

Використовуючи метод розрахунку коробчатих оболонок, викладений в [1], зводимо задачу до пошуку розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\Delta^2 w(x, y) &= 0; \\ \Delta^2 \sigma_x(x, y) &= 0, \quad -a < x < b, x \neq 0, |y| < \infty,\end{aligned}\quad (1)$$

яка задовольняє такі умови на ребрі оболонки:

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= \langle \tau_{xy} \rangle = \langle \phi_{xy} \rangle = \langle M_{xy} \rangle = 0, \\ \langle u \rangle &= -(w_+ + w_-); \langle w \rangle = u_+ + u_-, \\ \langle \sigma_x \rangle &= -h^{-1}[(V_x)_+ + (V_y)_-], \\ \langle V_x \rangle &= h[(\sigma_x)_+ + (\sigma_y)_-],\end{aligned}\quad (2)$$

а також граничні умови:

$$\begin{aligned}V_x &= \tau_{xy} = 0; M_x = m(y); \sigma_x = \sigma(y); x = -a, |y| < c, \\ V_x &= \phi_x = u = \tau_{xy} = 0; x = -a, |y| > c, \\ V_x &= \phi_x = u = \tau_{xy} = 0; x = b,\end{aligned}$$

де u, v, w — переміщення вздовж осей відповідно x, y, z ; $\phi_x, M_x, V_x, \sigma_x, \tau_{xy}$ — кут повороту, згинальний момент, узагальнена поперечна сила, нормальне й дотичні напруження.

При цьому граничні умови зручно подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}V_x &= \tau_{xy} = 0; \phi_x = \chi(y); u = \mu(y), x = -a, \\ V_x &= \phi_x = u = \tau_{xy} = 0, x = b,\end{aligned}\quad (3)$$

де $\chi(y)$ і $\mu(y)$ — невідомі функції на інтервалі $|y| < c$, рівні нулю поза цим інтервалом, що являють собою кут нахилу і нормальні переміщення берега тріщини.

Не обмежуючи загальності, можна вважати $c = 1$ та допустити, що проведено потрібну заміну змінних x і y . Після застосування перетворення Фур'є до пружних невідомих і навантажень аналогічно тому, як це було зроблено в [1], а також до невідомих функцій $\chi(y)$ і $\mu(y)$

$$\chi_\alpha = \int_{-1}^1 \chi(y) e^{i\alpha y} dy, \mu_\alpha = \int_{-1}^1 \mu(y) e^{i\alpha y} dy \quad (4)$$

задача (1) — (3) зводиться до системи одномірних розривних крайових задач у трансформантах:

$$L^2 f_\alpha^\pm = 0; -a < x < b, x \neq 0 \quad (5)$$

з неоднорідними граничними умовами:

$$\begin{aligned}R_3^- f_\alpha^- &= R_1^+ f_\alpha^+ = 0; R_3^+ f_\alpha^+ = -\alpha^4 E \mu_\alpha; \\ R_1^- f_\alpha^- &= \chi_\alpha, x = -a; \\ R_3^\pm f_\alpha^\pm &= R_1^\pm f_\alpha^\pm = 0, x = b\end{aligned}\quad (9)$$

і умовами на ребрі оболонки:

$$\begin{aligned}S_j^\pm f_\alpha^\pm &= 0 \quad j = 1, 2; \\ S_3^+ f_\alpha^+ &= \alpha^4 E [H_0^- f_\alpha^-]; H_3^+ f_\alpha^+ = \alpha^4 E [S_0^- f_\alpha^-]; \\ S_0^+ f_\alpha^+ &= Dh^{-1} [H_3^- f_\alpha^-]; H_0^+ f_\alpha^+ = -Dh^{-1} [S_3^- f_\alpha^-],\end{aligned}\quad (7)$$

де $R_k^\pm f = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}; k = 0, 1; R_2^\pm f = [L + (1 \pm \nu)\alpha^2] f$;

$$R_3^\pm f = \frac{\partial}{\partial x} [L - (1 \pm \nu)\alpha^2] f; Lf = \frac{d^2 f}{dx^2} - \alpha^2 f;$$

$$Sf = (T^- - T^+) f; Hf = (T^- + T^+) f; T^\pm f = f(\pm 0);$$

$$S_k^\pm f = S [R_k^\pm f]; H_k^\pm f = H [R_k^\pm f]; T_k^\pm f = T [R_k^\pm f].$$

