Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра Математичного та комп’ютерного моделювання

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«**Антиплоска задача для чверть площини із тріщиною**»**

«Anti-flat task for quarter-plane»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Оніщенко Олександр Валерійович

Керівник

____

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент

____

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ___ від _______________ р.

Завідувач кафедри

_________ _____________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №_______

протокол № ____ від _____________ р.

Оцінка_____________/___ ___/_____

(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

___________ ______________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2021

Антиплоская задача для четвертьплоскости с трещиной

1. <u>Постановка задачи</u>

Рассмотрим антиплоскую задачу для четверть плоскости { -a < x < ∞ , -b < y < ∞ }, одна грань которой y = -b закреплена, а грань x = -a свободна. Внутри четверть плоскости вдоль отрезка { y = kx + c , |x| < 1} имеется трещина, к берегам которой в направлении оси OZ приложена нагрузка интенсивности T(x). Предполагается, что параметры трещины (k, c) таковы, что она полностью лежит внутри четверть плоскости. Требуется определить коэффициенты интенсивности напряжений вблизи концов трещины.

Сформированная задача эквивалентна следующей краевой

(1) $\Delta W(x,y) = 0, \quad -a < x < \infty, \quad -b < y < \infty$

(2) $W, \frac{\partial W}{\partial x} \,|_{x\to\infty} \to 0, \ \frac{\partial W}{\partial x} \,|_{x=-\mathrm{a}} = 0$

(3) $W|_{y=-\mathrm{b}} = 0\,; \ W, \frac{\partial W}{\partial y} \,|_{y\to\infty} \to 0$

(4) $\sqrt{1+k^2}\,\frac{\partial W}{\partial v} \,|_{y=kx+b\,\pm 0} = T(x), |x| < 1$

Здесь W(x,y) смещения точек четверть плоскости вдоль оси OZ
T(x) – заданная нагрузка, v – направление нормальное к отрезку
y = kx + b, c S – направление касательное к y = kx + b
Поэтому если α – угол между OS и OX, то

$$\frac{\partial W}{\partial S} = \cos\alpha\frac{\partial W}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial v} = -\sin\alpha\frac{\partial W}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial W}{\partial y}$$

Причем

$$tg\ \alpha = K \qquad \cos\alpha\ \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\,;\ \sin\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

Имеем

(5) $\sqrt{1+k^2}\ \ \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x} + k\frac{\partial W}{\partial y}$

Для начала введем неизвестную функцию скачка смещений при переходе через трещину

(6) $X(x) = \omega(x, kx+b-0) - \omega(x, kx+b+0)$

Очевидно, что $X(x) \equiv\ 0$ при $|x| \geq 1$.

При этом скачок, как следует из (4),

(7) $< \frac{\partial W}{\partial v} > = \frac{\partial W}{\partial v}(x, kx+b-0) - \frac{\partial W}{\partial v}(x, kx+b+0) \equiv 0$

Для любых x

Если воспользоваться результатами работы (2), то решение задачи (1), (2), (3), (6), (7) можно записать в виде

$$(8)\ \ W(x,y) = \int_{-1}^{1} X(\boldsymbol{\xi})\ \frac{\partial G}{\partial V}(x, y, \qquad \boldsymbol{\xi}, k\boldsymbol{\xi}+b)\sqrt{1+k^2}d\boldsymbol{\xi}$$

Где $G(x, y, \boldsymbol{\xi},\ n)$ – двумерная функция Грина для четверть плоскости задачи (1), (2), (8).

Если построить функцию Грина, то удовлетворяя (8)

Граничному уловию (4) можно получить интегральное уравнение относительно неизвестной функции $X(\boldsymbol{\xi})$

$$(9)\ (T(x) = \lim_{y\to kx+b\ \pm 0}(1+k^2)\ \frac{\partial}{\partial v_x}\int_{-1}^{1} X(\xi)(\frac{\partial}{\partial v_\xi}\ G(x, y, \xi, \mathrm{k}\xi+\mathrm{b})d\xi$$

Получить решение которого $X(x)$, $|x| < 1$ можно использовать поведение напряжений вблизи концов трещин

2.Построение двумерной функции Грина

Построим двумерную функцию Грина краевой задачи

(2.1) $\Delta \mathrm{W}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \delta(x - \xi, \mathrm{y} - \mathrm{n}) \qquad -a < x < \infty, \quad -b < y < \infty$

(2.2) $\Delta W, \frac{\partial W}{\partial x} \; |_{x\to\infty} \to 0; \; \frac{\partial W}{\partial x} \; |_{x=-a} = 0$

(2.3) $W|_{y=-b} = 0; \qquad W, \frac{\partial W}{\partial y}|_{y\to\infty} \to 0$

Здесь $\delta(x - \xi, \mathrm{y} - \mathrm{n})$ – lдвумерная δ –функция Дирака.

