УДК 517.11

**И. Г. Симонова**
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

# СЕПАРАЦИОННОЕ СВОЙСТВО ДЛЯ ДОКАЗУЕМОСТНО-ИНТУИЦИОНИСТСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**Сімонова І. Г. Сепараційна властивість для доводжувально-інтуїціоністського числення.** В поданій статті доводиться, що має місце сепараційна властивість для числення $I^{\triangle}$. Доведення використовує метод перебудови виводів, який дає можливість отримувати з виводу формули $A$ такий її вивід, що не містить логічних зв'язок, які не входять в цю формулу.
**Ключові слова:** доводжувально-інтуїціоністське числення, сепараційна властивість, вивод формули, приведенний висновок.

**Симонова И. Г. Сепарационное свойство для доказуемостно-интуиционистского исчисления.** В настоящей статье доказывается выполнимость сепарационного свойства для исчисления $I^{\triangle}$. Доказательство проводится методом перестройки выводов, позволяющим получать из вывода формулы $A$ ее вывод, не содержащий логических связок, не входящих в эту формулу.
**Ключевые слова:** доказуемостно-интуиционистское исчисление, сепарационное свойство, вывод формулы, приведенный вывод.

**Simonova I. G. Seperable property for proof-intuitionistic calculus.** This article shows that seperable property is true for calculus $I^{\triangle}$. The proof is being done by the transformation of deduction allowing to get the deduction from formula $A$, without possessing any logical symbol whick do not belong to this formula.
**Key words:** proof-intuitionistic calculus, seperable property, deduction of a formula, reduced deduction.

**Введение.** Доказуемостно-интуиционистское исчисление $I^{\triangle}$ было сформулировано в [1] как аксиоматизация одноименной логики, тесно связанной с логикой доказуемости (подробнее об этой связи см. в [7]). $I^{\triangle}$ задается на основе пропозиционального языка сигнатуры

$$\& \vee \supset \neg \triangle \tag{1}$$

и переменных $p, q, r, ...$ (возможно с индексами), где знак $\triangle$ в (1) понимается как ударная пропозициональная связка. Аксиомами $I^{\triangle}$ являются аксиомы интуиционистского пропозиционального исчисления $I$:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ (p\supset(q\supset p)),\\ 2)\ ((p\supset q)\supset((p\supset(q\supset r))\supset(p\supset r))),\end{array}\right\}\quad \supset\text{—аксиомы}$$

$$\left.\begin{array}{l}3)\ (p\supset(q\supset(p\ \&\ q))),\\ 4)\ ((p\ \&\ q)\supset p),\\ 5)\ ((p\ \&\ q)\supset q),\end{array}\right\}\quad \&\text{—аксиомы}$$

$$\left.\begin{array}{l}6)\ ((p\vee q)\supset((p\supset r)\supset((q\supset r)\supset r))),\\ 7)\ (p\supset(p\vee q)),\\ 8)\ (q\supset(p\vee q)),\end{array}\right\}\quad \vee\text{—аксиомы}$$

$$\left.\begin{array}{l}9)\ (\neg\, p\supset(p\supset q)),\\ 10)\ ((p\supset q)\supset((p\supset\neg q)\supset\neg\, p)),\end{array}\right\}\quad \neg\text{—аксиомы}$$

(ср. [2]), а также следующие три аксиомы:

$$\left.\begin{array}{l}11)\ (p\supset\triangle p),\\ 12)\ ((\triangle p\supset p)\supset p),\\ 13)\ (\triangle p\supset(((q\supset p)\supset q)\supset q)).\end{array}\right\}\quad \triangle\text{—аксиомы}$$

Правилами вывода служат обычные правила одновременной подстановки и modus ponens.

Сепарационное свойство (или свойство отделимости) для любого пропозиционального исчисления $U$, язык которого содержит импликацию $\supset$, состоит в том, что для всякой формулы $A$, выводимой в исчислении $U$, существует такой ее вывод в $U$, который не использует никакую аксиому, содержащую связку, отличную от $\supset$ и не входящую в $A$.

Сепарационное свойство для исчисления $I$ было доказано в [9, 8] (ср. [2, теорема 49]); об ошибке при доказательстве сепарационного свойства в [9] и ее исправлении см. в [3]). Доказательство сепарационного свойства для классического пропозиционального исчисления может быть найдено, например, в [2, теорема 49]. В настоящей статье сепарационное свойство для исчисления $I^{\triangle}$ доказывается методом перестройки выводов, позволяющим получать из произвольного вывода формулы $A$ ее вывод, не содержащий логических связок, не входящих в эту формулу (идея алгебраического доказательства содержится в [4]).

Исходя из обычного понятия вывода и следуя [5], приведенным выводом формулы $A$ из списка формул $\Gamma$ в исчислении $I^{\triangle}$ будем называть такой ее вывод, в котором правило подстановки применяется только к аксиомам этого исчисления. Подобно тому, как для классического исчисления высказываний всякий вывод (из гипотез) может быть преобразован в приведенный (см. [6, с. 144 ]), то же справедливо и для исчисления $I^{\triangle}$. Поэтому все исходные и полученные в результате перестройки выводы мы будем считать приведенными. Символом $\Gamma\vdash A$ обозначим существование приведенного вывода формулы $A$, не содержащего связок, не входящих в эту формулу, из списка формул $\Gamma$ (возможно, пустого).

Используя тот факт, что при доказательстве известной теоремы о дедукции [2] в перестроенном выводе добавляются только $\supset$-аксиомы, получаем следующую формулировку этой теоремы для исчисления $I^{\triangle}$.

