса, а $f \notin R$). Следовательно $[R \cup \{f\}] = P_2$ и R – предполный класс.

3) Пусть R – некоторый предполный класс. Тогда, в силу следствия критерия Поста $\exists H \in \{T_0, T_1, L, S, M\} : R \subseteq H$. Если $R \neq H$, то $\exists f : f \notin R \wedge f \in H$. Тогда $(R \cup \{f\}) \subseteq H$, а значит $[R \cup \{f\}] \subseteq [H]$. Но $[H] \neq P_2$. Следовательно, $[R \cup \{f\}] \neq P_2$, что противоречит предполности класса R . Таким образом, $R = H$. Тем самым теорема доказана полностью.

Замечание 3.2.

Критерий Поста даёт практическую схему проверки того, является ли данная система БФ полной или нет и возможность выделения базисов из полных систем. Для подобной проверки достаточно построить распределение функций проверяемой системы по замечательным классам.

Пример. Выяснить, является ли полной система

$$R = \{f_1 = \bar{x}y \leftrightarrow (x \vee \bar{z})\bar{y} \rightarrow \bar{x}z; f_2 = x \vee (\bar{x}z + \bar{y}); f_3 = (\bar{x} \downarrow y)\bar{z}; f_4 = x(\bar{y} \rightarrow \bar{z})\}.$$

В случае неполноты R дополнить ее до полной системы и из полученной полной системы выделить всевозможные базисы.

Решение.

Для проверки полноты системы достаточно построить таблицу распределения функций системы по пяти замечательным классам. Многую информацию о функции можно получить на основании ее

таблицы, однако для функций многих переменных таблица может оказаться громоздкой и поэтому нужно уметь строить распределение функции по замечательным классам аналитически. При преобразовании формул без скобок порядок выполнения операций (порядок суперпозиций) в них следующий: $\bar{}, \wedge, +, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

1). Для f_1 проведем распределение по классам на основании ее таблицы. Таблицу f_1 можно строить, используя таблицы Квайна или на основании нормальных форм (ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ). Построим СДНФ(f_1). Имеем:

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}y \leftrightarrow (x \vee \bar{z})\bar{y} \rightarrow \bar{x}z = \bar{x}y \overline{(x \vee \bar{z})\bar{y} \rightarrow \bar{x}z} \vee \bar{x}y((x \vee \bar{z})\bar{y} \rightarrow \bar{x}z) = \\ &= (x \vee \bar{y})\overline{(x \vee \bar{z})\bar{y}(x \vee \bar{z})} \vee \bar{x}y\overline{((x \vee \bar{z})\bar{y} \vee \bar{x}z)} = \bar{y}(x \vee \bar{z}) \vee \bar{x}y(\bar{x}z \vee y \vee \bar{x}z) = \\ &= \bar{x}y \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x}y = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y \bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = \text{СДНФ}(f_1). \end{aligned}$$

Тогда таблица f_1 : **10111100**. Из таблицы сразу видно, что $f_1 \notin T_0$ (т.к. $f(\tilde{0})=1$); $f_1 \notin T_1$ (т.к. $f(\tilde{1})=0$); $f_1 \notin S$ (таблица f_1 не является антисимметрической относительно своей середины); $f_1 \notin M$ (т.к. $f(\tilde{0})=1 > 0 = f(\tilde{1})$, а $\tilde{0} \leq \tilde{1}$). По СДНФ(f_1) легко построить многочлен Жегалкина и сделать выводы о принадлежности f_1 классу L . Имеем:

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y \bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}y \bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} = \\ &= x(y+1)(z+1) + x(y+1)z + (x+1)(y+1)(z+1) + (x+1)y(z+1) + (x+1)yz = \\ &= 1 + z + xy + xz + yz + xyz = \text{НФЖ}(f_1). \text{ Поэтому } f_1 \notin L. \end{aligned}$$

2). Для f_2 распределение по классам выполним аналитически. Имеем:

$$\begin{aligned} f_2 &= x \vee (\bar{x}z + \bar{y}) = x + \bar{x}z + \bar{y} + x(\bar{x}z + \bar{y}) = x + (1+x)z + 1 + y + x(1+y) = \\ &= 1 + y + z + xy + xz = \text{НФЖ}(f_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $f_2 \notin T_0$ (в многочлене Жегалкина присутствует слагаемое 1); $f_2 \in T_1$ (в многочлене Жегалкина нечетное количество слагаемых); $f_2 \notin L$. На основании многочлена Жегалкина легко построить двойственную функцию. Имеем:

$$\begin{aligned} f_2^* &= \overline{1 + \bar{y} + \bar{z} + \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{z}} = 1 + 1 + 1 + y + 1 + z + (1 + x)(1 + y) + (1 + x)(1 + z) = \\ &= y + z + 1 + x + y + xy + 1 + x + z + xz = xy + xz. \end{aligned}$$

