УДК 517.5

Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

НЕРАВЕНСТВО ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ДРОБНО–ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОЛИНОМОВ В L_0

Исследование решений интегральных уравнений со степенно–логарифмическими ядрами, а также задачи, связанные с рядами Фурье суммируемых функций привели к появлению дробно-логарифмических производных и интегралов. В данной статье рассматриваются дробно-логарифмические производные алгебраических и тригонометрических полиномов. Особое внимание уделяется случаю, когда в определении дробно-логарифмической производной степенной множитель равен единице. В работе установлены неравенства типа Бернштейна для чисто-логарифмических производных алгебраических и тригонометрических полиномов в пространстве L_0. При этом тригонометрический случай получен при помощи алгебраического.
MSC: 33C50, 33C52, 42B15, 42C10.
Ключевые слова: мера полинома по Маллеру, дробно–логарифмическая производная, неравенство типа Бернштейна.

Введение. Возросший интерес к интегродифференцированию дробного порядка привел ко всевозможным обобщениям понятия дробной производной и интеграла для различных классов функций и операторов. В определениях наряду со степенными множителями возникли и логарифмические.

Появлению дробно-логарифмических производных и интегралов способствовали исследования решений интегральных уравнений со степенно–логарифмическими ядрами, а также задачи, связанные с рядами Фурье суммируемых функций. С подробной информацией по этой тематике можно познакомиться в монографии Самко, Килбаса и Маричева [1].

В данной статье рассматриваются дробно-логарифмические производные алгебраических и тригонометрических полиномов. Наше внимание привлек случай, когда в определении дробно-логарифмической производной степенной множитель равен единице. Доказаны неравенства типа Бернштейна в пространстве L_0.

Основные результаты

1. Алгебраические полиномы. Пусть $P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ — алгебраический полином степени n с комплексными коэффициентами.

Определение 1. *Дробно-логарифмической производной порядка $\beta \geqslant 0$ полинома $P_n(z)$ назовем полином*

$$J^\beta P_n(z) = \sum_{k=1}^n c_k \ln^\beta(k+1) z^k; \quad J^1 P_n(z) \equiv J P_n(z).$$

Как обычно,

$$\|P_n\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P_n(e^{i\varphi})| d\varphi\right).$$

Величину $\|P_n\|_0$ (по Малеру) часто называют мерой полинома $P_n(z)$.

Получена 06.06.2015 © Стороженко Э. А., Коваленко Л. Г., 2015

Теорема 1. *Для любого полинома $P_n(z)$ и его дробно-логарифмической производной первого порядка выполняется неравенство*

$$\|JP_n\|_0 \leqslant A(n)\|P_n\|_0, \quad \textit{где } A(n) \leqslant 2,9(1,4)^n \ln^{2/3} n. \tag{1}$$

Доказательство теоремы опирается на некоторые вспомогательные факты; приведем их.

Говорят, что полиномы

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k, \quad Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k z^k \quad \text{и} \quad R_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k z^k$$

образуют композицию (по Сеге), если для всех $k = 0, 1, \ldots, n$ выполняется равенство $b_k = a_k d_k$ и обозначают: $Q_n(z) = P_n(z) \otimes R_n(z)$.

Соотношение между мерами $\|Q_n(z)\|_0$, $\|P_n(z)\|_0$ и $\|R_n(z)\|_0$ следует из одного замечательного неравенства Арестова [2]:

$$\|Q_n\|_0 \leqslant \|P_n\|_0 \|R_n\|_0. \tag{2}$$

Далее, для логарифмического множителя в определении производной полезным оказался интеграл

$$\int_0^1 (1 - t^k) \frac{dt}{\ln(1/t)} = \ln(k+1), \tag{3}$$

который вытекает, например, из более общего интеграла (см. [3], стр. 788 при $\alpha = 1$, $\beta = k$) .

