

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

**«Антиплоска задача теорії пружності
для зовнішнього складеного сектору кола»**

**«Antiplane problem of elasticity theory
for the external compound sector of a circle»**

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»

Метасов Андрій Сергійович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю.С. _____
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З. Ю.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ 2023 р.

Захищено на засіданні ЕК № _____
протокол № ____ від _____ 2023 р.
Оцінка _____ / ____ / _____

Завідувач кафедри

Голова ЕК

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	5
РОЗВ’ЯЗОК.....	6
2.1 Зведення до одновимірної задачі.....	6
2.2 Побудова неперервного розв’язку	7
2.3 Побудова розривного розв’язку	8
2.4 Розв’язок одновимірної задачі	10
2.5 Розв’язок початкової задачі	13
ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РОЗВ’ЯЗКУ	15
ВИСНОВКИ.....	21
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	22
ДОДАТКИ.....	23

ВСТУП

У роботі викладено розв'язок антиплоскої задачі теорії пружності для зовнішнього складеного сектору кола з застосуванням методу інтегральних перетворень. Також, за допомогою програмного коду, надані декілька візуалізацій знайденого розв'язку.

Розглянемо пружне тіло, яке займає у циліндричній системі координат (r, θ, z) наступну область: $a < r < \infty$, $-\beta < \theta < \beta$, $-\infty < z < \infty$. Припустимо, що грань тіла, яка відповідає $\theta = -\beta$, $a < r < \infty$, $|z| < \infty$ – вільна від напружень, а грань, яка відповідає $\theta = \beta$, $a < r < \infty$, $|z| < \infty$ – нерухомо закріплена. Нехай до криволінійної грані $(r = a, -\beta < \theta < \beta, |z| < \infty)$ прикладено навантаження з деякою інтенсивністю $f(\theta)$, яке діє вздовж осі OZ .

У такій постановці задачі розглянуте тіло буде знаходитись в умовах антиплоскої деформації, тобто всі величини не залежатимуть від координати z . Тоді, відмінними від нуля будуть тільки три механічні величини: переміщення $W(r, \theta)$ вздовж осі OZ , тангенціальне дотичне напруження $T_{\theta z}(r, \theta)$ та радіальне дотичне напруження $T_{rz}(r, \theta)$, де

$$T_{\theta z} = G \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad T_{rz} = G \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Далі, нехай це тіло складається з двох частин з різними пружними характеристиками. Перша частина тіла займає область з наступними обмеженнями: $a < r < c$, $-\beta < \theta < \beta$, $|z| < \infty$ і має модуль зсуву G_1 , а друга частина – область з обмеженнями $c < r < \infty$, $-\beta < \theta < \beta$, $|z| < \infty$, і має модуль зсуву G_2 . Припустимо, що між двома частинами тіла виконуються умови ідеального механічного контакту – при переході через лінію контакту матеріалів $(r = c)$ переміщення $W(r, \theta)$ та напруження $T_{rz}(r, \theta)$ неперервні.

Проілюструємо це тіло.

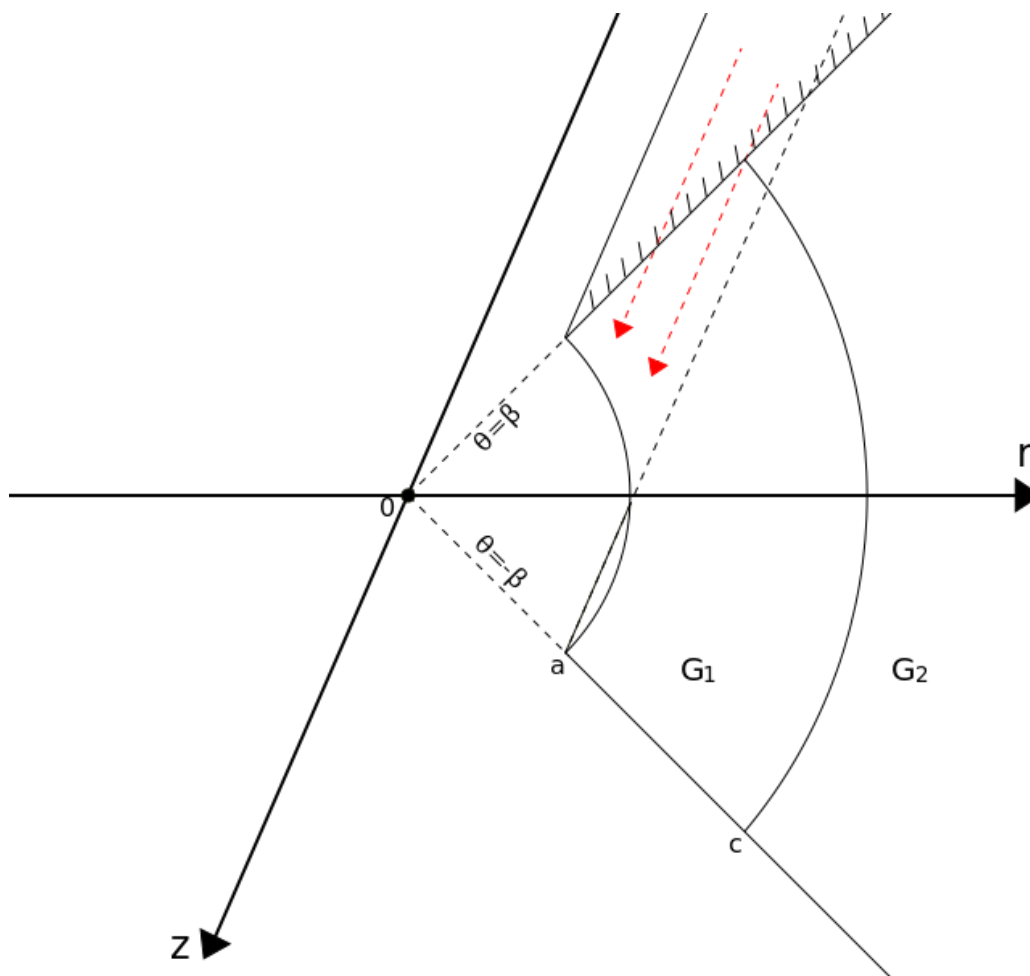


Рис. 1. Схема розглянутого пружного тіла

Метою роботи є знаходження і візуалізація функцій, які описують переміщення точок цієї області і тангенціальне та радіальне напруження всередині.

РОЗДІЛ 1

Постановка задачі

Математично, розглянута постановка задачі еквівалентна наступній крайовій.