Применим к краевой задачи (2.1 – 2.3) интегральное полубесконечное преобразование Фурье

$$(2.4) \quad W_\lambda(y) = \int_0^\infty W(x,y) \; \cos\lambda\,(x+a)dx$$

$$(2.5) \; W(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \; W_\lambda(y)\cos\lambda(x+a)d\lambda$$

В результате получим одномерную краевую задачу

$$(2.6) \begin{cases} W_\lambda''(y) - \lambda^2 W_\lambda(y) = \cos\lambda(\,\xi + \mathrm{a})\;\delta(\mathrm{y} - \mathrm{n}) \\ \qquad W_\lambda|_{y=-b}\,, \;\; W, \;\; \dfrac{\partial W}{\partial y}|_{y\to\infty} \to 0 \end{cases}$$

Функцию Грина одномерной краевой задачи (2.6) можно построить в виде

(2.7) $\quad G_\lambda(y,n) = \Phi_\lambda(y-n) - \Phi_\lambda(y+n+nb)$

Где

(2.8) $\quad \Phi_\lambda(z) = -\frac{1}{2\lambda}\, e^{-\lambda|z|}$

- фундаментальная функция для дифференциального уравнения в (2.6)

Таким образом

(2.9) $G_\lambda(y,n) = -\frac{1}{2\lambda}[e^{-\lambda|y-n|} - e^{-\lambda(y+n-2b)}]$

Отчего после интегрального преобразования по формуле (2.5) имеем

(2.10) $G(x,y,\xi,\mathrm{n}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda\,(x+a)cos\lambda(\,\xi+\mathrm{a})G_\lambda(y,n)d\lambda$

Используя (2.10) имеем

(2.11) $G(x,y,\xi,\mathrm{n}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda\,(x+a)cos\lambda(\,\xi+\mathrm{a})[e^{-\lambda(y-n)} - e^{-\lambda(y+n+2b)}]\frac{d\lambda}{\lambda}$

Если воспользоваться известным интегралом [3]

$$\int_0^\infty \cos\lambda A(e^{-\lambda B} - e^{-\lambda C})\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2}\ln\frac{A^2+B^2}{A^2+C^2}$$

То формулу (2.11) можно переписать в виде

(2.12) $G(x,y,\xi,\mathrm{n}) = -\frac{1}{4\pi}\{\ln[(y-n)^2+(x-\xi)^2] - \ln[(y+n+2b)^2 + (x-\xi)^2] + \ln\frac{(x+\xi+2\mathrm{a})^2+(y-n)^2}{(x+\xi+2\mathrm{a})^2+(y+n+2b)^2}\}$

Тогда найдем нормальную производную функции Грина (2.12) в координатах (ξ,n). Для этого вычислим

$$\frac{\partial G}{\partial\xi} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\xi-\mathrm{x}}{(\xi-\mathrm{x})^2} - \frac{\xi-\mathrm{x}}{(y+n+2b)^2+(x-\xi)^2} + \frac{\xi+\mathrm{x}+2\mathrm{a}}{(x+\xi+2\mathrm{a})^2+(y-n)^2} - \frac{x+\xi+2\mathrm{a}}{(x+\xi+2\mathrm{a})^2+(y+n+2b)^2}\right\}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathrm{n}} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{n-y}{(\xi-x)^2} + (n-y)^2 - \frac{n+y+2b}{(y+n+2b)^2+(x-\xi)^2} + \frac{n-y}{(x+\xi+2\mathrm{a})^2} + (y-n)^2 - \frac{n+y+2b}{(x+\xi+2\mathrm{a})^2+(y+n+2b)^2}\right\}$$

Тогда согласно (1.5) имеем

$$\sqrt{1+k^2}\,\frac{\partial G}{\partial v} = -K\,\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial n}$$

Если ввести обозначение

$$\Psi(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$$

То функцию Грина можно записать в виде

(2.13) $G(x,y,\xi,\mathrm{n}) = \Psi(x-\xi, y-n) - \Psi(x-\xi, y+n+2b) + \Psi(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b)$

Введем обозначение

$$\Psi_1(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y); \quad \Psi_2(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y)$$

Т.е.

