

Н. Д. Вайсфельд*, В. Г. Попов**

*Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

**Одесская государственная морская академия

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ НА КРУГОВОМ УПРУГОМ ВКЛЮЧЕНИИ, РАСПОЛОЖЕННОМ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Розглянуто задачу про дифракцію плоскої гармоничної хвилі Релея на круговому пружному включенні, що розташоване в пружній півплощині. Метод розв'язання базується на застосуванні розривних розв'язків [1] рівнянь Ламе, що описують коливання пружного середовища в умовах плоскої деформації та побудовані у роботі. Проведене чисельне дослідження пружного стану у області взаємодії включення з пружним середовищем.

Рассмотрена задача о дифракции плоской гармонической волны Релея на круговом упругом включении, находящемся в упругой полуплоскости. Метод решения основан на применении разрывных решений [1] уравнений Ламе, описывающих колебания упругой среды в условиях плоской деформации и построенных в работе. Проведено численное исследование напряженного состояния в области взаимодействия включения с упругой средой.

The problem on plane harmonic Rayleigh wave diffraction on the circular elastic inclusion which is situated in the elastic halfplane is considered. The solving method is based on the using of discontinuous solutions [1] of Lamé equations. The last ones describe the vibration of elastic medium in condition of plane deformation and are constructed in this paper. The researching of stress state in the area of inclusion contact with elastic medium is worked up.

Введение. Рассмотрена задача о дифракции плоской гармонической волны Релея на круговом упругом включении, находящемся в упругой полуплоскости. Метод решения основан на применении разрывных решений [1] уравнений Ламе, описывающих колебания упругой среды в условиях плоской деформации и построенных в работе. Общее поле перемещений в полуплоскости представляется в виде суперпозиции двух таких решений. Первое терпит разрывы с некоторыми скачками на границе полуплоскости, второе – на границе включения. В результате задача сводится к бесконечной системе линейных уравнений, решив которую можно определить скачки, входящие в разрывные решения. Проведено численное исследование напряженного состояния в области взаимодействия включения с окружающей средой.

1. Разрывные решения уравнений колебаний упругих тел с разрывами, сосредоточенными на отрезке. Рассмотрим задачу о построении решений уравнений Ламе u и v , описывающих колебания упругой среды в условиях плоской деформации и таких, что на отрезке $x \in [-a, a]$, $y = 0$ перемещения и напряжения терпят разрывы со скачками:

$$\langle \sigma_y \rangle = X_1(x), \langle \tau_{yx} \rangle = X_2(x), \langle v \rangle = X_3(x), \langle u \rangle = X_4(x). \quad (1.1)$$

В (1.1) принято обозначение $\langle f(x, y) \rangle = f(x, +0) - f(x, -0)$. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ (ω – частота колебаний) здесь и далее опущен. Перемещения u и v должны удовлетворять условиям излучения. Представим перемещения и напряжения через потенциалы продольных и поперечных волн [2], удовлетворяющих уравнению Гельмгольца. Решим вспомогательную задачу о построении разрывного решения этого уравнения, терпящего при $y = 0, |x| \leq a$ разрывы со скачками:

$$\langle \varphi_j \rangle = g_j(x), \langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \rangle = p_j(x), j = 1, 2. \quad (1.2)$$

Это разрывное решение может быть получено применением интегрального преобразования Фурье по обобщенной схеме метода интегральных преобразований [1] и имеет вид:

$$\varphi_j(x, y) = \int_{-a}^a p_j(\eta) r_j(\eta - x, y) d\eta + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a g_j(\eta) r_j(\eta - x, y) d\eta, \quad (1.3)$$

где

$$r_j(\eta - x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_j(\alpha)|y|}}{2\gamma_j(\alpha)} e^{i\alpha(\eta-x)} d\alpha = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_j \sqrt{(\eta-x)^2 + y^2} \right),$$

$$\gamma_j(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2}, \quad \kappa_j = \frac{\omega}{c_j}, \quad j = 1, 2. \quad (1.4)$$

