

ЗМІСТ

Вступ	3
1. Модель епідемії (модель Бейлі)	5
2. Математичне забезпечення моделі	15
3. Основні моделі епідеміології	26
Висновок	29
Список літератури	30

Вступ

Епідеміологія є однією з ключових дисциплін у сфері охорони здоров'я, яка займається вивченням розповсюдження та факторів, що впливають на виникнення хвороб у популяціях. У сучасному світі, де глобалізація, урбанізація та зміни клімату призводять до нових викликів у сфері громадського здоров'я, ефективне управління епідеміями стає надзвичайно актуальним. Одним із найважливіших інструментів, що сприяють розумінню та контролю розповсюдження інфекційних захворювань, є математичне моделювання.

Математичні моделі в епідеміології дозволяють не лише описувати поточну ситуацію з поширення хвороби, але й прогнозувати майбутні сценарії, оцінювати ефективність різних заходів контролю та планувати ресурсне забезпечення систем охорони здоров'я. Вони надають можливість аналізувати складні взаємодії між різними факторами, що впливають на динаміку епідемії, та приймати обґрунтовані рішення на основі кількісних даних.

Метою даної дипломної роботи є дослідження методів математичного моделювання в епідеміології, аналіз їх ефективності та застосовності у сучасних умовах. Для досягнення цієї мети передбачається виконати наступні завдання:

1. Розглянути основні поняття та принципи епідеміології.
2. Вивчити історичний розвиток математичних моделей у цій сфері.
3. Проаналізувати сучасні типи математичних моделей, їхні переваги та обмеження.
4. Провести практичне застосування обраної моделі для аналізу конкретного епідемічного сценарію.
5. Оцінити результати моделювання та їхнє значення для практичної епідеміологічної діяльності.

Робота складається з 4 розділів, висновка та списку літератури з 10 найменуваннями. Перший розділ описує базову математичну модель, яка може використовуватись в епідемології, модель Бейлі. Другий розділ розглядає математичне забезпечення усіх моделей. Третій розділ розглядає найпростішу модель для моделювання протікання епідеміологічних хвороб, SIR. Четвертий розділ розглядає модифікацію SIR, SEIR з урахуванням інкубаційного періоду та математичне основи цієї моделі.

1. МОДЕЛЬ ЕПІДЕМІЇ (МОДЕЛЬ БЕЙЛІ)

ЯК ПЕРШУ МОДЕЛЬ ЦЬЄЇ РОБОТИ – РОЗГЛЯНЕМО МОДЕЛЬ БЕЙЛІ. ЦЯ МОДЕЛЬ ВИКОРИСТОВУВАВЛАСЬ

ПОЧАТКОВІ УМОВИ ЗАКЛЮЧАЮТЬСЯ У ТОМУ ЩО РОЗПОВСЮДЖУЄТЬСЯ МОДЕЛЬ, ЯКА ПОСЛАБЛЮЄ СЛАБКИЙ ІМУНІТЕТ, СМЕРТНІСТЬ ПІСЛЯ ХВОРОБИ ВІДСУТНЯ.

У МОМЕНТ ЧАСУ t ПОПУЛЯЦІЯ БУДЕ СКЛАДАТИСЬ З 3-Х ГРУП ЛЮДЕЙ:

- $S(t)$ – ЧИСЕЛЬНІСТЬ ОСІБ, ЯКІ СПРИЙНЯТЛИВИ ДО КОНКРЕТНОЇ ХВОРОБИ.
- $I(t)$ – ЧИСЕЛЬНІСТЬ ІНФІКОВАНИХ ОСІБ
- $R(t)$ – ЧИСЕЛЬНІСТЬ ПЕРЕХВОРИВШИХ ОСІБ, ЯКІ ОТРИМАЛИ СТІЙКИЙ ІМУНІТЕТ

ЗАГАЛЬНА ЧИСЕЛЬНІСТЬ ПОПУЛЯЦІЇ – $N(t) = \text{CONST}$, ТОБТО $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$

ЯКЩО I^* - ПОРОГОВА КІЛЬКІСТЬ ІНФІКОВАНИХ ОСІБ, ПРИ ЯКОМУ НЕ ВІДБУВАЄТЬСЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ХВОРОБИ, ТО СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ БУДЕ ВИГЛЯДАТИ НАСТУПНИМ ЧИНОМ:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \begin{cases} 0, \text{якщо } I(t) \leq I^*; \\ -\alpha S, \text{якщо } I(t) > I^*; \end{cases} \\ \frac{dI}{dt} = \begin{cases} -\beta I, \text{якщо } I(t) \leq I^*; \\ \alpha S - \beta I, \text{якщо } I(t) > I^*; \end{cases} \\ \frac{dR}{dt} = \beta I \end{cases} \quad (1.1)$$

Де α – коефіцієнт захворювання, β – коефіцієнт одужання.

Прийmemo, що в початковий момент часу при $t = 0$ $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = 0$.