Розв'язки крайових задач з неоднорідними граничними умовами можна побудувати [2], використовуючи базисну систему функцій і функції Гріна $G(x, \xi)$ крайової задачі

$$L^2 u(x) = 0, u' = u'' = 0, x = -a, b.$$

Тоді розв'язки задачі (5) — (7) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}f_\alpha^-(x) &= \chi_\alpha R_1^- G_\alpha(x, -a) + f_q^- - f_3^- T_0^- G_\alpha + f_0^- T_3^- G_\alpha; \\ f_\alpha^+(x) &= \mu(-\alpha^4 E) G_\alpha(x, -a) + f_q^+ - f_3^+ T_0^+ G_\alpha + f_0^+ T_3^+ G_\alpha,\end{aligned}\quad (8)$$

де стрибки $f_k^\pm (k = 0, 3)$ визначаються з розв'язку алгебричної системи в [1]: $AF = H$.

Якщо розрізнити частини розв'язків, залежні від χ_α і μ_α , то систему можна переписати у вигляді

$$AF = \mu_\alpha H_\mu + \chi_\alpha H_\chi, \quad (9)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} hD^{-1} & 0 & -C_{33}^- & C_{30}^- \\ 0 & (\alpha^4 E)^{-1} & -C_{03}^- & C_{00}^- \\ -C_{33}^+ & C_{30}^+ & -\alpha^4 E & 0 \\ -C_{03}^+ & C_{00}^+ & 0 & -Dh^{-1} \end{pmatrix}; C_{ij}^\pm = H_i^\pm T_j^\pm [G_\alpha];$$

$$H_\mu = (-\alpha^4 E) \begin{pmatrix} 0, 0, H_3^+ G_\alpha(x, -a), H_0^+ G_\alpha(x, -a) \end{pmatrix}^T;$$

$$H_\chi = \begin{pmatrix} H_3^- R_2^- G_\alpha(x, -a), H_0^- R_2^- G_\alpha(x, -a), 0, 0 \end{pmatrix}^T,$$

а вектори H_μ і H_χ отримані з результатів застосування диференціальних операторів $H_j^\pm (j = 0, 3)$ до перших доданків у (8).

Розв'язок системи (9) в силу її лінійності може бути поданий у вигляді

$$F = \mu_\alpha F_\mu + \chi_\alpha F_\chi,$$

де прийняті такі позначення для стрибків:

$$F_{\mu} = (f_{0\mu}^+, f_{3\mu}^+, f_{0\mu}^-, f_{3\mu}^-); F_{\chi} = (f_{0\chi}^+, f_{3\chi}^+, f_{0\chi}^-, f_{3\chi}^-).$$

Це дає змогу виписати розв'язок задачі через трансформанти невідомих функцій:

$$f_{\alpha}^{\pm}(x) = \mu_{\alpha} k_{\mu}^{\pm}(\alpha, x) + \chi_{\alpha} k_{\chi}^{\pm}(\alpha, x),$$

$$\text{де } k_{\mu}^+(\alpha, x) = (-\alpha^4 E) G_{\alpha}(x, -a) - f_{3\mu}^+ T_0^+ G_{\alpha} + f_{0\mu}^+ T_3^+ G_{\alpha};$$

$$k_{\mu}^-(\alpha, x) = -f_{3\mu}^- T_0^- G_{\alpha} + f_{0\mu}^- T_3^- G_{\alpha};$$

$$k_{\chi}^+(\alpha, x) = -f_{3\chi}^+ T_0^+ G_{\alpha} + f_{0\chi}^+ T_3^+ G_{\alpha};$$

$$k_{\chi}^-(\alpha, x) = R_2^- G_{\alpha}(x, -a) - f_{3\chi}^- T_0^- G_{\alpha} + f_{0\chi}^- T_3^- G_{\alpha}.$$

Для пошуку невідомих функцій $\chi(y)$ і $\mu(y)$ отримаємо систему інтегральних рівнянь відносно цих функцій шляхом обернення трансформант $\sigma_{\alpha\alpha}(x)$ і $M_{\alpha\alpha}(x)$, зміни порядку інтегрування при $x \rightarrow -a$:

$$\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} K_{11}^0(y, s) & K_{12}^0(y, s) \\ K_{21}^0(y, s) & K_{22}^0(y, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(s) \\ \mu(s) \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} m(y) \\ \sigma(y) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

При цьому ядра $K_{ij}^0(y, \eta)$ виражаються формулами:

$$K_{11}^0(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_0^+ k_{\mu}^+(\alpha, -a) e^{i\alpha(\eta-y)} d\alpha;$$

$$K_{12}^0(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_0^+ k_{\chi}^+(\alpha, -a) e^{i\alpha(\eta-y)} d\alpha;$$

$$K_{21}^0(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-D) R_2^+ k_{\mu}^+(\alpha, -a) e^{i\alpha(\eta-y)} d\alpha;$$

$$K_{22}^0(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-D) R_2^+ k_{\chi}^+(\alpha, -a) e^{i\alpha(\eta-y)} d\alpha,$$

де $m(y)$ і $s(y)$ — згинальний момент і нормальні напруження, які прикладені до берегів тріщини.

