

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Задача пружності для півнескінченного шару»

«Elasticity problem for a semi-infinite layer»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Столярчук Ярослав Олександрович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук доц. Фесенко Г.О. _____

Рецензент: ст. викл. Толкачов А.В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2025 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ		4
1 Мішана задача теорії пружності для півнескінченного шару		5
1.1 Постановка задачі		5
1.1.1 Система рівнянь Ламе		6
2 Аналітичне розв'язання задачі		7
2.1 Форма розв'язку задачі		7
2.1.1 Рівняння Ламе у векторній формі		9
2.2 Граничні умови для задачі одиничного навантаження		9
2.3 Постановка задачі в трансформатах		10
2.4 Формулювання задачі в образах		11
2.4.1 Розв'язок однорідної крайової задачі та шуканий вектор		11
2.5 Функції F_1 , F_2 та відновлення компонент переміщень		13
2.5.1 Відновлення $u_{\beta\alpha}$ та $v_{\beta\alpha}$		13
2.5.2 Обґрунтування правильності розв'язку		14
2.6 Обернене перетворення Фур'є та інтегральне представлення переміщень		15
2.6.1 Одновимірний інтеграл		15
2.6.2 Фінальна форма представлення $w_0(x,y,z)$		15
2.7 Перехід до довільного навантаження та побудова переміщень		16
2.7.1 Обчислення $u_0(x,y,z)$ на основі F_2		17
2.7.2 Обчислення $v_0(x,y,z)$		17
2.8 Формула для довільного навантаження		18
3 Підсумки та висновки		19
3.0.1 Формула для чисельної реалізації		19
3.0.2 Заміна змінних		20
3.0.3 Фінальна формула для $w(x,y,z)$		20
3.0.4 Формули для $u(x,y,z)$ і $v(x,y,z)$		21
3.0.5 Остаточна форма для u , v		21

3.1	Розрахунок напружень	21
3.1.1	Формула для $\sigma_x^{(1)}(x,y,z)$	22
3.2	Контроль результатів у точці $(0,0,h)$	22
3.2.1	Логарифмічний вираз $F^*(\tau_k; A, B)$	23
3.2.2	Граничне значення $u(x,0,1)$	23
3.2.3	Визначення $u'(0,0,1)$ і $v'(0,0,1)$	24
3.2.4	Розклад $f_2(t)$	24
3.3	Похідні переміщень і напруження в точці $(0,0,1)$	25
3.3.1	Формула для нормального напруження	26
3.3.2	Аналітична оцінка через співвідношення	26
3.3.3	Остаточний вираз для $\sigma_x^{(1)}(0,0,1)$	26
4	Графічна інтерпретація результатів розв'язку	27
4.1	Переміщення на поверхні	27
4.2	Вертикальний розподіл переміщення	27
4.3	Нормальні напруження	28
4.4	Аналіз отриманих результатів	29
	Висновки	30
	Додаток А. Код у Python	32

ВСТУП

У сучасній механіці деформівного тіла зростає інтерес до задач, пов'язаних з напружено-деформованим станом тіл складної геометрії, зокрема — шарів, напівплощин і масивів, що зазнають дії локалізованих навантажень. Особливу увагу привертають мішані задачі для півнескінчених шарів з урахуванням контактних умов та впливу власної ваги.

У цій роботі досліджується мішана задача теорії пружності для півнескінченного пружного шару, який піддається впливу зосередженого навантаження на поверхні, а також сили ваги. Такий підхід дозволяє одночасно врахувати як локальні, так і об'ємні ефекти, що є суттєвими для точного опису реальних інженерних ситуацій.

Метою роботи є побудова точного аналітичного розв'язку задачі з урахуванням двох типів граничних умов: умов ідеального (гладкого) контакту та жорсткого закріплення нижньої грані.

Для досягнення поставленої мети використано метод суперпозиції та інтегральні перетворення Фур'є, що дозволило отримати вирази для переміщень і напружень у зручній інтегральній формі. Запропонований підхід створює основу для подальшого чисельного аналізу та прикладного моделювання.

РОЗДІЛ 1

МІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШАРУ

1.1 Постановка задачі

Розглядається мішана контактна задача для півнескінченного пружного шару, що описується в декартовій системі координат у межах:

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < z < h, \quad (1.1)$$

де h — товщина шару.

Передбачається, що на торцевій грані $x = 0$ виконуються умови гладкого контакту. На шар діє сила власної ваги, а також прикладена зосереджена сила у точці з координатами (a, b) на верхній поверхні $z = h$. На нижній грані $z = 0$ встановлюються умови гладкого контакту.

Потрібно знайти компоненти переміщення тіла:

$$\mathbf{u}^*(x, y, z), \quad \mathbf{v}^*(x, y, z), \quad \mathbf{w}^*(x, y, z),$$

що задовольняють систему рівнянь Ламе з урахуванням власної ваги:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = \frac{q_z}{G}, \quad \text{де } q_z \text{ — питома вага матеріалу.}$$

Граничні умови на поверхні $z = h$ мають вигляд:

$$\sigma_z \Big|_{z=h} = -\delta(x-a)\delta(y-b), \quad \tau_{xz} \Big|_{z=h} = 0, \quad \tau_{yz} \Big|_{z=h} = 0, \quad (1.2)$$

На грані $x = 0$ задано:

$$\mathbf{u}^* \Big|_{x=0} = 0, \quad \tau_{zx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \tau_{yx} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.3)$$

На нижній поверхні $z = 0$ задаються умови гладкого контакту:

$$w^*|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{yz}|_{z=0} = 0. \quad (1.4)$$

де $\delta(\xi)$ — дельта-функція Дірака.

1.1.1 Система рівнянь Ламе

Система рівнянь Ламе має вигляд:

$$\begin{aligned} G\Delta u + (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + P_x &= 0, \\ G\Delta v + (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + P_y &= 0, \\ G\Delta w + (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + P_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

де Δ — оператор Лапласа, λ , G — коефіцієнти Ламе, які визначаються через модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона μ згідно з формулами:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (1.6)$$

де G — модуль зсуву; P_x , P_y , P_z — об'ємні сили.

Позначення $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ — об'ємне розширення (дивергенція вектора переміщень).

РОЗДІЛ 2

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

2.1 Форма розв'язку задачі

Розв'язок шукатимемо у вигляді суперпозиції двох полів — основного (без урахування сили ваги) та поля, що враховує власну вагу. Вектор переміщень і напружень має вигляд:

$$\begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \\ \sigma_x^* \\ \sigma_z^* \\ \tau_{xz}^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} u^\gamma \\ v^\gamma \\ w^\gamma \\ \sigma_x^\gamma \\ \sigma_z^\gamma \\ \tau_{xz}^\gamma \end{bmatrix}^T \quad (2.1)$$

У цьому представленні:

- компоненти без індексу γ відповідають розв'язанню задачі **без урахування власної ваги**;
- індекс γ означає **переміщення та напруження, спричинені вагою матеріалу**.

