

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»
«Задача Бусинеска для півпростору»
«Boussinesq problem of half-space»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Савчак Данило Дмитрович
Керівник: проф. Вайсфельд Н.Д.
Рецензент: доц. Процеров Ю.С.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ 2022 р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від _____ 2022 р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Основна частина	6
1.1 Постанова задачі	6
1.2 Розв’язок задачі	8
2 Чисельний аналіз	16
2.1 Аналіз зміщень	16
2.2 Аналіз напружень	20
Висновки	23
ДОДАТОК А (програмний код)	24
ДОДАТОК Б (таблиці коефіцієнтів)	32
Список літератури	34

ВСТУП

Задача Бусінеска є прикладом задачі пружного напівпростору (задача знаходження полів напруги та полів переміщень у навантаженому середовищі, обмеженому горизонтальною граничною поверхнею). Вона полягає у знаходженні пружного стану в лінійно-пружному ізотропному напівпросторі, підданому зосередженому напруженню, прикладеному в точці його граничної площини та перпендикулярно до неї. Ця проблема має широке геотехнічне застосування. Вона виникає в механіці ґрунту, де напівнескінченим середовищем є ґрунт. У цьому випадку відомо, що розподіл напруги в ґрунті більш-менш подібний до розрахованого, виходячи з припущення, що ґрунт є ідеально пружним, ізотропним і однорідним середовищем, принаймні, якщо фактор міцності маси ґрунту з по відношенню до руйнування пластичною течією перевищує значення приблизно в три. Така ж проблема виникає в теорії випробувань на вдавнення, коли пластичний матеріал врізається циліндричними пуансонами з конічними головками.

Постановка і розв'язок належать до математичної теорії пружності в трьох вимірах. Основними рівняннями є диференціальні рівняння рівноваги, матеріальні складові закони, кінематичні співвідношення, які розв'язуються з урахуванням граничних умов.

Добре відомою особливістю класичного рішення Бусінеска є те, що поле зміщення зазнає сингулярності типу Коші в точці прикладання навантаження. Таким чином, переміщення під точковим навантаженням стають нескінченними, порушуючи, таким чином, основну передумову лінеаризованої пружності. Насправді необмежені переміщення відбуваються в точці прикладання навантаження, незалежно від того, наскільки малою є інтенсивність навантаження. Отже, очевидно, що класичний розв'язок еластичності не відображає (певною мірою) реальну ситуацію.

Детальні дослідження пружно-статичної деформації плоского напівпростору, що підлягає граничним умовам або переміщення, або тяги, були проведені Буссінеском понад століття тому і підсумовані в його монографії 1885 року. Сьогодні основну проблему зазвичай називають проблемою Буссінеска, хоча в частині його робіт Буссінеск передував Ламе та Клапейрон

(1831 [10] і Черруті (1882) [11]. Після публікації моногафа Буссінеска багато авторів писали про окремі аспекти проблеми Буссінеска (наприклад, Лемб, 1902 [12]; Теразава, 1916 [13]; Лав, 1929 [14]; Хардінг і Снеддон, 1945 [15]; Снеддон, 1946 [16]; Фаррелл, 1972 [17]). Бусінеск отримав розв'язок [1] з використанням результатів теорії потенціалу, а згодом вона була розв'язана Хардінгом і Снеддоном [2] з використанням теорії дуальних інтегральних рівнянь. Після цих подій область контактної механіки була широко та вичерпно досліджена дослідниками до такої міри, що великий список статей не може бути задокументований у контексті звичайної статті. Деякі знакові дослідження, пов'язані з пружностатичною контактною механікою в цілому, належать Герцу [3], Галіну [4], Уфліанду [5] і Лур'є [6].

Також використовується для дослідження в'язкопружної динаміки для рідин у стані гідростатичного початкового напруження. Істотним є вплив початкового напруження для в'язкопружних збурень. Такі проблеми широко досліджував Біо і розглянуті в монографії. З цим дослідженням тісно пов'язаний аналіз Біота [18] квазістатичної в'язкопружної деформації початково гідростатичного напівпростору, у якому ефекти, спричинені початковим напруженням, враховуються окремим членом, включеним до рівняння інкрементальної рівноваги. Загалом Біо віддав перевагу формальному трактуванню проблеми, у якому фізичне значення модифікацій, пов'язаних із початковим стресом, не обговорювалося повністю. Його робота не привернула особливої уваги. У наступних дослідженнях в'язкопружної проблеми Бусінеска це ігнорування є очевидним, в них нехтується початковим напруженням (наприклад, Пелт'єр [19]; Кафлес [20]).