Переміщення $W(r, \theta)$ повинно задовольняти рівнянню Ламе:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = 0, \quad a < r < \infty, \quad r \neq c, \quad -\beta < \theta < \beta; \quad (1.1)$$

з крайовими умовами:

$$W|_{\theta=\beta} = 0; \quad T_{\theta z}|_{\theta=-\beta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \theta} \Big|_{\theta=-\beta} = 0; \quad (1.2)$$

$$T_{rz}|_{r=a} = G_1 \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=a} = -f(\theta); \quad W, r \frac{\partial W}{\partial r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0; \quad (1.3)$$

та умовами сполучення тіл:

$$\langle W \rangle = W|_{r=c-0} - W|_{r=c+0} = 0; \quad (1.4)$$

$$\langle T_{rz} \rangle = G_1 \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=c-0} - G_2 \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=c+0} = 0; \quad (1.5)$$

де $W(r, \theta)$ – переміщення точок площини, a, c, β, G_1, G_2 – задані константи, $T_{rz}, T_{\theta z}$ – дотичні напруження, а $\langle W \rangle$ і $\langle T_{rz} \rangle$ – стрибки відповідних функцій на лінії $r = c$.

РОЗДІЛ 2

Розв'язок

2.1 Зведення до одновимірної задачі

Почнемо з застосування методу інтегральних перетворень. Скористаємося кінцевим інтегральним перетворенням Фур'є за змінною θ :

$$W_n(r) = \int_{-\beta}^{\beta} W(r, \theta) \cos(\alpha_n(\theta + \beta)) d\theta; \quad \alpha_n = \frac{\pi}{4\beta}(2n-1), \quad n = \overline{1 \dots \infty}. \quad (2.1)$$

Формула обернення у цьому випадку має вигляд:

$$W(r, \theta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} W_n(r) \cos(\alpha_n(\theta + \beta)). \quad (2.2)$$

Застосувавши перетворення (2.1) до початкової задачі (1.1) – (1.5), отримаємо розривну одновимірну задачу відносно трансформанти $W_n(r)$:

$$r(rW_n'(r))' - \alpha_n^2 W_n(r) = 0, \quad a < r < \infty, \quad r \neq c; \quad (2.3)$$

$$W_n(r), \quad rW_n'(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0; \quad (2.4)$$

$$W_n'(a) = -\frac{f_n}{G_1}, \quad \text{де } f_n = \int_{-\beta}^{\beta} f(\theta) \cos(\alpha_n(\theta + \beta)) d\theta;$$

$$\langle W_n \rangle = W_n(c-0) - W_n(c+0) = 0; \quad (2.5)$$

$$\langle T_{rz,n} \rangle = G_1 W_n'(c-0) - G_2 W_n'(c+0) = 0.$$

Шукати розв'язок цієї одновимірної розривної задачі будемо у вигляді суми неперервного та розривного розв'язків. Таким чином,

$$W_n(r) = W_n^{нен.}(r) + W_n^{розр.}(r). \quad (2.6)$$

2.2 Побудова неперервного розв'язку

Для пошуку $W_n^{нен.}$ розв'яжемо крайову задачу (2.3) – (2.4). Зведемо (2.3) до простішого вигляду:

$$r(rW_n'(r))' - \alpha_n^2 W_n(r) = r^2 W_n''(r) + rW_n'(r) - \alpha_n^2 W_n(r) = 0. \quad (2.7)$$

Отримали рівняння Ейлера. Знайдемо спочатку загальний його розв'язок. Нехай $W_n(r) = r^\sigma$, тоді з (2.7): $r^2 \sigma(\sigma - 1)r^{\sigma-2} + r\sigma r^{\sigma-1} - \alpha_n^2 r^\sigma = 0$. Поділивши це рівняння на r^σ та спростивши результат, отримаємо $\sigma^2 = \alpha_n^2$, звідки $\sigma = \pm \alpha_n$. Тоді розв'язок рівняння Ейлера можна подати у вигляді $W_n = Ar^{\alpha_n} + Br^{-\alpha_n}$.

Тепер змусимо розв'язок задовольняти крайовим умовам (2.4). Для першої умови $(W_n(r), rW_n'(r)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ потрібно покласти $A = 0$, залишивши тільки від'ємну степінь r при коефіцієнті B . Таким чином, $W_n = Br^{-\alpha_n}$. Знайдемо B з другої умови (2.4): $W_n'(a) = -\frac{f_n}{G_1}$. Тоді $(Br^{-\alpha_n})' \Big|_{r=a} = \frac{-f_n}{G_1}$, звідки $-\alpha_n Ba^{-\alpha_n-1} = \frac{-f_n}{G_1}$,

$$B = \frac{f_n}{G_1 \alpha_n} a^{\alpha_n+1}.$$

Нарешті, можемо отримати неперервний розв'язок, підставивши знайдений B до $W_n(r)$:

$$W_n^{нен.}(r) = \frac{f_n}{G_1 \alpha_n} a^{\alpha_n+1} \cdot r^{-\alpha_n}. \quad (2.8)$$

Трохи спростивши, отримаємо:

$$W_n^{нен.}(r) = \frac{a}{\alpha_n G_1} f_n \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_n}. \quad (2.9)$$

2.3 Побудова розривного розв'язку

Розривний розв'язок будуватимемо за допомогою функції Гріна. Почнемо з пошуку фундаментальної функції рівняння (2.3). Для цього, зробимо заміну $r = ae^t$. Тоді, $W_n(r) = W_n(ae^t) = y_n(t)$, звідки можемо знайти похідні: $y'_n(t) = ae^t W'_n(r)$, $y''_n(t) = r(rW'_n(r))'$. Таким чином, рівняння (2.3) перетворюється на лінійне однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$y''_n(t) - \alpha_n^2 y_n(t) = 0. \quad (2.10)$$

Для нього відома фундаментальна функція, спадна на нескінченності:

$$\Phi_n(t, \tau) = \frac{-1}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n |t-\tau|}. \quad (2.11)$$

Тепер, за допомогою оберненої заміни $t = \ln \frac{r}{a}$, $\tau = \ln \frac{\rho}{a}$, отримаємо фундаментальну функцію рівняння (2.3):

$$\Phi_n(r, \rho) = \frac{-1}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{a} - \ln \frac{\rho}{a} \right|} = \frac{-1}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{\rho} \right|}. \quad (2.12)$$

Далі побудуємо фундаментальну базисну функцію $\Psi_n(r)$, яка буде задовольняти рівнянню (2.3) та умовам $\Psi'_n(a) = 1$, $\Psi_n(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Почнемо аналогічно першому кроку побудови неперервного розв'язку – представимо $\Psi_n(r)$ як загальний розв'язок рівняння:

$$\Psi_n(r) = C_1 r^{\alpha_n} + C_2 r^{-\alpha_n}. \quad (2.13)$$

Тепер, змусимо її задовольняти умові $\Psi_n(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Для цього покладемо коефіцієнт C_1 при додатній степені r рівним нулю і отримаємо $\Psi_n(r) = C_2 r^{-\alpha_n}$. Тепер задовольнимо умову $\Psi'_n(a) = 1$, знайшовши відповідний коефіцієнт C_2 .