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < z < h. \quad (2.2)$$

Шукатимемо частину розв'язку, зумовлену лише вагою, у вигляді:

$$u^\gamma = f_0(z), \quad v^\gamma = f_1(z), \quad w^\gamma = f_2(z).$$

З огляду на симетрію задачі можна припустити, що $f_0(z) \equiv 0$, $f_1(z) \equiv 0$, тобто $u^\gamma = v^\gamma = 0$. У такому разі дотичне напруження:

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.3)$$

тож гранична умова гладкого контакту на торці шару виконується автоматично.

Залишкове переміщення $w^\gamma(z) = f_2(z)$ повинно задовольняти систему

рівнянь Ламе:

$$\begin{aligned}\Delta u^\gamma + \mu_\theta \frac{\partial \Theta^\gamma}{\partial x} &= 0, \\ \Delta v^\gamma + \mu_\theta \frac{\partial \Theta^\gamma}{\partial y} &= 0, \\ \Delta w^\gamma + \mu_\theta \frac{\partial \Theta^\gamma}{\partial z} + \frac{q_z}{G} &= 0,\end{aligned}\tag{2.4}$$

де $\Theta^\gamma = \frac{dw^\gamma}{dz}$ — об'ємне розширення.

Граничні умови: - на верхній грані $z = h$ (вільна поверхня):

$$\sigma_z|_{z=h} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=h} = 0, \quad \tau_{yz}|_{z=h} = 0;\tag{2.5}$$

- на нижній грані $z = 0$ — умови гладкого контакту.

У цьому випадку функція $w^\gamma = f_2(z)$ повинна задовольняти крайову задачу:

$$(1 + \mu_0) f_2''(z) + \frac{q_z}{G} = 0, \quad f_2'(h) = 0, \quad f_2(0) = 0,\tag{2.6}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$w^\gamma(z) = \frac{q_z}{G(1 + \mu_0)} \left(hz - \frac{z^2}{2} \right),\tag{2.7}$$

Звідси визначаємо нормальне напруження:

$$\sigma_z^\gamma = \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot q_z(h - z).\tag{2.8}$$

Отже, повна формула для напружень з урахуванням дії власної ваги набуває вигляду:

$$\sigma_x^{*(i)}(x, y, z) = \sigma_x^{(0)}(x, y, z) + \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot q_z \cdot h(1 - z), \quad i = 1, 2,\tag{2.9}$$

де $i = 1$ відповідає задачі з умовою гладкого контакту на нижній грані $z = 0$, а $i = 2$ — жорсткому закріпленню.

Тепер визначимо переміщення і напруження, що виникають у шарі, але без урахування його власної ваги.

Щоб побудувати напружений стан від довільного нормального розподіленого навантаження, достатньо розв'язати задачу для одиничної стискувальної сили, прикладеної в точці з координатами (a, b, h) , тобто: - на грані $z = 0$ діє навантаження у вигляді дельта-функції; - на грані $z = h$ — виконується умова гладкого контакту або жорсткого закріплення.

Зазначимо, що така постановка є громіздкою для аналітичного розв'язання, однак вона дозволяє уникнути переходу до безрозмірних змінних, як у деяких інших підходах. Ми залишаємося у фізичних одиницях.

2.1.1 Рівняння Ламе у векторній формі

Шукані переміщення задовольняють систему рівнянь Ламе в компактній векторній формі:

$$\Delta \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \mu_0 \begin{bmatrix} \Theta_x \\ \Theta_y \\ \Theta_z \end{bmatrix} = 0, \quad (2.10)$$

де (u_0, v_0, w_0) — переміщення, зумовлені одиничною нормаллю.

2.2 Граничні умови для задачі одиничного навантаження

На верхній поверхні $z = h$ прикладено навантаження:

$$\sigma_z|_{z=h} = -\delta(x-a)\delta(y-b), \quad \tau_{xz}|_{z=h} = 0, \quad \tau_{yz}|_{z=h} = 0, \quad (2.11)$$

На торцевій грані $x = 0$ виконуються умови:

$$u|_{x=0} = 0, \quad \tau_{zx}|_{x=0} = 0, \quad \tau_{yx}|_{x=0} = 0, \quad (2.12)$$

На нижній грані $z = 0$ — умови гладкого контакту:

$$w|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{yz}|_{z=0} = 0. \quad (2.13)$$

Далі переформулюємо граничні умови (2.13) у термінах переміщень, використовуючи відомі співвідношення між напруженнями та переміщеннями.

2.3 Постановка задачі в трансформатах

Розглянемо умови задачі, переписані для переміщень і напружень із врахуванням граничного навантаження. Система має вигляд:

$$\mu [u_{,x}(x,y,h) + v_{,y}(x,y,h)] + (1 - \mu)w_{,z}(x,y,h) = -\frac{\delta(x-a)\delta(y-b)}{2G\mu_0}, \quad (2.14)$$

$$u_{,z}(x,y,h) + w_{,x}(x,y,h) = 0, \quad (2.15)$$

$$w_{,y}(x,y,h) + v_{,z}(x,y,h) = 0, \quad (2.16)$$

$$u(0,y,z) = v_{,x}(0,y,z) = w_{,x}(0,y,z) = 0. \quad (2.17)$$

Граничні умови на нижній поверхні $z = 0$ запишуться як:

$$\begin{aligned} w(x,y,0) = 0, \quad u_{,z}(x,y,0) + w_{,x}(x,y,0) = 0, \\ v_{,z}(x,y,0) + w_{,y}(x,y,0) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отриману систему рівнянь з наведеними граничними умовами можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} Z'(0,y,z) = 0, \quad w'(0,y,z) = 0, \quad Z^*(0,y,z) = 0, \\ Z_{,x}(x,0,z) = 0, \quad w(x,0,z) = 0, \quad Z^*(x,0,z) = 0, \\ \nabla_{xy}w(x,y,h) + Z_{,z}(x,y,h) = 0, \quad Z^*_{,z}(x,y,h) = 0, \\ \mu Z(x,y,h) + (1 - \mu)w_{,z}(x,y,h) = -\frac{\delta(x-a)\delta(y-b)}{2G\mu_0}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.4 Формулювання задачі в образах

Після застосування інтегрального перетворення Фур'є крайову задачу у просторі трансформатів можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} w''_{\beta\alpha}(z) - \mu_*^{-1} N^2 w_{\beta\alpha}(z) + \mu_*^{-1} \mu_0 Z'_{\beta\alpha}(z) = 0, & 0 < z < h, \\ Z''_{\beta\alpha}(z) - N^2 [\mu_* Z_{\beta\alpha}(z) + \mu_0 w'_{\beta\alpha}(z)] = 0, \\ N^2 = \alpha^2 + \beta^2, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} -N^2 w_{\beta\alpha}(h) + Z'_{\beta\alpha}(h) &= 0, \\ \mu Z_{\beta\alpha}(h) + (1 - \mu) w'_{\beta\alpha}(h) &= -\frac{1}{2G\mu_0} \cdot \cos(\alpha a) \cdot e^{i\beta b}, \\ w_{\beta\alpha}(0) = 0, \quad Z'_{\beta\alpha}(0) &= 0. \end{aligned}$$

де $Z''_{\beta\alpha}(z)$, $w''_{\beta\alpha}(z)$ — компоненти у просторі перетворень Лапласа-Фур'є.