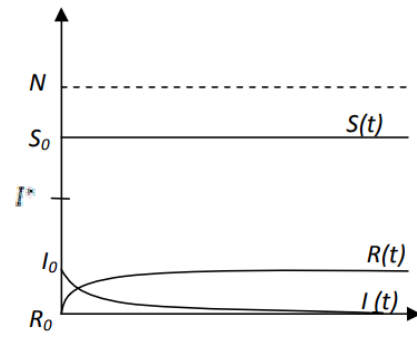
Для простоти дослідження покладемо $\alpha = \beta$. Спочатку розглянемо перший випадок, коли в початковий момент часу $I_0 \leq I^*$. Із системи (1.8) випливає:

$$1) \frac{dS}{dt} = 0, S(t) = c, S(0) = c, S(t) = S_0$$

$$2) \frac{dI}{dt} = -\alpha I, \text{отримаємо } I(t) = I_0 l^{-\alpha t}$$

$$3) S(t) = S_0 = N - I_0 \rightarrow R(t) = N - S(t) - I(t) = N - (N - I_0) - I_0 l^{-\alpha t}$$

Для наочності зобразимо графічно отримані розв'язки.



Популяція в початковий момент часу $I_0 < I^*$

Тепер розглянемо другий випадок, коли в початковий момент часу $I_0 > I^*$.

Припустимо, що в момент часу T стає $I(t) < I^*$. Із системи (1.1) випливає:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S, S(t) = S_0 \cdot l^{-\alpha t}, 0 \leq t \leq T;$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha S - \beta I; \alpha = \beta;$$

$$\frac{dI}{dt} + \alpha I = \alpha S_0 l^{-\alpha t} \cdot l^{-\alpha t} \rightarrow \frac{dI}{dt} l^{\alpha t} + \alpha I l^{\alpha t} = \alpha S_0 \Rightarrow \frac{d(I l^{-\alpha t})}{dt} = \alpha S_0;$$

$$I l^{\alpha t} = \alpha S_0 t \Rightarrow I(t) = c l^{-\alpha t} + \alpha S_0 t l^{-\alpha t}, \text{ при } t = 0, c = I_0;$$

$$I(t) = (I_0 + \alpha S_0 t) l^{-\alpha t};$$

$$R(t) = N - S(t) - I(t), \text{ при } t = T, I = I^*, I^* = (I_0 + \alpha S_0 T) l^{-\alpha T}$$

Визначимо момент часу t_{max} , в якій число захворівших осіб максимально. Для

цього продиференціюємо функцію $I(t) = (I_0 + \alpha S_0 t) l^{-\alpha t}$.

$$\frac{dI}{dt} = \alpha S_0 l^{-\alpha t} + (I_0 + \alpha S_0 t)(-\alpha)l^{-\alpha t}, \text{ винесемо } \alpha l^{\alpha t} \text{ за дужки}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha l^{-\alpha t} (S_0 - I_0 - \alpha S_0 t),$$

$$\alpha l^{-\alpha t} (S_0 - I_0 - \alpha S_0 t) = 0,$$

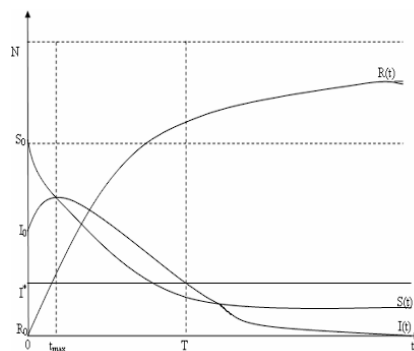
$$(S_0 - I_0 - \alpha S_0 t) = 0$$

$$S_0 - I_0 = \alpha S_0 t \Rightarrow t = \frac{S_0 - I_0}{\alpha S_0} \Rightarrow t_{max} = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{I_0}{S_0}\right)$$

$$I(t_{max}) = \left(I_0 + \alpha S_0 \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{I_0}{S_0}\right) \right) * l^{-\alpha \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{I_0}{S_0}\right)} = S_0 l^{\left(1 - \frac{I_0}{S_0}\right)}$$

$$S(t_{max}) = S_0 l^{-\left(1 - \frac{I_0}{S_0}\right)}$$

Отже, число інфекційних хворих у момент часу t_{max} дорівнює числу здорових осіб. При $t > T$ ситуація буде розвиватися згідно з розглянутим першим випадком.



ДИНАМІКА ПОПУЛЯЦІЇ В МОДЕЛІ ЕПІДЕМІЇ

При $t > T$, $I(t) < I^*$ і $\frac{dI}{dt} = -\alpha I$, $t_{поч} = T$, $I_{поч} = I^* \Rightarrow I(t) = I^* l^{-\alpha(t-T)}$

Отже, чисельність осіб, схильних до захворювання, $S(t)$ скорочується (лінія $S(t)$ на рис. 1.12), а чисельність перехворілих осіб $R(t)$, які мають стійкий імунітет, збільшується (лінія $R(t)$).

Модель А

Розглянемо математичну модель епідемії хвороби без імунітету. Популяція складається з двох груп: здорові (N_1) та хворі (N_2). Якщо $Z(N_1, N_2)$ та $V(N_1, N_2)$ — швидкість зараження та одужання відповідно, то систему рівнянь можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = -Z + V; \\ \dot{N}_2 = Z - V; \\ N = N_1 + N_2. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Припустимо, що всі хворі поділені на дві групи – хворих, але не виявлених, виявлених та ізольованих, тобто недопущених до контакту. Нехай β – частка хворих, що виявляються органами охорони здоров'я за одиницю часу. Тоді до контакту можуть вступати $(1-\beta)N_2$ хворих та N_1 здорових. За одиницю часу виберемо T – час ізоляції хворих (час одужання). Вважаємо, що здоровий людина може заразитися з ймовірністю, пропорційною частці захворілих серед усіх, допущених до контакту. Отже, за одиницю часу може заразитися стільки людей:

$$Z = \alpha \frac{(1-\beta)N_1N_2}{N_1 + (1-\beta)N_2}$$

Тут α – кількість контактів за одиницю часу на одну особу. Тепер опишемо швидкість одужання V (кількість вилікуваних за одиницю часу). Вважаючи, що всі хворі виліковуються, отримуємо, що $V = \beta N_2$, тобто в обрану одиницю часу виліковуються βN_2 осіб. З іншого боку, швидкість одужання залежить також від стратегії виявлення хворих. Припустимо, що щодо цієї стратегії виконані наступні гіпотези:

