Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 91–99

УДК 510.57

А. С. Антоненко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ЧАСТИЧНАЯ ТАБЛИЧНАЯ СВОДИМОСТЬ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
з дискретної математики ОНУ 20.04.2001 р.

У статті розглянутий новий вид алгоритмічного зведення – часткове табличне зведення, деякі його підзведення і критерії повноти цих зведень. Доведено еквівалентність часткового табличного зведення і слабкого табличного зведення. Також розглянуте граничне табличне зведення.

В статье рассмотрен новый вид алгоритмической сводимости – частичная табличная сводимость, некоторые ее подсводимости и критерии полноты этих сводимостей. Доказана эквивалентность частичной табличной сводимости и слабой табличной сводимости. Также рассмотрена предельная табличная сводимость.

A new type of algorithmic reducibility – partial truth table reducibility, some its subreducibilities and the completeness criteria of these reducibilities is viewed in the article. The equivalence of partial truth table reducibility and weak truth table reducibility is proved. Limitary truth table reducibility is also reviewed.

Введение. Одним из основных понятий теории рекурсии является понятие алгоритмической сводимости, которое позволяет классифицировать проблемы по их сложности. Сводимость задает разбиения на классы эквивалентности проблем, называемые степенями неразрешимости. Хорошо известны различные виды алгоритмических сводимостей, например: сводимость по Тьюрингу (T -сводимость), табличная сводимость (tt -сводимость) и слабая табличная сводимость (wtt -сводимость).

В работе М. М. Арсланова [1] приведены критерии T - и wtt -полноты. В работе В. К. Булитко [2] дана полная классификация табличных сводимостей Поста, соответствующих рекурсивно перечислимым классам булевых функций. Но дальнейшие исследования наталкивались на то, что для wtt -сводимости такая классификация не существовала. Ц е л ь ю данной работы является распространение этой классификации на слабую табличную сводимость и доказательство критериев полноты, аналогичных критериям Арсланова, для некоторых сводимостей из этой классификации. Для этого вводится частичная табличная сводимость (ptt -сводимость), эквивалентная слабой табличной сводимости. Введение этой сводимости позволяет связать слабую табличную сводимость с табличной, найти достаточные условия табличной сводимости и доказать критерии pom - и $pbtt$ -полноты, аналогичные критерию Арсланова. Кроме того, в статье рассматривается предельная табличная сводимость.

1. Частичная табличная сводимость и ее эквивалентность слабой табличной сводимости. Ниже приведены некоторые определения, которые будут использоваться при доказательстве теоремы об эквивалентности сводимостей. Определение ptt -сводимости является новым, а определение wtt -сводимости приведено в [3] и [1].

© А. С. Антоненко, 2003

Определения:

1. $A \leq_{ptt}^{f(x)} B \Leftrightarrow^{def}$ $f(x)$ *– общерекурсивная функция (ОРФ)*

$$\& \, f(x) = \langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle, z, n\rangle \, \& \, (x \in A \Leftrightarrow \varphi_z(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n)) = 1)$$
$$\& \, (x \notin A \Leftrightarrow \varphi_z(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n)) = 0).$$

2. $A \leq_{ptt} B \Leftrightarrow^{def} \left(\exists f(x) - ОРФ : A \leq_{ptt}^{f(x)} B\right)$.

3. $A \leq_{wtt}^{y,h(x)} B \Leftrightarrow^{def}$ $h(x)$ *– ОРФ* & $y \in N$ & $\forall\langle x, i, u, v\rangle \in W_y(D_u \cup D_v \subset [0, h(x)])$

$$\& \left(x \in A \Leftrightarrow \exists\langle x, 1, u, v\rangle \in W_y : \left(D_u \subset B \, \& \, D_v \subset \overline{B}\right)\right)$$
$$\& \left(x \notin A \Leftrightarrow \exists\langle x, 0, u, v\rangle \in W_y : \left(D_u \subset B \, \& \, D_v \subset \overline{B}\right)\right).$$

4. $A \leq_{wtt} B \Leftrightarrow^{def} \left(\exists h(x) - \text{ОРФ} \, \& \, \exists y \in N : \left(A \leq_{wtt}^{y,h(x)} B\right)\right)$.