**Теорема 1 (о дедукции).** *Если в $I^{\triangle}$ существует вывод формулы $B$ из списка $\Gamma$ и формулы $A$, то в $I^{\triangle}$ существует такой вывод формулы $(A \supset B)$ из списка $\Gamma$, который не содержит связок, не входящих в исходный вывод, за исключением, возможно, $\supset$.*

Посредством $X[Z/Y]$ будем обозначать результат подстановки формулы $Y$ вместо всех вхождений формулы $Z$ в формуле $X$. Говорим, что формула $A$ является положительным(отрицательным) вхождением в формулу $B$, если она находится в области действия четного(нечетного) числа вхождений знака $\supset$ левее, чем он, и вхождений знака $\neg$. Анализируя свойство монотонной замены для исчисления $I$, легко доказываемое индукцией по построению формулы, а также то, что $\vdash ((p \supset q) \supset (\triangle p \supset \triangle q))$ [7], получаем следующую формулировку этого свойства для исчисления $I^{\triangle}$.

**Теорема 2 (о монотонной замене).** *Если все вхождения переменной $t$ в формулу $A$ положительны, то в $I^{\triangle}$*

$$(B \supset C) \vdash (A[t/B] \supset A[t/C]).$$

*Если все вхождения переменной $t$ в формулу $A$ отрицательны, то в $I^{\triangle}$*

$$(B \supset C) \vdash A([t/C] \supset A[t/B]).$$

Вводя сокращение $(A \sim B)$ для формулы $((A \supset B) \,\&\, (B \supset A))$, заметим, что доказательство в [7] принципа замены эквивалентным в исчислении $I^{\triangle}$ позволяет сформулировать его в следующем виде:

**Теорема 3 (об эквивалентной замене).** *Пусть $C_{[B]}$ — результат замены выделенного вхождения формулы $A$ в формулу $C_{[A]}$ на формулу $B$, тогда в $I^{\triangle}$ $(A \sim B) \vdash (C_{[A]} \sim C_{[B]})$.*

**Основные результаты.** Известно [2], что формулы

$$(A \supset (B \supset C)), \quad (B \supset (A \supset C)), \quad ((A \,\&\, B) \supset C), \tag{2}$$

а также формулы $A$ и $(A \sim 1)$, где 1 означает формулу $(p \supset p)$, эквивалентны в исчислении $I$. Аналогично доказывается

**Лемма 1.** *Если $X, Y$ — формулы списка (2), то в исчислении $I^{\triangle}$*

$$\vdash (X \supset Y), \vdash (X \sim Y), \vdash (A \sim (A \sim 1)).$$

**Замечание 1.** *По теореме об эквивалентной замене и лемме 1 для любых формул $A$ и $C$ в исчислении $I^{\triangle}$*

$$(A \supset C_{[A]}) \vdash (A \supset C_{[1]}), (A \supset C_{[1]}) \vdash (A \supset C_{[A]}),$$

*где $C_{[1]}$ — результат замены выделенного вхождения формулы $A$ в формулу $C_{[A]}$ на формулу (1).*

С целью доказательства сепарационного свойства мы будем перестраивать исходный вывод, последовательно исключая из него лишние логические связки. В лемме 3 будет показано, как исключить из исходного вывода связку $\neg$. Следующая лемма понадобится нам при доказательстве леммы 3.

**Лемма 2.** *Пусть формула $A$, не содержащая связки $\neg$, построена из пропозициональных переменных, которые принадлежат совокупности $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда в $I^{\triangle} \vdash ((\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} p_i) \supset A)$.*

Доказательство проводится индукцией по построению формулы $A$.

**Лемма 3.** *Если $V$ — вывод формулы $F$ в исчислении $I^{\triangle}$ и формула $F$ не содержит связки $\neg$, то существует вывод $V^+$ формулы $F$, в которую не входит связка $\neg$ и связки, не входящие в вывод $V$, за исключением, возможно, $\&$.*

**Доказательство леммы 3.** Пусть вывод $V$ представляет собой последовательность формул $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, где $Q_n \rightleftharpoons F$ и $x_1, x_2, ..., x_s$ — список всех переменных, входящих в вывод $V$. В каждой формуле $Q_l (1 \leq l \leq n)$ заменим всякое вхождение подформулы вида $\neg X$, где $X$ не содержит связки $\neg$, на формулу вида $(X \supset (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i))$. Повторяя такую замену конечное число раз для вновь полученных формул, мы придем к формуле $Q_l^*$, не содержащей связки $\neg$. Если $Y$ — подформула формулы $Q_l$, то посредством $Y^*$ обозначаем соответствующую подформулу формулы $Q_l^*$,полученную в результате такого преобразования. Для построения вывода $V^+$ заменим каждую формулу $Q_l$ вывода $V$ на $Q_l^+$, где $Q_l^+$ — либо приведенный вывод формулы $Q_l^*$, не содержащий связок, не входящих в эту формулу, либо сама формула $Q_l^*$. Замену будем осуществлять согласно следующим случаям. Если $Q_l$ — подстановочный вариант аксиомы, отличной от $\neg$ -аксиом, то $Q_l^+ \rightleftharpoons Q_l^*$. Если, $Q_l \rightleftharpoons (\neg A \supset (A \supset B))$, то существование нужного нам вывода $Q_l^+$ формулы $Q_l^* \rightleftharpoons ((A^* \supset (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i)) \supset (A^* \supset B^*))$ обосновываем следующим образом:

1) $((\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i) \supset B^*), (A^* \supset (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i)), A^* \vdash B^*$ — очевидно;

2) $\vdash(((\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i) \supset B^*) \supset ((A^* \supset (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i)) \supset (A^* \supset B^*))$ — 1), теорема о дедукции;

3) $\vdash ((\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} x_i) \supset B^*)$ — лемма 3;

4) $\vdash ((A^* \supset (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i)) \supset (A^* \supset B^*))$ — 2), 3), *modus ponens*.