(2.14) $\Psi_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}; \quad \Psi_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$

Тогда

$$(2.15)\ \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,y,\xi,\mathrm{n}) = -\Psi_1(x-\xi, y-n) + \Psi_1(x-\xi, y+n+2b) + \Psi_1(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_1(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathrm{n}}(x, y, \xi, \mathrm{n}) = -\Psi_2(x-\xi, y-n) - \Psi_2(x-\xi, y+n+2b) - \Psi_2(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_2(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b)$$

И формулу (1.8) можно переписать в виде

(2.16) $W(x,y) = +\sqrt{1+k^2}\ \int_{-1}^{1} X(\xi)\{-\mathrm{k}[-\Psi_1(x-\xi, y-n) + \Psi_1(x-\xi, y+n+2b) + \Psi_1(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_1(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b) - [-\Psi_2(x-\xi, y-n) - \Psi_2(x-\xi, y+n+2b) - \Psi_2(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_2(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b)]\}d\xi$

Где функции $\Psi\ \ (x,y)$ определены в (2.14)

Т.О. решение задачи (1.1-1.4) выражено через неизвестную функцию скачка перемещений $X(\xi)$ которую надо определить из условия (1.4)

3. <u>Сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению</u>
   Потребуем теперь, чтобы функция (2.16) удовлетворяла граничному условию (1.4), т.е. удовлетворяла уравнению (1.5)
   Для этого вычислим значение производной $\frac{\partial^2 G}{\partial V_x \partial V_\xi}$

Обозначим

(3.1) $\Psi_{11}(x,y) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$; $\quad \Psi_{12} = \Psi_{21} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$; $\quad \Psi_{22} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$;

Т.е

(3.2) $\Psi_{11} = \frac{1}{2\pi}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\Psi_{12} = \Psi_{21} = -\frac{1}{2\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$$\Psi_{22}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Имеем

(3.3) $\frac{\partial^2 G(x,y,\xi,\mathrm{n})}{\partial V_x \partial V_\xi} = \left[-k\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right]\frac{\partial G}{\partial V_\xi} = -k(1+k^2)\{-k[-\Psi_{11}(x-\xi, y-n) + \Psi_{11}(x-\xi, y+n+2b) + \Psi_1(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_{11}(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b) - [-\Psi_{21}(x-\xi, y-n) - \Psi_{21}(x-\xi, y+n+2b) - \Psi_{21}(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_{21}(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b)]\} + (1+k^2)\{[-\Psi_{12}(x-\xi, y-n) + \Psi_{12}(x-\xi, y+n+2b) + \Psi_{12}(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_{12}(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b) - [-\Psi_{22}(x-\xi, y-n) - \Psi_{22}(x-\xi, y+n+2b) - \Psi_{22}(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_{22}(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b)]\}$

Подставляя (3.2) в (2.14) получим

(3.4) $(k^2+1)\int_{-1}^{1} X(\xi)\{(1+k^2)\,\Psi_{11}(x-\xi,0) + R(x,\xi)\}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{T(x)}, |\mathrm{x}| < 1$

Где

R(x, ξ) $= -k[-\Psi_{11}(x-\xi, y-n) + \Psi_{11}(x-\xi, y+n+2b) + \Psi_1(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_{11}(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b) - [-\Psi_{21}(x-\xi, y-n) - \Psi_{21}(x-\xi, y+n+2b) - \Psi_{21}(x+\xi+2\mathrm{a}, 0) - \Psi_{21}(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b)]\} + (1+k^2)\{[-\Psi_{12}(x-\xi, y-n) + \Psi_{12}(x-\xi, y+n+2b) + \Psi_{12}(x+\xi+2\mathrm{a}, y-n) - \Psi_{12}(x+\xi+2\mathrm{a}, 0) - [-\Psi_{22}(x-\xi, y-n) - \Psi_{22}(x-\xi, y+n+2b) - \Psi_{22}(x+\xi+2\mathrm{a}, 0) - \Psi_{22}(x+\xi+2\mathrm{a}, y+n+2b)]\}$

Учитывая (3.1) уравнение (3.4) можно переписать в виде

(3.6) $\frac{(1+k^2)^2}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-1}^{1} X(\xi)\ln|x-\xi|\,d\xi + \int_{-1}^{1} X(\xi)\,R(x,\xi)\mathrm{d}\xi = \mathrm{T(x)}, |\mathrm{x}| < 1$

Т.О. вопрос о нахождении искомой функции $X(\xi)$ сводится к решению сингулярного интегрального уравнения на (-1,1) известного типа [1]