Здесь c_1, c_2 – скорости распространения продольных и поперечных волн в упругой среде. Выбор ветви многозначных функций $\gamma_j(\alpha)$ определяется выполнением условий излучения для $\varphi_j(x, y)$ и осуществляется следующим образом:

$$|\alpha| > \kappa_j \Rightarrow \gamma_j = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2}, \quad |\alpha| < \kappa_j \Rightarrow \gamma_j = -i\sqrt{\kappa_j^2 - \alpha^2}. \quad (1.5)$$

Пусть потенциалы $\varphi_j(x, y)$ представлены в виде (1.3). Определим $g_j(x), p_j(x)$ ($j = 1, 2$) так, чтобы выполнялись равенства (1.2). Решим полученную систему относительно неизвестных скачков и подставим найденные выражения в (1.3). После чего по формулам связи смещений и напряжений с волновыми потенциалами [2] получим искомое разрывное решение со скачками (1.1):

$$T(x, y) = \int_{-a}^a F(\eta - x, y) Z(\eta) d\eta, \quad (1.6)$$

$T(x, y) = [t_j(x, y)] = [\sigma_j, \tau_{jx}, v, u]', Z(x) = [X_j(x)], j = 1, 4$, а F – функциональная матрица 4-го порядка, элементы которой выражаются через функции $r_j(x, y), j = 1, 2$.

2. Разрывные решения уравнений гармонических колебаний упругих тел в полярных координатах. Рассмотрим задачу о построении разрывных решений уравнений Ламе, описывающих колебания упругих тел, терпящих разрывы, сосредоточенные на дуге окружности $r = R_0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha$ со скачками:

$$[\sigma_{rr}] = \psi_1(\theta), [\sigma_{r\theta}] = \psi_2(\theta), [u_r] = \psi_3(\theta), [u_\theta] = \psi_4(\theta). \quad (2.1)$$

В (2.1) приняты обозначения: $[f(r, \theta)] = f(R_0 + 0, \theta) - f(R_0 - 0, \theta)$. Перемещения и напряжения в полярных координатах представим через потенциалы продольных и поперечных волн [3], удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца в полярных координатах. Найдем решения этих уравнений со скачками:

$$[\varphi_j] = m_j(\theta), \quad \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right] = q_j(\theta), \quad j = 1, 2.$$

В случае $m_j = 0$ такое решение построено в [4]. Поступая аналогичным образом, находим:

$$\varphi_j(r, \theta) = -\frac{iR_0}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k^{(j)} h_k^{(j)}(r) e^{-ik\theta} + \frac{iR_0}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k^{(j)} g_k^{(j)}(r) e^{-ik\theta}, \quad (2.2)$$

где

$$h_k^{(j)} = \begin{cases} H_k(\kappa_j R_0) J_k(\kappa_j r), & 0 < r < R_0 \\ H_k(\kappa_j r) J_k(\kappa_j R_0), & r > R_0 \end{cases}, \quad g_k^{(j)} = \begin{cases} H'_k(\kappa_j R_0) J_k(\kappa_j r), & 0 < r < R_0 \\ H_k(\kappa_j r) J'_k(\kappa_j R_0), & r > R_0 \end{cases},$$

$H_k(x) = H_k^{(1)}(x)$, $H_k^{(1)}(x)$ – функции Ханкеля первого рода. Подставив (2.2) в формулы связи волновых потенциалов с перемещениями и напряжениями и решив полученную систему, определим искомое разрывное решение со скачками (2.1):

$$S(r, \theta) = \frac{i}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\theta} A_k(r) \psi_k, \quad (2.3)$$

где введены в рассмотрение вектора: $S(r, \theta) = [S_j(r, \theta)] = [\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, u_r, u_\theta]'$, $\psi = [\psi_j]$,

$j = \overline{1, 4}$, компоненты которого определяются так $\psi_k = [\psi_{jk}] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\theta) e^{ik\theta} d\theta$, $j = \overline{1, 4}$, а

матрица $A_k(r) = [a_{lj}^k(r)]$, $l, j = \overline{1, 4}$ – матрица 4-го порядка, элементы которой выражаются через функции $g_k^{(j)}(r)$, $h_k^{(j)}(r)$.