Если $Q_l \rightleftharpoons ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$, то

$$Q_l^* \rightleftharpoons ((A^* \supset B^*) \supset ((A^* \supset (B^* \supset (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i))) \supset (A^* \supset (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i)))).$$

Вывод $Q_l^+$ строится при помощи теоремы о дедукции на основании того, что $(A^* \supset B^*)$, $(A^* \supset (B^* \supset (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i)))$, $A^* \vdash (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i)$. Если $Q_l$ — формула, полученная по *modus ponens* из формул $Q_m$, $(Q_m \supset Q_l)$, то формула $Q_l^*$ получается по *modus ponens* из формул $Q_m^*$, $(Q_m^* \supset Q_l^*)$ и $Q_l^+ \rightleftharpoons Q_l^*$. Таким образом, нужный нам вывод получается в виде последовательности $Q_1^+, Q_2^+, ..., Q_n^+$. Лемма доказана.

Следующая лемма позволяет исключить из исходного вывода связку $\triangle$. Идея ее доказательства заимствована из доказательства теоремы об ассерторической равносильности исчислений $I$ и $I^{\triangle}$ [5]. Непосредственное применение этой теоремы для наших целей невозможно, так как в [5] рассматривается другой вариант исчисления $I^{\triangle}$, т. е. равносильное ему исчисление, где вместо $\triangle$-аксиомы 13) используется аксиома $(\triangle p \supset (q \vee (q \supset \supset p)))$.

**Лемма 4.** *Если $V$ — вывод формулы $F$ в исчислении $I^{\triangle}$ и формула $F$ не содержит связки $\triangle$, то существует вывод $V^+$ формулы $F$, в которую не входит связка $\triangle$ и связки, не входящие в вывод $V$, за исключением, возможно, &.*

**Доказательство леммы 4.** Доказательство проводим индукцией по $\triangle$-рангу $m$ вывода $V$, где $\triangle$-рангом вывода называется число всех различных $\triangle$-формул (т. е. формул вида $\triangle X$), входящих в члены данного вывода как их подформулы. Если $m = 0$, то вывод $V$ не содержит связки $\triangle$ и вывод $V^+$ совпадает с выводом $V$. Допустим, что $\triangle$-ранг вывода $V$ равен $k$ и пусть вывод $V$ — это последовательность формул $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, где $Q_n \rightleftharpoons F$. Среди $k$ различных $\triangle$-формул вывода $V$ выберем формулу $\triangle D$ максимальной длины. Рассмотрим список (возможно, пустой) всех членов вывода $V$, являющихся подстановочными вариантами аксиомы 13), где вместо пропозициональной переменной $p$ подставлена формула $D$:

$$(\triangle D \supset (((B_1 \supset D) \supset B_1) \supset B_1)), ..., (\triangle D \supset (((B_s \supset D) \supset B_s) \supset B_s)). \qquad (3)$$

Назовем $\triangle$-чистым выводом формулы $X$ такой приведенный вывод ее в $I^{\triangle}$, в котором нет вхождений $\triangle$-формул, не входящих в $X$ в качестве подформул. Обозначим через $X^*$ формулу

$$X[\triangle D / \mathop{\&}_{i=1}^{s} (((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i)][\triangle D/1],$$

если список (3) не пуст, и формулу $X[\triangle D/1]$ в противном случае. Через $Q_l^+ (1 \leq \leq l \leq n)$ будем обозначать либо $\triangle$-чистый вывод формулы $Q_l^*$, не содержащий логических связок, не входящих в формулу $Q_l^*$, либо саму формулу $Q_l^*$ согласно следующим случаям. Если $Q_l$ — подстановочный вариант одной из аксиом исчисления $I^{\triangle}$, не являющихся таким подстановочным вариантом $\triangle$-аксиомы, в котором вместо пропозициональной переменой $p$ подставлена формула $D$, то $Q_l^*$ — подстановочный вариант этой аксиомы, не содержащей в качестве подформулы формулу $\triangle D$ и $Q_l^+ \rightleftharpoons Q_l^*$. Если $Q_l \rightleftharpoons (D \supset \triangle D)$ и список (3) не пуст, то $Q_l^* \rightleftharpoons (D \supset \mathop{\&}_{i=1}^{s} (((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i))[\triangle D/1]$. Для каждого $i$ $(1 \leq i \leq s)$, применяя теорему о монотонной замене и правило *modus ponens*, получаем:

$$D, ((B_i \supset D) \supset B_i)[\triangle D/1] \vdash (D \supset B_i)[\triangle D/1] \vdash B_i[\triangle D/1],$$

откуда по теореме о дедукции $D \vdash (((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i)[\triangle D/1]$. Далее, используя &- аксиому 3) и теорему о дедукции, имеем:

$$\vdash (D \supset (\mathop{\&}_{i=1}^{s} (((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i)))[\triangle D/1]. \qquad (4)$$

Существующий согласно (4) вывод и есть $Q_l^+$. Когда список (3) пуст, $Q_l^* \rightleftharpoons (D \supset 1)$ и существование $\triangle$-чистого вывода $Q_l^+$ очевидно, так как $\vdash 1$. Если $Q_l \rightleftharpoons ((\triangle D \supset D) \supset D)$ и список (3) не пуст, то

$$Q_l^* \rightleftharpoons (((\mathop{\&}_{i=1}^{s}(((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i))[\triangle D/1] \supset D) \supset D).$$

Обозначим формулу $(((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i)[\triangle D/1]$ через $C_i$. По теореме о монотонной замене

$$((((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i) \supset D)[\triangle D/1] \vdash (B_i \supset D)[\triangle D/1]$$

и

$$((((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i) \supset D)[\triangle D/1] \vdash ((B_i \supset D) \supset D)[\triangle D/1].$$