4. <u>Построение решения сингулярного интегрального уравнения</u>

Рассмотрим интегральное уравнение (3.6)

(4.1) $\frac{(1+k^2)^2}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-1}^{1}X(\xi)\ln|x-\xi|\,d\xi+\int_{-1}^{1}X(\xi)\,R(x,\xi)\mathrm{d}\xi=\mathrm{T(x)},|\mathrm{x}|<1$

Где $X(\xi)$-неизвестная функция, $R(x,\xi)$ - ,бесконечно дифференцируемая функция, определенная в (3.5)

Его решение будем искать в виде ряда

(4.2) $X(x,\xi)$ = $\sqrt{1-\xi^2}\sum_{m=0}^{\infty}X_m U_m(\xi)$

Где $\mathrm{X_m}(m=0,\infty)$- неизвестные коэфициенты раазложения

U_m – многочлены Чебышева второго рода

(4.3) $U_m(\xi)=\frac{\sin[k+1]arcos(\xi)}{\sqrt{1-\xi}}$

Подставляя (4.2) в уравнение (4.1) после обозначения порядка интегрирования и суммирования получим

$$\frac{(1+\mathrm{k}^2)^2}{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty} X_m \frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi}\, U_m(\xi)\ln|x - \xi|\, d\xi \;\; \sum_{m=0}^{\infty} X_m \int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}\, U_m(\xi)\ln R(x,\xi)\, d\xi = \mathrm{T}(\mathrm{x}), |\mathrm{x}| < 1$$

Воспользуемся инетргальным соотношением для многочленов Чебышева второго рода

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{1-x^2}U_m(x)$

И проинтегрируем по x в пределах от -1 до 1

Воспользовавшись ортогональностью многочленов Чебышева второго рода

Приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения X_m

(4.5) $\frac{\pi}{4}\,(1+k^2)(1+n)X_n + \sum_{m=0}^{\infty} X_m A_{mn} = T_n, \;\; n = 0, \infty$

Здесь коэфициенты A_{mn} выражением

(4.6) $A_{mn} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_n(x)dx \;\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}U\_m(\xi)R(x,\xi)d\xi$

Коэфициентом T_n выражаем

$T_n = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,T_n(x)U_n(x)dx$

Рассмотрим конечную СЛАУ

Решив ее найдем искомые коэффициенты X_m

5. Описание программы

Составим программу которая решает СЛАУ методом Гаусса

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace Chebishev

{

    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            double M = 16.0;
            double Xi(double I){
                double xi;

                xi = Math.Cos(I / (M + 1.0) * Math.PI);
                return xi;
            }
            double Wi(double I)
            {
                double wi;
                wi = (Math.PI / (M + 1.0)) * Math.Pow(Math.Sin((I/(M+1.0)) *
Math.PI), 2);
```

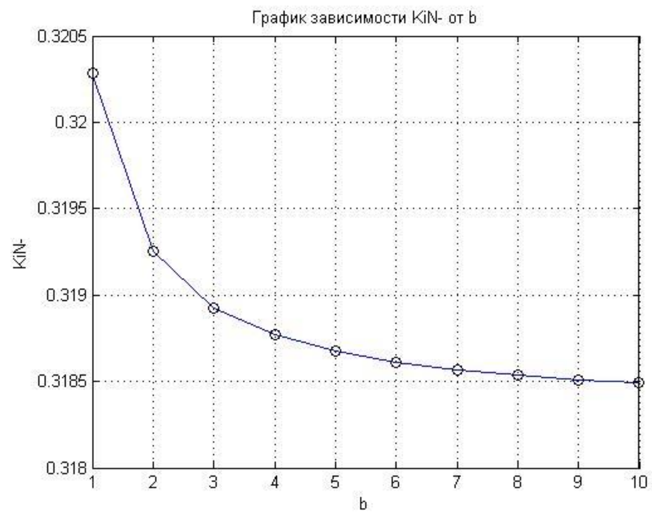
```
        return wi;
    }
    double UnX(double mn, double x)
    {
        double unx;
        unx = Math.Sin((mn + 1.0) * Math.Acos(x))/
Math.Sin(Math.Acos(x));
        if(mn == 0)
        {
            unx = 1.0;
        }
        return unx;
    }