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма. *Пусть* $u, v \in N$ *таковы, что*

$u = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_k}$, $v = 2^{j_1} + 2^{j_2} + \cdots + 2^{j_l}$, $i_1, i_2, \ldots, i_k \in N$, $j_1, j_2, \ldots, j_l \in N$, $k, l \in N$, B *– некоторое множество натуральных чисел.*

Тогда $\left(D_u \in B \, \& \, D_v \in \overline{B}\right) \Leftrightarrow \left(C_B(i_1) = \cdots = C_B(i_k) = 1 \, \& \, C_B(j_1) = \cdots = C_B(j_l) = 0\right)$.

Доказательство.

$D_u = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset B \Leftrightarrow i_1 \in B, \ldots, i_k \in B \Leftrightarrow C_B(i_1) = \cdots = C_B(i_k) = 1$.

Аналогично, $D_v = \{j_1, \ldots, j_l\} \subset \overline{B} \Leftrightarrow C_B(j_1) = \cdots = C_B(j_l) = 0$.

Теорема 1. $A \leq_{ptt} B \Leftrightarrow A \leq_{wtt} B$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A \leq_{wtt}^{y,h(x)} B$. Построим $f(x)$ такое, что $A \leq_{ptt}^{f(x)} B$.

Для каждого x положим

$$f'(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n) = \begin{cases} i, \text{ если } \langle x, i, u, v\rangle \text{ первое в перечислении} \\ \quad W_y \text{ такое, что } x'_{i_1} = x'_{i_2} = \cdots = x'_{i_k} = 1, \\ \quad x'_{j_1} = x'_{j_2} = \cdots = x'_{j_l} = 0, \\ \quad \text{где } u = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_k}, \\ \quad v = 2^{j_1} + 2^{j_2} + \cdots + 2^{j_l}, n = h(x), i \in \{0,1\} \\ \uparrow, \text{ если такого } \langle x, i, u, v\rangle \text{ не существует} \end{cases}$$

Очевидно, что f' – частично-рекурсивная функция (ЧРФ). Так как построение f' эффективно зависит от x, то $\exists\, z(x)$ – ОРФ такая, что

$\forall x'_0, \ldots, x'_n \in N \left(f'(x'_0, \ldots, x'_n) = \varphi_{z(x)}(x'_0, \ldots, x'_n)\right)$, где $n = h(x)$.

Положим $f(x) = \langle\langle 0, 1, \ldots, h(x)\rangle, z(x), h(x) + 1\rangle$. Нетрудно доказать, что $A \leq_{ptt}^{f(x)} B$.

Необходимость. Пусть $A \leq_{ptt}^{f(x)} B$, где $f(x) = \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, z, n\rangle$.

Положим $h(x) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$,

$$g(\langle x, i, u, v\rangle) = \begin{cases} 1, \text{если } D_u \cap D_v = \varnothing, D_u \cup D_v = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ и} \\ \varphi_{z(x)}(x'_0, \ldots, x'_n) = i, \text{ где } x'_m = C_{D_u}(x_m), \forall m = \overline{1, n}. \\ \uparrow, \text{иначе} \end{cases}$$

Заметим, что

если $D_u \cap D_v = \varnothing, D_u \cup D_v = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то $C_{D_v}(x_m) = 1 - C_{D_u}(x_m) = 1 - x'_m$.

Очевидно, что g – ЧРФ и пусть $\operatorname{Arg} g = W_y$.

Нетрудно доказать, что $A \leq_{wtt}^{y, h(x)} B$. Теорема доказана.

2. Связь частичной табличной сводимости и табличной сводимости. Мы будем пользоваться следующими определениями:

Определения.

1. $A \leq_{tt}^{f} B \Leftrightarrow^{def} f(x) = \langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle, \alpha, n\rangle$ – *ОРФ*
$\& \, C_A(x) = T(\alpha(x))(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n))$,
где $T(\alpha)$ – *булева функция с номером* α.

2. $A \leq_{ptt}^{f} B \Leftrightarrow^{def} f(x) = \langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle, z, n\rangle$ – *ОРФ*
$\& \, C_A(x) = \varphi_{z(x)}(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n))$.

Лемма 1 (о продолжении). *Пусть*

$f(x) = \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, z, n\rangle$ – ОРФ, $f'(x) = \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, z', n\rangle$ – ОРФ.