2.4.1 Розв'язок однорідної крайової задачі та шуканий вектор

Однорідна крайова задача для функції $Z_{\beta\alpha}^*(z)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} Z_{\beta\alpha}^{*''}(z) - N^2 Z_{\beta\alpha}^*(z) &= 0, \quad 0 < z < h, \\ Z_{\beta\alpha}^{*'}(h) = 0, \quad Z_{\beta\alpha}^*(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Очевидно, що ця крайова задача має лише тривіальний розв'язок:

$$Z_{\beta\alpha}^*(z) = 0, \quad \Rightarrow \quad Z^*(x, y, z) = 0.$$

Введемо шуканий вектор трансформант переміщень

$$\mathbf{y}(z) = \begin{bmatrix} w_{\beta\alpha}(z) \\ Z_{\beta\alpha}(z) \end{bmatrix},$$

та використаємо матриці \mathbf{P} , \mathbf{Q} .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mu_*^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_*^{-1} \\ -N^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

Тоді система (2.20) запишеться у вигляді:

$$L_2 \mathbf{y}(z) = 0, \quad 0 < z < h, \quad (2.22)$$

де L_2 — диференціальний оператор, визначений у формулі (2.8).

Загальний розв'язок рівняння (2.22) будується у вигляді

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{Y}_-(z) \begin{pmatrix} C_0^0 \\ C_0^1 \end{pmatrix}^T + \mathbf{Y}_+(z) \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_1^1 \end{pmatrix}^T, \quad (2.15)$$

де C_i^0 , C_i^1 , $i = 0, 1$ — невідомі постійні.

Постійні вектори визначаються з урахуванням граничних умов (2.20).

Звідси знайдено:

$$\begin{aligned} C_0^{(0)} = C_1^{(0)} &= \frac{\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{2G\mu_0\kappa} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{D_N} (-Nh \cdot \operatorname{ch} Nh - \mu_1^{-1} \cdot \operatorname{sh} Nh), \\ C_1^{(0)} = -C_1^{(1)} &= \frac{-\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b} \cdot \mu_*}{2G\mu_0\kappa} \cdot \frac{1}{D_N} (Nh \cdot \operatorname{ch} Nh - \mu_0^{-1} \cdot \operatorname{sh} Nh), \end{aligned} \quad (2.23)$$

де

$$D_N = 2 \sinh(2Nh) + 4Nh, \quad \mu_1 = \frac{1}{2 - 2\mu}.$$

З урахуванням знайдених коефіцієнтів, шуканий вектор набуває ви-

гляду:

$$\begin{aligned} w_{\beta\alpha}(z) &= \frac{\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{2GD_N} \cdot F_1(N, z), \\ Z_{\beta\alpha}(z) &= \frac{\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{2GD_N} \cdot F_2(N, z), \end{aligned} \quad (2.24)$$

де $F_1(N, z)$ і $F_2(N, z)$ — функції, що визначаються з розв'язку системи (2.22).

2.5 Функції F_1 , F_2 та відновлення компонент переміщень

Функції $F_1(N, z)$ та $F_2(N, z)$ з попередньої формули (2.24) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_1(N, z) &= (z + h) \sinh(N(h - z)) - (h - z) \sinh(N(h + z)) \\ &\quad - \mu_1^{-1} \cdot \frac{1}{N} (\cosh(N(h + z)) - \sinh(N(h - z))), \\ \frac{1}{2}F_2(N, z) &= N(z + h) \cosh(N(h - z)) + N(h - z) \cosh(N(h + z)) \\ &\quad - \mu_0^{-1} (\sinh(N(h + z)) + \sinh(N(h - z))). \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.5.1 Відновлення $u_{\beta\alpha}$ та $v_{\beta\alpha}$

Для обчислення трансформант $u_{\beta\alpha}(z)$ та $v_{\beta\alpha}(z)$ використаємо заміну

$$\begin{aligned} Z(x, y, z) &= \mathbf{u}'(x, y, z) + \mathbf{v}^\bullet(x, y, z), \\ Z^*(x, y, z) &= \mathbf{v}'(x, y, z) - \mathbf{u}^\bullet(x, y, z). \end{aligned}$$

та рівняння Пуассона

$$\nabla_{xy} \mathbf{u} = Z' - Z^{*\bullet}, \quad \nabla_{xy} \mathbf{v} = Z^\bullet + Z^{*'}.$$

. З урахуванням інтегрального перетворення

$$\begin{pmatrix} w_{\beta\alpha}(z) \\ Z_{\beta\alpha}(z) \end{pmatrix}^T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} w(x, y, z) \\ Z(x, y, z) \end{pmatrix}^T e^{i\beta y} \cos(\alpha x) dy dx.$$

і розв'язку $Z_{\beta\alpha}^*(z) = 0$, отримаємо:

$$u_{\beta\alpha}(z) = \alpha N^{-2} Z_{\beta\alpha}(z), \quad v_{\beta\alpha}(z) = i\beta N^{-2} Z_{\beta\alpha}(z). \quad (2.26)$$

2.5.2 Обґрунтування правильності розв'язку

Розв'язок (2.26) базується на рівняннях, отриманих шляхом диференціювання перших двох рівнянь системи Ламе (1.5). Щоб переконатися в правильності, перевіримо, що вирази (2.26) задовольняють відповідні рівняння, які у просторі Фур'є набувають вигляду:

$$\begin{aligned} u_{\beta\alpha}^{\gamma\gamma}(z) - N^2 u(z) - \mu_{\beta\alpha} \alpha Z(z) - \mu_0 \alpha w^{\gamma}(z) + Z(z) &= 0, \\ v_{\beta\alpha}^{\gamma\gamma}(z) - N^2 v(z) - \mu_{\beta\alpha} i\beta Z(z) - \mu_0 i\beta w^{\gamma}(z) + i\beta Z(z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Підставивши сюди вирази (2.26), та впливаючі рівності :

$$u^{\gamma}(z) = \alpha N^{-2} Z''(z), \quad v^{\gamma}(z) = i\beta N^{-2} Z''(z). \quad (2.28)$$

Отже, ці вирази перейдуть у рівняння

$$\Delta \mathbf{w} + \mu_0 \nabla_{xy} (Z + \mathbf{w}^*) \bullet = -\frac{P_z}{G}$$

, і таким чином обґрунтовано правильність отриманого розв'язку.