$\text{НФЖ}(f_2) \neq \text{НФЖ}(f_2^*)$. Следовательно, $f_2 \notin \mathcal{S}$. Осталось проверить принадлежность f_2 классу $\mathcal{M}$. Воспользуемся критерием монотонности. Имеем:

$$f_2 = x \vee (\bar{x}z + \bar{y}) = x \vee \bar{x}z \vee \bar{y} = x \vee (\bar{x} \vee \bar{z}) \vee \bar{y} = x \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee yz.$$

Построенная ДНФ(f_2) неупрощаемая, а потому имеет **неустраняемые** отрицания. Значит, позитивной ДНФ у f_2 не существует. Следовательно, $f_2 \notin \mathcal{M}$.

3). Для f_3 распределение по классам выполним аналитически. Имеем:

$$f_3 = (\bar{x} \downarrow y) \bar{z} = \overline{\bar{x} \vee y} \bar{z} = \bar{x} \bar{y} \bar{z} = x(1 + y)(1 + z) = x + xy + xz + xyz = \text{НФЖ}(f_3).$$

Тогда $f_3 \in T_0$, $f_3 \notin T_1$, $f_3 \notin L$, $f_3 \notin \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} f_3^* &= \overline{\bar{x} + \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{z} + \bar{x} \bar{y} \bar{z}} = 1 + 1 + x + (1 + x)(1 + y) + (1 + x)(1 + z) + (1 + x)(1 + y)(1 + z) = \\ &= xy + xyz = \text{НФЖ}(f_3^*) \neq f_3. \end{aligned}$$

Следовательно, $f_3 \notin \mathcal{S}$.

4). Для f_4 распределение по классам выполним аналитически. Имеем:

$$f_4 = x(\bar{y} \rightarrow \bar{z}) = \overline{\bar{y} \vee \bar{z}} = \overline{\bar{y} \vee \bar{z}} = \overline{\bar{y} \vee \bar{z}} = x(1 + (1 + y)z) = x + xz + xyz = \text{НФЖ}(f_4).$$

Тогда $f_4 \in T_0$, $f_4 \in T_1$, $f_4 \notin L$.

$$f_4^* = x \vee y \bar{z} = x + y \bar{z} + xy \bar{z} = x + y(1 + z) + xy(1 + z) = x + y + xy + yz + xyz \neq f_4.$$

Следовательно, $f_4 \notin \mathcal{S}$. Далее:

$$f_4 = x(\bar{y} \rightarrow \bar{z}) = x(y \vee \bar{z}) = xy \vee x \bar{z} = \text{ДНФ}(f_4) \text{ с неустраняемым отрицанием}$$

(непозитивная). Таким образом, $f_4 \notin \mathcal{M}$.

Сведем полученные результаты в таблицу:

	T_0	T_1	L	S	M
f_1	-	-	-	-	-
f_2	-	+	-	-	-
f_3	+	-	-	-	-
f_4	+	+	-	-	-

(здесь «+» означает, что расположенная в строке функция принадлежит классу, определяющему столбец таблицы, а «-» - не принадлежит). Из таблицы видно, что исходная система функций не входит ни в один из пяти замечательных классов (в каждом столбце таблицы есть по крайней мере один «-»). Следовательно, в силу критерия Поста, система полная. Система содержит собственные полные подсистемы (например, $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\{f_2, f_3, f_4\}$, $\{f_1, f_4\}$ и другие). Из них базисными являются подсистемы $\{f_1\}$, $\{f_2, f_3\}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Распределить по замечательным классам (аналитически и по таблицам):

$$\begin{aligned}
 f_1 &= x + yz \rightarrow \bar{x}\bar{z}; & f_2 &= (x \downarrow y) \vee \overline{x \rightarrow z}; & f_3 &= (x / y)z \rightarrow \bar{y} \vee x; \\
 f_4 &= x \vee y\bar{z} \rightarrow xy; & f_5 &= x \vee y + z \rightarrow \bar{y}; & f_6 &= (x \downarrow y) + z \vee \bar{x}; \\
 f_7 &= (x \vee y \rightarrow \bar{z}) + y; & f_8 &= x \leftrightarrow y + z \vee \bar{y}; & f_9 &= (x + y)z \vee \bar{x}; \\
 f_{10} &= (x \rightarrow \bar{y}) + (y \vee z); & f_{11} &= (x / y)z \vee \bar{x}; & f_{12} &= (x \rightarrow y) + z \leftrightarrow \bar{y}; \\
 f_{13} &= (x \vee y) + z \rightarrow y; & f_{14} &= xy + z \rightarrow \bar{x}; & f_{15} &= (x + (y \downarrow z)) + y; \\
 f_{16} &= (x / y) + (y \rightarrow \bar{x}z); & f_{17} &= \overline{x \rightarrow y} (x \vee \bar{y} + z); & f_{18} &= x \overline{y \rightarrow z} \leftrightarrow \bar{y} + z;
 \end{aligned}$$