Отсюда

$$((((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i) \supset D)[\triangle D/1] \vdash D$$

и по теореме о дедукции

$$\vdash (((((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i) \supset D) \supset D)[\triangle D/1],$$

т. е.

$$\vdash ((C_i \supset D) \supset D).$$

Учитывая замечание 1, легко показать, что $\vdash (D \supset (((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i))$, т. е. $\vdash (D \supset C_i)$. Чтобы доказать существование нужного нам вывода, достаточно показать, что $((\mathop{\&}_{i=1}^{s} C_i) \supset D) \vdash D$. Так как для каждого $i = \overline{1, s}$ имеет место $\vdash$ $\vdash ((C_i \supset D) \supset D)$ и $\vdash (D \supset (C_i \supset D))$, то $\vdash (D \sim (C_i \supset D))$. Очевидно, $((\mathop{\&}_{i=1}^{s} C_i) \supset$ $\supset D) \vdash (C_1 \supset (C_2 \supset ...(C_s \supset D)...) \vdash D$. Когда список (3) пуст, $Q_l^* \rightleftharpoons ((1 \supset D) \supset D)$ и существование $\triangle$-чистого вывода очевидно, так как $1, 1 \supset D \vdash D$. Если

$$Q_l \rightleftharpoons (\triangle D \supset (((B_j \supset D) \supset B_j) \supset B_j)) \quad (1 \le j \le s),$$

то

$$Q_l^* \rightleftharpoons ((\mathop{\&}_{i=1}^{s}(((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i))[\triangle D/1] \supset (((B_j^* \supset D) \supset B_j^*) \supset B_j^*)).$$

Используя лемму 1 и &-аксиому 3), получаем

$$\vdash ((\mathop{\&}_{i=1}^{s}(((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i))[\triangle D/1] \supset (((B_j \supset D) \supset B_j) \supset B_j)[\triangle D/1]). \tag{5}$$

Применяя замечание 1 к (5), заключаем

$$\vdash ((\mathop{\&}_{i=1}^{s}(((B_i \supset D) \supset B_i) \supset B_i))[\triangle D/1] \supset (((B_j^* \supset D) \supset B_j^*) \supset B_j^*)),$$

что доказывает существование вывода $Q_l^+$.

Если $Q_l$ — формула, полученная по *modus ponens* из предыдущих формул $Q_m, (Q_m \supset Q_l)$, то формула $Q_l^*$ получается по *modus ponens* из формул $Q_m^*, (Q_m^* \supset$ $\supset Q_l^*)$ и $Q_l^+ \rightleftharpoons Q_l^*$. Таким образом, $Q_1^+, Q_2^+, ..., Q_n^+$ — вывод формулы $F$, не содержащий формулы $\triangle D$, $\triangle$-формул и связок, не входящих в вывод $V$, за исключением, возможно, &. Ранг этого вывода равен $k-1$. По предположению индукции из этого вывода можно получить требуемый вывод $V^+$. Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Если $V$ — вывод формулы $F$ в исчислении $I^{\triangle}$ и формула $F$ не содержит связки $\vee$, то в исчислении $I^{\triangle}$ существует вывод $V^{+}$ формулы $F$, в которую не входит связка $\vee$ и связки, не входящие в вывод $V$, за исключением, возможно, $\&$.*

**Доказательство леммы 5.** Доказательство проводим индукцией по $\vee$-рангу $m$ вывода $V$, где $\vee$-рангом вывода называется число различных $\vee$-формул (т. е. формул вида $X \vee Y$), входящих в члены данного вывода как их подформулы. Если $m = 0$, то вывод $V$ не содержит связки $\vee$ и вывод $V^{+}$ совпадает с выводом $V$. Допустим, что ранг вывода $V$ равен $k$ и пусть вывод $V$ — это последовательность формул $Q_1$, $Q_2$, ..., $Q_n$, где $Q_n \leftrightharpoons F$. Среди $k$ различных $\vee$-формул вывода $V$ выберем формулу $(A \vee B)$ максимальной длины. Рассмотрим список (возможно, пустой) всех членов вывода $V$, являющихся подстановочными вариантами аксиомы 6), посылкой которых служит формула $(A \vee B)$:

$$\begin{gathered}((A \vee B) \supset ((A \supset C_1) \supset ((B \supset C_1) \supset C_1))), ..., \\ ((A \vee B) \supset ((A \supset C_s) \supset ((B \supset C_s) \supset C_s))).\end{gathered} \tag{6}$$

Назовем $\vee$-чистым выводом формулы $X$ такой приведенный вывод ее в $I^{\triangle}$, в котором нет вхождений $\vee$-формул, не входящих в $X$ в качестве подформул. Обозначим через $X^*$ формулу

$$X[(A \vee B)/\mathop{\&}_{i=1}^{s}((A \supset C_i) \supset ((B \supset C_i) \supset C_i))][(A \vee B)/1],$$

если список (6) не пуст, и формулу $X[(A \vee B)/1]$ в противном случае. Через $Q_l^{+}$ будем обозначать либо $\vee$-чистый вывод формулы $Q_l^*$, не содержащий логических связок, не входящих в формулу $Q_l^*$, либо саму формулу $Q_l^*$ согласно следующим случаям. Если $Q_l$ — подстановочный вариант одной из аксиом исчисления $I^{\triangle}$, не являющихся таким подстановочным вариантом $\vee$-аксиом, в котором вместо пропозициональной переменной $p$ подставлена формула $A$, а вместо пропозициональной переменной $q$ — формула $B$, то $Q_l^*$ — подстановочный вариант этой же аксиомы и $Q_l^{+} \leftrightharpoons Q_l^*$. Если $Q_l \leftrightharpoons (A \supset (A \vee B))$ и список (6) не пуст, то

$$Q_l^* \leftrightharpoons (A \supset (\mathop{\&}_{i=1}^{s}((A \supset C_i) \supset ((B \supset C_i) \supset C_i)))[(A \vee B)/1]).$$

Существование $\vee$-чистого вывода $Q_l^{+}$, не содержащего логических связок, не входящих в формулу $Q_l^*$, подтверждается на основании теоремы о дедукции и того, что для каждого $i (1 \leq i \leq s)$ имеет место

$$A, (A \supset C_j)[(A \vee B)/1], (B \supset C_i)[(A \vee B)/1] \vdash C_i[(A \vee B)/1].$$

Когда список (6) пуст, $Q_l^* \leftrightharpoons (A \supset 1)$ и существование $\vee$-чистого вывода $Q_l^*$ очевидно, так как $\vdash 1$.