В процессе доказательства будут использованы также простые неравенства для отличных от нуля комплексных чисел:

$$|a^n - b^n| \leqslant |a - b| \sum_{k=0}^{n-1} |a|^{n-k-1} |b|^k \tag{4}$$

и

$$|a^n - b^n| \leqslant |a - b| \frac{|a|^n - |b|^n}{|a| - |b|}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1. Полиномы $P_n(z)$ и $JP_n(z)$ запишем в виде, как этого требует композиция:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k, \quad JP_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k \ln(k+1) z^k.$$

Тогда $JP_n(z) = P_n(z) \otimes R_n(z)$, где $R_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ln(k+1) z^k$ и, в силу соотношения (2), доказательство теоремы 1 сводится к оценке коэффициента $\|R_n\|_0$. Для этого запишем $R_n(z)$ с помощью интеграла (3):

$$R_n(z) = \int_0^1 \left[(1+z)^n - (1+tz)^n\right] \frac{dt}{\ln(1/t)}. \tag{6}$$

Дальнейшие рассуждения проведем в два приема: сначала при $|1+z|>1$, а затем при $|1+z|<1$. Так как мера $\|R_n\|_0$ определяется значениями полинома R_n на единичной окружности, оценки будем проводить, считая $z=e^{i\varphi}$, $\varphi\in(-\pi,\pi)$.

Итак, пусть $|1+z|>1$. На основании (5),

$$|(1+z)^n-(1+tz)^n|\leqslant(1-t)\frac{|1+z|^n-|1+tz|^n}{|1+z|-|1+tz|}\leqslant$$

$$\leqslant 2(1-t)\frac{|1+z|^n-|1+tz|^n}{|1+z|^2-|1+tz|^2}. \tag{7}$$

Для любого $t\in(0,1)$

$$|1+tz|^2=|1+z|^2t+(1-t)^2 \quad \text{и} \quad |1+z|^n-|1+tz|^n\leqslant|1+z|^n(1-t^{n/2}),$$

$$|1+z|^2-|1+tz|^2=(1-t)(|1+z|^2-1+t)>(1-t)(|1+z|^2-1).$$

Следовательно, из (6) и (7) получаем:

$$|R_n(z)|\leqslant\frac{2}{|1+z|^2-1}|1+z|^n\int_0^1(1-t^{n/2})\frac{dt}{\ln(1/t)}=$$

$$=\frac{2}{|1+z|^2-1}|1+z|^n\ln(n/2+1). \tag{8}$$

Если же $|1+z|<1$, применим неравенство (4):

$$|(1+z)^n-(1+tz)^n|<(1-t)\sum_{k=0}^{n-1}|1+z|^{n-k-1}|1+tz|^k.$$

Отсюда и из (6) имеем:

$$|R_n(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|1+z|^{n-k-1}\int_0^1(1-t)|1+tz|^k\frac{dt}{\ln(1/t)}.$$

Далее учтем, что $(1-t)/\ln(1/t)\leqslant1$ на $(0,1)$, а для функции $|1+tz|^2$, как функции от t, справедливы оценки:

$$|1+tz|^2=|1+z|^2t+(1-t)^2<1-t+t^2<1-t/2, \quad t\in(0,1/2)$$

и

$$|1+tz|^2<t+(1-t)/2=(1+t)/2, \quad t\in(1/2,1).$$

Поэтому

$$|R_n(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|1+z|^{n-k-1}\left(\int_0^{1/2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{k/2}dt+\int_{1/2}^1\left(\frac{1+t}{2}\right)^{k/2}dt\right)\leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|1+z|^{n-k-1}}{k/2+1}\leqslant 4\frac{1-|1+z|^n}{1-|1+z|}. \tag{9}$$

Теперь, используя неравенства (8) и (9), оценим $\|R_n\|_0$: $\|R_n\|_0 =$

$$= \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|R_n(e^{i\varphi})|d\varphi\right) \leqslant (4\ln n)^{\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi - \right.$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left|1-2\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln\left(1+2\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi +$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \ln\left(1-2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi\right) \leqslant (4\ln n)^{\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(2\cos\varphi)d\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|1-2\cos\varphi|d\varphi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\bigl(1+2\cos\varphi\bigr)d\varphi\right).$$