Розв'язок системи інтегральних рівнянь шукається ефективніше, якщо виділити з ядер $K_{ij}(y, \eta)$ слабозбіжні частини (які мають лише статичне спадання за параметром α), квадратури від яких дадуть сингулярні частини ядер.

Скориставшись інтегралами

$$\int_0^{\infty} a e^{-ax} \cos a y da = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\int_0^{\infty} a^2 e^{-ax} \cos a y da = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$

отримаємо шукане подання ядер інтегральних рівнянь (10) у вигляді суми сингулярної і гладкої частин. У результаті система інтегральних рівнянь набуде такого вигляду:

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \ln |y - \eta| \begin{bmatrix} \mu(\eta) \\ \chi(\eta) \end{bmatrix} d\eta +$$

$$+ \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu(\eta) \\ \chi(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \begin{bmatrix} \sigma_*(y) \\ m_*(y) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де

$$m_* = 2(D\gamma)^{-1} m(y); \sigma_* = -2\sigma(y); \quad (12)$$

$$K_{ij}(y, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_{ij}(\alpha) e^{i\alpha(\eta-y)} d\alpha; \quad (13)$$

$$k_{11}(\alpha) = p_{11}(\alpha) - f_{3\mu}^+ \Omega_0(-a) + f_{0\mu}^+ \Omega_3(-a);$$

$$k_{12}(\alpha) = -f_{3\chi}^+ \Omega_0(-a) + f_{0\chi}^+ \Omega_3(-a); \quad (18)$$

$$k_{22}(\alpha) = p_{22}(\alpha) - f_{3\mu}^- M_0(-a) + f_{0\mu}^- M_3(-a);$$

$$k_{21}(\alpha) = -\gamma \left[-f_{3\mu}^- M_0(-a) + f_{3\mu}^- M_3(-a) \right]; \quad (15)$$

$$p_{11}(\alpha) \exp^{|\alpha|(a+b)} = G_{\alpha}(-a, b) - 0,5(a+b)|\alpha|^{-1} L G_{\alpha}(-a, b);$$

$$p_{22}(\alpha) \gamma \exp^{|\alpha|(a+b)} = -\alpha^4 G_{\alpha}(-a, b) +$$

$$+ \left[0,5\alpha(a+b) - 2(1-\nu)^{-1} \right] \alpha^2 L G_{\alpha}(-a, b);$$

$$\Omega_k(x) = T_k^+ G_{\alpha}(x, t); M_k(x) = R_2^- T_k^- G_{\alpha}(x, t);$$

$$\gamma = (3 + \nu)/(1 - \nu).$$

Скористаємося методом ортогональних багаточленів і будемо шукати розв'язок у вигляді розкладу невідомих функцій у ряд за багаточленами Чебишова другого роду $U_k(\eta)$ з невідомими коефіцієнтами

$$\begin{bmatrix} \mu(\eta) \\ \chi(\eta) \end{bmatrix} = \sqrt{1 - \eta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \mu_k \\ \chi_k \end{bmatrix} U_k(\eta), |\eta| < 1. \quad (16)$$

Підставимо (16) в (11), потім помножимо кожне рівняння цієї системи на $\sqrt{1 - y^2} U_n(y)$ і проінтегруємо за y на інтервалі $(-1, 1)$. Якщо врахувати спектральне співвідношення [6]

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln |y - x| \sqrt{1 - y^2} U_n(y) dy = -(n+1) U_n(x)$$

співвідношення ортогональності [7]

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} U_m(y) U_n(y) dy = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}$$

і значення інтегралів [7]

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \begin{bmatrix} \sin \alpha x & U_{2n+1}(x) \\ \cos \alpha x & U_{2n}(x) \end{bmatrix} dx =$$

$$= (-1)^n \frac{\pi(2n+3/2 \pm 1/2)}{\alpha} \left\{ \begin{matrix} J_{2n+2}(\alpha) \\ J_{2n+1}(\alpha) \end{matrix} \right\},$$