Тогда, если $\forall x[\varphi_{z(x)} \subset \varphi_{z'(x)}]$, *то есть*

$$\forall x \forall x'_1, \ldots x'_n \in \{0,1\}\left[\varphi_{z(x)}(x'_1, \ldots x'_n)\downarrow \Rightarrow \varphi_{z(x)}(x'_1, \ldots x'_n) = \varphi_{z'(x)}(x'_1, \ldots x'_n)\right],$$

то $A \leq_{ptt}^{f} B \Rightarrow A \leq_{ptt}^{f'} B$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Тогда

$$C_A(x) = \varphi_{z(x)}(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n)) = \varphi_{z'(x)}(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n)),$$

так как $A \leq_{ptt}^{f} B \Rightarrow \forall x[\varphi_{z(x)}(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n))\downarrow]$.

Лемма 2. *Для* $\forall n, m \in N \; \forall g$ – *ЧРФ* $n+m$ *переменных такой, что*

$$\forall x_1, \ldots, x_m \forall x'_1, \ldots, x'_n \in \{0,1\}[g(x_1, \ldots, x_m, x'_1, \ldots, x'_n) \in \{0,1\}]$$

$\exists \alpha(x_1, \ldots, x_m)$ – *ОРФ такая, что*

$$T(\alpha(x_1, \ldots, x_m))(x'_1, \ldots, x'_n) = g(x_1, \ldots, x_m, x'_1, \ldots, x'_n) \; \forall x_1, \ldots, x_m \forall x'_1, \ldots, x'_n \in \{0,1\}.$$

Доказательство. Возьмем $\alpha(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=0}^{2^n - 1} 2^k g(x_1, \ldots, x_m, k_1, \ldots, k_n)$, где $k_1, \ldots k_n$ – двоичное разложение числа k. Очевидно, что $\alpha(x_1, \ldots, x_m)$ – ОРФ и $T(\alpha(x_1, \ldots, x_m))(x'_1, \ldots, x'_n) = g(x_1, \ldots, x_m, x'_1, \ldots, x'_n)$.

Лемма 2'. *Для* $\forall n \in N\ \forall g$ *– ЧРФ* $n+1$ *переменных такой, что*

$$\forall x \forall x'_1,\ldots,x'_n \in \{0,1\}[g(x,x'_1,\ldots,x'_n) \in \{0,1\}]$$

$\exists \alpha(x)$ *– ОРФ такая, что* $T(\alpha(x))(x'_1,\ldots,x'_n) = g(x,x'_1,\ldots,x'_n)\ \forall x \forall x'_1,\ldots,x'_n \in \{0,1\}$.

Доказательство. Следует из леммы 2 при $m=1$.

Замечание. Номер полученной функции α эффективно зависит от номера функции g, то есть по номеру ОРФ, принимающей булевы значения, можно эффективно получить номер булевой функции, вычисляющей то же самое.

Лемма 3. *Пусть* $A \le_{ptt}^{f(x)} B$, $f(x) = \langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle, z, n\rangle$ *и* $\forall x$ $\varphi_{z(x)}$ *– ОРФ* n *переменных.*

Тогда $A \le_{tt} B$.

Доказательство. Построим

$$g(x,x'_1,\ldots,x'_n) = \begin{cases} \varphi_{z(x)}(x'_1,\ldots x'_n), & \text{если } \varphi_{z(x)}(x'_1,\ldots x'_n) \in \{0,1\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По лемме 2'

$$\exists \alpha(x) \text{ – ОРФ: } T(\alpha(x))(x'_1,\ldots,x'_n) = g(x,x'_1,\ldots,x'_n)\ \forall x \forall x'_1,\ldots,x'_n \in \{0,1\} \Rightarrow\ A \le_{tt}^{f'} B,$$

где $f'(x) = \langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle, \alpha, n\rangle$, так как

$$C_A(x) = \varphi_{z(x)}(C_B(x_1),\ldots,C_B(x_n)) = (\text{т.к. } \varphi_{z(x)}(C_B(x_1),\ldots,C_B(x_n)) \in \{0,1\}) =$$
$$= g(x, C_B(x_1),\ldots,C_B(x_n)) = T(\alpha(x))(C_B(x_1),\ldots,C_B(x_n)),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть* $A \le_{ptt}^{f(x)} B$, $f(x) = \langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle, z, n\rangle$ *и*

$C_f = \{\langle\langle x'_1,\ldots,x'_n\rangle, x\rangle \mid \varphi_{z(x)}(x'_1,\ldots,x'_n)\uparrow\}$ *– рекурсивно перечислимое множество (РПМ).*

Тогда $A \le_{tt} B$.