Полученные интегралы выразим посредством функции Лобачевского и воспользуемся ее табличными значениями (см. [4]): $L(x) = -\int_0^x \ln\cos x dx$,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/3} \ln(2\cos\varphi)d\varphi = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{\pi}L(\pi/3) \approx 0,323,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln|1-2\cos\varphi|d\varphi = \frac{4}{\pi}\left(L\left(\frac{\pi}{12}\right) + L\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) - 2\ln 2 \approx -0,777,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/3} \ln\bigl(1+2\cos\varphi\bigr)d\varphi = \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{4}{\pi}L\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0,646.$$

Окончательно, $\|R_n\|_0 \leqslant 2,9(1,4)^n \ln^{2/3} n$.

Теорема 1 доказана.

Замечание. *Возникает вопрос относительно окончательности теоремы 1. Нам не удалось построить пример полинома, для которого в неравенстве (1) достигается знак равенства. Приведем лишь рассуждения о необходимости наибольшего по порядку множителя $(1,4)^n$ в (1).*

Сначала заметим, что для производной нулевого порядка $J^0P_n(z)$ (по определению, $J^0P_n(z) = P_n(z) - P_n(0)$) на основании теоремы 1 из работы [5] с последующим применением неравенства Бернштейна следует неравенство

$$\|J^0P_n\|_0 \leqslant B(n)\|P_n\|_0, \quad \text{где } B(n) = \frac{1}{n}\prod_{k=n/6}^{5n/6} 2\sin\frac{\pi k}{n} \approx (1,4)^n$$

и постоянная $B(n)$ – точная.

Обратим также внимание на то, что множитель $(1,4)^n$ появляется в аналогичных неравенствах для дробных интегралов (см. [6]). Возможно, его наличие связано с порядком множителя в определении дробной производной и в случае, когда его рост меньше степенного (например, как у нас — логарифмический) как раз и возникает $(1,4)^n$.

Любопытно, что для «дробно–показательных» производных

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^k z^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{-k} z^k, \quad q > 1$$

точными постоянными в неравенствах типа Бернштейна будут q^n *и* 1.

2. Тригонометрические полиномы. Пусть $T_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi}$ — тригонометрический полином с комплексными коэффициентами.

Определение 2. *Дробно-логарифмической производной порядка* $\beta \geqslant 0$ *полинома* $T_n(z)$ *назовем полином*

$$J^\beta T_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \ln^\beta(|k|+1) e^{ik\varphi}; \quad J^1 T_n \equiv J T_n.$$

По определению,

$$\|T_n\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|T_n(\varphi)| d\varphi\right).$$

Как и для алгебраических полиномов, нас интересует неравенство типа Бернштейна и мы покажем, что справедлива

Теорема 2. *Для любого тригонометрического полинома* $T_n(\varphi)$ *и его дробно-логарифмической производной первого порядка справедливо неравенство*

$$\|JT_n\|_0 \leqslant C(n)\|T_n\|_0, \quad \text{где } C(n) \leqslant 2A(1,n) C_{2n}^{n-1}.$$

При доказательстве теоремы 2 нам понадобится теорема Энестрема-Какейя и частный случай формулы Йенсена.

Теорема (Энестрем-Какейя). [7] *Если* $P_n(z)$ — *алгебраический полином с невозрастающими коэффициентами* $c_0 \geqslant c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_n > 0$, *то все нули* P_n *лежат вне открытого единичного круга.*

В частном случае формулы Йенсена (см., напр., [8], отд. III, задача 175) для полиномов

$$\|P_n\|_0 = |c_n| \prod_{k=1}^{n} \max(1, |z_k|), \quad \text{где } z_1, \ldots, z_n \text{ – нули полинома } P_n(z). \quad (10)$$

Доказательство теоремы 2. Благодаря представлению

$$T_n(\varphi) = e^{-in\varphi} P_{2n}(e^{i\varphi}),$$

где $P_{2n}(z)$ — алгебраический полином степени $2n$, идеей доказательства теоремы 2 является сведение к алгебраическим полиномам и применение теоремы 1.