Метод Вольфа [21] для врахування початкового стресу виглядає дуже схожим на той, який використовував Біо (1959), хоча Вольф не знав про публікацію Біо в той час. Як і в дослідженні Біота, Вольф [21] [22] не повністю визнав значення модифікацій, пов'язаних із початковим стресом. Це, зокрема, стосується фізичного значення двох типів додаткового стресу, використаного в аналізі Вольфа [23], який не був належним чином обговорений.

Отже, як можна побачити ця проблема багато використовувалось та використовується для різних досліджень. Тому вона є дуже важливою для розглянення у наш час, як з практичної точки зору так і з точки зору розвитку математичних методів розв'язку подібних проблем.

ВИСНОВКИ

Аналітично розв'язано задачу Бусинеска, де до межі півпростору $z = 0$ прикладене стискаюче нормальне напруження. Побудовані розрахункові формули для зміщень та дотичних напружень. За допомогою чисельного аналізу, вдалося встановити, якими є зміщення та напруження, а саме τ_{zx} знаходиться біля 0, але при збільшенні y стабільно з'являються випадки зростаючого за модулем напруження. За $x \rightarrow 0$ τ_{zy} збільшується за модулем. Зміщення u та v є позитивними при $x > 0$ та від'ємними при $x < 0$ та досягають піків при $y = 0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бусинеск: Застосування потенціалів до вивчення рівноваги та руху пружних тіл. Готьє-Віллар, Париж (1885)
2. Хардінг, Дж. В., Снеддон, І. Н.: пружні напруги, створені вдавненням площини напівнескінченного пружного тіла жорстким пуансоном. *Філософ. Соц.* 41, 16–26 (1945)
3. Герц Г. Про контакт твердих пружних тіл. *Дж. Рейне Анжу. мат.*, 92, 156-171 (1882)
4. Галін, Л.А.: Контактні проблеми в класичній теорії пружності, В: Снеддон, І.Н. (ред.) англ. пер. техн. Представник G16447, Державний коледж Північної Кароліни, Ролі
5. Уфліанд : Контактна задача теорії пружності для матриці, круглої у своїй площині, за наявності адгезії. *Дж. апл. математика мех.* 20, 578–587 (1956)
6. Лур'є А. І. Тривимірні проблеми теорії пружності. Нью-Йорк (1964)
7. Г. Я. Попов, Докл. фіз. 47 (5), 397 (2002) [Докл. акад. наук 384 (2), 193 (2002)].
8. Попов Г.Я, Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Учебный посібник з курсу «РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ»
9. Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика» / Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут. – Одеса : Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 194 с.
10. Lamé G. and Clapeyron E. (1831) Memoire sur l'équilibre interieur des corps solides homoghes, *Crrlle's 1. Reine Angew. Mnth.*, 7,381-413.
11. Cerruti V. (1882) Ricerche intorno all' equilibrio de' corpi elastici isotropi, *Reale Accad. Linc. Ronia, Ser. 3A*, 13,81- 122.
12. Lamb H. (1902) On Boussinesq's problem, *Proc. London Math. SOC.*, 34,276-284.
13. Terazawa K.(1916) On the elastic equilibrium of a semi-infinite solid under given boundary conditions, with some applications, *I. Coll. Sci. Tokyo*, 0,37/7,1-

14. Love A.E.H. (1929) The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary, *Phil. Trans. R. SOC.A*, 28,377-420.
15. Harding J.W. and Sneddon I.N. (1945) The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 41, 16-26.
16. Sneddon I.N. (1946) The elastic stresses produced in a thick plate by the application of pressure to its free surfaces, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 42,260-271.
17. Farrell W.E. (1972) Deformation of the earth by surface loads, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 10,761-797
18. Biot M.A. (1959) The influence of gravity on the folding of a layered viscoelastic medium under compression, *J. Franklin Inst.*, 267,211-228. Biot M.A. (1965) *Mechanics of Incremental Deformations*. Wiley, New York.
19. Peltier W.R. (1974) The impulse response of a Maxwell earth, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 12,649-669.
20. Cathles L.M. (1975) *The Viscosity of the Earth's Mantle*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
21. Wolf D. (1985a) Thick-plate flexure re-examined, *Geophys. J. R. astr. SOC.*, 80, 265-273.
22. Wolf D. (1985b) On Boussinesq's problem for Maxwell continua subject to an external gravity field, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 80,275-279.
23. Wolf D. (1991) Viscoelastodynamics of a stratified, compressible planet: incremental field equations and short- and long-time asymptotes, *Geophys. J. Int.*, 104,401-417.