Доказательство. Так как $\overline{C_f} = \{\langle\langle x'_1,\ldots,x'_n\rangle, x\rangle \mid \varphi_{z(x)}(x'_1,\ldots,x'_n)\downarrow\}$ – РПМ $\Rightarrow C_f$ – рекурсивное множество (РМ).

Пусть

$$\varphi_{z'(x)}(x'_1,\ldots,x'_n) = \begin{cases} \varphi_{z(x)}(x'_1,\ldots,x'_n), & \text{если } \langle\langle x'_1,\ldots,x'_n\rangle, x\rangle \in \overline{C_f} \\ 0, & \text{если } \langle\langle x'_1,\ldots,x'_n\rangle, x\rangle \in C_f \end{cases}$$

и $f'(x) = \langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle, z', n\rangle$.

Тогда $\varphi_{z'(x)}$ – ОРФ n переменных и $\forall x(\varphi_{z(x)} \subset \varphi_{z'(x)}) \Rightarrow$ По лемме 1 $A \le_{ptt}^{f'(x)} B \Rightarrow$ По лемме 3 $A \le_{tt} B$.

Замечание. Если в теореме 1 $A \le_{wtt}^{y,h(x)} B$ и W_y – РМ $\Rightarrow C_f$ – РМ, где f – конструкция из достаточности теоремы 1.

Значит, так как $A \le_{ptt}^{f(x)} B$ (смотри теорему 1), то $A \le_{tt} B$ по лемме 4. Окончательно получим: $\left[A \le_{wtt}^{y,h(x)} B \,\&\, W_y \text{ – РМ}\right] \Rightarrow A \le_{tt} B$.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны для* $\forall A, B \subset N$ *:*

1. $A \leq_{tt} B$.
2. $\exists f \left[A \leq_{ptt}^{f} B \,\&\, f(x) = \langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, z, n \rangle \,\&\, \forall x (\varphi_{z(x)} - ОРФ) \right]$.
3. $\exists f \left[A \leq_{ptt}^{f} B \,\&\, C_f - РПМ \right]$.

Доказательство. $1. \Rightarrow 2.$ Пусть $A \leq_{tt}^{f'} B$, $f'(x) = \langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, \alpha, n \rangle$.

Определим

$$\varphi_{z(x)}(x_1', \ldots, x_n') = \begin{cases} T(\alpha(x))(x_1', \ldots, x_n'), & \text{если } x_1', \ldots, x_n' \in \{0,1\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x) = \langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, z, n \rangle.$$

Тогда $A \leq_{ptt}^{f(x)} B$, так как

$C_A(x) = T(\alpha(x))(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n)) = \varphi_{z(x)}(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n))$ и $\varphi_{z(x)}$ – ОРФ $\forall x$.

$2. \Rightarrow 3.$ Пусть $A \leq_{ptt}^{f(x)} B$, $f(x) = \langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, z, n \rangle$, $\forall x (\varphi_{z(x)} - \text{ОРФ}) \Rightarrow C_f = \varnothing$ – РПМ.

$3. \Rightarrow 1.$ Следует из леммы 4.

3. Предельная табличная сводимость.

В этом разделе мы рассмотрим предельную табличную сводимость (ltt -сводимость) и покажем еще более тесную связь ptt - и tt -сводимостей.

Определения.

1. $A \leq_{ltt}^{f,\alpha'} B \Leftrightarrow^{def} f(x) = \langle \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, n \rangle$ – *ОРФ* $\&\alpha'(x, y)$ – *ОРФ,*
$\forall x \left(\exists \lim_{y \to \infty} \alpha'(x, y) = \alpha(x) \right) \& C_A(x) = T(\alpha(x))(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n))$.
2. $A \leq_{ltt} B \Leftrightarrow^{def} \exists f, \alpha'(x, y)$ – *ОРФ такие, что* $A \leq_{ltt}^{f,\alpha'} B$.

Замечание. Очевидно, что $\leq_{ltt}$ – сводимость (аналогично $\leq_{tt}$). Для $\forall R \subset N, R$ – РПМ, имеем $R \leq_{ltt} \varnothing$, но необязательно $R \leq_{T} \varnothing$.