Составим композицию алгебраическим полиномам, которые соответствуют тригонометрическим полиномам $T_n(\varphi)$ и $JT_n(\varphi)$. Пусть

$$T_n(\varphi) = e^{-in\varphi}P_{2n}(e^{i\varphi}), \qquad \text{где } P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k z^k.$$

Тогда $T_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k e^{i(k-n)\varphi}$ и

$$JT_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k \ln(|k-n|+1)e^{i(k-n)\varphi} =$$

$$= e^{-in\varphi}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k \ln(|k-n|+1)e^{ik\varphi} = e^{-in\varphi}Q_{2n}(e^{i\varphi}),$$

где $Q_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k \ln(|k-n|+1)z^k$.

Полиномы $Q_{2n}(z)$, $P_{2n}(z)$ и

$$R_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \ln(|k-n|+1)z^k \tag{11}$$

образуют композицию, т.е. $Q_{2n}(z) = P_{2n}(z) \otimes R_{2n}(z)$ и, согласно (2), имеет место неравенство $\|Q_{2n}\|_0 \leqslant \|P_{2n}\|_0\|R_{2n}\|_0$. Если заметить, что

$$\|Q_{2n}\|_0 = \|JT_n\|_0, \quad \text{а} \quad \|P_{2n}\|_0 = \|T_n\|_0,$$

то приходим к неравенству $\|JT_n\|_0 \leqslant \|R_{2n}\|_0\|T_n\|_0$, где $\|R_{2n}\|_0 = C(n)$ – искомая постоянная.

Займемся оценкой $\|R_{2n}\|_0$. В силу равенства (11),

$$R_{2n}(e^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1)e^{ik\varphi} + \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k \ln(k-n+1)e^{ik\varphi} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1)\left(e^{ik\varphi} + e^{i(2n-k)\varphi}\right)$$

и тогда

$$e^{-in\varphi}R_{2n}(e^{i\varphi}) = 2\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1)\cos(n-k)\varphi =$$

$$= 2Re\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1)e^{i(n-k)\varphi}\right).$$

Следовательно,

$$|R_{2n}(e^{i\varphi})| \leqslant 2\Big|\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1)e^{i(n-k)\varphi}\Big|$$

и

$$\|R_{2n}\|_0 \leqslant 2\Big\|\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1)z^{n-k}\Big\|_0. \tag{12}$$

Неравенство (12) можно записать как

$$\|R_{2n}\|_0 \leqslant 2\|JV_n\|_0,$$

где $V_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} z^k$ — алгебраический полином и, по теореме 1,

$$\|R_{2n}\|_0 \leqslant 2A(n)\|V_n\|_0. \tag{13}$$

Остается найти меру $\|V_n\|_0$. Для полинома $z^{-n}V_n(z)$ выполняются условия теоремы Энестрема-Какейя и тогда, по формуле (10), $\|L_n\|_0 = C_{2n}^{n-1}$. Отсюда и из (13) получаем: $\|R_{2n}\|_0 \leqslant 2A(1,n)C_{2n}^{n-1}$.

Теорема 2 доказана.

Заключение. В работе установлены неравенства типа Бернштейна для чисто-логарифмических производных алгебраических и тригонометрических полиномов в пространстве L_0. Тригонометрический случай получен при помощи алгебраического.