1. Існує певна частка хворих D , які самостійно звертаються до лікаря;
2. органами охорони здоров'я проводиться профілактична перевірка населення з метою виявлення захворювання. Якщо за одиницю часу

обстежується A осіб, то вважаємо, що кількість виявлених хворих серед них дорівнює $\frac{AN_2}{N}$ (пропорційно до частки хворих);

3. припускаємо, що кожен з виявлених вказав ще на C хворих, які перебували з ним у контакті.

Тоді $V = C(DN_2 + \frac{AN_2}{N}) = \beta N_2$ – кількість виявлених хворих за одиницю часу.

Якщо $C=2$, то $\beta=2(D+A/N) = 2$.

Знайдемо стаціонарні точки для системи (A.1). Умовою стаціонарності буде рівність $Z=V$.

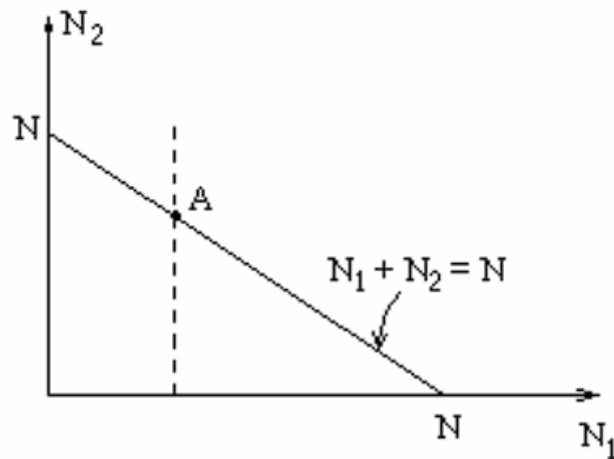
$$\begin{aligned} \frac{(1-\beta)N_1N_2}{N_1 + (1-\beta)N_2} &= \beta N_2; \\ \alpha \frac{(1-\beta)N_1}{N_1 + (1-\beta)N_2} &= \beta; \\ \alpha(1-\beta)N_1 &= \beta(N_1 + (1-\beta)N_2). \end{aligned}$$

Очевидно, що точка $(0,0)$ являється нерухомою точкою.

$$\alpha(1-\beta)N_1 = \beta(\beta N_1 + (1-\beta)N_2)$$

$$N_1 = \frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha - \alpha\beta - \beta^2}.$$

Звідси бачимо, що стаціонарними будуть усі точки, що лежать на прямій, для яких виконано умову $N_1 + N_2 = N$. На наступному малюнку точка A є нетривіальною нерухомою точкою для вищеписаної системи.



Координати точки А:

$$\left(\frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha - \alpha\beta - \beta^2} \quad \frac{(\alpha - \alpha\beta - \beta)N}{\alpha - \alpha\beta - \beta^2} \right)$$

Зазначимо, що має бути виконано нерівність $\alpha - \alpha\beta - \beta^2 > 0$, інакше пряма

$$N_1 = \frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha - \alpha\beta - \beta^2}$$

лежить в лівій півплощині, і єдиним положенням рівноваги за змістом нашої задачі буде лише початок координат. Таким чином, точка А (нетривіальне положення рівноваги) буде мати додатні координати, що необхідно для нашої задачі, якщо виконано умову $\alpha - \alpha\beta - \beta^2 > 0$; звідси отримуємо:

$$\beta < \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

При виконанні цієї умови – положення

$$N_1 = \frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha - \alpha\beta - \beta^2}$$

Рівноваги (0,0) буде нестійким (що відповідає розповсюдженні епідемії, а положення А – стійким). Якщо ж

$$\beta > \frac{\alpha}{1 + \alpha};$$

То єдиним положенням рівноваги буде початок координат, причому стійким. Таким чином, при виконанні цієї умови епідемії не виникне.

Кількість контактів за одиницю часу α залежить від конкретної хвороби і визначається для кожної хвороби за статистичними даними. Наприклад, у випадку поширення венеричних захворювань або СНІДу, за даними США, $\alpha=8,5$ контактів на місяць на одну особу.

Модель Б

Розглянемо математичну модель епідемії захворювання, яке забезпечує тривалий імунітет після одужання. Припустимо, що в популяції поширюється хвороба, що залишає індивідів з постійним імунітетом. В такому випадку популяція ділиться на три категорії: здорові, але вразливі до інфекції (N_1), інфіковані (N_2) та здорові, які вже перебороли хворобу і отримали імунітет (N_3). У цьому випадку система рівнянь для опису поширення хвороби буде мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = -rN_1N_2; \\ \dot{N}_2 = rN_1N_2 - sN_2; \\ \dot{N}_3 = N_1 + N_2 + N_3. \end{cases}$$

(Б.1)

Ця модель дозволяє враховувати вплив імунітету на динаміку епідемії, забезпечуючи більш точне прогнозування поширення захворювання в популяції.