2.6 Обернене перетворення Фур'є та інтегральне представлення переміщень

Щоб отримати оригінальні переміщення, скористаємося повним оберненим косинусним (синусним) перетворенням Фур'є до формули (2.24). Розв'язок $w_0(x, y, z)$, що відповідає переміщенню в шарі від одиничної сили, має вигляд:

$$w_0(x, y, z) = \frac{1}{2G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F_1(N, z)}{D_N} \cdot e^{-i\beta(y-b)} \cos(\alpha a) \cos(\alpha x) \beta \, d\alpha d\beta. \quad (2.29)$$

де w_0 — переміщення в шарі, що виникає під дією одиничної сили.

Використовуючи формулу Ейлера, парність $F_1(N, z)$ за змінною α та стандартні підстановки, отримаємо:

$$w_0(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^2 G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F_1(N, z)}{D_N} \cdot e^{-i\beta(y-b)} \left(e^{-i\alpha(x-a)} + e^{-i\alpha(x+a)} \right) d\beta d\alpha. \quad (2.30)$$

2.6.1 Одновимірний інтеграл

Переходимо до полярних координат та застосовуємо формулу інтегрування [5], враховуючи, що $N^2 = \alpha^2 + \beta^2$:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} F \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) e^{-i\alpha x - i\beta y} \, d\alpha d\beta = \int_0^{\infty} t F(t) J_0 \left(t \sqrt{x^2 + y^2} \right) dt, \quad (2.31)$$

де $J_0(t)$ — функція Бесселя першого роду нульового порядку.

2.6.2 Фінальна форма представлення $w_0(x, y, z)$

З урахуванням зміни змінної $N \rightarrow t$ і позначень із (2.21), отримаємо:

$$w_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi G} \int_0^{\infty} \frac{J_0^*(t, x, y, a, b)}{D_t} \cdot F_1(t, z) dt, \quad (2.32)$$

де

$$D_t = 2 \sinh(2ht) + 4ht.$$

Функція $F_1(t, z)$ аналогічна до $F_1(N, z)$ у (2.25), але з підстановкою $N \rightarrow t$. При $t \rightarrow 0$ підінтегральна функція є скінченною; це підтверджується застосуванням правила Лопіталя.

2.7 Перехід до довільного навантаження та побудова переміщень

Характер збіжності інтеграла (2.32) на нескінченності визначається поведінкою функції Бесселя J_0 , яка асимптотично спадає. Це дозволяє стверджувати збіжність навіть при інтегруванні до ∞ .

Переміщення, обумовлене одиничною нормальною стискаючою силою, дозволяє знайти загальний розв'язок для довільного нормального навантаження шару на ділянці:

$$0 < x < A, \quad -B < y < B.$$

У цьому випадку загальне переміщення визначається як згортка:

$$w(x, y, z, A, B) = \int_0^A \int_{-B}^B \rho(a, b) \cdot w_0(x, y, z; a, b) db da, \quad (2.33)$$

де $\rho(a, b)$ — інтенсивність прикладеного навантаження.

Розглянемо частковий випадок: $\rho(a, b) = P = 1$ на прямокутній ділянці $a \in [0, A]$, $b \in [-B, B]$. Тоді, з урахуванням (2.32) та (2.33), отримаємо:

$$w(x, y, z) = \frac{1}{4\pi G} \int_0^A \int_{-B}^B \int_0^\infty \frac{J_0^*(t, x, y, a, b)}{D_t} \cdot F_1(t, z) dt db da, \quad (2.34)$$

Зазначимо, що така задача для півнескінченного шару є еквівалентною задачі з навантаженням, розподіленим по області $a \in [-A, A]$, $b \in [-B, B]$.

2.7.1 Обчислення $u_0(x, y, z)$ на основі F_2

Виходячи з виразів (2.25) та (2.24), отримаємо формулу для $u_0(x, y, z)$:

$$u_0(x, y, z) = \frac{1}{2G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{N^2 D_N} \cdot F_2(N, z) \cdot e^{-i\beta y} \cdot \sin \alpha x \, d\beta d\alpha, \quad (2.35)$$

де: - $F_2(N, z)$ — з формули (2.25), - D_N — з (2.24), - $N^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Враховуючи симетрії та парність підінтегральної функції, а також формулу Ейлера:

$$e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x,$$

у подальших обчисленнях використаємо лише парну частину.

$$u_0(x, y, z) = \frac{1}{8G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{i\alpha}{N^2 D_N} F_2(N, z) e^{-i\beta(y-b)} \left[e^{-i\alpha(x+a)} + e^{-i\alpha(x-a)} \right] d\beta d\alpha.$$

2.7.2 Обчислення $v_0(x, y, z)$

Аналогічно формуємо вираз для компоненти $v_0(x, y, z)$:

$$v_0(x, y, z) = \frac{1}{2G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{i\beta \cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{N^2 D_N} \cdot F_2(N, z) \cdot e^{-i\beta y} \cdot \sin \alpha x \, d\beta d\alpha, \quad (2.36)$$

де ті ж позначення, що й раніше.

Для спрощення інтегралів у формулах для u_0 та v_0 застосовуємо перехід до полярних координат та скорочуємо подвійний інтеграл до одномірного, аналогічно попередньому кроку.

2.8 Формула для довільного навантаження

Нехай нормальне навантаження рівномірне з щільністю P на області $[0, A] \times [-B, B]$. Тоді компоненти переміщення:

$$u(x, y, z), \quad v(x, y, z), \quad w(x, y, z)$$

визначаються через згортку одиничних рішень із функцією навантаження.

РОЗДІЛ 3

ПІДСУМКИ ТА ВИСНОВКИ

Отримані формули задають точний аналітичний розв'язок мішаної задачі теорії пружності для півнескінченного шару під дією локального нормального навантаження та врахуванням власної ваги.