Отримаємо $(C_2 r^{-\alpha_n})' \Big|_{r=a} = 1$, звідки $C_2 = \frac{-1}{\alpha_n a^{-\alpha_n - 1}}$. Тепер, підставимо це в $\Psi_n(r)$

та отримаємо

$$\Psi_n(r) = \frac{-a}{\alpha_n} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_n}. \quad (2.14)$$

Ми отримали все необхідне для побудови функції Гріна крайової задачі (2.3) – (2.4). В загальному вигляді її можна представити наступним чином:

$$G_n(r, \rho) = \Phi_n(r, \rho) - \Psi_n(r) \frac{\partial \Phi_n(r, \rho)}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (2.15)$$

Підставимо в неї знайдені $\Phi_n(r)$ та $\Psi_n(r)$ з (2.12) та (2.14) відповідно.

Отримаємо:

$$G_n(r, \rho) = \frac{-1}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{\rho} \right|} - \frac{-a}{\alpha_n} \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_n} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-1}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{\rho} \right|} \right) \Big|_{r=a}. \quad (2.16)$$

Тепер, скориставшись тим, що похідна модулю це $sign$, спростимо вираз функції Гріна та отримаємо:

$$G_n = \frac{-1}{2\alpha_n} \left(e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{\rho} \right|} - \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_n} e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{a}{\rho} \right|} \cdot sign \left(\ln \frac{a}{\rho} \right) \right). \quad (2.17)$$

Нарешті, маючи функцію Гріна, можемо побудувати розривний розв'язок наступним чином:

$$W_n^{розр.}(r) = c \left[A_0 \frac{\partial G_n(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=c} - A_1 G_n(r, \rho) \Big|_{\rho=c} \right], \quad (2.18)$$

де A_0 – стрибок функції переміщення $W_n(r)$ на лінії $r = c$, A_1 – стрибок похідної $W_n'(r)$ на лінії $r = c$. З першої умови в (2.5) нам відомо, що $A_0 = 0$, а константа

A_1 буде знайдена за допомогою другої умови трохи пізніше. Враховуючи це, розривний розв'язок приймає наступний вигляд:

$$W_n^{розр.}(r) = -A_1 c \cdot G_n(r, \rho) \Big|_{\rho=c}. \quad (2.19)$$

Підставивши у (2.19) функцію Гріна з (2.17) отримаємо:

$$W_n^{розр.}(r) = \frac{A_1 c}{2\alpha_n} \left(e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{c} \right|} - \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{a}{c} \right|} \cdot \text{sign} \left(\ln \frac{a}{c} \right) \right). \quad (2.20)$$

Враховуючи те, що за умовою $a < c$, можемо зробити висновок, що $\ln \frac{a}{c} < 0$, а

тоді $\text{sign} \left(\ln \frac{a}{c} \right) = -1$ та $\left| \ln \frac{a}{c} \right| = -\ln \frac{a}{c}$. Таким чином, отримаємо остаточний вигляд

розривного розв'язку:

$$W_n^{розр.}(r) = \frac{A_1 c}{2\alpha_n} \left(e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{c} \right|} + \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} e^{\alpha_n \ln \frac{a}{c}} \right). \quad (2.21)$$

2.4 Розв'язок одновимірної задачі

Отримавши як неперервну, так і розривну частини розв'язку, побудуємо розв'язок одновимірної розривної задачі (2.3) – (2.5) за формулою (2.6):

$$W_n(r) = \frac{a}{\alpha_n G_1} f_n \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} + \frac{A_1 c}{2\alpha_n} \left(e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{c} \right|} + \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} e^{\alpha_n \ln \frac{a}{c}} \right). \quad (2.22)$$

Перейдемо до знаходження константи A_1 . Для цього скористаємось другим рівнянням з умов сполучення тіл (2.5) і перепишемо його у наступному вигляді:

$$G_1 W_n'(c-0) = G_2 W_n'(c+0). \quad (2.23)$$

Тепер, віднімаємо від обох частин $G_1 W_n'(c+0)$:

$$\begin{aligned} G_1 W_n'(c-0) - G_1 W_n'(c+0) &= G_2 W_n'(c+0) - G_1 W_n'(c+0); \\ G_1 (W_n'(c-0) - W_n'(c+0)) &= W_n'(c+0)(G_2 - G_1). \end{aligned} \quad (2.24)$$

У лівій частині у дужках отримали стрибок $W_n'(r)$ на лінії $r = c$, який дорівнює A_1 . Позначимо це у рівнянні і дещо спростимо його:

$$\begin{aligned} G_1 A_1 &= (G_2 - G_1) W_n'(c+0); \\ A_1 &= \frac{G_2 - G_1}{G_1} W_n'(c+0). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Позначивши $\frac{G_2 - G_1}{G_1} = G^*$, отримаємо вираз для знаходження A_1 :

$$A_1 = G^* W_n'(c+0). \quad (2.26)$$

Знайдемо окремо $W_n'(c+0)$. Для цього спочатку побудуємо $W_n'(r)$:

$$W_n'(r) = \frac{\partial W_n}{\partial r} = \frac{-a}{G_1 r} f_n \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} + \frac{A_1 c}{2\alpha_n} \left(e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{c} \right|} + \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} e^{\alpha_n \ln \frac{a}{c}} \right)'_r \quad (2.27)$$

Знову врахуємо те, що похідна модулю це $sign$, таким чином:

$$W_n'(r) = \frac{-a}{G_1 r} f_n \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} - \frac{A_1 c}{2r} \left(e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{c} \right|} \cdot sign \left(\ln \frac{r}{c} \right) + e^{\alpha_n \ln \frac{a}{c}} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} \right). \quad (2.28)$$

Тепер перейдемо в (2.28) до $r \rightarrow c+0$. При цьому $\frac{r}{c} \rightarrow 1+0$, $\ln \frac{r}{c} \rightarrow +0$, а тому

$sign \left(\ln \left(\frac{r}{c} \right) \right) = 1$. Тоді отримаємо:

$$W_n'(c+0) = \frac{-a}{G_1 c} f_n \left(\frac{a}{c} \right)^{\alpha_n} - \frac{A_1}{2} \left(1 \cdot 1 + e^{\alpha_n \ln \frac{a}{c}} \cdot \left(\frac{a}{c} \right)^{\alpha_n} \right). \quad (2.29)$$

Ще відмітимо те, що оскільки за умовою $\frac{a}{c} > 0$, то $e^{\alpha_n \ln \frac{a}{c}} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha_n}$. Таким чином, приходимо до наступної форми $W'_n(c+0)$:

$$W'_n(c+0) = \frac{-a}{G_1 c} f_n \left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha_n} - \frac{A_1}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{c}\right)^{2\alpha_n}\right). \quad (2.30)$$

