

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки і механіки

(повне найменування інституту/факультету)

математичного аналізу

(повна назва кафедри)

Дипломна робота

бакалавра

(освітньо-кваліфікаційний рівень)



на тему: «Про продовження оберненої нерівності Гельдера для
степеневі функції на дійсну вісь»

«On the extension of Reverse Hölder inequality for power function
on real axis»

Виконала: студентка денної форми навчання
напряму підготовки 6.040201 Математика

Шалухіна Аліна Олексіївна

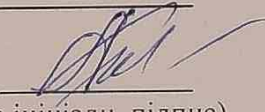
(прізвище, ім'я, по-батькові)

Керівник д.ф.- м.н., проф. Кореновський А.О.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент к.ф.- м.н. Шанін Р.В.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)



Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

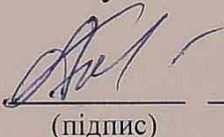
№ 7 від 26.05.2017 р.

Захищено на засіданні ЕК № 7

протокол № д від 12.06.17 р.

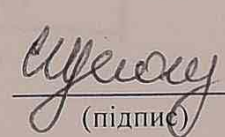
Оцінка вданий. 1 А 100
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри


(підпис)

Кореновський А.О.
(прізвище, ініціали)

Голова ДЕК


(підпис)

Щоголев С.А.
(прізвище, ініціали)

Одеса – 2017

Ш/к 593 765

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНІ ВИКЛАДКИ	5
1.1. Допоміжні твердження	5
1.2. Продовження РНІ для степеневі функції	11
РОЗДІЛ 2. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ	27
Приклад 1 (до випадку А; $\alpha = 1, \beta = 2$)	27
Приклад 2 (до випадку В; $\alpha = -3, \beta = -1$)	30
Приклад 3 (до випадку С; а) $\alpha = -2, \beta = 1$, б) $\alpha = -1, \beta = 1$.)	33
ВИСНОВКИ	36
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	38

ВСТУП

Для невід'ємної на відрізку $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ функції f степеневим середнім порядку $\alpha \neq 0$ будемо називати функціонал

$$M_{I,\alpha}(f) = \left(\frac{1}{|I|} \int_I f^\alpha(x) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (0.1)$$

де $|\cdot|$ – міра Лебега, а середнім геометричним – величину ([2, с. 174])

$$M_{I,0}(f) = \exp \left(\frac{1}{|I|} \int_I \ln f(x) dx \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} M_{I,\alpha}(f). \quad (0.2)$$

Визначені таким чином степеневі середні $M_{I,\alpha}$ зростають разом із α ([2, с. 175]). Згідно з нерівністю Гельдера, на відрізку I для $\alpha < \beta$ і функції f виконується нерівність

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I f^\alpha(x) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I f^\beta(x) dx \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

У даній роботі вивчаються функції, що задовольняють обернену нерівність Гельдера (RHI – Reverse Hölder Inequality)

$$P_{\alpha,\beta}(f) \equiv \sup_{I \subset \mathbb{R}_+} \frac{M_{I,\beta}(f)}{M_{I,\alpha}(f)} < +\infty \quad (0.3)$$

та здійснюється спроба розв'язати задачу продовження цієї нерівності на дійсну вісь (для степеневих функцій f), тобто порівняння показників $P_{\alpha,\beta}(f)$ і

$$R_{\alpha,\beta}(\bar{f}) \equiv \sup_{I \subset \mathbb{R}} \frac{M_{I,\beta}(\bar{f})}{M_{I,\alpha}(\bar{f})}, \quad (0.4)$$

де $\bar{f}$ – парне продовження функції f на дійсну вісь.

У даній роботі показано, що для всіх степеневих функцій $R_{\alpha,\beta}(\bar{f}) > P_{\alpha,\beta}(f)$. Основна задача дослідження полягає в тому, щоб у класі степеневих функцій оцінити точну верхню межу відношення цих показників як міру їхньої відмінності, що виражається сталою $C_{\alpha,\beta}$ такою, що

$$\frac{R_{\alpha,\beta}}{P_{\alpha,\beta}} = \sup_{f(x)=x^\gamma} \frac{R_{\alpha,\beta}(\bar{f})}{P_{\alpha,\beta}(f)} = C_{\alpha,\beta}.$$

Результати, отримані в окремому випадку для степеневих функцій, можуть бути корисними у розв'язанні аналогічної задачі вже у множині довільних невід'ємних монотонних на $(0; +\infty)$ функцій (не тільки степеневих). Зрозуміло, що стала $C_{\alpha, \beta}$, яка характеризує при фіксованих α, β максимальне значення зміни показника відношення середніх за умови парного продовження степеневих функцій на дійсну вісь, є оцінкою знизу для значення аналогічного показника для довільних невід'ємних монотонних на $(0; +\infty)$ функцій.