Початкові умови для цієї задачі:

$$N_1(0) = N_1^0, N_2(0) = N_2^0, N_3(0) = 0.$$

Швидкість зараження $V(N_1, N_2) = rN_1N_2$, де r - коефіцієнт зараження.

Швидкість одужання $W(N_1, N_2) = sN_2$, де s — коефіцієнт одужання, що показує, яка частка захворілих одужала та набула імунітету.

Звернімо увагу, що в даному випадку система не має стаціонарних точок. Тому теорія, яка використовувалася до цього часу, непридатна. Для дослідження динаміки системи необхідно знайти її розв'язок.

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{\frac{dN_2}{dt}}{\frac{dN_1}{dt}} = \frac{rN_1N_2 - sN_2}{-rN_1N_2} = -1 + \frac{s}{rN_1}.$$

Отримаємо рівняння з розділюючими змінними:

$$dN_2 = \left(-1 + \frac{s}{rN_1}\right)dN_1;$$

$$N_2 = -N_1 + \frac{s}{r} \ln N_1 + C,$$

Де C – довільна константа.

Розв'язок задачі Коши для системи

$$\begin{cases} D < 0; \\ 0 < r < s \end{cases}$$

Отримаємо, виразив з останнього рівняння константу C для даних початкових умов.

$$C = N_2^0 + N_1^0 - \frac{s}{r} \ln N_1^0.$$

Звідси розв'язок початкової задачі:

$$N_2 = -N_1 + \frac{s}{r} \ln N_1 + N_2^0 + N_1^0 - \frac{s}{r} \ln N_1^0$$

Так як при $t=0$, $N_1^0 + N_2^0 = N$, отримаємо

$$N_2 = N - N_1 + \frac{s}{r} \ln \frac{N_1}{N_1^0}. \quad (\text{Б.2})$$

Розглядаючи поведінку функції N_2 при різних співвідношеннях для r та s , можемо бачити, як змінюється число захворілих. Зобразимо в фазовій

площині N_1, N_2 інтегральну криву (Б.2), тобто зобразимо ту криву з фазового портрету системи (Б.1), яка задовольняє початковим умовам задачі. Для побудови продиференціюємо рівняння (Б.2) за N_1 .

$$\frac{dN_2}{dN_1} = -1 + \frac{s}{rN_1}$$

Розглядаючи N_2 як функцію від N_1 , знайдемо точки екстремуму цієї функції.

Необхідна умова для існування екстремуму функції – це рівність нулю похідної функції. Похідна дорівнює 0 при

$$N_1 = \frac{s}{r}$$

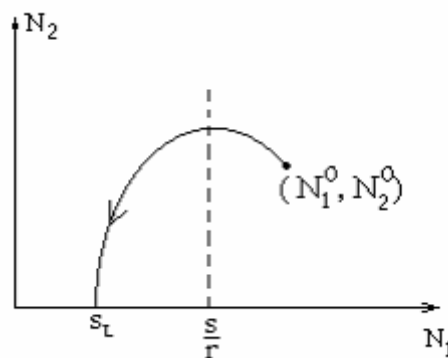
Друга похідна:

$$\frac{d^2N_2}{dN_1^2} = -\frac{s}{rN_1^2} < 0,$$

Тому при $N_1 = \frac{s}{r}$ функція N_2 досягає максимуму:

$$N_2^{\max} = N - \frac{s}{r} + Ln \frac{s}{rN_1^0} = N - \frac{s}{r} \left(1 - Ln \frac{s}{rN_1^0}\right) = N - \frac{s}{r} \left(1 + Ln \frac{r}{sN_1^0}\right)$$

На наступному рис. Представлена крива (Б.2)



Розвиток епідемії залежить від початкових умов N_1^0 .

Бачимо, що якщо $N_1^0 \leq \frac{s}{r}$, то загальна кількість хворих $N_2(t)$ зменшується

і за кінцевий час зникає зовсім, якщо ж $N_1^0 > \frac{s}{r}$, то число хворих спочатку

збільшується до максимального значення $N - \frac{s}{r} (1 + Ln(\frac{r}{s} N_1^0))$, а лише потім зменшується до повного зникнення.

2. МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МОДЕЛІ

2.1 ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial t} = F(N_1, N_2); \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} = G(N_1, N_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

де N_1 і N_2 — функції від t .

Розв'язком системи (2.1) називається пара функцій $N_1(t), N_2(t), t \in R$, які задовольняють систему рівнянь (2.1). Якщо $F(N_1, N_2) = 0$ і $G(N_1, N_2) = 0$ для всіх значень t , то пара постійних функцій $N_1(t) = N_1, N_2(t) = N_2$ є розв'язком системи (2.1). Точка з координатами N_1 і N_2 називається **нерухомою точкою** (стаціонарною точкою, точкою спокою, положенням рівноваги) системи. Тобто нерухомій точці відповідає стаціонарний розв'язок системи (2.1). І навпаки, будь-якому стаціонарному розв'язку $N_1(t) = c_1, N_2(t) = c_2$ відповідає нерухома точка (c_1, c_2) .

Дійсно, якщо $N_1(t) = c_1, N_2(t) = c_2$ для всіх значень t , то

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = 0, \frac{\partial N_2}{\partial t} = 0$$

звідки випливає, що $F(c_1, c_2) = 0, G(c_1, c_2) = 0$, тобто (c_1, c_2) — нерухома точка системи (2.1).