Використаємо тепер (2.30) у виразі (2.26) і отримаємо рівняння для знаходження A_1 :

$$A_1 = G^* \left(\frac{-a}{G_1 c} f_n \left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha_n} - \frac{A_1}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{c}\right)^{2\alpha_n}\right) \right). \quad (2.31)$$

Розв'язавши його та обернувши заміну G^* , отримаємо остаточний вигляд A_1 :

$$A_1 = \frac{a(G_1 - G_2) f_n \left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha_n}}{G_1^2 c \left(1 + \frac{G_2 - G_1}{2G_1} \left(1 + \left(\frac{a}{c}\right)^{2\alpha_n}\right)\right)}. \quad (2.32)$$

Нарешті, можемо підставити (2.32) до виразу (2.22) і спростити результат для знаходження остаточного вигляду трансформанти:

$$W_n(r) = \frac{a}{\alpha_n G_1} f_n \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_n} + \frac{a(G_1 - G_2) f_n \left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha_n}}{2\alpha_n G_1^2 \left(1 + \frac{G_2 - G_1}{2G_1} \left(1 + \left(\frac{a}{c}\right)^{2\alpha_n}\right)\right)} \left(e^{-\alpha_n \left|\ln \frac{r}{c}\right|} + \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_n} \left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha_n} \right). \quad (2.33)$$

Таким чином, ми отримали розв'язок одновимірної розривної задачі (2.3) – (2.5) відносно трансформанти $W_n(r)$.

2.5 Розв'язок початкової задачі

Для повернення з простору трансформант, застосуємо тепер формулу обернення (2.2) з трансформантою (2.33) і нарешті отримаємо розв'язок початкової задачі:

$$W(r, \theta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a}{\alpha_n G_1} f_n \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} + \frac{a(G_1 - G_2) f_n \left(\frac{a}{c} \right)^{\alpha_n}}{2\alpha_n G_1^2 \left(1 + \frac{G_2 - G_1}{2G_1} \left(1 + \left(\frac{a}{c} \right)^{2\alpha_n} \right) \right)} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{c} \right|} + \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} \left(\frac{a}{c} \right)^{\alpha_n} \right) \right] \cos(\alpha_n (\theta + \beta)). \quad (2.34)$$

Знаючи $W(r, \theta)$, знайдемо тепер тангенціальне та радіальне дотичні напруження. Почнемо з радіального:

$$T_{rz}(r, \theta) = G \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{G}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} W'_n(r) \cos(\alpha_n (\theta + \beta)). \quad (2.35)$$

Скористаємось вже знайденим $W'_n(r)$ з (2.28). Далі, трохи спростивши, отримаємо:

$$T_{rz}(r, \theta) = \frac{G}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{-a}{G_1 r} f_n \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} - \frac{a(G_1 - G_2) f_n \left(\frac{a}{c} \right)^{\alpha_n}}{2r G_1^2 \left(1 + \frac{G_2 - G_1}{2G_1} \left(1 + \left(\frac{a}{c} \right)^{2\alpha_n} \right) \right)} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{c} \right|} \cdot \text{sign} \left(\ln \frac{r}{c} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} \left(\frac{a}{c} \right)^{\alpha_n} \right) \right] \cos(\alpha_n (\theta + \beta)) \quad (2.36)$$

Залишилося знайти тангенціальне напруження за формулою:

$$T_{\theta z}(r, \theta) = G \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{G}{\beta r} \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha_n W_n(r) \sin(\alpha_n (\theta + \beta)). \quad (2.37)$$

Підставивши відому трансформанту з (2.33) і спростивши, отримаємо:

$$T_{\theta z}(r, \theta) = \frac{-G}{\beta r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a}{G_1} f_n \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} + \frac{a(G_1 - G_2) f_n \left(\frac{a}{c} \right)^{\alpha_n}}{2G_1^2 \left(1 + \frac{G_2 - G_1}{2G_1} \left(1 + \left(\frac{a}{c} \right)^{2\alpha_n} \right) \right)} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(e^{-\alpha_n \left| \ln \frac{r}{c} \right|} + \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_n} \left(\frac{a}{c} \right)^{\alpha_n} \right) \right] \sin(\alpha_n (\theta + \beta)). \quad (2.38)$$

Таким чином, ми повністю розв'язали поставлену в (1.1) – (1.5) крайову задачу і отримали функції $W(r, \theta)$, $T_{rz}(r, \theta)$ і $T_{\theta z}(r, \theta)$, які описують відповідно переміщення точок площини тіла, радіальне і тангенціальне напруження всередині тіла. Можемо вважати першу частину мети роботи виконаною.

РОЗДІЛ 3

Візуалізація розв'язку

Перейдемо до графіків функцій – візуалізуємо переміщення та напруження. Для цього задаємо деякі початкові значення змінним задачі. Нехай $a = 5, c = 15, \beta = \frac{\pi}{4}, G_1 = 1, G_2 = 5, f(\theta) = 1$. Таке співвідношення модулів зсуву може відповідати, наприклад, магнію та сталі. Всі графіки побудовані за допомогою програмного коду на мові Python 3.8, який приведено в Додатку А.

Спочатку за допомогою графіків була перевірена відповідність функцій розв'язку крайовим умовам задачі – усі вони виконуються. Так, наприклад, виглядає $T_{\theta z}|_{\theta=-\beta}, a \leq r \leq 2c$. (Рис. 3.1). Тут і далі помаранчева пунктирна лінія – лінія з'єднання матеріалів.