Класи функцій, що задовольняють обернену нерівність Гельдера за різних фіксованих значень параметрів α и β , складають основу сучасної теорії вагових просторів. Саме умови такого типу гарантують обмеженість у вагових просторах багатьох класичних операторів теорії функцій (максимального оператора Харді-Літтлвуда, оператора Гільберта тощо). Названі класи функцій застосовуються також при вивченні квазіконформних відображень та в дослідженні поведінки розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновка і списку літератури. У першому розділі спочатку формулюється й доводиться кілька допоміжних фактів, застосування яких у значній мірі облегшує подальші міркування. Потім викладаються основні аналітичні результати дослідження. Другий розділ присвячений "ілюстрації" отриманих у першому розділі результатів за допомогою прикладів та чисельних експериментів, опис яких супроводжується детальними поясненнями, посиланнями на теоретичні факти та констатацією деяких спостережуваних закономірностей, які не вдалося вивести й обґрунтувати аналітично.

ВИСНОВКИ

Таким чином, у данній роботі вивчалось питання про продовження оберненої нерівності Гельдера (0.3) для степеневих функцій з додатної піввісі на дійсні вісь. Були отримані значення сталої $C_{\alpha,\beta}$, що виражає при різних фіксованих значеннях параметрів α, β максимальне значення зміни показників відношення середніх за умови парного продовження функцій вигляду $f(x) = x^\gamma$. Для цього при різних значеннях α, β і γ досліджувалась функція $C_{\alpha,\beta,\gamma}(\varepsilon)$, визначена рівністю (1.21). Максимальним значенням функції $C_{\alpha,\beta,\gamma}(\varepsilon)$ на відрізку $[0; 1]$ є значення сталої $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ (відношення показників $R_{\alpha,\beta}(x^\gamma)$ и $P_{\alpha,\beta}(x^\gamma)$ при додатково зафіксованому значенні γ , тобто для конкретної функції). Знаючи $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ при всіх допустимих значеннях параметра γ , шукану сталу $C_{\alpha,\beta}$ було отримано як точну верхню межу множини $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ по γ . Оскільки знайти точний аналітичний вираз для точки максимуму і максимального значення функції $C_{\alpha,\beta,\gamma}(\varepsilon)$ важко (через значну складність задачі розв'язання рівняння (1.25) навіть у найпростіших випадках), то увагу в роботі було зосереджено на отриманні різних оцінок сталої. Найкращим результатом у цьому напрямку можна вважати нерівність (1.48), яка у випадку $\alpha < 0 < \beta$ перетворюється на рівність, і попередні їй співвідношення (1.33), (1.40), (1.47), які дають точні значення $C_{\alpha,\beta}$ при різних фіксованих α і β .

Отримані в окремому випадку степеневих функцій результати дають змогу вказати деякі прості закономірності аналогічної задачі вже у множині довільних невід'ємних монотонних на $(0; +\infty)$ функцій. Якщо ввести для загальної задачі сталу $A_{\alpha,\beta}$ як аналог $C_{\alpha,\beta}$ у випадку довільної функції, яка задовольняє указаним властивостям, то сам показник $C_{\alpha,\beta}$ буде оцінкою знизу для $A_{\alpha,\beta}$. Крім того, в силу (1.49) $A_{\alpha,\beta} \leq C_{\alpha,\beta}^0$. З огляду на отримане в роботі співвідношення $C_{\alpha,\beta} < C_{\alpha,\beta}^0$, робимо висновок, що значення показника $A_{\alpha,\beta}$ лежить у межах

$$C_{\alpha,\beta} \leq A_{\alpha,\beta} \leq C_{\alpha,\beta}^0,$$

які, однак, ще не дають точного значення сталої $A_{\alpha,\beta}$, при фіксованих α і β , вказуючи лише на проміжок, в якому це значення може міститися. Проте задача знайти точне значення показника $A_{\alpha,\beta}$ в роботі не ставилася; це може бути предметом подальшої роботи в рамках досліджуваної теми.

Крім того, вдається вказати і тривіальну оцінку зверху для $A_{\alpha,\beta}$, а саме, значення $A = \sup_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}$. Оскільки точні вирази для $C_{\alpha,\beta}$ при різних фіксованих α і β залежать від значень α і β та можуть бути зроблені як завгодно великими, то вже для степеневих функцій $\sup_{\alpha,\beta} C_{\alpha,\beta} = +\infty$, звідки негайно витікає, що $A = +\infty$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Кореновский А. А. О точном продолжении обратного неравенства Гёльдера и условия Макенхаупта// Матем. заметки. – 1992. – Т. 52, № 6. – С. 32–44.
- [2] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. – М.-Л.: ИЛ. – 1948. – 456 с.
- [3] Кудрявцев Л. Д. Математический анализ, т. I. Изд. 2, переработанное. Учебник для вузов/ Л. Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1973.
- [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа/ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: “Наука”, 1972.