Ссылки

1. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко , А. А. Килбас , О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. **Арестов В. В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных / В. В. Арестов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1981. – Т. 45. – С. 3–22.
3. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. / Г. М. Фихтенгольц. Т.II. – М.: Физматлит, 2001. – 810 с.
4. **Грандштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм и произведений / И. С. Грандштейн, И. М. Рыжик. – М.: ГИТТЛ, 1963. – 1100 с.
5. **Стороженко Э. А.** К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной / Э. А. Стороженко // Матем. сборник. – 1996. – Т. 187, № 5. – С. 111–120.
6. **Стороженко Э. А.** Неравенство для дробных интегралов комплексных полиномов в L_0 / Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко // Матем. зам. – 2014. – Т. 96, № 4. – С. 633–636.
7. **Borwein P.** Polynomials and polynomial inequalities / P. Borwein, T. Erdelyi. – N.–Y.: Springer-Verlag, 1995. – 482 c.
8. **Полиа Г.** Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сеге. Т. I – М.: Наука, 1978. – 391 с.

Стороженко Е. О., Коваленко Л. Г.
Нерівність типу Бернштейна для дробово–логарифмічних похідних поліномів в L_0

Резюме

Дослідження розв'язків інтегральних рівнянь з степенево-логаріфмічними ядрами, а також задачі, пов'язані з рядами Фур'є для сумованих функцій, привели до появи дробово-логаріфмічних похідних та інтегралів. В цій статті розглядаються дробово-логаріфмічні похідні алгебраїчних та тригонометричних поліномів. Особлива увага приділяється випадку, коли в означенні дробово-логаріфмічної похідної степеневий множник дорівнює одиниці. В роботі встановлені нерівності типу Бернштейна для чисто-логарифмічних похідних алгебраїчних та тригонометричних поліномів у просторі L_0. Тригонометричний випадок отримано за допомогою алгебраїчного.
Ключові слова: міра поліному за Малером, дробово–логарифмічна похідна, нерівність типу Бернштейна.

Storozhenko E. A., Kovalenko L. G.
A Bernstein type inequality for fractional logarithmic derivatives of polynomials in L_0

Summary

The study of integral equations with power-laws-logarithmically kernels, as well as problems related to the Fourier series of integrable functions led to fractional-logarithmic derivatives and integrals. In this paper fractional algebraic and logarithmic derivatives of trigonometric polynomials are discussed. Special attention was given to the case when power-degree multiplier in definition of fractional-logarithmic derivative is equal to 1. We establish Bernstein type inequalities for pure logarithmic derivatives of algebraic and trigonometric polynomials in space L_0. A trigonometric case obtained from the algebraic case.
Key words: Mahler's measure of a polynomial, a fractional logarithmic derivative, a Bernstein type inequality.

References

1. Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnoho poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional integrals and derivatives with some applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika, 688 p.
2. Arestov, V. V. (1981). Ob integralnykh neravenstvakh dlya trigonometricheskikh polinomov i ikh proizvodnykh [About integral inequalities for trigonometrical polynomials and theirs derivatives]. *Izv. AN USSR. Ser. matem.*, Vol. 45, P. 3–22.
3. Fikhtengolz, G. M. (2001). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. II.* Moscow: Fizmatlit, 810 p.
4. Gradshtein, I. S., Ryzhyk, I. M. (1963). *Tablitsy sntegralov, sum i proizvedeniy [Tables of integrals, sums and derivatives]*. Moscow: GITTL, 1100 p.
5. Storozhenko, E. A. (1996). K odnoi zadache Malera o nulyakh polinoma i ego proizvodnoy [For one Mahler's prooblem about zeros of polinomial and its derivative]. *Matem. sbornik*, Vol. 187, №5, P. 111–120.

6. Storozhenko, E. A., Kovakenko, L. G. (2014). Neravenstvo dlya drobnykh integralov kompleksnykh polinomov v L_0 [An inequality for fractional order integrals of complex-valued polynomials in $_0$]. *Matem. zapiski*, Vol. 96, №4. – P. 633–636.
7. Borwein, P., Erdelyi, T. (1995). *Polynomials and polynomial inequalities* New York: Springer-Verlag, 482 p.
8. Polia, G., Sege, G. (1978). *Zadachi i teoremy iz analiza [Problems and theorems from calculus], Vol I.* Moscow: Nauka, 391 p.