Розглянемо $N_1(t), N_2(t)$ — розв'язок системи (2.1). Для кожного моменту часу t парі $N_1(t) = N_1, N_2(t) = N_2$ у площині N_1, N_2 відповідає точка з координатами $N_1(t), N_2(t)$. Будемо говорити, що $N_1(t), N_2(t)$ є станом системи у момент часу t . Збільшуючи t і відмічаючи на площині відповідні

точки (N_1, N_2) ми бачимо, як змінюється стан системи з плином часу t .

Крива, по якій рухається точка (N_1, N_2) , називається **траєкторією системи**.

Множина траєкторій утворює **фазовий портрет системи**. Нерухома точка — це також траєкторія, що складається з однієї точки. Розв'язок

$N_1(t), N_2(t)$ системи (2.1) притягується до точки (N_1^0, N_2^0) , якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = N_1^0, \lim_{t \rightarrow \infty} N_2(t) = N_2^0$$

Нерухома точка (N_1^0, N_2^0) , називається **асимптотично стійкою**, якщо існує околиця цієї точки така, що будь-яка траєкторія, яка перетинає цю околицю, притягується до (N_1^0, N_2^0)

Нехай у системі диференціальних рівнянь (ДР) (2.1) функції

$F(N_1, N_2), G(N_1, N_2)$ є лінійними функціями відносно N_1, N_2 , тобто:

$$\begin{cases} F(N_1, N_2) = a_{11}N_1 + a_{12}N_2, \\ G(N_1, N_2) = a_{21}N_1 + a_{22}N_2. \end{cases}$$

Тоді у векторній формі система (2.1) записується наступним чином:

$$\frac{dN}{dt} = AN, \text{ де } N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}, \frac{dN}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dN_1}{dt} \\ \frac{dN_2}{dt} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Власними числами матриці A називаються корені характеристичного многочлена $\det(A - \lambda I) = 0 = 0$, де $\det(A - \lambda I)$ — визначник матриці

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

Характеристичний многочлен для системи 2-го порядку має другий ступінь:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\text{Tr}A)\lambda + \det A = 0 \quad (2.3)$$

За теоремою Вієта:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}A, \lambda_1 \lambda_2 = \det A.$$

Звідси випливає, що для сліду матриці A (слід $\text{Tr}A$ — сума діагональних елементів матриці A) та визначника $\det A$ маємо рівності:

$$\text{Tr}A = \lambda_1 + \lambda_2, \det A = \lambda_1 \lambda_2$$

Тоді рівняння (2.3) переписеться у вигляді:

$$\lambda^2 - (\text{Tr}A)\lambda + \det A = 0 \quad (2.4)$$

Розв'язки цього рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}A \pm \sqrt{D}}{2} \quad (2.5)$$

де D — дискримінант рівняння (2.4):

$$D = (\text{Tr}A)^2 - 4\det A$$

Розглянемо **теорему** про критерій стійкості лінійної системи:

Якщо власні числа матриці A лінійної системи (2.2) належать до лівої півплощини, то положення рівноваги $(0,0)$ є асимптотично стійким. Якщо хоча б одне власне число належить до правої півплощини, то система нестійка.

З рівняння (2.5) випливає, що для систем другого порядку умова асимптотичної стійкості виконується тоді і тільки тоді, коли $\text{Tr}A < 0$ та $\det A > 0$. При порушенні хоча б однієї з цих умов положення рівноваги є нестійким. У лінійних систем точка $(0,0)$ є положенням рівноваги. Якщо $\det A \neq 0$, то інших положень рівноваги немає. Від знаку дискримінанта D залежить вид власних значень матриці A .

Якщо $D > 0$, то обидва власні числа дійсні. У цьому випадку можливі наступні ситуації:

$$1) \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

Положення рівноваги є нестійким. Фазовий портрет у околиці (N_1, N_2) для випадку а) представлений на рис. 2.1. Таке положення рівноваги називається **нестійким вузлом**.

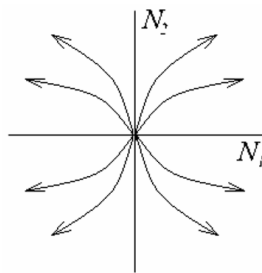


Рис. 2.1 Нестійкий вузол

$$б) \lambda_1, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

У цьому випадку положення рівноваги є стійким, оскільки обидва власні числа лежать у лівій півплощині. Фазовий портрет у околицях нерухомої точки для випадку б) показаний на рис. 2.2. Таке положення рівноваги називається **стійким вузлом**.

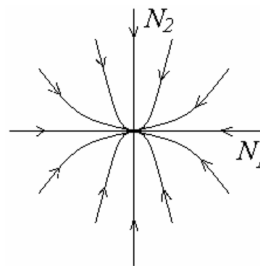


Рис 2.2 Стійкий вузол

$$в) \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$

Дійсні власні числа протилежних знаків породжують нестійке положення рівноваги, яке називається седлом. У цьому випадку $\det A < 0$

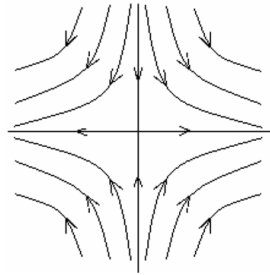


Рис 2.3 Седло

2) $D = 0$. Рівні власні числа

а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$ і матриця A є скалярною ($A = \lambda I$).

У цьому випадку положення рівноваги називається зірковим вузлом, воно стійке у випадку $\lambda_0 < 0$ (рис. 2.4) і нестійке для $\lambda_0 > 0$ (рис. 2.5).