Действительно, $R \leq_{ltt}^{f,\alpha'} \varnothing$, где $f(x) = \langle \langle x \rangle, 1 \rangle$, а

$$T(\alpha'(x, y))(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ перечислилось в } R \text{ на } \leq y \text{ шаге,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 3. $A \leq_{ptt} B \Rightarrow A \leq_{ltt} B$.

Доказательство. Пусть $A \leq_{ptt}^{f(x)} B$, где $f(x) = \langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, z, n \rangle$ – ОРФ. Пусть

$$g(x, y, x_1', \ldots, x_n') = \begin{cases} 1, & \text{если на } \leq y \text{ шаге } \varphi_{z(x)}(x_1', \ldots x_n') \text{ сошлась к } 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что $g(x, y, x_1', \ldots, x_n')$ – ОРФ. По лемме 2 при $m = 2$ существует α' – ОРФ 2 переменных: $T(\alpha'(x, y))(x_1', \ldots, x_n') = g(x, y, x_1', \ldots, x_n')$.

Но $\lim_{y \to \infty} g(x, y, x_1', \ldots, x_n') = \begin{cases} \varphi_{z(x)}(x_1', \ldots x_n'), & \text{если } \varphi_{z(x)}(x_1', \ldots x_n') \downarrow \in \{0,1\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

При этом g как функция от y меняет значение не более 1 раза при $y \to \infty$ $\Rightarrow \forall x\ \alpha'(x, y)$ при $y \to \infty$ меняет значение не более 2^n раз (смотри конструкцию леммы 2) $\Rightarrow \forall x\left(\exists \lim\limits_{y\to\infty} \alpha'(x, y) = \alpha(x)\right)$, где $\alpha(x)$ – тотальная предельно рекурсивная функция и

$$T(\alpha(x))(x_1', \ldots, x_n') = \lim_{y\to\infty} T(\alpha'(x, y))(x_1', \ldots, x_n') =$$

$$= \lim_{y\to\infty} g(x, y, x_1', \ldots, x_n') = \begin{cases} \varphi_{z(x)}(x_1', \ldots x_n'), & \text{если } \varphi_{z(x)}(x_1', \ldots x_n')\downarrow \in \{0,1\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}.$$

Так как $\varphi_{z(x)}(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n)) = C_A(x) \in \{0,1\}$,

то $C_A(x) = \varphi_{z(x)}(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n)) = T(\alpha(x))(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n))$

и тогда $A \le_{ltt}^{f'',\alpha'} B$, где $f''(x) = \langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle, n\rangle$, что и требовалось доказать.

Теорема 3 показывает, что можно заменить ЧРФ на булеву, определяя ее номер не ОРФ, а предельно рекурсивной функцией, и сводимость при этом будет иметь место.

4. Критерии ptt**-,** $pbtt$**- и** pom**-полноты.** Введем аналогично om- и btt-сводимостям pom- и $pbtt$-сводимости (om-сводимость была рассмотрена в [2]).

Определения.

1. $g \le_{ptt}^{f} B \Leftrightarrow^{def} f(x) = \langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle, z, n\rangle$ – *ОРФ*
$\& \ g(x) = \varphi_{z(x)}(C_B(x_1), \ldots, C_B(x_n))$.

2. $A \le_{ptt}^{f,n} B \Leftrightarrow^{def} \left[A \le_{ptt}^{f} B \ \& \ f = \langle f', n'\rangle \ \& \ 0 \le n' \le n\right]$.

3. $A \le_{ptt}^{n} B \Leftrightarrow^{def} \exists f$ – *ОРФ такая, что* $A \le_{ptt}^{f,n} B$.

4. $A \le_{pom} B \Leftrightarrow^{def} A \le_{ptt}^{1} B$.

5. $A \le_{pbtt} B \Leftrightarrow^{def} \exists n \in N : \left[A \le_{ptt}^{n} B\right]$.

Аналогично $g \le_{ptt}^{f} B$ определяются pom- и $pbtt$-сводимости функции к множеству. Очевидно, что аналогично теореме 1:

$$\forall g : N \to N, \forall B \subset N\left(g \le_{ptt} B \Leftrightarrow g \le_{wtt} B\right).$$

В работе Арсланова [1] установлен критерий wtt-полноты, который в силу эквивалентности wtt- и ptt-сводимостей будет критерием и ptt-полноты:

$$A \le_{ptt} \text{полно} \Leftrightarrow \exists f \le_{ptt} A : \forall x\left[W_x \ne W_{f(x)}\right].$$

Этот критерий можно обобщить на случай $pbtt$- и pom-сводимостей.