Случай, когда $Q_l \leftrightharpoons (B \supset (A \vee B))$, рассматривается аналогично. Если

$$Q_l \leftrightharpoons ((A \vee B) \supset ((A \supset C_j) \supset ((B \supset C_j) \supset C_j))), (1 \leq j \leq s),$$

то

$$Q_l^* \rightleftharpoons ((\mathop{\&}_{i=1}^{s}((A \supset C_i) \supset ((B \supset C_i) \supset C_i)))[(A \vee B)/1] \supset$$

$$\supset ((A \supset C_j^*) \supset ((B \supset C_j^*) \supset C_j^*))).$$

По &-аксиоме 3) и лемме 1 имеем:

$$\vdash ((\mathop{\&}_{i=1}^{s}((A \supset C_i) \supset ((B \supset C_i) \supset C_i)))[(A \vee B)/1] \supset$$

$$\supset ((A \supset C_j) \supset ((B \supset C_j) \supset C_j))[(A \vee B)/1]).$$

Применяя к последнему утверждению замечание 1, получаем

$$\vdash ((\mathop{\&}_{i=1}^{s}((A \supset C_i) \supset ((B \supset C_i) \supset C_i)))[(A \vee B)/1] \supset$$

$$\supset ((A \supset C_j^*) \supset ((B \supset C_j^*) \supset C_j^*))),$$

что доказывает существование вывода $Q_l^*$.

Если $Q_l$ — формула, полученная по *modus ponens* из предыдущих формул $Q_m, (Q_m \supset Q_l)$, то формула $Q_l^*$ получается по *modus ponens* из формул $Q_m^*, (Q_m^* \supset \supset Q_l^*)$ и $Q_l^+ \rightleftharpoons Q_l^*$. Таким образом, $Q_1^+, Q_2^+, ..., Q_n^+$ — вывод формулы $F$, не содержащей формулы $(A \vee B)$, $\vee$-формул и связок, не входящих в вывод $V$, за исключением, возможно, &. Ранг этого вывода равен $k-1$. По предположению индукции, из этого вывода можно получить требуемый вывод $V^+$. Лемма доказана.

Лемма 6 понадобится нам при доказательстве леммы 7, в которой будет указан способ исключения из исходного вывода связки &, если она не входит в доказуемую формулу.

**Лемма 6.** *(ср. [9, с. 143 ]). Всякая формула $F$ эквивалентна в $I^{\triangle}$(или в $I$, если формула $F$ не содержит связки $\triangle$) формуле, не содержащей связки &, или конъюнкции формул, не содержащих связки &.*

**Доказательство леммы 6.** Доказательство проводится индукцией по сумме $s$ глубин всех вхождений связки & в формулу $F$. Под глубиной вхождения связки & понимается число содержащих ее подформул формулы $F$, главные связки которых отличны от &. База индукции очевидна. Пусть $s > 0$. Тогда существует минимальная подформула $G$ формулы $F$, содержащая &, главная связка которой отлична от конъюнкции. Заменим любое вхождение формулы $G$ в формулу $F$ на форму $G'$, эквивалентную $G$, согласно следующим правилам, если

а) $G \rightleftharpoons \triangle(\mathop{\&}_{i=1}^{n} A_i)$, то $G' \rightleftharpoons \mathop{\&}_{i=1}^{n}(\triangle A_i)$;

б) $G \rightleftharpoons (\mathop{\&}_{i=1}^{n} A_i \supset \mathop{\&}_{j=1}^{m} B_j)$, то $G' \rightleftharpoons \mathop{\&}_{j=1}^{m}(A_1 \supset (A_2 \supset ...(A_n \supset B_j)...))$;

в) $G \rightleftharpoons (\mathop{\&}_{i=1}^{n} A_i \vee \mathop{\&}_{j=1}^{m} B_j)$, то $G' \rightleftharpoons \mathop{\&}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}(A_i \vee B_j)$;

г) $G \rightleftharpoons \neg(\mathop{\&}_{i=1}^{n} A_i)$, то $G' \rightleftharpoons (A_1 \supset (A_2 \supset ...(A_{n-1} \supset \neg A_n)...))$.

По теореме об эквивалентной замене получим формулу, эквивалентную формуле $F$, у которой сумма глубин вхождений связки & меньше, чем $s$.

