

Т. В. Бенумерова, А. К. Осадчий, В. А. Плотников

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Розглядається алгоритм чисельно-асимптотичного розв'язування задач управління з розривною правою частиною. Доведено теорему про асимптотичну близькість розв'язків неавтономної задачі управління з розривною правою частиною і відповідній їй усередненій автономній задачі управління. Наведено результати чисельного експерименту.

Рассматривается алгоритм численно-асимптотического решения задач управления с разрывной правой частью. Доказана теорема об асимптотической близости решений неавтономной задачи управления с разрывной правой частью и соответствующей ей усредненной автономной задачи управления. Приведены результаты численного эксперимента.

The algorithm of numerical-asymptotical solving of the controll's problems with discontinuous right-hand side is considered. The theorem of the asymptotical nearness of control's nonautonomical problem's solutions with the discontinuous right-hand side and corresponding averaging autonomical controll's problem is proved. The results of numerical experiment are given.

В работах [1–3] был предложен следующий подход численно-аналитического решения задач оптимального управления:

1. Неавтономной задаче управления с помощью различных схем усреднения дифференциальных включений ставится в соответствие автономная задача управления.

2. Полученная упрощенная задача оптимального управления решается численными методами.

Пусть движение объекта управления описывается системой стандартного вида:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon [f(t, x) + A(x)\varphi(t, u)], \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где x – n -мерный фазовый вектор, $x \in D \subset R^n$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f(t, x)$ и $\varphi(t, u)$ – вектор-функции, 2π -периодические по времени t , $t \in I = [0, L\varepsilon^{-1}]$; $A(x)$ – $n \times m$ матрица, $u \in U$ – вектор управления, $U \subset R^k$ – компактное множество.

Предположим, что все функции равномерно ограничены, измеримы по t , функция $\varphi(t, u)$ удовлетворяет условию Липшица по u .

Системе (1) поставим в соответствие следующую усредненную систему:

$$\frac{dy}{d\tau} = f^0(y) + A(y)v, \quad y(0) = x_0, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (2)$$

где $f^0(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, y) dt$, $v \in V = \left\{ v \in R^m \mid v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t, u(t)) dt, u(t) \in U \right\}$,
 v – новый вектор управления.

Доказательство асимптотической близости решений систем (1) и (2) получено для непрерывных по x функций $f(t, x)$ и $A(x)$ как следствие соответствующих теорем по обоснованию метода усреднения для дифференциальных включений [2, 3].

Рассмотрим обоснование данного подхода для случая разрывной по x функции $f(t, x)$. Некоторые подходы к построению решения в этом случае рассмотрены в [4].

Пусть $f(t, x) = \begin{cases} f_1(t, x) & \text{при } \Phi(t, x) \leq 0, \\ f_2(t, x) & \text{при } \Phi(t, x) > 0, \end{cases}$ где $\Phi(t, x)$ – 2π -периодична по t ,

$S = \{(t, x) \mid \Phi(t, x) = 0\}$ – поверхность разрыва правых частей.

И Определим следующие множества:

$$D_1 = \{x \in D \mid \max_{t \in [0, 2\pi]} \Phi(t, x) = \Phi_1(x) \leq 0\}, \quad D_2 = \{x \in D \mid \min_{t \in [0, 2\pi]} \Phi(t, x) = \Phi_2(x) > 0\},$$

$$D_3 = D \setminus \{D_1 \cup D_2\}.$$

$$\text{Тогда } f^0(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{I_1(x)} f_1(t, x) dt + \int_{I_2(x)} f_2(t, x) dt \right],$$

$I_1(x) = \{t \in [0, 2\pi] \mid \Phi(t, x) \leq 0\}, \quad I_2(x) = [0, 2\pi] \setminus I_1$. Очевидно, что $I_1(x) = [0, 2\pi]$,

$I_2(x) = \emptyset$ при $x \in D_1$ и $I_1(x) = \emptyset, \quad I_2(x) = [0, 2\pi]$ при $x \in D_2$.