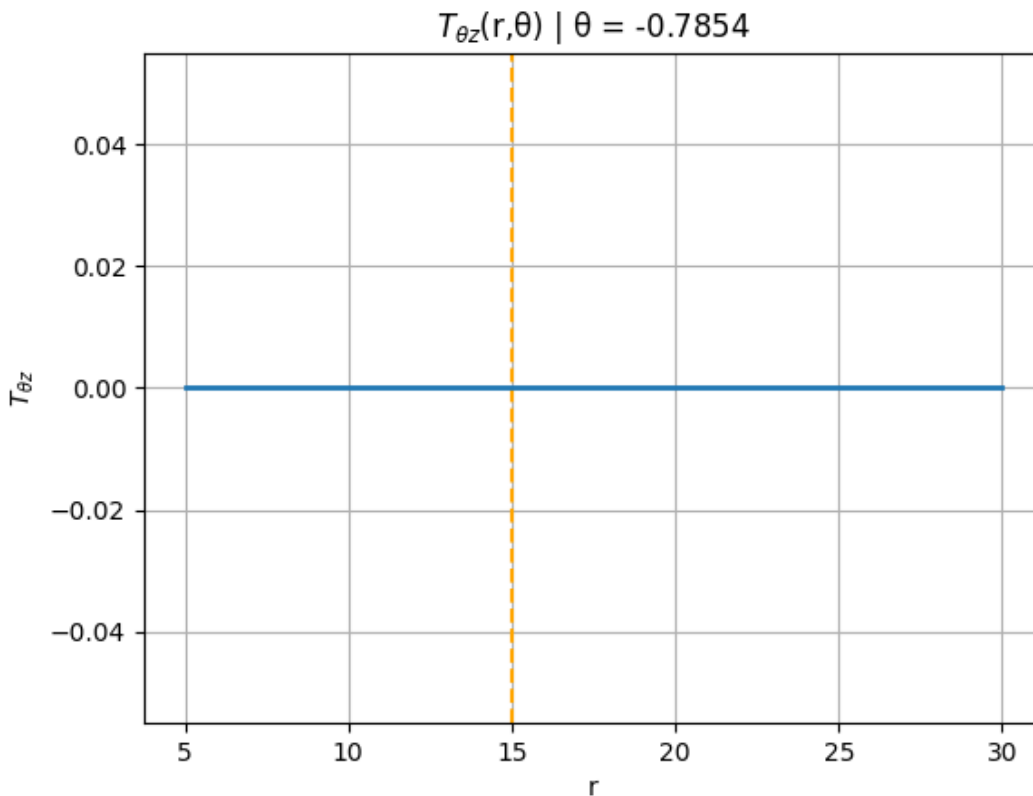


Рис. 3.1. Тангенціальне напруження на вільній грані

Подивимось тепер на функцію переміщення точок площини тіла. На рис. 3.2 приведено графік $W|_{\theta=-\beta}$, $a \leq r \leq 2c$. Він добре показує те, як перехід від одного до іншого матеріалу при такому співвідношенні G_1 до G_2 змінює переміщення точок.

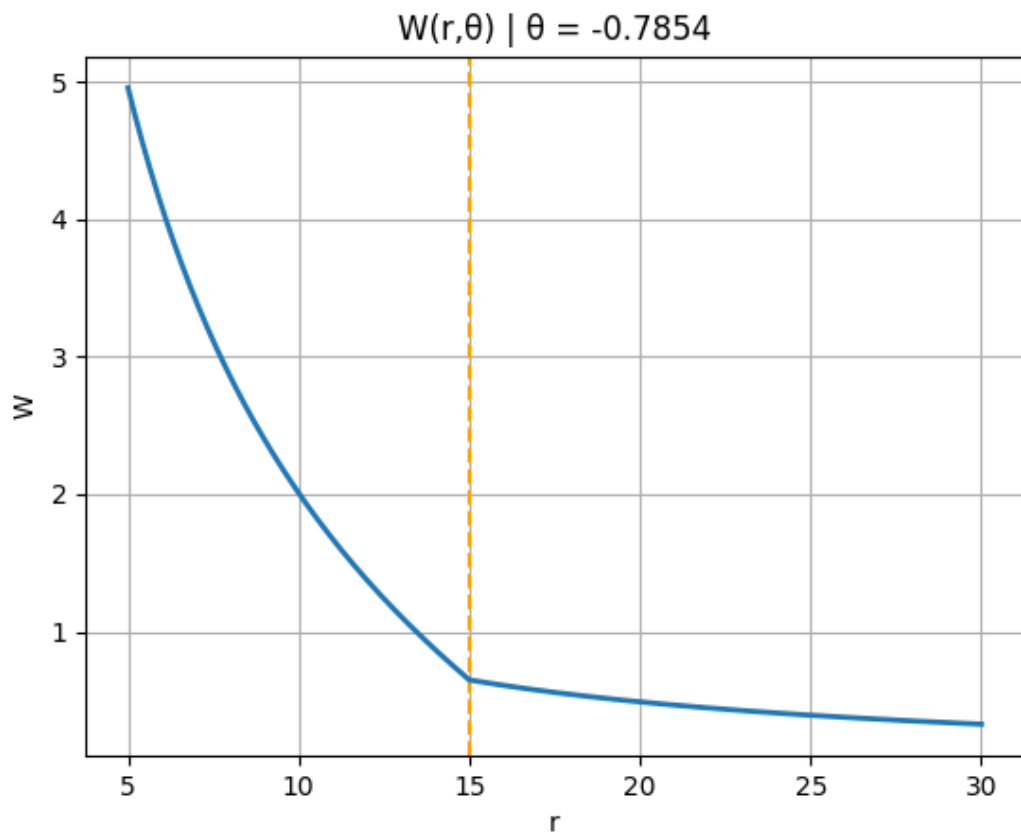


Рис. 3.2. Переміщення точок тіла на вільній грані

Далі, на рис. 3.3 приведено графік $W|_{r=a}$, $-\beta \leq \theta \leq \beta$. На ньому можна побачити те, як переміщення точок спадає при наближенні до закріпленої грані.