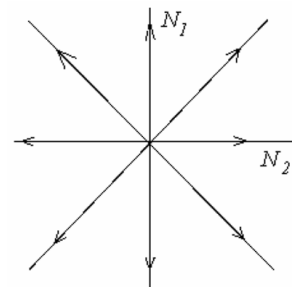
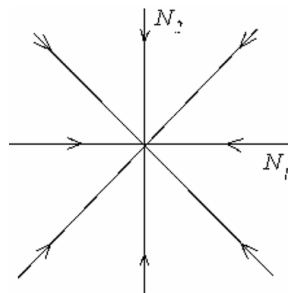


Рис. 2.4 Стійкий зірковий вузол

Рис. 2.5 Нестійкий зірковий вузол

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$ і матриця A недиагональна. Положення рівноваги називається виродженим вузлом. Воно стійке, якщо $\lambda_0 < 0$ (рис. 2.6), і нестійке при $\lambda_0 > 0$ (рис. 2.7).

Пряма, на якій траєкторії змінюють свої напрямки, – геометричне місце точок екстремуму для N_1 . Воно задається рівнянням:

$$\frac{dN_1}{dt} = 0.$$

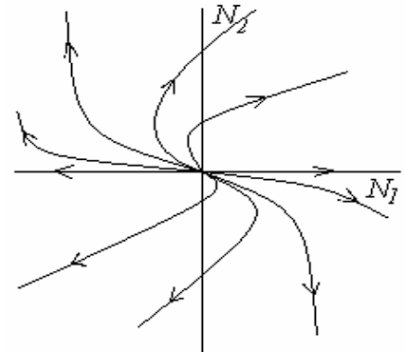
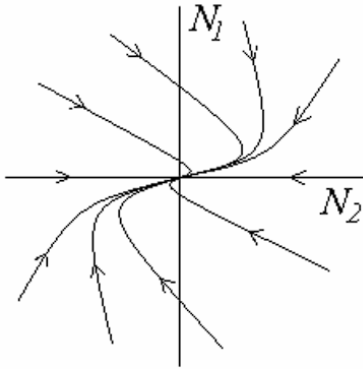


Рис. 2.6 Стійкий вироджений вузол Рис. 2.7 Нестійкий вироджений вузол

3) $D < 0$. У цьому випадку власні числа є комплексними:

а) $\alpha < 0$. Обидва власні числа лежать у лівій півплощині, положення рівноваги є асимптотично стійким. Фазовий портрет має вигляд спіралі, що обвивається навколо положення рівноваги (рис.2.8). Нерухома точка називається **стійким фокусом**. У системі відбуваються затухаючі коливання.

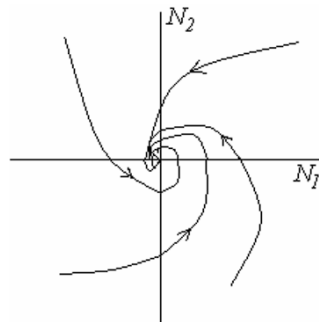


Рис. 2.8. Стійкий фокус

б) $\alpha > 0$. У цьому випадку маємо справу з нестійким фокусом.

У системі відбуваються розходять коливання. Фазовий портрет системи представлений на рис. 2.9.

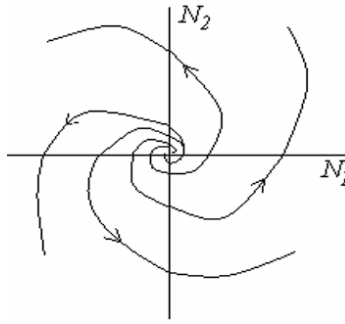


Рис. 2.9 Нестійкий фокус

В) $\alpha = 0$: Власні числа лежать на уявній осі. Положення рівноваги – центр. Фазовий портрет складається з замкнутих окружностей. Це єдиний випадок, коли у системі виникають періодичні коливання. Амплітуда коливань залежить від початкової точки руху системи. Фазовий портрет зображено на рис. 2.10.

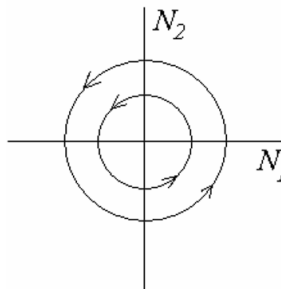


Рис. 2.10 Центр

Розглянемо математичну модель епідемії хвороби без імунітету (модель А). Популяція складається з двох груп: здорові (N_1) та хворі (N_2). Якщо $Z(N_1, N_1)$ та $V(N_1, N_1)$ – швидкість зараження та одужання відповідно, то систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = -Z + V; \\ \dot{N}_2 = Z - V \\ N = N_1 + N_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Положимо, що всі хворі поділені на дві групи – хворих, але невиявлених, виявлених та ізольованих, тобто недопущених до контакту. Нехай β – частка хворих, які виявляються органами охорони здоров'я за одиницю часу. Тоді у контакт можуть вступати $(1-\beta)N_2$ хворих та N_1 здорових. За одиницю часу оберемо T – час ізоляції хворих (час вилікування). Вважаємо, що здорова людина може заразитися з ймовірністю, пропорційною частці хворих серед усіх, допущених до контакту. Отже, за одиницю часу може заразитися стільки людей:

$$Z = \alpha \frac{(1-\beta)N_1N_2}{N_1 + (1-\beta)N_2}$$

Тут α – кількість контактів за одиницю часу на одну особу. Тепер опишемо швидкість одужання V (число вилікуваних за одиницю часу). Вважаючи, що всі хворі виліковуються, отримуємо, що

$$V = \beta N_2$$

тобто в обрану одиницю часу виліковуються βN_2 осіб. З іншого боку, швидкість одужання залежить і від стратегії виявлення хворих. Припустимо, що відносно цієї стратегії виконані наступні гіпотези:

- 1) Існує певна частка хворих D , які самостійно звертаються до лікаря;
- 2) Органи охорони здоров'я проводять профілактичний огляд населення на предмет виявлення захворювання. Якщо за одиницю часу обстежується A осіб, то вважаємо, що кількість виявлених хворих серед них дорівнює $\frac{AN_2}{N}$ (пропорційно до частки хворих);
- 3) Припускаємо, що кожен з виявлених вказав ще на C хворих, які були з ним у контакті.

Тоді $V = C(DN_2 + AN_2 / N) = \beta N_2$ – число виявлених хворих за одиницю часу.

Якщо $C = 2$, то $\beta = 2(D + \frac{A}{N})$. Знайдемо нерухомі точки для системи (2.6).

Умовою нерухомості буде рівність $Z = V$.

$$\begin{aligned} \frac{(1-\beta)N_1N_2}{N_1 + (1-\beta)N_2} &= \beta N_2; \\ \alpha \frac{(1-\beta)N_1}{N_1 + (1-\beta)N_2} &= \beta; \\ \alpha(1-\beta)N_1 &= \beta(N_1 + (1-\beta)N_2) \end{aligned}$$

Очевидно, що точка $(0,0)$ є непорушною точкою.

$$\begin{aligned} \alpha(1-\beta)N_1 &= \beta(\beta N_1 + (1-\beta)N_2); \\ N_1 &= \frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha - \alpha\beta - \beta^2}. \end{aligned}$$

Звідси бачимо, що нерухомими будуть усі точки, які лежать на прямій, для яких виконується умова $N_1 + N_2 = N$. На рис. 2.11 точка A є шуканою нетривіальною нерухомою точкою для системи (2.6).

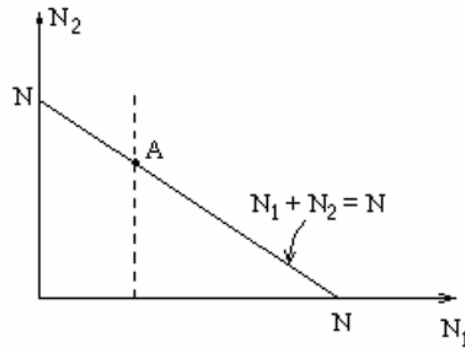


Рис. 2.11

Координати точки А: $\left(\frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha-\alpha\beta-\beta^2}, \frac{(\alpha-\alpha\beta-\beta)N}{\alpha-\alpha\beta-\beta^2} \right)$.

Зверніть увагу, що має бути виконане нерівність $\alpha-\alpha\beta-\beta^2 > 0$, інакше пряма

$$N_1 = \frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha-\alpha\beta-\beta^2}$$

Буде лежати в лівій півплощині, і єдиним положенням рівноваги з точки зору нашої задачі буде лише початок координат. Таким чином, точка А

(нетривіальне положення рівноваги) буде мати додатні координати, що необхідно для нашої задачі, якщо виконано умову $\alpha-\alpha\beta-\beta^2 > 0$, звідси

отримаємо $\beta < \frac{\alpha}{1+\alpha}$, раніше було показано що при виконанні цієї умови

положення $N_1 = \frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha-\alpha\beta-\beta^2}$ рівноваги (0,0) буде нестійким, а положення

рівноваги А- стійким, якщо ж

$\beta > \frac{\alpha}{1+\alpha}$, інакше пряма буде лежати в лівій півплощині, і єдиним положенням

рівноваги буде початок координат, причому стійким. Таким чином, при виконанні цієї умови епідемія не виникне.

Кількість контактів за одиницю часу α залежить від конкретної хвороби і визначається для кожної хвороби за статистичними даними. Наприклад, у

випадку поширення венеричних захворювань або СНІДу, за даними США, $\alpha=8,5$ контактів на місяць на одну особу.

Для розробки моделей використовувався чисельний метод Рунге-Кутти, який дав змогу використати мову програмування Python. Цей метод Рунге-Кутти дозволяє обчислювати значення розв'язку диференціального рівняння на наступному кроці, використовуючи інформацію про нахил (похідну) функції в кількох точках попереднього кроку. Це дозволяє досягти більшої точності порівняно з простішими методами, такими як метод Ейлера. Переваги цього метода заключаються в наступному:

- 1) Він забезпечує добру точність без надмірних обчислень.
- 2) Методи Рунге-Кутти демонструють хорошу стабільність при розв'язанні жорстких та не жорстких рівнянь.
- 3) Можуть бути адаптовані для різних типів ОДР та умов задачі.

Основні моделі епідеміології

SIR Модель

Для опису процесу поширення інфекції у групі зі сталою чисельністю населення пропонується поділити усіх осіб на три категорії:

- S, сприйнятливі — особи, які ще не мають захисту від хвороби.
- I, інфіковані — носії хвороби, що здатні її поширювати.
- R, імунізовані — це особи, які подолали інфекцію і стали несприйнятливими до неї.