Теорема. Пусть в области $Q = \{t \geq 0, x \in D \subset R^n\}$ выполнены следующие условия:

1) функции $f_i(t, x), i = 1, 2, \Phi(t, x), A(x)$ равномерно ограничены постоянной M , непрерывны, 2π – периодичны по t , удовлетворяют условию Липшица по x и c с постоянной λ ;

2) решения $y(\tau)$ системы (2) при всех допустимых управлениях с начальным условием $y(0) = x_0 \in D' \subset D$ определены при $0 \leq \tau \leq L$ и лежат вместе с ρ -окрестностью в области D ;

3) функция $\Phi(t, x)$ непрерывна, 2π – периодична по t и имеет на сегменте $[0, 2\pi]$ за исключением конечного числа точек непрерывную производную по t , удовлетворяет условию Липшица по x в области D , причем при (t, x) из ρ -окрестности поверхности S

$$\left| \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} \right| \geq \delta > 0;$$

4) функция $\Phi(t, x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет при $x \in D_2$ конечное число нулей $k(x) \leq k_m$, где k_m – целое положительное число.

Тогда для любого $0 < L \leq L_0$ найдутся такие $\epsilon_0(L) > 0$ и $C(L) > 0$, что при $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ на отрезке $0 \leq L \leq L\epsilon^{-1}$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого управления $u(t)$ системы (1) существует управление $v(t)$ системы (2) такое, что

$$\|x(t, \epsilon) - y(\epsilon t)\| \leq C\epsilon, \quad (3)$$

где $x(t, \epsilon)$ и $y(\epsilon t)$ – решения систем (1) и (2), соответствующие управлениям $u(t)$ и $v(t)$;

2) для любого управления $v(t)$ системы (2) существует управление $u(t)$ системы (1) такое, что выполняется неравенство (3).

Доказательство: Согласно [3, стр.54] функция $f_0(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной μ .

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $u(t)$ – произвольное допустимое управление, а $x(t)$ – соответствующая ему траектория системы (1).

Построим управление $v(t)$, соответствующее управлению $u(t)$, следующим образом:

$$v(t) = \left\{ v' \in V, 2\pi i \leq t < 2\pi(i+1) \mid v' = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \Phi(t, u(t)) dt \right\} \quad (4)$$

Пусть $y(t)$ – траектория системы (2), соответствующая управлению $v(t)$, тогда согласно лемме Гронуолла-Беллмана имеем:

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s, x(s)) + A(x(s))\varphi(s, u(s))] ds - \int_0^t [f^0(y(s)) + A(y(s))v(s)] ds \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \|f(s, x(s) + A(x(s))\varphi(s, u(s)) - f(s, y(s)) - A(y(s))\varphi(s, u(s))\| ds + \\ &+ \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s, y(s)) + A(y(s))\varphi(s, u(s)) - f^0(y(s)) - A(y(s))v(s)] ds \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon \lambda \int_0^t (1 + M) \|x(s) - y(s)\| ds + \\ &+ \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s, y(s)) - f^0(y(s))] ds \right\| + \varepsilon \left\| \int_0^t A(y(s))[\varphi(s, u(s)) - v(s)] ds \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s, y(s)) - f^0(y(s))] ds \right\| + \left\| \int_0^t A(y(s))[\varphi(s, u(s)) - v(s)] ds \right\| \cdot \exp(\lambda(1 + M)L). \quad (5) \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в (5) в отдельности. Введем следующие обозначения:

$$I_i^{1,2} = I_i(x_1) \cap I_i(x_2), \quad I_i^1 = I_i(x_1) \setminus I_i^{1,2}, \quad I_i^2 = I_i(x_2) \setminus I_i^{1,2}, \quad i = 1, 2; \quad x_1, x_2 \in D_3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t [f(s, y(s)) - f^0(y(s))] ds \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} [f(s, y(s)) - f(s, y_i)] ds \right\| + \left\| \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} [f^0(y_i) - f^0(y(s))] ds \right\| + \\ &+ \left\| \int_{2\pi k}^t [f(s, y(s)) - f^0(y(s))] ds \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} [f(s, y(s)) - f(s, y_i)] ds \right\| + \\ &+ \mu \sum_{i=0}^{k-1} \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \|y(s) - y_i\| ds + \int_{2\pi k}^t \|f(s, y(s)) - f^0(y(s))\| ds; \quad (1) \\ &\mu \sum_{i=0}^{k-1} \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \|y(s) - y_i\| ds \leq \mu M(1 + M)L\pi; \\ &\sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} [f(s, y(s)) - f(s, y_i)] ds \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{I_i^{1,2}} [f_1(s, y(s)) - f_1(s, y_i)] ds \right\| + \\ &+ \left\| \int_{I_i^{2,3}} [f_2(s, y(s)) - f_2(s, y_i)] ds \right\| + \left\| \int_{I_i^1} f_1(s, y(s)) ds \right\| + \left\| \int_{I_i^2} f_1(s, y(s)) ds \right\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \int_{t_i}^t f_2(s, y(s)) ds \right\| + \left\| \int_{t_i}^t f_2(s, y(s)) ds \right\| \leq 2\mu \sum_{i=0}^{k+1} \frac{2\pi(i+1)}{2\pi} \int_{t_i}^t \|y(s) - y_i\| ds + \\
& + 4Md \max_{2\pi \leq s \leq 2\pi(i+1)} \|y(s) - y_i\| \leq 2M(1+M)\pi L(\mu + Md); \\
& \int_{2\pi}^t \|f(s, y(s)) - f^0(y(s))\| ds \leq 4\pi M(1+M),
\end{aligned}$$

где d – постоянная Липшица для корней $t_i(x)$ уравнения $\Phi(t, x) = 0$,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left\| \int_0^t A(y(s)) [\varphi(s, u(s)) - v(s)] ds \right\| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2\pi(i+1)}{2\pi} \int_{t_i}^t \|A(y(t)) - A(y(t_i))\| \cdot \|\varphi(t, u(t)) - v(t)\| dt + \\
& + \varepsilon \left\| \int_{2\pi m}^t A(y(s)) [\varphi(s, u(s)) - v(s)] ds \right\| \leq \\
& \leq 2\varepsilon \lambda M \sum_{i=0}^m \frac{2\pi(i+1)}{2\pi} \int_{t_i}^t \|y(t) - y_i\| dt + 2\varepsilon \pi M(1+M) \leq 2\varepsilon \pi M(1+M)[\lambda ML + 1]
\end{aligned}$$

где $t_i = 2\pi i$. Следовательно, $\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon C$,

где $C = M(1+M)\pi \cdot [2\lambda ML + 2Md + 3L\mu + 6] \cdot \exp(\lambda(1+\mu)L)$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Рассмотренный алгоритм численно-асимптотического решения задачи управления значительно сокращает объем вычислений, необходимых для приближенного решения исходной задачи управления. Приведем характерные данные о времени решения исходной и усредненной задач:

Здесь $\Delta = \max_t \|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\|$,

ξ – отношение времени вычисления траектории $x(t)$ к времени вычисления $y(t)$.

ε	Δ	ξ
0,1	0,150	125
0,02	0,017	240
0,01	0,002	400

1. Небеснов В.И., Плотников В.А. Математические методы исследования режимов работы судовых комплексов. М.: Изд-во ММФ. – 1977. – 72 с.
2. Плотников В.А. Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложение к задачам оптимального управления // Дифференц. уравнения. – 1979. – №8. – С.1427–1433.
3. Плотников В.А. Методы усреднения в задачах управления. Киев-Одесса: Лыбидь. – 1992. – 188 с.
4. Усреднение управляемого движения с разрывными характеристиками // Плотников В.А. Осадчий А.К.; Одес. ун-т. – Одесса, – 1985. – 14 с. – Рус. Деп. в УкрНИИТИ 5.05.85, № 911-Ук85Деп.