

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Суперзбіжність скінченно - елементних схем для
одновимірних крайових задач»

«Superconvergence of finite-element schemes for
one-dimensional boundary value problems»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Стеблинський Ігор Віталійович

Керівник: к. ф. -м. н., доц. Вербіцький В. В.

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Таїрова М.С.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2022 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2022 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

Вступ		3
1	Постановка задачі	4
2	Метод скінченних елементів	6
2.1	Варіаційне формулювання крайової задачі	6
2.2	Метод Бубнова–Гальоркіна	10
2.3	Метод скінченних елементів	11
3	Суперзбіжність методу скінченних елементів	16
4	Суперзбіжність hp-версії методу скінченних елементів для одновимірних задач	21
4.1	hp -скінченно-елементна дискретизація	23
4.2	Напів- H^1 проекція та ультраапроксимація	24
5	Обчислювальні експерименти	28
	Висновки	36
	Список літератури	37
	Додаток А. Текст програмного додатку	39

ВСТУП

Метод скінченних елементів (МСЕ) являється одним з найефективніших методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь. Для ефективної реалізації МСЕ важливо отримати апостеріорні оцінки скінченно-елементного розв'язку. Великий клас апостеріорних оцінювачів базується на використанні факту суперзбіжності МСЕ, або на побудові точних скінченно-елементних схем. Причому, практично встановити відмінність між цими підходами, тобто встановити схема МСЕ є точною для данної задачі, чи спостерігається явище суперзбіжності, досить важко.

Об'єктом дослідження є скінченно-елементна апроксимація крайової задачі.

Предметом дослідження є схема методу скінченних елементів з використанням лінійних неперервних сплайнів розв'язування крайових задач.

Мета роботи: отримання нових знань і практичного досвіду для розв'язання крайових задач методом скінченних елементів.

ВИСНОВКИ

В роботі проведені обчислювальні експерименти щодо подальшого вивчення явища суперзбіжності та побудови точних схем методу скінченних елементів для розв'язування одновимірних крайових задач. Щоб перевірити твердження деяких теорем про суперзбіжність методу скінченних елементів була побудована скінченно-елементна апроксимація модельної крайової задачі з використанням лінійних безперервних сплайнів на рівномірній сітці.

Побудовано скінченно-елементні розв'язки задачі на рівномірних сітках з різною кількістю вузлів. На основі результатів обчислювального експерименту можна зробити такі висновки:

- 1) для данної крайової задачі та вибраної схеми методу скінченних елементів твердження теореми про суперзбіжність мають місце;
- 2) враховуючи що при побудові скінченно-елементної апроксимації крайової задачі інтеграли, що визначають коефіцієнти СЛАР обчислювались наближено, можна допустити, що для данної задачі вибрана схема є точною, а похибки скінченно-елементного розв'язку в узлах сітки є наслідком похибок чисельного інтегрування, тим більш, що при грубих сітках такі похибки практично відсутні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вербицкий В.В., Андриеш В.А. О КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И РОБИНА // X міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», Луцьк-Свитязь, 4-6 червня 2021 р. Тези доповідей. Луцьк, 2021. с. 10-11.
2. Вербицкий В.В., Андриеш В.А. О КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА // Математика. Інформаційні технології. Освіта. Збірник статей. 2021. №8. С. 23-29.
3. Вербицкий В. В., Реут В. В. Введения в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник — Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2018. — 116 с.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986.
5. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. — Львів, Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. — 221 с.
6. M. Ainsworth, J. Tinsley Oden. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. — Wiley, New York, 2000.
7. Babuska /., Bauerjee U., O shorn J.E. Superconvergence in the generalized finite element method: Techn. Rep. 0545. Austin, Texas: TICAM, Univ. Texas, 2004. <http://www.ices.utexas.edu/research/reports/2005/0545.pdf>.
8. Babuska I.M., Sauter S. A. Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave numbers? // SIAM J. Numer. Analys. 1997. V. 34. № 6. P. 2392-2423.
9. Babuska I., Caloz G., O shorn J. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients // SIAM J. Numer. Analys. 1994. V. 31. № 4. P. 945-981.
10. Babuska I., Melenk J.M. The partition of unity finite element method // Int. J. Numer. Meth. Engng. 1997. V. 40. № 4. P. 727-758.
11. Barbeiro, S., Ferreira, J. A., Grigorieff, R. D. Supraconvergence of a finite difference scheme for solutions in $H_s(0, L)$ // IMA J Numer Anal, 2005, 25

- (4): pp. 797–811.
12. J.J. Douglas and T. Dupont, Superconvergence for Galerkin methods for the two-point boundary problem via local projections// Numer. Math. 21 (1973) 270-278.
 13. Oden J.T., Prudhomme S., Demkowicz L. A posteriori error estimation for acoustic wave propagation problems: Techn. Rept 0432. Austin, Texas: TICAM, Univ. Texas, 2004. <http://www.ices.utexas.edu/research/reports/2004/0432.pdf>.
 14. J. Nečas. Direct Methods in the Theory of Elliptic Problems. — Springer-Verlag, Berlin, 2012.
 15. Verbitskyi V., Loktev A. An exact finite element scheme of the boundary value problem for an ordinary differential equation // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2020. Вип. 28. С. 82–87.
 16. R. Verfürth. Adaptive Finite Element Methods. // Lecture Notes Winter Term 2007/08. — Ruhr-Universität Bochum.
 17. Wahlbin Lars B. Superconvergence in Galerkin Finite Element Methods. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995. — 172 p.
 18. J. Douglas Jr. and T. Dupont, Galerkin approximations for the two point boundary problem using continuous, piecewise polynomial spaces, Numer. Math. 22 (1974), 99-109,
 19. Meng Li, Dongyang Shi, Lifang Pei. Convergence and superconvergence analysis of finite element methods for the time fractional diffusion equation// Applied Numerical Mathematics, Volume 151, 2020, Pages 141-160,
 20. Dongyang Shi, Huaijun Yang. Superconvergence analysis of finite element method for Poisson–Nernst–Planck equations // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2019, Volume 35, Issue 3, Pages 1206-1223.
 21. Dongyang Shi, Hongbo Guan, Xiaofei Guan. Superconvergence Analysis of Finite Element Method for a Second-Type Variational Inequality// Journal of Applied Mathematics Volume 2012, Article ID 156095, 12 pages.