3. Задача о дифракции плоской гармонической волны Релея на круговом упругом включении, расположенном в упругой полуплоскости. Построенные разрывные решения могут быть применены при решении задач дифракции на телах, границы которых совпадают с координатными линиями. Метод, основанный на использовании разрывных решений, проиллюстрируем на следующей задаче.

Пусть в упругой полуплоскости $y \geq 0$, $-\infty < x < \infty$, граница которой свободна от напряжений

$$\sigma_y(x, +0) = \tau_{xy}(x, +0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1)$$

содержится круговое упругое включение радиуса R_0 с центром в точке $y = H$, $x = 0$. Вдоль положительного направления оси x распространяется поверхностная волна Релея, вызывающая в плоскости перемещения:

$$u_R = c e^{i\kappa_R x} \left(e^{-\kappa_{21} g_1 y} - \frac{\mu_R g_2}{\xi_R} e^{-\kappa_{21} g_2 y} \right), \quad v_R = i c e^{i\kappa_R x} \left(\frac{g_1}{\xi_R} e^{-\kappa_{21} g_1 y} - \mu_R e^{-\kappa_{21} g_2 y} \right) \quad (3.2)$$

$$g_2 = \sqrt{\xi_R^2 - 1}, \quad g_1 = \sqrt{\xi_R^2 - \xi^2}, \quad \xi = \frac{c_{21}}{c_{11}}, \quad c_{11}^2 = \frac{\rho}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad c_{21}^2 = \frac{\rho}{\mu_1}, \quad \xi_R = \frac{c_{21}}{R}, \quad \kappa_{21} = \frac{\omega}{c_{21}}.$$

Здесь c_{11}, c_{21}, c_R – скорости распространения продольных, поперечных и поверхностных волн Релея в среде, составляющей плоскость, ρ, μ_1, λ_1 – плотность и упругие постоянные этой среды. На границе включения и среды предполагаются выполненными условия полного сцепления:

$$\sigma_r(R_0 + 0, \theta) = \sigma_r(R_0 - 0, \theta), \quad \tau_{r\theta}(R_0 + 0, \theta) = \tau_{r\theta}(R_0 - 0, \theta), \quad (3.3)$$

$$u_r(R_0 + 0, \theta) = u_r(R_0 - 0, \theta), \quad u_\theta(R_0 + 0, \theta) = u_\theta(R_0 - 0, \theta),$$

где перемещения и напряжения рассматриваются в полярной системе координат, центр которой совпадает с центром включения. Требуется определить волновое поле отраженной волны и волновое поле внутри включения.

Пусть вектор $T^0(x, y) = [t_j^0(x, y)] = [\sigma_y^0, \sigma_x^0, v^0, u^0]'$, $j = \overline{1, 4}$ — разрывное решение со скачками (1.1), построенное для упругой среды, заполняющей плоскость, полученное по формулам (1.6) при подстановке $\mu = \mu_1$, $\kappa_1 = \kappa_{11}$, $\kappa_2 = \kappa_{21}$, $a \rightarrow \infty$. Этим вектором

представим поле перемещений и напряжений, вызванных волнами, отраженными от границы полуплоскости. По формулам (2.3) строим разрывные решения $S^\pm(r, \theta) = [S_j^\pm(r, \theta)] = [\sigma_r^\pm, \sigma_{r\theta}^\pm, u_r^\pm, u_\theta^\pm]'$, $j = \overline{1, 4}$ со скачками $\psi_j^\pm$ при $r = R_0$. Знак «+» означает, что решение построено для внешней среды и в формулах (2.3) надо положить $\psi_{jk} = \psi_{jk}^+, \mu = \mu_1, \kappa_1 = \kappa_{11}, \kappa_2 = \kappa_{21}$. Полученную при этом матрицу обозначим $A_k(r) = A_k^+(r) = [a_{lj}^{+k}], l, j = \overline{1, 4}$. Вектором S^+ представим поле перемещений и напряжений, вызванных волной, отраженной от включения. Знак «-» означает, что решение построено для среды, составляющей включение и в (2.3) принимаем $\psi_{jk} = \psi_{jk}^-, \mu = \mu_2, \kappa_1 = \kappa_{12}, \kappa_2 = \kappa_{22}$, $A_k(r) = A_k^-(r) = [a_{lj}^{-k}], l, j = \overline{1, 4}$. При помощи вектора S^- выразим волновое поле внутри включения. Введем так же в рассмотрение вектора:

$$T^+(x, y) = [t_j^+(x, y)] = [\sigma_y^+, \sigma_x^+, v^+, u^+]', T^R(x, y) = [t_j^R(x, y)] = [\sigma_y^R, \sigma_x^R, v^R, u^R]',$$

$$S^R(r, \theta) = [S_j^R(r, \theta)] = [\sigma_r^R, \sigma_{r\theta}^R, u_r^R, u_\theta^R]', S^0(r, \theta) = [S_j^0(r, \theta)] = [\sigma_r^0, \sigma_{r\theta}^0, u_r^0, u_\theta^0]'$$

Вектор T^+ есть представление вектора S^+ в декартовой системе координат, компонентами вектора T^R являются напряжения и перемещения, вызванные распространяющейся волной Релея (3.2). S^R и S^0 – представления векторов T^R и T^0 в полярной системе координат, связанной с включением. Теперь поле перемещений и напряжений вне включения в декартовой системе координат может быть представлено в виде:

$$T = T^0 + T^R + T^+ \quad (3.4)$$

или в полярной системе координат

$$S = S^0 + S^R + S^+ \quad (3.5)$$

Волновое поле внутри включения представим в виде

$$S = S^- \quad (3.6)$$

Тогда при помощи (3.4)–(3.6) граничные условия (3.1), (3.3) можно представить в виде:

$$t_j^0(x, +0) + t_j^+(x, +0) = 0, j = \overline{1, 2} \quad (3.7)$$

$$S^0 + S^R + S^+ \Big|_{r=R_0+0} = S^- \Big|_{r=R_0-0} \quad (3.8)$$

Условия (3.7), (3.8) содержат 6 уравнений для определения 12 неизвестных скачков: $X_j(x), \psi_j^\pm(x), j = \overline{1, 4}$. Поэтому для однозначного определения всех скачков необходимо привлечь дополнительные условия. Они могут быть получены из следующих соображений. Так как решение ищется только в области $y > 0$, потребуем, чтобы вектор T^0 равнялся 0 при $y < 0$. Тогда $\langle T^0 \rangle = T^0(x, +0) - T^0(x, -0) = T^0(x, +0)$. Но с другой стороны, согласно (1.1), (1.6) $\langle T^0 \rangle = Z, Z = [X_j(x)], j = \overline{1, 4}$. Откуда следует, что

$$T^0(x, +0) = Z, \quad -\infty < x < \infty \quad (3.9)$$

Применим к (3.8) преобразование Фурье и, воспользовавшись теоремой о свертке, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$K(\alpha)\bar{Z}(\alpha) = 0, \quad Z(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x)e^{i\alpha x} dx, \quad (3.10)$$

где $K(\alpha)$ – матрица с элементами, выраженными через Фурье-преобразования функций $F_{ij}(x, +0)$ (см. 1.6) и $\bar{Z}(\alpha) = [\bar{X}_j(\alpha)]$ – вектор Фурье преобразований от функций $X_j(x)$, $j = \overline{1, 4}$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $\det K(\alpha) = 0$ и решение системы (3.10) имеет вид:

$$\bar{X}_3(\alpha) = \frac{(-i\alpha)B(\alpha)}{R(\alpha)} \frac{\bar{X}_1(\alpha)}{\mu} + \frac{\kappa_{21}^2 \gamma_2}{R(\alpha)} \frac{\bar{X}_2(\alpha)}{\mu}, \bar{X}_4(\alpha) = \frac{\kappa_{21}^2 \gamma_1}{R(\alpha)} \frac{\bar{X}_1(\alpha)}{\mu} - \frac{(-i\alpha)B(\alpha)}{R(\alpha)} \frac{\bar{X}_2(\alpha)}{\mu}, \quad (3.11)$$