При исключении из исходного вывода связок $\neg, \triangle, \vee$ в новом выводе могла появиться связка &. Поэтому при необходимости связка & исключается из вывода в последнюю очередь. Исключить ее позволяет

**Лемма 7.** *Если $V$ — вывод формулы $F$ в исчислении $I^{\triangle}$ и формула $F$ не содержит связки &, то существует вывод $V^{+}$ формулы $F$, в которую не входит связка & и связки, не входящие в вывод $V$.*

**Доказательство леммы 7.** Пусть $V = Q_1, Q_2, ..., Q_n$ — приведенный вывод формулы $F$. Последовательно (по шагам) будем переходить от формул $Q_l (1 \leq \leq l \leq n)$ к эквивалентным им формулам, являющимся конъюнкциями, члены которых не содержат &. На некотором шаге мы получим список $Q_1{}', Q_2', ..., Q_n'$. Если не все формулы этого списка имеют нужный вид, выберем из совокупности всех подформул данного списка подформулу минимальной длины, содержащую конъюнкцию, главная связка которой конъюнкцией не является. Действуя по правилам, указанным в лемме 6, заменим каждое вхождение этой формулы в формулах списка $Q_1{}', Q_2', ..., Q_n'$. Очевидно, за конечное число шагов мы получим список формул $\underset{j=1}{\overset{K_1}{\&}} Q_{1_j}, ..., \underset{j=1}{\overset{K_n}{\&}} Q_{n_j}$, где каждая $Q_{i_j}$ не содержит &. Обозначим

$$Q_l^* \leftrightharpoons \{Q_{l_1}, Q_{l_2}, ..., Q_{l_{k_l}}\},$$

а через $Q_l^+$ будем обозначать список выводов формул из $Q_l^* (1 \leq l \leq n)$, которые построим так, чтобы они не содержали связок, не входящих в доказываемые формулы. Пусть $Q_l = E\ [p/A, q/B, r/C]$, где $E(p, q, r)$ — аксиома исчисления $I^{\triangle}$, отличная от $\triangle$- аксиом. На некотором шаге из формулы $Q_l$ мы получим формулу

$$E\ [p/\underset{i=1}{\overset{m}{\&}} A_i, q/\underset{i=1}{\overset{s}{\&}} B_i, r/\underset{i=1}{\overset{t}{\&}} C_i],$$

где формулы $A_i, B_i, C_i$ не содержат знака &. Рассмотрим формулу

$$E\ [p/\underset{i=1}{\overset{m}{\&}} p_i, q/\underset{i=1}{\overset{s}{\&}} q_i, r/\underset{i=1}{\overset{t}{\&}} r_i].$$

По лемме 6, эта формула эквивалентна в $I$ формуле $\underset{i=1}{\overset{K_l}{\&}} D_i$, где каждая из формул $D_i$ не содержит & и $\triangle$, следовательно, $\underset{i=1}{\overset{K_l}{\&}} D_i$ выводима в $I$ и каждая из формул $D_i$ выводима в $I$. По сепарационному свойству для исчисления $I$ можно считать, что выводы формул $D_i$ не содержат связок, не входящих в эти формулы. Заметим, что формулы

$$E\ [p/\underset{i=1}{\overset{m}{\&}} A_i, q/\underset{i=1}{\overset{s}{\&}} B_i, r/\underset{i=1}{\overset{t}{\&}} C_i]$$

и

$$(\underset{i=1}{\overset{K_l}{\&}} D_i)\ [p_i/A_i, i = 1, ..., m, q_j/B_j, j = 1, ..., s, r_h/C_h, h = 1, ..., t]$$

эквивалентны в $I^{\triangle}$ и

$$Q_{l_i} \rightleftharpoons D_i\ [p_i/A_i, i=1,...,m, q_j/B_j, j=1,...,s, r_h/C_h, h=1,...,t].$$

Так как $Q_{l_i}$ — подстановочный вариант формулы $D_i$, то на основании вышесказанного о выводах формул $D_i$ можно утверждать существование приведенных выводов $Q^{+}_{l_i}$, содержащих только те связки, которые входят в $Q_{l_i}$.

Пусть $Q_l \rightleftharpoons (A \supset \triangle A)$. На некотором шаге из формулы $Q_l$ мы получим формулу $(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{K_l} A_i \supset \mathop{\&}\limits_{i=1}^{K_l} \triangle A_i)$ и $Q_{l_i} \rightleftharpoons (A_1 \supset (A_2 \supset ...(A_{k_l} \supset \triangle A_i)...)$. По лемме 1 и теореме о дедукции, из

$$A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_{k_l} \vdash A_i \supset \triangle A_l$$

следует существование вывода $Q^{+}_{l_i}$ для формулы $Q_{l_i}$, содержащего только те связки, которые входят в эту формулу. Если $Q_l \rightleftharpoons ((\triangle A \supset A) \supset A)$, то на некотором шаге из этой формулы мы получим формулу

$$((\mathop{\&}\limits_{i=1}^{K_l} \triangle A_i \supset \mathop{\&}\limits_{i=1}^{K_l} A_i) \supset \mathop{\&}\limits_{i=1}^{K_l} A_i)$$

и

$$Q_{l_i} \rightleftharpoons ((\triangle A_1 \supset (\triangle A_2 \supset ...(\triangle A_{l_k} \supset A_1)...) \supset$$
$$\supset((\triangle A_1 \supset(\triangle A_2 \supset...(\triangle A_{l_k} \supset A_2)...)\supset...\supset((\triangle A_1 \supset(\triangle A_2 \supset...(\triangle A_{k_l})...)\supset A_i)...).$$

Чтобы показать, что $\vdash Q_{l_i}$, методом индукции докажем следующее свойство:

A. Для любых $k$ формул $B_1, B_2, ..., B_k$ существуют выводы формул

$$((\triangle B_1 \supset(\triangle B_2 \supset...(\triangle B_k \supset B_1)...)\supset((\triangle B_1 \supset(\triangle B_2 \supset...\supset(\triangle B_k \supset B_2)...)\supset$$
$$\supset ... \supset ((\triangle B_1 \supset (\triangle B_2 \supset ...(\triangle B_k \supset\ B_k)...) \supset B_i)...), \quad i=1,...,k, \tag{7}$$