У найпростішій моделі чисельність населення приймається незмінною протягом періоду спостереження. Іншими словами, процеси, такі як народження, природна смертність (що не пов'язана із хворобою) чи міграція, до уваги не беруться. Такий підхід доцільний для ізольованих груп або у випадках, коли вплив демографічних змін незначний порівняно із загальною чисельністю. Цей підхід також застосовується для швидкоплинних епідемій, тривалість яких менша за середню тривалість життя осіб у популяції. Загальна чисельність населення позначається як N і вважається сталою.

Для зручності аналізу вводяться відносні величини: показники S, I та R розглядаються як частки загальної чисельності, що підпорядковуються співвідношенню:

$$S + I + R = 1$$

Розповсюдження інфекції відбувається через контакти між представниками сприйнятливої категорії S і носіями I. Особи, що перенесли хворобу та перейшли до категорії R, більше не є джерелом інфекції й отримують тривалий імунітет, який значно перевищує період моделювання. До цієї ж групи належать і ті, хто помер унаслідок хвороби.



Рис. 3.1 Схема переходу осіб: s - не інфіковані, I - інфіковані, R - з імунітетом, або померлі

SIR Модель зі смертністю і народжуванністю

У базовій моделі передбачається, що інфекція поширюється настільки швидко, що вплив процесів народжуваності та смертності можна ігнорувати. Однак, для аналізу динаміки захворювання у тривалішій перспективі необхідно враховувати демографічні чинники.

Одним із ключових аспектів демографічних змін є поява нових членів популяції через народження та зменшення чисельності через смерті. При цьому припускається, що кожна особа має середню «природну тривалість життя», яка становить приблизно $1/\mu$ днів, де μ є коефіцієнтом смертності. Важливо підкреслити, що цей показник не пов'язаний із дією вірусу і характеризує природний процес життєвого циклу.

Сама модель:

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu S,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R.$$

Модель SEIR

Інкубаційний період — це проміжок часу, протягом якого збудник хвороби активно розмножується в організмі, не викликаючи помітного опору з боку імунної системи. У цей час інфікована особа ще не здатна передавати патоген іншим.

Оскільки на цьому етапі індивід не може бути віднесений до жодної з груп базової SIR-моделі, додається додаткова категорія — **заражені, але не заразні** (E, exposed). У цій групі перебувають особи, які вже зазнали впливу патогену, але ще не становлять загрози для оточуючих. Середній час перебування у стані E приймається рівним $\frac{1}{\sigma}$ де σ — коефіцієнт, що визначає швидкість переходу до стану заразності.

ВИСНОВОК

Дослідження, проведене в рамках даної дипломної роботи, підтвердило значущість математичного моделювання для епідеміології як ключового інструменту для аналізу, прогнозування та управління епідемічними процесами.

У першому розділі було розглянуто базову модель Бейлі, яка демонструє фундаментальні принципи застосування математичних методів у сфері епідеміології. Ця модель слугувала основою для розуміння загальних механізмів поширення інфекційних хвороб.

Другий розділ присвячений аналізу математичних основ, які є невід'ємною частиною всіх моделей. Це забезпечило чітке розуміння методологічної бази для розробки і застосування моделей у практичних сценаріях.

Завдяки проведеному аналізу та моделюванню були отримані наступні результати:

1. Математичні моделі надають цінні інструменти для кількісного аналізу епідемічних процесів.
2. Простота базових моделей дозволяє їх широко застосовувати навіть у випадках з обмеженими даними, а модифікації забезпечують вищу точність та адаптивність.

Таким чином, результати роботи підтвердили, що математичне моделювання є незамінним інструментом для епідеміологічної науки, допомагаючи приймати науково обґрунтовані рішення в умовах поширення інфекційних хвороб. Подальший розвиток методів моделювання, зокрема інтеграція великих даних та машинного навчання, відкриває нові перспективи для більш ефективного управління епідеміями у майбутньому.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Matt J. Keeling, Pejman Rohani / Modeling Infectious Diseases In human and animal c. 16-40
2. A study of infections Diseases Through Matematical Modeling, c. 120-123/
O.P. Chung, Winson Li, H.K. Lai, W.Y. Shiao, S.H. Wong.
3. Ledder, G. Mathematical Modeling for Epidemiology and Ecology, 2023.
4. R.M.Anderson, R.M.May. Coevolution of hosts and parasites, 1982.
5. Epidemiological characteristics of COVID-19 cases and estimates of the reproductive numbers 1 month into the epidemic, Italy, 28 January to 31 March 2020 / F.Riccardo, M. Ajelli, X. D Andrianou, A. Bella, M. Del Manso
6. Martcheva, M. An Introduction to Mathematical Epidemiology, 2015, С. 100-116.
7. A. Rachah, Delfim F. M. Torres / Modelling and numerical simulation of the outbreak of ebola / *SYMCOMP*. Le Meridien Putrajaya, Malaysia 2015.
8. Kermack W.O., McKendrick A.G. / Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / *Proceedings of the Royal Statistical Society A*, 1927. 115, N 772 С. 700–721.
9. Brauer, F., Castillo-Chavez, C., & Feng, Z. Mathematical Models in Epidemiology, 2019.
10. Фіщук Є.Б., Математичні моделі розповсюдження епідемій, кваліфікаційна робота бакалавра зі спеціальності 113-прикладна математика. Одеський національний університет імені І.І. Мечнікова. Факультет математики, фізики і інформаційних технологій. Одеса, 2022р., 50стр.