Предварительные результаты.

f	$ДНФ(f)$	$НФЖ(f)$	$НФЖ(f^*)$	Таблица f
f_1	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee xyz$	$1 + x + yz$	$x + y + z + yz$	11100001
f_2	$\bar{x}\bar{y} \vee x\bar{z}$	$1 + y + xy + xz$	$1 + z + xy + xz$	11001010
f_3	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	$1 + yz + xyz$	$x + xy + xz + xyz$	11101111
f_4	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee xy$	$1 + x + y + yz + xyz$	$y + xy + xz + xyz$	11010011
f_5	$\bar{x}z \vee \bar{y}$	$1 + y + yz + xyz$	$1 + x + y + xy + xz + xyz$	11011100
f_6	$\bar{x} \vee z$	$1 + x + xz$	$z + xz$	11110101
f_7	$yz \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z}$	$1 + y + xz + yz + xyz$	$y + z + xy + xyz$	11011001
f_8	$x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}yz$	$x + yz$	$1 + x + y + z + yz$	00011110
f_9	$\bar{x} \vee \bar{y}z$	$1 + x + xz + xyz$	$1 + x + y + xy + yz + xyz$	11110100
f_{10}	$xy \vee \bar{y}\bar{z}$	$1 + y + z + xy + yz$	$x + y + xy + yz$	10001011
f_{11}	$\bar{x} \vee \bar{y}z$	$1 + x + xz + xyz$	$1 + x + y + xy + yz + xyz$	11110100
f_{12}	$xz \vee yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$1 + x + y + z + xy$	$z + xz$	10010101
f_{13}	$y \vee \bar{x}\bar{z} \vee xz$	$1 + x + z + xy + yz$	$xy + yz$	10110111
f_{14}	$\bar{x} \vee \bar{y}\bar{z}$	$1 + xy + xz$	$y + z + xy + xz$	11111000
f_{15}	$\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee x\bar{y}z$	$1 + x + z + yz$	$1 + x + y + yz$	10110100
f_{16}	$\bar{x}y\bar{z}$	$y + xy + yz + xyz$	$1 + xz + xyz$	00100000
f_{17}	$x\bar{y}$	$x + xy$	$1 + y + xy$	00001100
f_{18}	$\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$	$y + z + xy + xyz$	$1 + y + xz + yz + xyz$	01100100

Распределение по классам.

	T_0	T_1	L	S	M
f_1	-	+	-	-	-
f_2	-	-	-	-	-
f_3	-	+	-	-	-
f_4	-	+	-	-	-
f_5	-	-	-	-	-
f_6	-	+	-	-	-
f_7	-	+	-	-	-
f_8	+	-	-	-	-
f_9	-	-	-	-	-
f_{10}	-	+	-	-	-
f_{11}	-	-	-	-	-
f_{12}	-	+	-	-	-
f_{13}	-	+	-	-	-
f_{14}	-	+	-	-	-
f_{15}	-	-	-	-	-
f_{16}	+	-	-	-	-
f_{17}	+	-	-	-	-
f_{18}	+	-	-	-	-

Рекомендуемая литература

1. Тишин В.В., Дискретная математика в примерах и задачах. - С.-Петербург.: БХВ- Петербург, 2008. 336 с.
2. Игошин В.И., Математическая логика и теория алгоритмов. - М.: Академия, 2008. 449 с.
3. Игошин В.И., Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов.- М.: Академия, 2007. 305 с.
4. Шапорев С.Д., Математическая логика (курс лекций и практических занятий). - С.- Петербург, 2005. 410 с.
5. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н., Конспект лекций по дискретной математике (с упражнениями и контрольными работами). - М.: Айрис пресс, 2007. 174 с.
6. Новиков Ф.А., Дискретная математика для программистов.- С.-Петербург.: Питер, 2001. 301 с.
7. Алексеев В.Б., Поспелов А.Д., Дискретная математика. – М.: МГУ, 2002. 44 с.