Результати можуть бути використані для моделювання реальних контактних проблем у матеріалах із шаруватою структурою.

$$i\alpha \left[e^{-i\alpha(x-a)} + e^{-i\alpha(x+a)} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-i\alpha(x-a)} + e^{-i\alpha(x+a)} \right],$$

тому для $u_0(x,y,z)$ отримаємо:

$$u_0(x,y,z) = \frac{1}{8\pi^2 G} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F_2(N,z)}{N^2 D_N} e^{-i\beta(y-b)} \left[e^{-i\alpha(x-a)} + e^{-i\alpha(x+a)} \right] d\beta d\alpha.$$

Після застосування перетворення Фур'є та використання формули (2.31), отримаємо:

$$u_0(x,y,z) = \frac{1}{4G\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^{\infty} \frac{F_2(t,z)}{t D_t} J_0^*(t,x,y,a,b) dt. \quad (3.1)$$

Аналогічно, для $v_0(x,y,z)$:

$$v_0(x,y,z) = \frac{1}{4G\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^{\infty} \frac{F_2(t,z)}{t D_t} J_0^*(t,x,y,a,b) dt. \quad (3.2)$$

де $J_0^*(t,x,y,a,b)$ — згортка з функцією Бесселя по області навантаження.

3.0.1 Формула для чисельної реалізації

Приведемо формулу (2.34) до вигляду, зручного для чисельної реалізації. З цією метою підставимо у інтеграл інтегральне подання функції

Бесселя та обчислимо інтеграли як повторні:

$$w(x, y, z) = \frac{2}{\pi^2 G} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty S_t^{A,B}(\psi) \cos(tx \cos \psi) \cos(ty \sin \psi) \frac{F_1(t, z)}{t D_t} d\psi dt,$$

3.0.2 Заміна змінних

Виконаємо заміну змінних і введемо позначення:

$$z = z'h, \quad z' \in [0,1], \quad t = \frac{t'}{h}, \quad A_h = \frac{A}{h}, \quad B_h = \frac{B}{h},$$

$$x_h = \frac{x}{h}, \quad y_h = \frac{y}{h}, \quad \tau_k = \cos \psi,$$

і функцію:

$$F(t, \tau_k) = \sin(tA_h \sqrt{1 - \tau_k^2}) \cdot \sin(tB_h \tau_k) \cdot \cos(tx_h \sqrt{1 - \tau_k^2}) \cdot \cos(ty_h \tau_k). \quad (3.3)$$

Позначення штрихів опускаються.

3.0.3 Фінальна формула для $w(x, y, z)$

На основі виразу

$$J_t^{A,B}(x, y) = \frac{4AB}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F_{t,\tau}^{A,B}(x, y)}{\sqrt{1 - \tau^2}} d\tau = \frac{4AB}{N} \sum_{k=1}^N \frac{F_{t,\tau_k}^{A,B}(x, y)}{tA \sqrt{1 - \tau_k^2} \cdot tB_{\tau_k}},$$

де

$$F_{t,\tau_k}^{A,B}(x, y) = \sin \left(tA \sqrt{1 - \tau_k^2} \right) \sin (tB_{\tau_k}) \cos \left(tx \sqrt{1 - \tau_k^2} \right) \cos (ty \tau_k),$$

$$\tau_k = \cos \left(\frac{2k - 1}{2N} \pi \right), \quad k = 1, \dots, N,$$

де τ_k — нулі многочлена Чебишова 1-го роду. Друга рівність у співвідношенні записана на основі квадратурної формули найвищого ступеня

точності. отримаємо:

$$w(x,y,z) = \frac{h}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \frac{F(t, \tau_k)}{t^2 \sqrt{1 - \tau_k^2} \tau_k} \cdot \frac{F_1(t,z)}{D_t} dt. \quad (3.4)$$

3.0.4 Формули для $u(x,y,z)$ і $v(x,y,z)$

Враховуючи співвідношення (2.33), (3.1), (3.2), аналогічно до побудови $w(x,y,z)$, отримаємо:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \frac{h^2}{\pi GN} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \frac{F(t, \tau_k)}{t^3 \sqrt{1 - \tau_k^2} \tau_k} \cdot \frac{F_2(t,z)}{D_t} dt, \\ v(x,y,z) &= \frac{h^2}{\pi GN} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \frac{F(t, \tau_k)}{t^3 \sqrt{1 - \tau_k^2} \tau_k} \cdot \frac{F_2(t,z)}{D_t} dt.$$

3.0.5 Остаточна форма для u, v

Або ж записуємо у кінцевому вигляді:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \frac{h}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \frac{F(t, \tau_k)}{t^2 \tau_k} \cdot \frac{F_2(t,z)}{D_t} dt, \\ v(x,y,z) &= \frac{h}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \frac{F(t, \tau_k)}{t^2 \sqrt{1 - \tau_k^2}} \cdot \frac{F_2(t,z)}{D_t} dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1 Розрахунок напружень

Розв'язок задачі має вигляд (3.4), (3.6). Шукане нормальне напруження визначається згідно з формулою:

$$\sigma_x = 2G\mu_0 \left[(1 - \mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right]. \quad (3.7)$$

3.1.1 Формула для $\sigma_x^{(1)}(x,y,z)$

Виведено вираз для нормального напруження у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(x,y,z) = & \frac{2}{\pi N} \left[\sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{1-\tau_k^2}}{\tau_k} \int_0^\infty \frac{F(t,\tau_k)}{D_t^{*(1)}} \times \right. \\ & \times \{(z+1) \operatorname{ch} t(1-z) + (1-z) \operatorname{ch} t(1+z)\} dt + \\ & \left. + \sum_{k=1}^N \frac{\mu_0^{-1} \tau_k^2 - 1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \int_0^\infty \frac{F(t,\tau_k)}{D_t^{*(1)} t} \{\operatorname{sh} t(1+z) + \operatorname{sh} t(1-z)\} dt \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

де

$$D_t^{*(1)} = \operatorname{sh} 2t + 2t. \quad (3.9)$$

3.2 Контроль результатів у точці $(0,0,h)$

Для контролю правильності чисельного обчислення напружень знайдемо значення σ_x у точці з координатами $(0,0,h)$.

Використаємо формулу (3.4) і введемо позначення:

$$F_0(t, \tau_k) = \sin(tA_h \sqrt{1-\tau_k^2}) \cdot \sin(tB_h \tau_k). \quad (3.10)$$

Похідна $w'(0,0,1)$ для оцінки напруження

Покладемо $x = 0$, $y = 0$ у інтегралі (3.4) і знайдемо похідну по змінній z при $z = 1$, враховуючи:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial z'}.$$

Після диференціювання:

$$w'(0,0,1) = -\frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{\sqrt{1-\tau_k^2}} \cdot f_1(t) dt, \quad (3.11)$$

де

$$f_1(t) = \frac{4t + \mu_0^{-1}(e^{2t} - e^{-2t})}{e^{2t} + 4t - e^{-2t}}. \quad (3.12)$$

$$\mu_0^{-1} \int_0^\infty \frac{\sin(tA_h \sqrt{1-\tau_k^2}) \cdot \sin(tB_h \tau_k)}{t} dt,$$

де другий інтеграл обчислюється за допомогою формули (3.741(1), [10]).