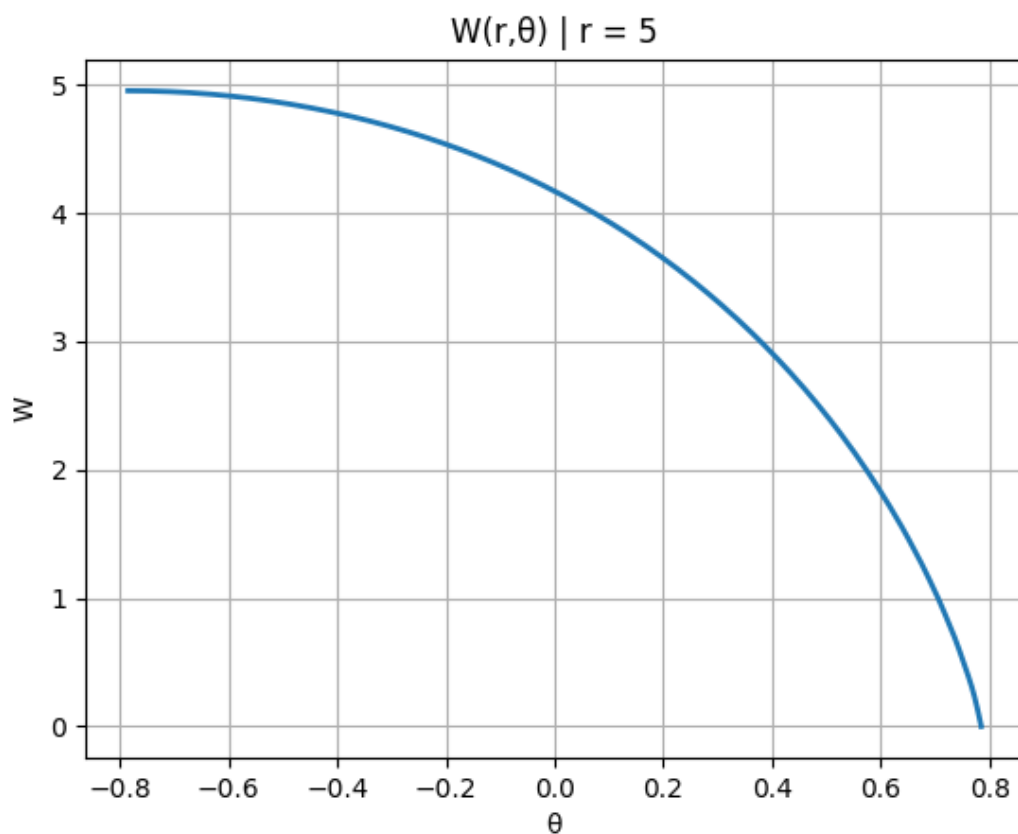


Рис. 3.3. Переміщення точок тіла на криволінійній грані

Тепер проілюструємо поведінку напружень. Цікаво подивитись на поведінку $T_{rz}|_{\theta=0}$, $a \leq r \leq 2c$. Так, на рис. 3.4 можна побачити, як на радіальне напруження впливає лінія $r = c$ і як воно наближається до нуля з ростом r .

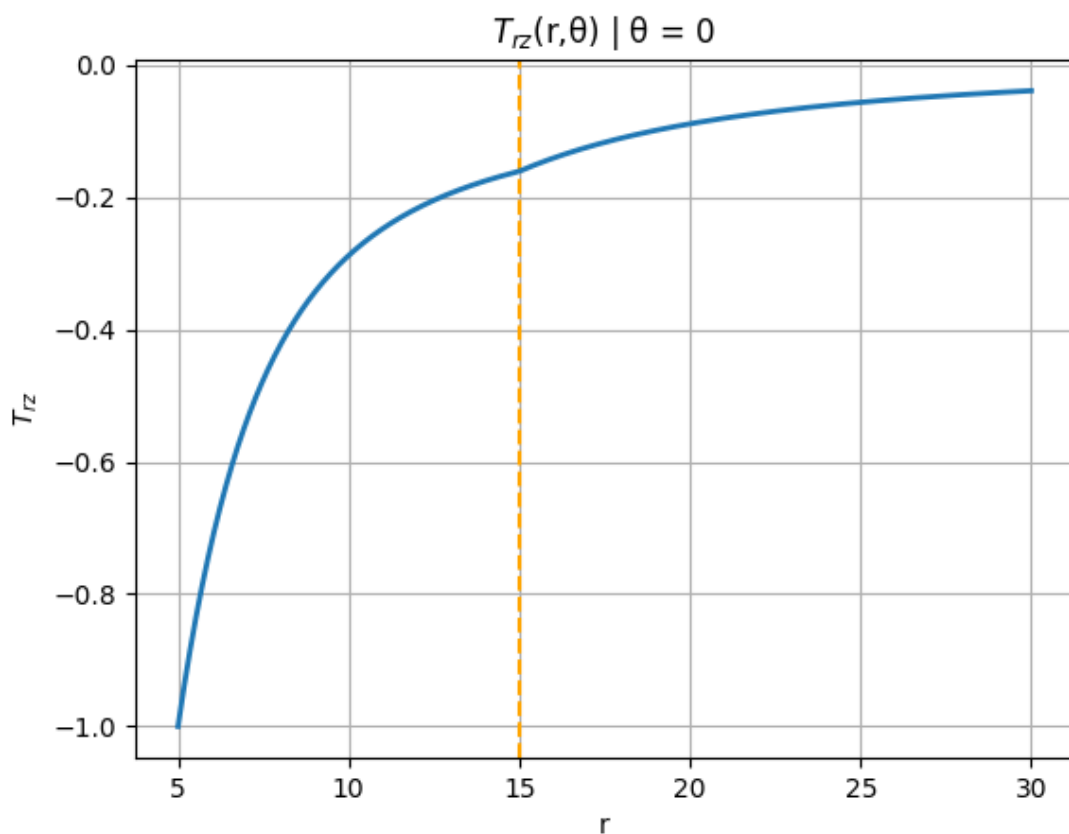


Рис. 3.4. Радіальне напруження посередині тіла

Побудуємо тепер ще один графік для тангенціального напруження. На рис. 3.5 графік $T_{\theta z}|_{r=a}$, $-\beta \leq \theta \leq \beta$, на якому можна побачити те, як напруження від нуля на вільній грані зростає по модулю до 4 на закріпленій.