Теорема 4 (о E-неподвижной точке). *Пусть $\equiv_E$ – произвольное отношение эквивалентности на РПМ, $A <^n_{ptt} K$, A – РПМ, и $\forall g$ – ОРФ обладает E-неподвижной точкой*

$$\left(\exists x\left(W_{g(x)} \equiv_E W_x\right)\right),$$

которая может быть эффективно найдена по номеру $g = \varphi_l$.

Тогда $\forall f' \leq^n_{ptt} A$ обладает E-неподвижной точкой:

$$\exists e\left(W_e \equiv_E W_{f'(e)}\right).$$

Доказательство. Пусть $f' \leq^n_{ptt} A$ и пусть $\left\{A^{(s)}\right\}_{s\in N}$, $\left\{K^{(s)}\right\}_{s\in N}$ – рекурсивные перечисления A и $K = \left\{x \,\middle|\, \varphi_x(x)\downarrow\right\}$. Определим

$$m(x) = \begin{cases} \mu s\left\{x \in K^{(s)}\right\}, & \text{если } x \in K, \\ \uparrow, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что $m(x)$ – ЧРФ.

Определим ОРФ $\hat{f} : N^2 \to N$ $\hat{f}(y,x) = f_t(y)$, где $f_t \leq^{f,n}_{ptt} A^{(t)}$, t – минимальное число такое, что $t \geq x$ и $f_t(y)$ сходится за t шагов.

Если $x \in K$, то $\lambda y\left[\hat{f}(y, m(x))\right]$ – ОРФ и по предположению обладает E-неподвижной точкой, которая эффективно находится по номеру $\hat{f}$ и, следовательно, по числу x $\Rightarrow$ Существует ОРФ $h : x \in K \Rightarrow W_{h(x)} \equiv_E W_{\hat{f}(h(x),m(x))}$.

Пусть

$$f(x) = \left\langle\left\langle x_1, \ldots, x_{n'}\right\rangle, z, n'\right\rangle.$$

Определим

$$r(x) = \mu s\left\{\forall i = \overline{1,n'} \ \left[C_{A^{(s)}}\left(x_i\left(h(x)\right)\right) = C_A\left(x_i\left(h(x)\right)\right)\right]\right\}.$$

Тогда $r \leq^n_{ptt} A$.

Алгоритм сведения: Вычисляем множество $B = \left\{i \,\middle|\, x_i\left(h(x)\right) \in A\right\}$ (проверяя $x_i(h(x)) \in A$? для $i = \overline{1,n'}$). Потом ждем, пока в перечислении A не появятся все $x_i(h(x))$ для $i \in B$.

Допустим

$$\forall x \in K\left[m(x) < r(x)\right] \Rightarrow \left[x \in K \Leftrightarrow x \in K^{(r(x))}\right]$$

$\left(\text{так как } \left(x \in K \Rightarrow x \in K^{(m(x))} \Rightarrow x \in K^{(r(x))}\right), \left(x \in K^{(r(x))} \Rightarrow x \in K\right)\right) \Rightarrow$ так как $r \leq^n_{ptt} A$, то и $K \leq^n_{ptt} A$ – противоречие $\Rightarrow \exists x_0 \in K\left[m(x_0) > r(x_0)\right]$.

Для этого x_0 $\hat{f}(h(x_0), m(x_0)) = f'(h(x_0)) \Rightarrow W_{f'(h(x_0))} = W_{\hat{f}(h(x_0),m(x_0))} \equiv_E W_{h(x_0)}$ и $h(x_0)$ – искомая E-неподвижная точка функции f', что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть* $\equiv_E$ *– произвольное отношение эквивалентности на РПМ,* $A <_{pbtt} K$, A *– РПМ, и* $\forall g$ *– ОРФ обладает* E*-неподвижной точкой*

$$\left(\exists x\left(W_{g(x)} \equiv_E W_x\right)\right),$$

которая может быть эффективно найдена по номеру $g = \varphi_1$.