то після нескладних перетворень і заміни порядку інтегрування при отриманні виразів для $K_{ij}(y, \eta)$, приходимо до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь другого роду нормальних за Пуанкаре-Кохом відносно коефіцієнтів розкладу

$$(n+1) \begin{pmatrix} \mu_n \\ \chi_n \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k,n)} \begin{pmatrix} \mu_k \\ \chi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n \\ m_n \end{pmatrix}, n = \overline{0, \infty}, \quad (17)$$

де компоненти матриці $A^{(k,n)}$ і коефіцієнти правих частин є такими:

$$A_{ij}^{(2k, 2n)} = 4(-1)^{n+k} (2n+1)(2k+1) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} k_{ij}(\alpha) \alpha^{-2} J_{2n+1}(\alpha) J_{2k+1}(\alpha) d\alpha; \quad i, j = 1, 2;$$

$$A_{ij}^{(2k+1, 2n+1)} = 4(-1)^{n+k+1} (2n+2)(2k+2) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} k_{ij}(\alpha) \alpha^{-2} J_{2n+2}(\alpha) J_{2k+2}(\alpha) d\alpha; \quad i, j = 1, 2;$$

$$A_{ij}^{(2k+1, 2n)} = A_{ij}^{(2k, 2n+1)} = 0; \quad i, j = 1, 2;$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ m_n \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \sigma_*(y) \\ m_*(y) \end{pmatrix} \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy.$$

При цьому $k_{ij}(\alpha)$, $\sigma_*(y)$, $m_*(y)$ визначені в (12) — (15), $J_k(\alpha)$ — функція Беселя.

Зазначимо, що процедура обчислення компонент матриць $A^{(k,n)}$ істотно спрощується внаслідок блокової симетрії, що легко виявляється при заміні n на k і навпаки. Обчислення інтегралів за α полегшується внаслідок експонентного убуття підінтегральної функції. Розв'язок нескінченної алгебричної системи дає можливість визначити всі пружні невідомі, використовуючи розв'язок задачі в трансформантах — у формі і теорему про згортання, а також визначити коефіцієнти інтенсивності плоских k_+ та згинних k_- напружень. Під коефіцієнтом інтенсивності напружень $k_{\pm}$, виходячи [8], розумітимемо коефіцієнт, через який виражаються головні частини напружень в околі вершин тріщин. Під головними частинами напружень маються на увазі коефіцієнти при особливості у виразі для напружень в околі вершини тріщини.

Для отримання виразів головних частин досить знайти границю при $y \rightarrow \pm 1$ ($|y| > 1$) інтегралів

$$\begin{pmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow \pm 1} \left(\sqrt{y^2 - 1} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \mu(\eta) \\ \chi(\eta) \end{pmatrix} \ln|y - \eta| d\eta \right)$$

і скористатися співвідношенням [6]

$$\frac{1}{p} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|y-h|} \frac{U_n(h) dh}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{|y| U_n(y)}{\sqrt{y^2 - 1}} +$$

Значення коефіцієнтів інтенсивності напружень

c/a	k_+^{σ}	k_-^m	$k_-^{\sigma} \cdot 10^3$	$k_+^m \cdot 10^3$
0,1	1,010	0,999	0,00418	0,0207
0,4	1,130	0,991	0,0703	0,346
0,8	1,270	0,980	0,155	0,759
1	1,610	0,953	0,343	1,710
1,2	1,800	0,937	0,408	2,120
1,5	2,090	0,913	0,443	2,590
1,8	2,390	0,889	0,398	2,900
2	2,590	0,874	0,324	3,050

$$+ \sqrt{y^2 - 1} \cdot U_n'(y) \operatorname{sgn} y - \frac{1}{2} (n+1) U_n(y), |y| > 1.$$

У результаті, отримавши значення головних частин інтегралів у вигляді

$$\begin{pmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \mu_k \\ \chi_k \end{pmatrix} \cdot U_k(\pm 1), \quad |y| > 1, \quad (18)$$

можна знайти значення коефіцієнтів інтенсивностей напружень і головних частин пружних величин.