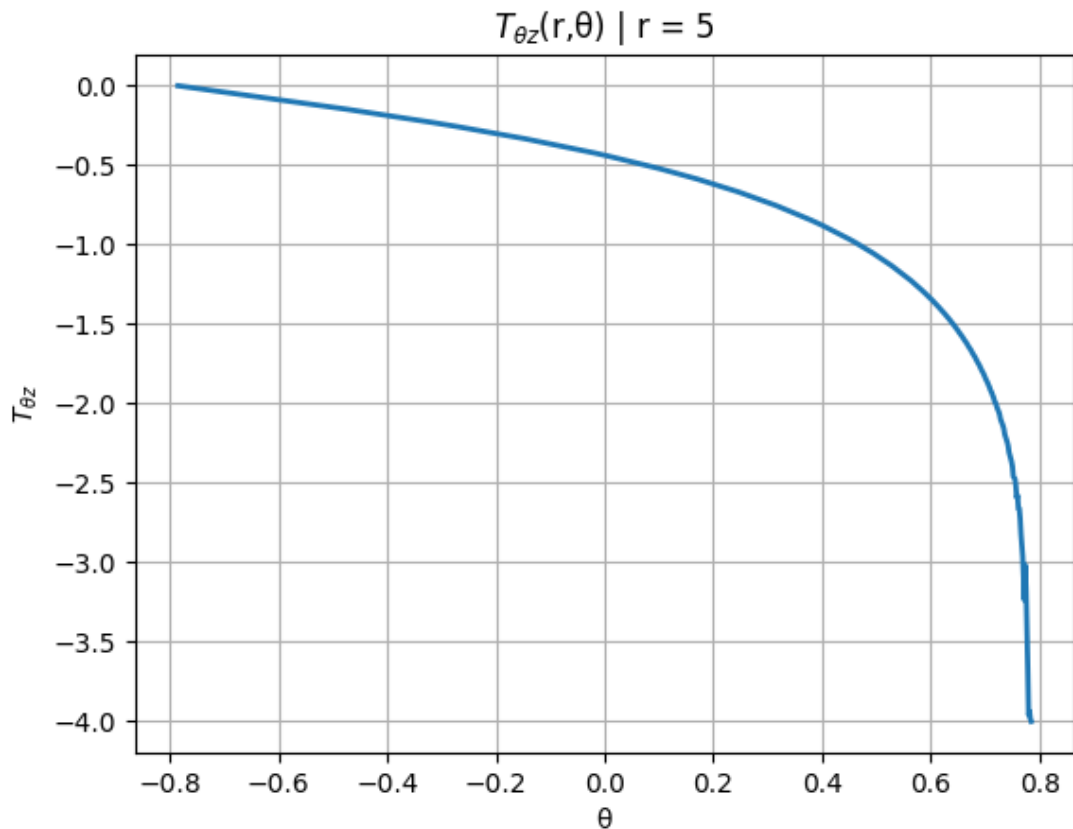


Рис. 3.5. Тангенціальне напруження на криволінійній грані

В останню чергу побудуємо дві «теплові карти» – двовимірні графіки, у яких колір кожної точки відображає значення функції в неї, або -1 , якщо точка не належить тілу. На рис. 3.6 та рис. 3.7 представлені теплові карти функцій $W(r, \theta)$ та $T_{rz}(r, \theta)$ відповідно. На них можна наочно побачити те, як виконуються умови ідеального механічного контакту (1.4) та (1.5) – кольори точок, а отже і значення функцій плавно змінюються при переході через лінію $r = c$.

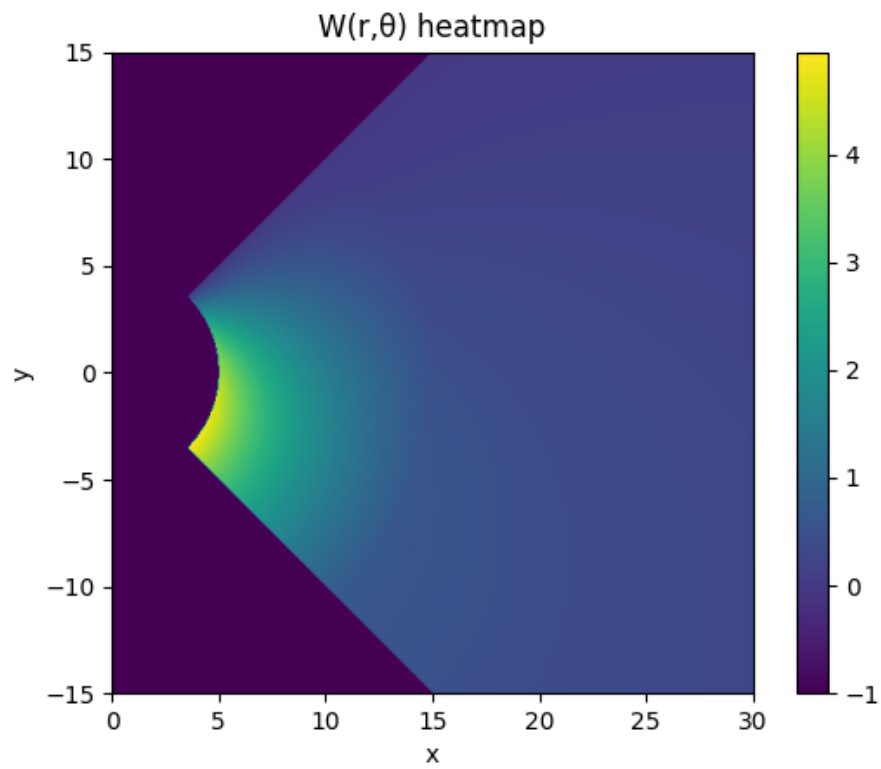


Рис. 3.6. Теплова карта значень функції переміщення точок тіла

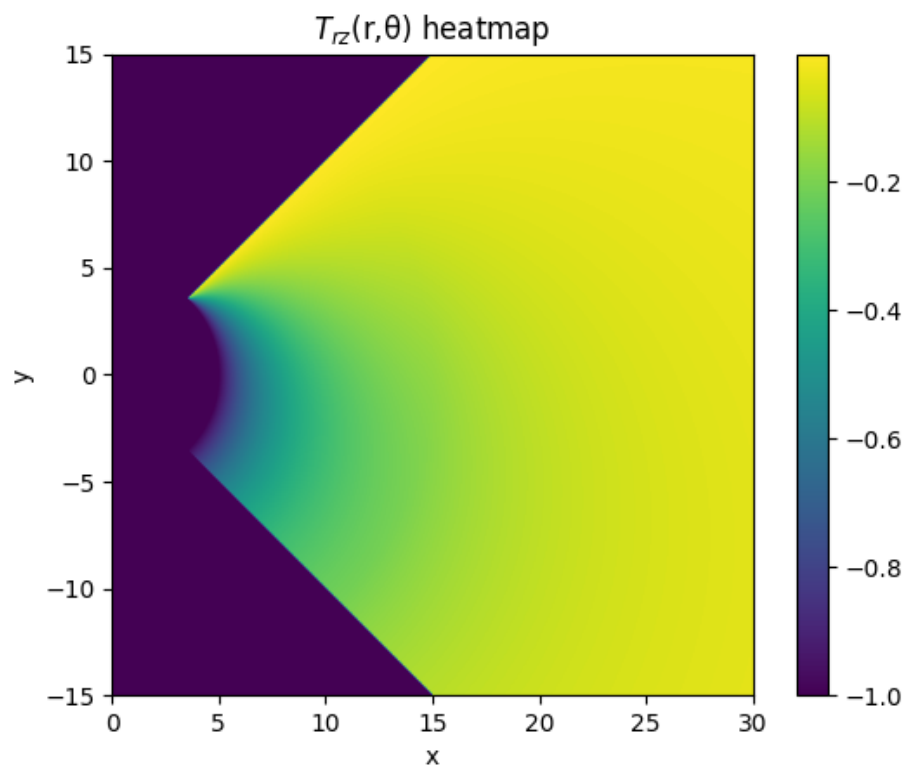


Рис. 3.7. Теплова карта значень функції радіального напруження точок тіла

ВИСНОВКИ

В даній роботі було сформульовано та вирішено антиплоску задачу теорії пружності для зовнішнього складеного сектору кола. Для отримання аналітичного розв'язку була сформована відповідна крайова задача, до якої ми застосували метод інтегральних перетворень.

Після отримання аналітичного розв'язку було розроблено програмний код на мові Python 3.8 для візуалізації функцій, які відображають поведінку матеріалів у розглянутих умовах. Графіки, які вийшли в результаті, підтвердили правильність та відповідність отриманих функцій задачі і крайовим умовам та допомогли краще зрозуміти такі речі, як розподіл переміщення і напруження в області та їх поведінку при переході від одного матеріалу до іншого.