    double f(double x, double xi, double l)
    {
        return ((l * Math.Sin(l * (x - xi))) / (Math.Cosh(2.0 * l * 2.0)) *
(Math.Exp(-l * 1.0 * (x - xi)) - Math.Exp(-l * 1.0 * (x + xi)))) * Math.Exp(-2.0 *
l * 2.0);
    }
    double Trapezoidal(double a, double b, double x, double xi)
    {
        double sum = 0.0;
        double h = (b - a) / 1000.0;
        for(double k = 0.0; k < 1000.0; k++)
        {
            sum += 0.5 * h * (f(x, xi, a + k * h)) + f(x, xi, a + (k + 1) * h);
        }
        return sum*(1.0/(2*Math.PI));
    }

    double K(double x, double xi)
    {
        double result;
        double a = 0.0;
```

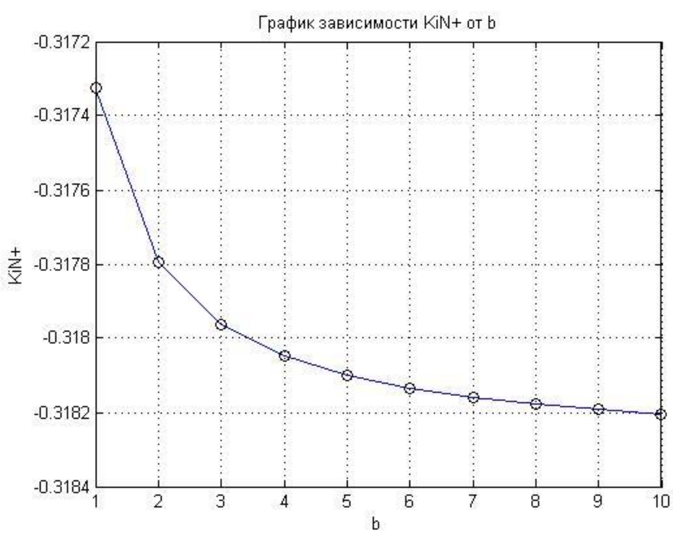
```
        double b = 3.0;

        result = (1.0 / (2.0 * Math.PI)) * Trapezoidal(a, b, x, xi);
        return result;
      }
      double A = 0;
      double counter = 0;
      double[,] Amn = new double[3, 3];
      double res;
      int c = 0;
      int v = 0;
      for(double m = 1.0; m <= 3.0; m++)
      {
        for(double n = 1.0; n <= 3.0; n ++)
        {
          for(double i = 1.0; i < M; i++) {
            for(double j = 1.0; j < M; j++)
            {
              counter = 0;
              counter += Wi(j) * UnX(n, Xi(i)) * UnX(m, Xi(j)) * K(Xi(i),
Xi(j));
            }
            A += Wi(i) * counter;

          }
          //counter += Wi(n, n) * UnX(n, Xi(m, m)) * UnX(m, Xi(n, n)) *
K(Xi(m, m), Xi(n, n));



        }
        Amn[c, v] = A;
        c++;
        v++;
        A = 0;
```

```
            }

            for(int h = 0; h < c; h++)
            {
                for(int g = 0; g < v; g++)
                {
                    Console.Write(Amn[h, g] + " ");

                }
                Console.WriteLine(" ");
            }



        }
    }
}
```

7.Анализ результатов

В результате получены графики зависимости коэффициентов интенсивности напряжений KiN- и KiN+ от расстояния между концом трещины и границей области.





Из графиков следует, что при увеличении расстояния от трещины до границы области KiN+ и KiN- стремятся к значению коэффициента интенсивности напряжений вблизи концов трещины в бесконечной плоскости.

8.Заключение

Решена антиплоская задача для четверть плоскости, одна грань которой закреплена, а другая свободна. Внутри которой имеется трещина параллельная свободной грани. Определены коэффициенты интенсивности напряжений вблизи концов трещины. Построены графики коэффициентов интенсивности в зависимости от геометрических параметров трещины

Литература:

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. // Москва, «Наука», 1982- 342 с.
2. Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень // Одеса, «Астропринт», 2005- 183 с.
3. Снеддон Н. Преобразование Фурье- М: Издательство иностранной литературы, 1955- 667 с.Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с
4. дифференциальными уравнениями второго порядка в 22.- М: Издательство иностранной литературы, 1960- ч. 1- 278 с.
5. «Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables» edited by Milton Abramowits and Irene A. Stegun / national bureau of standarts, mathematics series - 55
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричов О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы.-М: Наука, 1986- 800 с.
7. «Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів»/ Авторы: Попов Г. Я., Реут В. В., Моисеев М. Г., Вайсфельд Н. Д. -Одесса Астропринт: 2010- 115 с.