не содержащие связок, не входящих в эти формулы. Действительно, в случае $k=1$ для любой формулы $B \vdash ((\triangle B \supset B) \supset B)$. Обозначим формулу $(\triangle B_{i_1} \supset$ $\supset (\triangle B_{i_2} \supset ...(\triangle B_{i_{k-1}} \supset B_{i_j})...))$, где $1 \le j \le k-1$ и $\{i_1, i_2, ..., i_{k-1}\} \subseteq \{1,2,...,k\}$ через $(C \supset B_{i_j})$. По предположению индукции для любого $i_j \in \{i_1, i_2, ..., i_{k-1}\} \subseteq$ $\subseteq \{1,2,...,k\}$

$$\vdash ((C \supset B_{i_1}) \supset ((C \supset B_{i_2}) \supset ...((C \supset B_{i_{k-1}}) \supset B_{i_j})...). \tag{8}$$

Чтобы доказать существование нужных выводов для формул (7), достаточно, по лемме 1 и теореме о дедукции, доказать

$$(C \supset (\triangle B_{i_k} \supset B_{i_1})), (C \supset (\triangle B_{i_k} \supset B_{i_2})), ..., (C \supset (\triangle B_{i_k} \supset B_{i_k})) \vdash B_{i_j}, \tag{9}$$

где $i_j \in \{i_1, i_2, ..., i_k\}$. Обозначим список формул, являющихся допущениями в (9), через $\Gamma$. По теореме о монотонной замене

$$(C \supset (\triangle B_{i_k} \supset B_{i_k})) \vdash (C \supset B_{i_k}) \vdash (C \supset \triangle B_{i_k}).$$

Отсюда, применяя лемму 1 и теорему о монотонной замене, имеем:

$$\Gamma \vdash (C \supset (C \supset B_{i_1})), (C \supset (C \supset B_{i_2})), ..., (C \supset (C \supset B_{i_{k-1}})) \vdash$$

$$\vdash (C \supset B_{i_1}), (C \supset B_{i_2}), ..., (C \supset B_{i_{k-1}}).$$

Используя последнее и (8), получим, $\Gamma \vdash B_{i_j}$, где $i_j \in \{1, 2, ..., k\}$. Свойство A доказано.

Из свойства A вытекает $\vdash Q_{l_i}(1 \leq i \leq k_l)$.

Пусть $Q_l \rightleftharpoons (\triangle A \supset (((B \supset A) \supset B) \supset B))$. На некотором шаге из этой формулы мы получим формулу

$$(\mathop{\&}_{i=1}^{K_l} \triangle A_i \supset (((\mathop{\&}_{j=1}^{m} B_j \supset \mathop{\&}_{i=1}^{K_l} A_i) \supset \mathop{\&}_{j=1}^{m} B_j) \supset \mathop{\&}_{j=1}^{m} B_j))$$

и

$$\begin{aligned} &Q_{l_i} \rightleftharpoons ((\triangle A_1 \supset (\triangle A_2 \supset ... (\triangle A_{k_l} \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset ... (B_m \supset A_1) ... ) \supset \\ &\supset ((B_1 \supset (B_2 \supset ...(B_m \supset A_2)...) \supset ... \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset ...(B_m \supset A_{k_l})...) \supset \\ &\supset B_1) ...) \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset ... (B_m \supset A_1)...) \supset ... \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset ...(B_m \supset \\ &\supset A_{k_l})...) \supset B_m)...) \supset B_i)...). \end{aligned} \tag{10}$$

Чтобы показать, что $\vdash Q_{l_i}$, докажем следующее свойство:

B. Для любых $k$ формул $A_1, A_2, ..., A_k$ и любых $m$ формул $B_1, B_2, ..., B_m$ существует вывод формулы вида (10), не содержащей связок, не входящих в эту формулу. Доказательство проводится индукцией по $k$. Действительно, в случае $k = 1$ требуется доказать, что для любого $m$

$$\begin{aligned} &\vdash (\triangle A \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset ...(B_m \supset A)...) \supset B_1) \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset ...(B_m \supset \\ &\supset A) ...) \supset B_2) \supset ... \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset ... (B_m \supset A) ...) \supset B_m) \supset B_j) ...), \end{aligned} \tag{11}$$

где $1 \leq j \leq m$. Применяя лемму 1 и теорему о монотонной замене, получим

$$((B_1 \supset (B_2 \supset ...(B_m \supset A)...) \supset B_j) \vdash ((B_j \supset A) \supset B_j) \vdash (\triangle A \supset B_j).$$

Отсюда по лемме 1 и теореме о дедукции следует (11).

Обозначим формулу $(B_1 \supset (B_2 \supset ...(B_m \supset A_l)...)$ через $C_l$. По предположению индукции все формулы вида

$$\begin{aligned} &(\triangle A_1 \supset (\triangle A_2 \supset ...(\triangle A_{k-1} \supset ((C_1 \supset (C_2 \supset ...(C_{k-1} \supset B_1)...) \supset \\ &\supset ((C_1 \supset (C_2 \supset ...(C_{k-1} \supset B_2)...) \supset ... \supset ((C_1 \supset (C_2 \supset ...(C_{k-1} \supset \\ &\supset B_m)...) \supset B_i)...), \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \tag{12}$$

имеют нужные выводы в $I^{\triangle}$. Покажем выводимость формул (10). По теореме о дедукции достаточно показать

$$\begin{aligned} &\triangle A_1, \triangle A_2, ..., \triangle A_k, (C_1 \supset (C_2 \supset ...(C_k \supset B_1)...), ..., \\ &(C_1 \supset (C_2 \supset ...(C_k \supset B_m)...) \vdash B_i \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Обозначим список формул, являющихся допущениями в (13) через Γ. Рассмотрим формулу

$$(C_1 \supset (C_2 \supset \ ...(C_k \supset B_i)...) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons (C_1 \supset (C_2 \supset \ ...(C_{k-1} \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset ...(B_m \supset A_k)...) \supset B_i)...). \tag{14}$$