где

$$R(\alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_{21}^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2, B(\alpha) = 2\alpha^2 - \kappa_{21}^2 - 2\gamma_1 \gamma_2, \gamma_j(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_{j1}^2}, j = \overline{1, 2}.$$

Равенства (3.11) дают возможность выразить компоненты векторов T^0 и S^0 только через 2 неизвестных скачка $X_1(x)$ и $X_2(x)$. Далее, считая, что перемещения и напряжения, вызванные волной, отраженной от включения, внутри самого включения равны нулю:

$$T^+(R_0 - 0, \theta) = 0 \quad (3.12)$$

находим из (2.1), (2.3)

$$T^+(R_0 + 0, \theta) = -\psi^+, \psi^+ = [\psi_j^+], j = \overline{1, 4}. \quad (3.13)$$

Умножив обе части равенства (3.13) на $e^{k\theta}$, $k = 0, \pm 1, \dots$, и выполнив интегрирование по $\theta \in [-\pi, \pi]$ из (3.13) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$P_k \psi_k^+ = 0, \psi_k^+ = [\psi_{jk}^+], j = \overline{1, 4}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.14)$$

где P_k – матрица 4-го порядка, элементы которой выражаются через элементы матрицы A_k^+ при $r = R_0 - 0$. Как и в предыдущем случае, можно доказать, что $\det P_k = 0$ и система (3.14) имеет решение:

$$\psi_{3k}^+ = \Delta_{11}^{+k} \psi_{1k}^+ + \Delta_{12}^{+k} \psi_{2k}^+, \psi_{4k}^+ = \Delta_{21}^{+k} \psi_{1k}^+ + \Delta_{22}^{+k} \psi_{2k}^+. \quad (3.15)$$

Формулы (3.15) позволяют выразить компоненты векторов S^+, T^+ через два неизвестных скачка ψ_1^+, ψ_2^+ . Аналогично, считая, что перемещения и напряжения, определяющие волновое поле внутри включения, вне него обращаются в ноль, найдем, что ψ_{jk}^- также удовлетворяют (3.15), где необходимо поменять «+» на «-» и положить $r = R_0 + 0$. Это, в свою очередь, позволит выразить компоненты вектора T^- через два неизвестных скачка ψ_1^-, ψ_2^- . Оставшиеся шесть скачков $\psi_j^\pm, X_j, j = \overline{1, 2}$ уже могут быть однозначно определены из условий (3.6), (3.7). Из (3.7) с учетом (3.9) находим:

$$X_j(x) = -t_j^+(x, +0), j = \overline{1, 2}. \quad (3.16)$$

Подставляем (3.16) в (1.6) и находим выражения для компонент вектора T^0 через $\psi_{jk}^\pm, j = \overline{1, 2}$. Затем, воспользовавшись формулами для выражения напряжений и перемещений в полярных координатах, через напряжения и перемещения в декартовых координатах, получим для компонент вектора S^0 при $r = R_0 + 0$ следующие формулы:

$$S_j^0(R_0 + 0, \theta) = \frac{i}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik\theta}}{\Delta_k^+} \sum_{m=1}^2 V_{jm}^k \Psi_{mk}^+, j = \overline{1,4}. \quad (3.17)$$

Подставим (3.17) в оставшиеся условия (3.8). Полученные равенства умножим на $e^{in\theta}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и выполним интегрирование по $\theta \in [-\pi, \pi]$. В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно Ψ_{jn}^+ , $j = \overline{1,2}$. Коэффициенты системы явно выражаются через значения элементов матриц a_{lj}^{+k}, a_{lj}^{-k} при $r = R_0 + 0$ и $r = R_0 - 0$ соответственно.

Заключение. Таким образом, определено волновое поле отраженной волны и волновое поле внутри включения.

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические волны и колебания в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наукова думка, 1978. – 308 с.
4. Попов В.Г. Дифракция упругих волн сдвига на дугообразном включении // Динамические системы. – 1983. – Вып. 2. – С.35–41.