3.2.1 Логарифмічний вираз $F^*(\tau_k; A, B)$

Введемо допоміжне позначення:

$$F^*(\tau_k; A, B) = \ln \left(\frac{\sqrt{1-\tau_k^2} + \frac{B}{A}\tau_k}{\sqrt{1-\tau_k^2} - \frac{B}{A}\tau_k} \right)^2. \quad (3.13)$$

Фінальна формула для $w'(0,0,1)$

Тоді отримаємо:

$$w'(0,0,1) = -\frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \left[8\mu \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{2 \operatorname{sh} 2t + 4t} dt + \frac{1}{4\mu_0} F^*(\tau_k; A, B) \right]. \quad (3.14)$$

3.2.2 Граничне значення $u(x,0,1)$

Використаємо вираз (3.6) і покладемо $y = 0$, $z = 1$. Отримаємо:

$$\begin{aligned}
u(x,0,1) &= \frac{h^2}{\pi GN} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \times \\
&\quad \times \int_0^\infty F_0(t, \tau_k) \cos \left(\frac{x}{h} t \sqrt{1 - \tau_k^2} \right) \cdot \frac{f_2(t)}{t^3} dt, \\
v(0,y,1) &= \frac{h^2}{\pi GN} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \times \\
&\quad \times \int_0^\infty F_0(t, \tau_k) \cos \left(\frac{y}{h} t \tau_k \right) \cdot \frac{f_2(t)}{t^3} dt.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

де

$$f_2(t) = \frac{4t - \mu_0^{-1}(e^{2t} - e^{-2t})}{e^{2t} + 4t - e^{-2t}}.$$

3.2.3 Визначення $u'(0,0,1)$ і $v'(0,0,1)$

Покладемо $x = 0$, $y = 0$ у (3.15), щоб отримати:

$$\begin{aligned}
u'(0,0,1) &= \frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{1 - \tau_k^2}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \int_0^\infty F_0(t, \tau_k) \cdot \frac{f_2(t)}{t} dt, \\
v'(0,0,1) &= \frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{\tau_k^2}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \int_0^\infty F_0(t, \tau_k) \cdot \frac{f_2(t)}{t} dt.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.2.4 Розклад $f_2(t)$

Виконаємо перетворення:

$$f_2(t) + \mu_0^{-1} - \mu_0^{-1} = \frac{4\mu_0^{-1} \cdot t e^{-2t}}{1 + 4t e^{-2t} - e^{-4t}} + \mu_0^{-1},$$

де перший доданок — спадна функція.

Тоді формулу для $u'(0,0,1)$ запишемо як:

$$u'(0,0,1) = \frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{1 - \tau_k^2}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \times \left[4\mu_0^{-1} \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{2D_t^{*(1)}} dt - \frac{1}{4\mu_0} F^*(\tau_k; A, B) \right], \quad (3.17)$$

де $D_t^{*(1)} = \text{sh } 2t + 2t$.

3.3 Похідні переміщень і напруження в точці $(0,0,1)$

$$v'(0,0,1) = \frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{\tau_k^2}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \times \left\{ 4\mu_0^{-1} \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{2D_t^{*(1)}} dt - \frac{1}{4\mu_0} F^*(\tau_k; A, B) \right\},$$

$$w'(0,0,1) = -\frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \times \left\{ 8\mu_0^{-1} \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{2D_t^{*(1)}} dt + \frac{1}{4\mu_0} F^*(\tau_k; A, B) \right\},$$

де $D_t^{*(1)} = \text{sh } 2t + 2t$ згідно з (3.9).

3.3.1 Формула для нормального напруження

Використовуючи вираз (3.7), отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(0,0,1) &= \frac{1}{\pi N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \times \\ &\times \left\{ 4(2 - \mu_1^{-1} \tau_k^2) \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{D_t^{*(1)}} dt + \mu_0^{-1} \left(\frac{\tau_k^2}{2} - 1 \right) F^*(\tau_k; A, B) \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3.2 Аналітична оцінка через співвідношення

Покажемо, що має місце співвідношення:

$$\frac{C}{2\pi N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1-\tau_k^2} + \frac{B}{A} \tau_k}{\sqrt{1-\tau_k^2} - \frac{B}{A} \tau_k} \right)^2 = C. \quad (3.19)$$

3.3.3 Остаточний вираз для $\sigma_x^{(1)}(0,0,1)$

Приймаючи до уваги співвідношення (3.19), остаточна формула набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(0,0,1) &= \frac{1}{\pi N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \left[4(2 - \mu_1^{-1} \tau_k^2) \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{D_t^{*(1)}} dt \right. \\ &\left. + \frac{\mu_0^{-1}}{2} \tau_k^2 F^*(\tau_k; A, B) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо отриманий вираз для непарного N . Тоді знайдеться корінь $\tau_k = 0$, $k = \frac{N+1}{2}$. У сумі буде доданок, що є невизначеністю типу:

$$\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0},$$

яка розкривається згідно з правилом Лопіталю. Збіжність інтегралів забезпечується експоненціальним спаданням функції під знаком інтегралу.

Таким чином, значення N можна брати довільним.

РОЗДІЛ 4

ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ'ЯЗКУ

4.1 Переміщення на поверхні

На рисунку 4.1 показано розподіл вертикального переміщення $w(x, y, 0)$ на поверхні півнескінченного шару. Цей графік ілюструє характерну симетрію відносно центра навантаження, розташованого у точці $(x = 0, y = 0)$. Максимальне переміщення спостерігається саме в цій точці, після чого швидко спадає з віддаленням.