По лемме 1, теореме о монотонной замене и теореме о дедукции, используя аксиому 14), получим

1) $(C_1 \supset (C_2 \supset \ ... (C_{k-1} \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset \ ... (B_m \supset A_k) ... ) \supset B_i) ... ) \vdash$

$\vdash (C_1 \supset (C_2 \supset ... (C_{k-1} \supset ((B_i \supset (B_1 \supset (B_2 \supset ... (B_{i-1} \supset (B_{i+1} \supset ... (B_m \supset A_k)...) \supset B_i)...),$

2) $(C_1 \supset (C_2 \supset \ ... (C_{k-1} \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset \ ... (B_m \supset A_k) ... ) \supset B_i) ... ) \vdash$

$\vdash (C_1 \supset (C_2 \supset ... (C_{k-1} \supset (\triangle (B_1 \supset (B_2 \supset ... (B_{i-1} \supset (B_{i+1} \supset ... (B_m \supset A_k)...) \supset B_i)...),$

3) $(C_1 \supset (C_2 \supset \ ... (C_{k-1} \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset \ ... (B_m \supset A_k) ... ) \supset B_i) ... ) \vdash$

$\vdash (C_1 \supset (C_2 \supset ...(C_{k-1} \supset (\triangle A_k \supset B_i)...),$

4) $(C_1 \supset (C_2 \supset \ ... (C_{k-1} \supset ((B_1 \supset (B_2 \supset \ ... (B_m \supset A_k) ... ) \supset B_i) ... ) \vdash$

$\vdash (\triangle A_k \supset (C_1 \supset (C_2 \supset ...(C_{k-1} \supset B_i)...).$

Используя последнее утверждение и выводимость формул вида (12), по *modus ponens* получим $\Gamma \vdash B_i$. Свойство B доказано. На основании свойства B очевидно $\vdash Q_{l_i} (1 \le i \le k_l)$.

Пусть $Q_l$ получена по *modus ponens* из предыдущих формул $Q_m, (Q_m \supset Q_l)$. При переходе от этих формул к эквивалентным им формулам нужного вида на некотором шаге мы получим соответственно формулы

$$(\mathop{\&}_{i=1}^{K_l} Q_{l_i}), (\mathop{\&}_{i=1}^{K_m} Q_{m_i}), \mathop{\&}_{i=1}^{K_l} (Q_{m_1} \supset (Q_{m_2} \supset ...(Q_{m_{k_m}} \supset Q_{l_i})...),$$

где формулы $Q_{l_i} (1 \le l_i \le k_l)$ и $Q_{m_i} (1 \le m_i \le k_m)$ не содержат знака &. Следовательно,

$$Q_l^* = \{Q_{l_1}, ..., Q_{l_{k_l}}\}, \quad Q_m^* = \{Q_{m_1}, ..., Q_{m_{k_m}}\},$$

$$(Q_m \supset Q_l)^* = \{Q_{m_1} \supset (Q_{m_2} \supset ...(Q_{m_{k_m}} \supset Q_{l_i})...) \mid i = 1, 2, ..., k_l\}.$$

Каждая формула из совокупности $Q_l^*$ получается $k_m$-кратным применением правила *modus ponens* к формулам совокупностей $Q_m^*, (Q_m \supset Q_l)^*$. Лемма доказана. Использование лемм 3, 4, 5 в любом порядке, а затем леммы 7, может быть доказана

**Теорема 4.** *Для исчисления $I^{\triangle}$ имеет место сепарационное свойство.*

**Заключение.** Для доказуемостно - интуиционистского исчисления $I^{\triangle}$, являющегося аксиоматизацией одноименной логики, методом перестройки приведенных выводов, доказано выполнение сепарационного свойства (или свойства отделимости). А именно доказано, что для всякой формулы $A$, выводимой в доказуемостно-интуиционистском исчислении существует такой её вывод в $I^{\triangle}$, который не использует никакую аксиому, содержащую связку, отличную от $\supset$ и не входящую в $A$.


1. **Кузнецов А. В.** Доказуемостно-интуиционистская логика [текст] / А. В. Кузнецов // Модальные и интенсиональные логики: Тезисы координационного совещания. – М., 1978. – С. 75–79.
2. **Клини С. К.** Введение в метаматематику [текст] / С. К. Клини. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
3. **Циткин А. И.** К вопросу об ошибке в известной работе М. Вайсберга [текст] / А. И. Циткин // Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. – М.: Наука, 1979. – С. 240–256.
4. **Муравицкий А. Ю.** Критерий △-обогатимости псевдобулевых алгебр и некоторые вложения [текст] / А. Ю. Муравицкий // Седьмая Всесоюзная конференция по математической логике. – Новосибирск. – 1984. – С. 115.
5. **Кузнецов А. В.** О доказуемостно-интуиционистском пропозициональном исчислении [текст] / А. В. Кузнецов // ДАН СССР. – 1985. – Т. 283. – № 1.– С. 27–29.
6. **Черч А.** Введение в математическую логику [текст] / А. Черч. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
7. **Kuznetsov A. V.** On superintuitionistic logic as fragments of proof logic extentions [text] / A. V. Kuznetsov, A. Yu. Muravitsky // Studia Logica. – 1986. – Vol. 45, – № 1. – P. 77–99.
8. **Curry H. B.** A note on the reduction of Gentzen's calculus LJ [text] / H. B. Curry // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – Vol. 45. – P. 256–288.
9. **Wajsberg M.** On A.Heyting's propositional calculus [text] / M. Wajsberg // Waysberg M. Logical works. Warszava. – 1977. – P. 132–171.