Отже, отриманий розв'язок свідчить про успішне вирішення поставленої задачі, а всі результати наочно розширюють наше розуміння механічних властивостей подібних структур, тому можемо зробити висновок, що мета роботи досягнута повністю.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Божидарник В. В. Елементи теорії пружності / В. В. Божидарник, Г. Т. Сулим. – Львів : Світ, 1994. – 560 с.
2. Процеров Ю. С. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки і техніки» для студентів 3 курсу спеціальності «Прикладна математика» / Ю. С. Процеров, О. П. Мойсеєнок. – Одеса : Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2015. – 61 с.
3. Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика» / Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут. – Одеса : Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 194 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Програмний код для побудови графіків на мові Python 3.8

```

import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

def alpha_n(n):
    return np.pi / (4 * beta) * (2 * n - 1)

a = 5
c = 15
beta = np.pi / 4
G1 = 1
G2 = 5

def f_n(n):
    return np.sin(2 * alpha_n(n) * beta) / alpha_n(n)

def A1(n):
    num = (G1 - G2) * a * f_n(n) * np.power(a / c, alpha_n(n))
    den = G1 * G1 * c * (1 + ((G2 - G1) / (2 * G1)) * (1 +
np.power(a / c, 2 * alpha_n(n))))
    return num / den

def Wn(r, n):
    first = (a / (alpha_n(n) * G1)) * f_n(n) * np.power(a / r,
alpha_n(n))
    second = A1(n) * c * (1 / (2 * alpha_n(n))) * (
        np.exp(-alpha_n(n) * np.abs(np.log(r / c))) +
np.power(a / r, alpha_n(n)) * np.power(a / c, alpha_n(n)))
    return first + second

def dWn(r, n):
    first = (-a / (G1 * r)) * f_n(n) * np.power(a / r, alpha_n(n))
    second = ((-A1(n) * c) / (2 * r)) * (np.exp(-alpha_n(n) *
np.abs(np.log(r / c))) * np.sign(np.log(r / c)) +
        np.power(a / c,
alpha_n(n)) * np.power(a / r, alpha_n(n)))
    return first + second

```

```

def W(r, theta):
    maxN = 1e2
    eps = 1
    target_eps = 1e-4
    series = np.NAN

    while maxN < 1e8 and eps > target_eps:
        series = np.arange(1, int(maxN))
        series = Wn(r, series) * np.cos(alpha_n(series) * (theta +
beta))
        series /= beta

        change = np.abs(np.diff(series[-10:]))
        eps = np.max(change)
        maxN *= 2

    return series.sum()

def TauRZ(r, theta):
    maxN = 1e2
    eps = 1
    target_eps = 1e-4
    series = np.NAN
    G = G1 if r < c else G2

    while maxN < 1e8 and eps > target_eps:
        series = np.arange(1, int(maxN))
        series = dWn(r, series) * np.cos(alpha_n(series) * (theta
+ beta))
        series = (G / beta) * series

        change = np.abs(np.diff(series[-10:]))
        eps = np.max(change)
        maxN *= 2

    return series.sum()

def TauTZ(r, theta):
    maxN = 1e2
    eps = 1
    target_eps = 1e-4
    series = np.NAN
    G = G1 if r < c else G2

    while maxN < 1e8 and eps > target_eps:
        series = np.arange(1, int(maxN))
        series = -alpha_n(series) * Wn(r, series) *
np.sin(alpha_n(series) * (theta + beta))
        series = (G / (beta * r)) * series

```

```

        change = np.abs(np.diff(series[-10:]))
        eps = np.max(change)
        maxN *= 2

    return series.sum()

labels = {W: 'W', TauTZ: r'$T_{\theta}$', TauRZ: r'$T_{rz}$'}

def plot_by_R(func, theta_const, r_start, r_end, n_points=1000,
title="auto", xlabel="auto", ylabel="auto", cline=True):
    Rs = np.linspace(r_start, r_end, n_points)
    Ys = [func(r, theta_const) for r in Rs]

    fig, ax = plt.subplots()
    ax.grid(True)

    if xlabel == "auto":
        ax.set_xlabel('r')
    else:
        ax.set_xlabel(xlabel)

    if ylabel == "auto":
        ax.set_ylabel(labels[func])
    else:
        ax.set_ylabel(ylabel)

    if title == "auto":
        ax.set_title(labels[func] + '(r,  $\theta$ ) |  $\theta =$  ' +
str(round(theta_const, 5)))
    else:
        ax.set_title(title)

    if cline and r_end >= c:
        ax.axvline(c, color='orange', linestyle='dashed')

    ax.plot(Rs, Ys, lw=2)
    plt.show()

def plot_by_Theta(func, r_const, th_start, th_end, n_points=1000,
title="auto", xlabel="auto", ylabel="auto"):
    thetas = np.linspace(th_start, th_end, n_points)
    Ys = [func(r_const, th) for th in thetas]

    fig, ax = plt.subplots()
    ax.grid(True)

    if xlabel == "auto":
        ax.set_xlabel('θ')

```

```

else:
    ax.set_xlabel(xlab)

if ylab == "auto":
    ax.set_ylabel(labels[func])
else:
    ax.set_ylabel(ylab)

if title == "auto":
    ax.set_title(labels[func] + '(r,θ) | r = ' +
str(round(r_const, 5)))
else:
    ax.set_title(title)

ax.plot(thetas, Ys, lw=2)
plt.show()

def plot_heatmap(func, x_low, x_hi, y_low, y_hi, resol=100):
    x_points = np.linspace(x_low, x_hi, resol)
    y_points = np.flip(np.linspace(y_low, y_hi, resol))

    Ws = np.empty((x_points.size, y_points.size))

    for j in range(len(y_points)):
        if j % 10 == 0:
            print(j, "/", len(y_points), "done")
        for i in range(len(x_points)):
            r = np.sqrt(x_points[i]**2 + y_points[j]**2)
            theta = np.arctan2(y_points[j], x_points[i])

            if r < a or theta < -beta or theta > beta:
                Ws[i][j] = -1
            else:
                Ws[i][j] = func(r, theta)

    Ws = np.rot90(Ws, k=1)

    fig = plt.figure()
    s = fig.add_subplot(1, 1, 1, xlabel='x', ylabel='y')
    s.set_title(labels[func] + "(r,θ) heatmap")
    im = s.imshow(
        Ws,
        extent=(x_low, x_hi, y_low, y_hi),
        origin='lower')
    fig.colorbar(im)
    plt.show()
    fig.savefig('heatmap.png')

```

```
plot_by_R(TauTZ, -beta, a, 2 * c)

plot_by_R(W, -beta, a, 2 * c)
plot_by_Theta(W, a, -beta, beta)

plot_by_R(TauRZ, 0, a, 2 * c)
plot_by_Theta(TauTZ, a, -beta, beta)

plot_heatmap(W, 0, 2 * c, -c, c, 500)
plot_heatmap(TauRZ, 0, 2 * c, -c, c, 500)
```