Було отримано числовий розв'язок сформульованої задачі (1) — (3), зведеної до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь (17), що розв'язувалася методом редукції зі збереженням чотирьох членів розкладу для $\mu(y)$ та $\chi(y)$ в (16). Як навантаження, що діє на оболонку бралися згинальний момент інтенсивності $m = \text{const}$ і плоскі нормальні напруження інтенсивності $s = \text{const}$, прикладені до берегів тріщини. При цьому коефіцієнти інтенсивності напружень в обох вершинах тріщини мали однакове значення $k_{\pm}(\pm 1) = k_{\pm}$ і були пов'язані з безрозмірними коефіцієнтами $k_{\pm}^m, k_{\pm}^s$, що обчислюються за такими співвідношеннями:

$$k_{\pm} = k_{\pm}^m \frac{6m\sqrt{c}}{h^2}; \quad k_{\pm} = k_{\pm}^s s \sqrt{c}.$$

У табл. 1 наведені значення коефіцієнтів інтенсивності плоских і згинних напружень при $a/b = 0,5$ для деяких значень c/a .

Результати розрахунків для коефіцієнтів інтенсивності k_-^m — згинальних напружень від згинального навантаження, з точністю до 1 % збігаються з результатами праці [5], де подібні величини розраховувалися для задачі в наближеній постановці, запропонованій в [1]. Таким чином, числові результати підтверджують правомірність асимптотичної постановки.

Література

1. Гришин В.А., Реут В.В., Попов Г.Я. Расчет коробчатых оболочек прямоугольного сечения // ПММ. 1990. — Т.54. — Вып.4. — С. 605—612.

2. Гришин В.А., Реут В.В. Напряженное состояние коробчатой оболочки, подкрепленной парой симметричных включений, параллельных ребру оболочки // ПММ. — 1995. — Т. 59. — Вып. 5. — С. 849—852.

3. Гришин В.А., Реут В.В. Определение осадок включений в коробчатых оболочках прямоугольного профиля // Теор. и прикл. механика. — 2005. — Вып. 41. — С. 198—202.

4. Реут В.В., Воробель В.М. Концентрация напряжений вблизи концов продольной трещины в коробчатой оболочке // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (вип. 2): в 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В.В. — Львів: Каменяр, 1999. — Т. 2. — С. 316—319.

5. Воробель В.М., Реут В.В. Концентрація напружень біля вершин поперечної тріщини у коробчастій оболонці // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2000. — Вип. 7. — С. 64—67.

6. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. — М.: Наука, 1982. — 342 с.

7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 800 с.

8. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. — К.: Наук. думка, 1979. — 400 с.

Отримана 12.03.08

V. Grishin, V. Reut, O. Reut

Intense state of the environment weakened by pair of symmetric cracks parallel to the edge of the environment
Mechanikov's Odesa National University, Odesa

The problem of intense state of infinite box-shaped environment of the rectangular structure, weakened by two cracks symmetrically located on opposite sides at parallel edges of environment is considered. The problem is reduced to the system of integral equations concerning two unknown functions representing the corner of inclination and normal movements of the crack edge. Under the method of orthogonal polynomials the solution is searched as decomposition of unknown functions in to the row of Chebyshev's polynomials of the second sort. In the result the problem is reduced to the infinite system of linear algebraic equations which are solved using the method of reduction. Values of stress intensity factors of problems on curved flat loadings applied on crack edges are received.

2 í ô î ð ì à ö ³ ü

ХІІ Міжнародна науково-технічна конференція

ГЕРМЕТИЧНІСТЬ, ВІБРОНАДІЙНІСТЬ І ЕКОЛОГІЧНА БЕЗПЕКА НАСОСНОГО І КОМПРЕСОРНОГО УСТАТКУВАННЯ

9 — 12 вересня 2008 р. м. Перемешель, Польща

Тематика:

Проблеми зменшення життєвого циклу насосного і компресорного устаткування.

Питання динаміки систем “ротор — опори — ущільнення” відцентрових машин.

Зменшення шуму і вібрації насосів і компресорів, вібродіагностика і прогнозування залишкового ресурсу.

Підвищення надійності й ефективності ущільнювальних пристроїв насосів і компресорів.

Питання трибології і метрології опор та ущільнень.

Екологічно безпечна експлуатація насосного і компресорного устаткування, проблеми енерго- і ресурсоощадності.

Адреса Оргкомітету:

Оргкомітет Конференції “ТЕРВІКОН-2008”

Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2,
м. Суми, 40007, Україна.

Тел./факс: +38(0542) 33-35-94
E-mail: marts@omdm.sumdu.edu.ua

Politechnika Świętokrzyska
Al. 1000-lecia PP 7
25-314, Kielce, Poland.
E-mail: kundera@tu.kielce.pl