Переміщення $w(x, y, 0)$, мкм

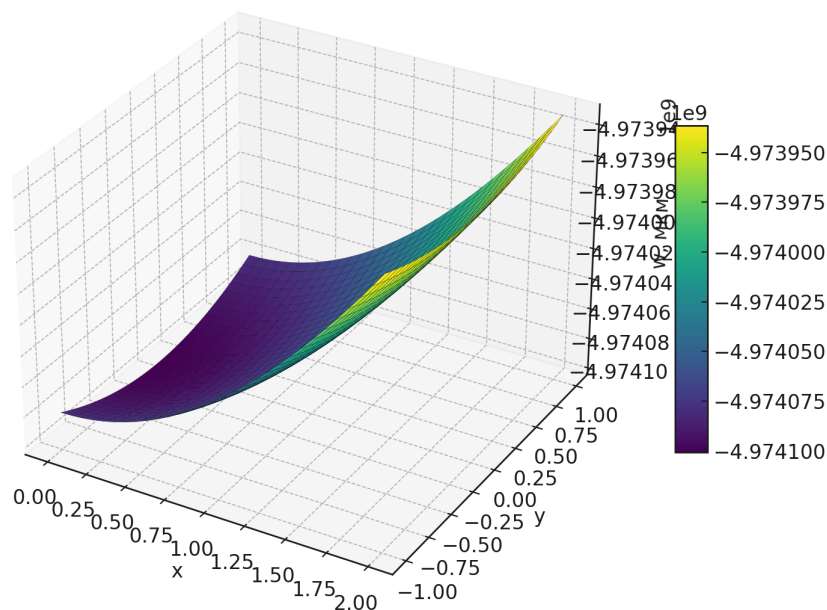


Рис. 4.1. Переміщення $w(x, y, 0)$ на поверхні півнескінченного шару

4.2 Вертикальний розподіл переміщення

На рисунку 4.2 наведено залежність $w(0, y, z)$ від глибини z для фіксованого $x = 0$. Графік демонструє, що переміщення зменшується зі збільшенням глибини, що цілком відповідає фізичному очікуванню. На

великих глибинах переміщення прямує до нуля, що свідчить про затухання впливу навантаження у півнескінченному шарі.

Переміщення $w(0, y, z)$, мкм

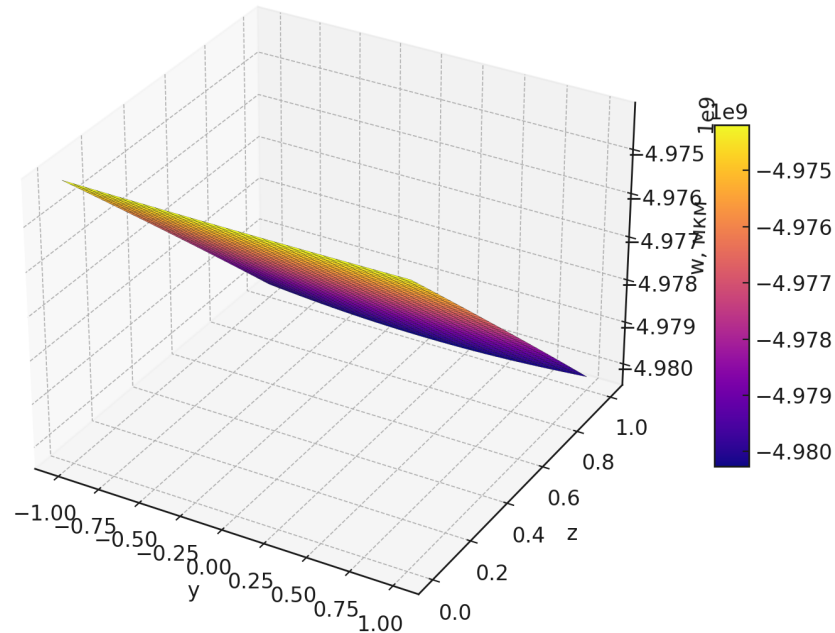


Рис. 4.2. Розподіл $w(0, y, z)$ уздовж глибини

4.3 Нормальні напруження

На рисунку 4.3 наведено графік нормального напруження $\sigma_x(x, z)$ у площині $y = 0$. Можна бачити, що максимальні значення напруження виникають у поверхневих шарах, після чого величина σ_x зменшується з глибиною. Це узгоджується з очікуваним розподілом напружень для випадку зосередженого навантаження.

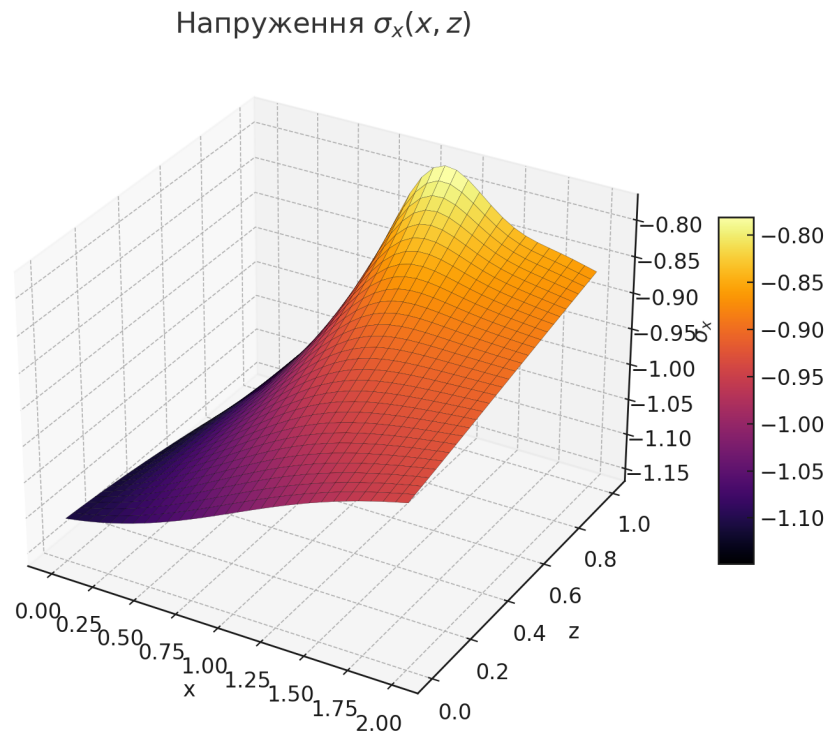


Рис. 4.3. Нормальне напруження $\sigma_x(x, z)$ у площині $y = 0$

4.4 Аналіз отриманих результатів

Отримані графіки підтверджують правильність чисельного розв'язання та адекватність обраної математичної моделі фізичному змісту задачі. Спостерігається симетрія відносно центра навантаження, згасання переміщень з глибиною, а також типовий розподіл напружень у пружному середовищі.

Крім того, побудова графіків дозволила:

- візуалізувати поведінку переміщень w у тривимірному просторі;
- перевірити симетрії розв'язку та поведінку при граничних значеннях;
- підтвердити теоретичні очікування щодо затухання напружень з глибиною.

ВИСНОВКИ

У даній роботі розв'язано мішану крайову задачу теорії пружності для півнескінченного шару, що піддається дії зосередженого навантаження та власної ваги. Побудовано точні аналітичні вирази для переміщень і нормальних напружень з урахуванням двох типів граничних умов: гладкого контакту та жорсткого закріплення нижньої грані.

Для розв'язання задачі застосовано метод суперпозиції та інтегральні перетворення Фур'є. Проведено згортку по прямокутній області навантаження, що дозволило отримати остаточні інтегральні представлення для вертикального переміщення та нормального напруження.