Тогда $\forall f' \leq_{pbtt} A$ *обладает* E*-неподвижной точкой:*

$$\exists e\left(W_e \equiv_E W_{f'(e)}\right).$$

Доказательство. $A <_{pbtt} K \Rightarrow K \not\leq_{pbtt} A \Rightarrow \forall n \in N\left[K \not\leq^n_{ptt} A\right] \Rightarrow$

так как $\forall n \in N\left[A \leq^n_{ptt} K\right]$, то $\forall n \in N\left[A <^n_{ptt} K\right] \Rightarrow$

По теореме 4 $\forall n \in N \forall f' \leq^n_{ptt} A\left[\exists e\left(W_e \equiv_E W_{f'(e)}\right)\right] \Rightarrow \forall f' \leq_{pbtt} A\left[\exists e\left(W_e \equiv_E W_{f'(e)}\right)\right]$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть* A *– РПМ. Тогда*

$$A \leq_{pom} \text{полно} \Leftrightarrow \exists f \leq_{pom} A : \forall x\left[W_x \neq W_{f(x)}\right]$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A \leq_{pom}$ полно $\Rightarrow K \leq_{pom} A$.

Определим $f(x)$ так:

$$W_{f(x)} = \begin{cases} \varnothing, \text{если } x \in K, \text{ т.е. } x \in W_x \\ N, \text{если } x \notin K, \text{ т.е. } x \notin W_x \end{cases}$$

Очевидно $f \leq_{pom} K \Rightarrow f \leq_{pom} A$. Но $f(x)$ не имеет неподвижной точки.

Достаточность. Пусть $\exists f \leq_{pom} A$ не имеющая неподвижных точек.

Предположим противное: пусть A – не $\leq_{pom}$ полно. Но так как K – $\leq_{pom}$ полно ($\leq_m$ полно), то $A \leq_{pom} K$, а $K \not\leq_{pom} A$. Значит $A <_{pom} K \Rightarrow$ По теореме о E-неподвижной точке для $\equiv_E$-равенства и теореме о рекурсии ([1, Теорема 1.1Б, Следствие 1.1А], [3, Теорема 11-II, Следствие 11-II] – любая ОРФ имеет неподвижную точку, которая эффективно находится по ее номеру) $\forall f \leq_{pom} A$ существует неподвижная точка – противоречие.

Следствие 3. *Пусть* A *– РПМ. Тогда*

$$A \leq_{pbtt} \text{полно} \Leftrightarrow \exists f \leq_{pbtt} A : \forall x\left[W_x \neq W_{f(x)}\right]$$

Доказательство. Выводится из следствия 1 аналогично следствию 2 (с заменой $\leq_{pom}$ на $\leq_{pbtt}$).

Докажем различие pom- и om-сводимостей.

Лемма. $\forall A, B$ *– РПМ* $\left[A \cup B = \varnothing \Rightarrow A \leq_{pom} A \cup B\right]$

Доказательство. $A \leq^{f}_{pom} A \cup B$, где $f(x) = \langle \langle x \rangle, z(x), 1 \rangle$,

$$\varphi_{z(x)}(x') = g(x, x') = \begin{cases} 0, x' = 0 \\ 0, x' = 1 \,\&\, x \in B \\ 1, x' = 1 \,\&\, x \in A \\ \uparrow, \text{иначе } (\text{т.е. } x' = 1 \,\&\, x \notin A \cup B) \end{cases}$$

Но $\exists A, B$ – РПМ, $A \cap B = \varnothing : A \not\leq_{tt} A \cup B$ (и очевидно $A \not\leq_{om} A \cup B$). Это показывает разницу между pom- и om-сводимостями.

Заключение. В данной статье мы ввели ptt-сводимость – другое представление wtt-сводимости. Это дает возможность ввести подсводимости ptt-сводимости аналогично подсводимостям tt-сводимости. Были сформулированы и доказаны критерии pom- и $pbtt$-полноты, являющиеся аналогами критериев Арсланова.

Автор выражает благодарность профессору В. К. Булитко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

1. **Арсланов М. М.** Локальная теория степеней неразрешимости и Δ^0_2-множества. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987.– 138 с.
2. **Булитко В. К.** Сводимость линейными по Жегалкину таблицами // Сиб. мат. журн., 1980. – Т. 21, № 3.– С. 23–31.
3. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.– М.: Мир, 1972. – 624 с.

Получено 01.10.2001 г.