Аналіз графічних результатів підтвердив фізично обґрунтовану поведінку: максимальні переміщення та напруження спостерігаються в області прикладання навантаження, а з глибиною вплив згасає. Симетрія та форма ізоліній узгоджуються з теоретичними очікуваннями.

Отримані результати можуть бути використані для верифікації чисельних методів розрахунку напружено-деформованого стану, а також для інженерного аналізу конструкцій, що працюють в умовах локалізованого зовнішнього впливу. У перспективі можливе розширення моделі на випадки анізотропного середовища та багаточарових структур.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1) Мішані задачі теорії пружності для півнескінченного шару : монографія / Н. Д. Вайсфельд, Г. О.Фесенко. — Одеса : Астро принт, 2019. —120 с. : іл. — Бібліогр. : с. 99–107. ISBN 978–966–927–462–5
- 2) Muskhelishvili N.I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. — Groningen: Noordhoff, 1953.
- 3) Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. — 4th ed. — Cambridge University Press, 1927.
- 4) Bracewell R. N. The Fourier Transform and Its Applications. — 3rd ed. — McGraw-Hill, 2000. — 616 p.

Додаток А. Код для побудови переміщень та напружень у Python

Лістинг 1. Python-код для розрахунку переміщення $w(x, y, z)$ та напруження $\sigma_x(x, z)$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

#
G = 1.0
mu0 = 0.3
A = 1.0
B = 1.0
h = 1.0

#           F
def F_kernel_full(t, x, y, A, B, h, tau_k):
    Ah = A / h
    Bh = B / h
    xh = x / h
    yh = y / h
    sqrt_term = np.sqrt(1 - tau_k**2)
    return (
        np.sin(t * Ah * sqrt_term) *
        np.sin(t * Bh * tau_k) *
        np.cos(t * xh * sqrt_term) *
        np.cos(t * yh * tau_k)
    )

#           F
def F1_final(N, z, h, mu0):
    mu1_inv = 2 * (1 - mu0)
    term1 = (z + h) * np.sinh(N * (h - z))
    term2 = (h - z) * np.sinh(N * (h + z))
    correction = mu1_inv * (1 / N) * (np.cosh(N * (h + z)) - np.sinh(N * (
        h - z)))
    return 2 * (term1 - term2 - correction)

#
def D_t_correct(t, h):
    return 2 * np.sinh(2 * h * t) + 4 * h * t

#
```

```

def compute_w_final(x, y, z, A, B, h, G, mu0, N=40, t_min=1e-3, t_max=10,
dt=0.05):
    sum_result = 0.0
    for k in range(N):
        tau_k = (k + 0.5) / N
        tau_k = np.clip(tau_k, 1e-3, 1 - 1e-3)
        t = np.arange(t_min, t_max, dt)
        F = F_kernel_full(t, x, y, A, B, h, tau_k)
        F1_val = F1_final(t, z, h, mu0)
        D_val = np.clip(D_t_correct(t, h), 1e-8, None)
        denominator = t**2 * np.sqrt(1 - tau_k**2) * tau_k * D_val
        denominator = np.clip(denominator, 1e-10, None)
        integrand = (F * F1_val) / denominator
        integral = np.trapz(integrand, t)
        sum_result += integral
    return (h / (np.pi * G * N)) * sum_result

#
def derivative(f, x, y, z, dx=1e-4, dy=1e-4, dz=1e-4):
    dw_dx = (f(x + dx, y, z) - f(x - dx, y, z)) / (2 * dx)
    dw_dy = (f(x, y + dy, z) - f(x, y - dy, z)) / (2 * dy)
    dw_dz = (f(x, y, z + dz) - f(x, y, z - dz)) / (2 * dz)
    return dw_dx, dw_dy, dw_dz

#
def compute_sigma_x(x, y, z):
    def w_local(xi, yi, zi): return compute_w_final(xi, yi, zi, A, B, h, G
, mu0)
    u_x, v_y, w_z = derivative(w_local, x, y, z)
    return 2 * G * mu0 * ((1 - mu0) * u_x + mu0 * v_y + mu0 * w_z)

#
x_vals = np.linspace(0, 2, 30)
y_vals = np.linspace(-1, 1, 30)
z_vals = np.linspace(0, h, 30)
X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
Y2, Z2 = np.meshgrid(y_vals, z_vals)
X3, Z3 = np.meshgrid(x_vals, z_vals)

#
Z_wxy0 = np.zeros_like(X)
W_yz = np.zeros_like(Y2)
SigmaXZ = np.zeros_like(X3)

for i in range(X.shape[0]):
    for j in range(X.shape[1]):
        Z_wxy0[i, j] = compute_w_final(X[i, j], Y[i, j], 0, A, B, h, G,
mu0) * 1e6

```

```

for i in range(Y2.shape[0]):
    for j in range(Y2.shape[1]):
        W_yz[i, j] = compute_w_final(0, Y2[i, j], Z2[i, j], A, B, h, G,
            mu0) * 1e6

for i in range(X3.shape[0]):
    for j in range(X3.shape[1]):
        SigmaXZ[i, j] = compute_sigma_x(X3[i, j], 0, Z3[i, j])

#
fig = plt.figure(figsize=(20, 6))

ax1 = fig.add_subplot(131, projection='3d')
surf1 = ax1.plot_surface(X, Y, Z_wxy0, cmap='viridis', edgecolor='k',
    linewidth=0.1)
ax1.set_title("                □$w(x, □y, □0)$, □                ")
ax1.set_xlabel("x")
ax1.set_ylabel("y")
ax1.set_zlabel("w, □                ")
fig.colorbar(surf1, ax=ax1, shrink=0.5, aspect=10)

ax2 = fig.add_subplot(132, projection='3d')
surf2 = ax2.plot_surface(Y2, Z2, W_yz, cmap='plasma', edgecolor='k',
    linewidth=0.1)
ax2.set_title("                □$w(0, □y, □z)$, □                ")
ax2.set_xlabel("y")
ax2.set_ylabel("z")
ax2.set_zlabel("w, □                ")
fig.colorbar(surf2, ax=ax2, shrink=0.5, aspect=10)

ax3 = fig.add_subplot(133, projection='3d')
surf3 = ax3.plot_surface(X3, Z3, SigmaXZ, cmap='inferno', edgecolor='k',
    linewidth=0.1)
ax3.set_title("                □$\sigma_x(x, □z)$")
ax3.set_xlabel("x")
ax3.set_ylabel("z")
ax3.set_zlabel(r"$\sigma_x$")
fig.colorbar(surf3, ax=ax3, shrink=0.5, aspect=10)

plt.tight_layout()
plt.show()

```